

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung
2. Hauptteil
 - 2.1. Diskretisierung von Signalen
 - 2.1.1. Nyquist-Shannon Abtasttheorem
 - 2.2. Komplexe Zahlen
 - 2.2.1. Was sind komplexe Zahlen?
 - 2.3. Was ist die Fouriertransformation?
 - 2.3.1. Wie funktioniert die Diskrete-Fouriertransformation?
 - 2.3.2. Wie funktioniert die Rücktransformation?
 - 2.4. Was sind Digitale-, Pixel- bzw. Rasterbilder?
 - 2.4.1. Was sind Farbwerte?
 - 2.4.2. Repräsentation von Pixelbildern
 - 2.5. DFT von Bildern
 - 2.5.1. Was sind Basisfunktionen von Bildern?
 - 2.6. Eigenschaften und Darstellung des Fourier Spektrums
 - 2.6.1. Eigenschaften des Fourier-Spektrums
 - 2.6.1.1. Symmetrie des Fourier Spektrums
 - 2.6.2. Darstellung des Fourierspektrums
 - 2.6.3. Vorteile des zentralisierten Spektrums
 - 2.7. Filter
 - 2.7.1. Lowpass – Filter
 - 2.7.2. Highpass – Filter
 - 2.7.3. Gauß Filter
 - 2.8. Anwendung der DFT
 - 2.8.1. Szenario 1
 - 2.8.2. Szenario 2
 - 2.8.3. Szenario 3
3. Fazit
4. Anhang
 - 4.1. Abbildungen
 - 4.2. Weitere Quellen
 - 4.3. Bilder Quellen
 - 4.4. Weitere Anhänge

1. Einleitung

Im heutigen Zeitalter der Informationstechnologie, werden jeden Tag über 2.5 Exabytes an Daten erzeugt.¹ Deshalb ist es zwingend erforderlich, dass immer neue Methoden und Mittel entwickelt werden, um diese zu komprimieren, zu verarbeiten und sinnvoll zu nutzen. Eines dieser Mittel ist die Fouriertransformation. Sie wird in sehr vielen Bereichen genutzt, um Daten zu verarbeiten oder zu analysieren. Dies ist beispielsweise der Fall in der Musik, der Datenkompression, der Bild-, Video- und Audibearbeitung, der Forensik und vielen weiteren Bereichen.

Ziel dieser Facharbeit ist es, ein grundlegendes Verständnis für die Funktionsweise und Anwendung der Diskreten-Fouriertransformation zu erarbeiten. Auf dieser Grundlage soll eine Implementierung der Fouriertransformation und einiger Filter und Funktionen erfolgen, um anschließend echte Anwendungsszenarien bearbeiten zu können.

Der Inhalt der Facharbeit beschränkt sich dabei auf den Bereich der Bildverarbeitung, um eine praktische Anwendung der Mathematik in der Forensik, Bildrekonstruktion, Bildbearbeitung und Kryptographie darzustellen.

2. Hauptteil

2.1 Diskretisierung von Signalen

Gegeben ist ein stetiges Signal $f(x)$. Wenn dieses Signal mit einem Computer bearbeitet werden soll, muss dieses Signal zunächst diskretisiert werden. Diskretisieren bedeutet in diesem Zusammenhang, das Entnehmen von Funktionswerten in gleichbleibenden Abständen, man nennt diesen Abstand Abtastintervall und die zugehörige Abtastfrequenz Abtastrate. So können z.B. die Funktionswerte an den Stellen $x = 0,1,2,3,4 \dots N$ entnommen und gespeichert werden. Durch diese selektive Entnahme von Werten wird eine Diskrete Version des Signals $f(x)$ abgebildet.

¹ www.domo.com/learn/data-never-sleeps-5?aid=ogsm072517_1&sf100871281=1

2.1.1 Nyquist-Shannon Abtasttheorem

Das Nyquist-Shannon Sampling Theorem besagt, dass die Abtastrate mindestens doppelt so hoch sein muss wie die höchst vorkommende Frequenz im Signal $f(x)$.² Diese maximale Frequenz wird als „Nyquist-Frequenz“ bezeichnet. Wird das Abtasttheorem nicht eingehalten, kann das ursprüngliche Signal nicht eindeutig wiederhergestellt werden und es kommt zu Aliasing.³ In den folgenden Anwendungen wird von einer Abtastrate von 1 ausgegangen.

2.2 Komplexe Zahlen

Um die DFT (**D**iskrete-**F**ourier Transformation) zu verstehen, muss zunächst ein Verständnis für die komplexen Zahlen geschaffen werden.

2.2.1 Was sind komplexe Zahlen?

Bisher werden im Mathematikunterricht nur die Menge der reellen Zahlen verwendet. Diese befinden sich alle auf einem 1-dimensionalen Zahlenstrahl. Reelle Zahlen sind demnach 1-dimensional. Es existiert jedoch eine weitere Achse, welche als imaginäre Achse bezeichnet wird. Die imaginäre Achse steht rechtswendig senkrecht auf der reellen Achse. Eine komplexe Zahl wird somit als Vektor \vec{z} in einem komplexen Koordinatensystem dargestellt. Man schreibt auch $z = a + bi$.

i ist die imaginäre Einheit (in elektrotechnischen Anwendungen mit j bezeichnet, da dort der Buchstabe i für den Strom verwendet wird) und ist definiert als $i^2 = -1$.⁴ Multipliziert man eine Zahl mit i , dann rotiert diese um 90° auf der komplexen Ebene.⁵

Die Angabe einer komplexen Zahl z in Polarkoordinaten wird auch als Eulersche Exponentialschreibweise bezeichnet.

² de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem

³ Siehe Abb. 1

⁴ Neubauer, André: DFT – Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg 2012. S. 7

⁵ Siehe Abb. 2

Eulers Formel besagt, dass $R \cdot e^{ix} = R \cdot \cos(x) + i \cdot R \cdot \sin(x)$ ist.⁶ Rechnet man also $R \cdot e^{ix}$, dann ist x der Winkel den der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ gegen den Uhrzeigersinn mit der positiven reellen Achse schließt (auch Argument oder Phase der Zahl z genannt) und R ist der Abstand der Punkte $(0,0)$ und (a,b) (auch genannt $|z|$).⁷

Wenn $z = a + bi$, dann ist $z = |a + bi| \cdot e^{i \cdot \text{Arg}(a+bi)}$.

$f(t) = g(t) \cdot e^{it}$ stellt somit einen mit einer Winkelgeschwindigkeit von 1 Radian/Sekunde (mit t in Sekunden) gegen den Uhrzeigersinn rotierenden Vektor mit der sich ändernden Länge $g(t)$ dar.

2.3. Was ist die Fouriertransformation?

Die Fouriertransformation zerlegt ein Signal $f(x)$ in eine gewichtete Summe von komplexen sinusförmigen Funktionen. Diese sinusförmigen Funktionen werden Basisfunktionen genannt, welche durch $b(x) = e^{-j2\pi \frac{k \cdot x}{N}}$ definiert sind. N ist dabei die die Anzahl an abgetasteten Werten. Durch Anwendung der Eulerschen Formel erhält man die komplexen sinusförmigen Basisfunktionen.

Wird dieser rotierende Vektor in Form der Basisfunktion mit dem Signal $f(x)$ multipliziert, erhält man die Formel, mit der man ein Signal $f(x)$ mit unterschiedlichen Winkelgeschwindigkeiten (k) um einen Kreis „wickeln“ kann. $w(z) = f(x) \cdot e^{-j2\pi \frac{k \cdot x}{N}}$.

2.3.1 Wie funktioniert die Diskrete-Fouriertransformation?

Wie in 2.3 beschrieben, ist das Ziel ein Signal $f(x)$ um einen Kreis zu „wickeln“. Wenn die Vektoren für jeden abgetasteten Wert x addiert werden, erhält man eine Art „Schwerpunkt“ der „aufgewickelten“ Funktion.⁸ Dieser „Schwerpunkt“ wird als Fourier Koeffizient der Frequenz k und der zugehörige Graph $F(k)$ als Fourier Spektrum bezeichnet. Dieser komplexe Fourier Koeffizient ($F(k)$) gibt an, mit welcher Amplitude

⁶ de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel

⁷ Siehe Abb. 3

⁸ <https://youtu.be/spUNpyF58BY> min 8 und 16

und Phase die Basisfunktion von k in dem Signal vertreten ist. Für die 1-dimensionale DFT ergibt sich:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}$$

n gibt hier die abgetasteten Stellen an.⁹ Konvention für die Hintransformation ist, dass im Uhrzeigersinn gedreht wird, daher steht im Exponenten ein Minus.

2.3.2 Wie funktioniert die Rücktransformation?

Der Fourier Koeffizient stellt die Phase und Amplitude einer Basisfunktion dar. Wenn also für jeden Funktionswert x das Produkt des Fourier Koeffizienten $F(k)$ mit der zugehörigen Basisfunktion summiert wird und durch die Anzahl N an Summanden geteilt wird, erhält man das abgetastete Signal $f(x)$ für $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots N^{10}$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N}x}$$

Wenn der Fourier Koeffizient in Exponentialform dargestellt wird, ergibt dies:

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)| \cdot e^{Arg(F(k))} \cdot e^{-j2\pi \frac{k}{N}x}$$

$$f(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |F(k)| \cdot e^{j2\pi \frac{k}{N}x + Arg(F(k))}$$

Graphisch betrachtet erkennt man eindeutig, dass der Fourier Koeffizient die Amplitude und Phase der Basisfunktion angibt.¹¹

⁹ Neubauer: Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg. S. 17

¹⁰ Neubauer: Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg. S. 20

¹¹ Abb. 4

2.4 Was sind Digitale-, Pixel- bzw. Rasterbilder?

Bei diesen Begriffen handelt es sich um verschiedene Bezeichnungen, die in der Fachliteratur synonym verwendet werden und deshalb auch in der vorliegenden Arbeit gleichbedeutend sind.

2.4.1 Was sind Farbwerte?

In der digitalen Welt werden Farben mit der additiven Farbmischung aus rot, grün, und blau (RGB) angegeben. Dies bedeutet, dass jeder Pixel eines digitalen Bildes einen roten Wert, einen grünen Wert und einen blauen Wert hat. Dieser Wert variiert für jede Farbe zwischen 0 und 255 (8-bit Farbtiefe).¹²

Man kann diese Farbkomponenten einzeln betrachten und erhält so Farbkanäle. Der rote Kanal zeigt ein Bild, in dem nur die Rottöne des gesamten Bildes enthalten sind etc. .

Bei der Anwendung der Fouriertransformation auf Farbbilder, müssten diese zunächst in ihre einzelnen Farbkanäle zerlegt werden und die DFT auf jeden Kanal einzeln angewendet werden. Einfacher ist es bei Graustufenbildern, da diese nur einen Kanal, den Luminanz (Helligkeit) Kanal haben. Aus diesem Grund soll die Anwendung der Fouriertransformation zunächst ausschließlich für Graustufenbilder erfolgen. Prinzipiell können die Konzepte jedoch auch auf mehrere Kanäle angewandt werden.

2.4.2 Repräsentation von Pixelbildern

Wie bereits dargestellt, werden jedem Pixel Farbwerte zugeordnet. Dies bedeutet, dass ein $M \times N$ großes Bild mithilfe einer $M \times N$ Matrix dargestellt werden kann. Dabei wird jeder Komponente der Matrix ein Farbwert¹³ zugeordnet. Eine alternative Schreibweise dieser Darstellung ist als diskretes Signal mit Funktionswerten an den Koordinaten $0,0$ $1,0$ $0,1$ $1,1 \dots M,N$.¹⁴ Im Folgenden soll ein solches diskretes Signal/ Bild als $f(m,n)$ bezeichnet werden. Dabei ist die Koordinate $0,0$ oben links.¹⁵

¹² www.digitalphoto.de/news/groessere-farbtiefe-100368481.html

¹³ Im Folgenden Luminanzwert

¹⁴ Abb. 5

¹⁵ Abb. 6

2.5 DFT von Bildern

In 2.3 wurde bereits die Funktionsweise der DFT für 1-dimensionale Signale erläutert. Wenn eine solche Transformation für ein 2-dimensionales Signal durchgeführt werden soll, muss die Definition der DFT entsprechend erweitert werden. Daraus ergibt sich folgender funktionaler Zusammenhang:¹⁶

$$F(k, l) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{l \cdot m}{M} + \frac{k \cdot n}{N}\right)}$$
$$f(m, n) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} F(k, l) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{l \cdot m}{M} + \frac{k \cdot n}{N}\right)}$$

k, l sind die Frequenzen in M und N Richtung¹⁷ in dem Bild f(m,n).¹⁸ M und N sind die Abmessungen in Pixeln (bzw. Periodenlängen) des Bildes f(m,n).

2.5.1 Was sind Basisfunktionen von Bildern?

Wie in 2.4.2 beschrieben, können Bilder als 3-dimensionale Graphen betrachtet werden. Sie können daher als Summe verschiedener sinusförmiger Funktionen dargestellt werden. Diese sinusförmigen Funktionen sind die Basisfunktionen des Bildes f(m,n).¹⁹

2.6 Eigenschaften und Darstellung des Fourier Spektrums

2.6.1 Eigenschaften des Fourier-Spektrums

2.6.1.1 Symmetrie des Fourier Spektrums Neubauer, André: DFT – Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg 2012. S. 6-7

Für Cosinusfunktionen gilt: $f(-x) = f(x)$, für Sinusfunktionen gilt: $f(x) = -f(-x)$.²⁰

¹⁶ Bovik, Al: The Essential Guide to Image Processing Second Edition, Elsevier Inc. 2009. S. 104

¹⁷ Abb. 6

¹⁸ Abb. 7

¹⁹ Abb. 7

²⁰ Neubauer: Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg. S. 5-6

Der reelle Teil des Fourier Spektrums ist gegeben durch die Summe der Cosinusanteile der rotierenden Vektoren ($f(m,n) \cdot b(x)$). Für den reellen Teil des Spektrums gilt daher folgendes: $\text{Re}(F(-k,-l)) = \text{Re}(F(k,l))$. Zusätzlich ist das Spektrum periodisch mit Periodenlänge M, N. Kombiniert man diese Eigenschaften erhält man $\text{Re}(F(k,l)) = \text{Re}(F(M-k,N-l))$, der reelle Teil des Fourier Spektrums ist also achsensymmetrisch zu $p(\frac{M}{2}, \frac{N}{2})$.²¹ $\frac{M}{2}, \frac{N}{2}$ ist somit die Nyquist-Frequenz des Bildes $f(m,n)$.

Der imaginäre Teil des Fourierspektrums ist gegeben durch die Summe der Sinusanteile der rotierenden Vektoren ($f(m,n) \cdot b(x)$) daher gilt für den imaginären Teil: $\text{Im}((F(k,l))) = -\text{Im}(F(-k,-l))$.²² Auch hier kann die Periodizität angewendet werden, so dass folgender Zusammenhang besteht: $\text{Im}(F(m,n)) = -\text{Im}(F(M-k,N-l))$.

Demnach ist das Fourier Spektrum durch die Berechnung der Werte für k von 0-N/2 bzw. l für 0-M/2 vollständig definiert, da man die restlichen Werte aus den bereits berechneten Werten aufgrund der Symmetrie erhalten kann.

2.6.2 Darstellung des Fourierspektrums

Um mit der Fouriertransformation arbeiten zu können, muss diese zunächst dargestellt werden.

Der Fourierkoeffizient gibt Informationen über die Amplitude und die Phase der Basisfunktion. Daher ist es sinnvoll diese getrennt darzustellen.

Somit ergeben sich zwei Spektren. Das Amplitudenspektrum $|F(k,l)|$ und das Phasenspektrum $\text{Arg}(F(k,l))$. Es ergeben sich auf diese Weise zwei 3-dimensionale Graphen, welche durch Intensitätsbilder dargestellt werden (große Funktionswerte (Amplituden) führen zu hellen Luminanzwerten im Intensitätsbild).

Da die Amplituden der Basisfunktionen mit einer niedrigen Frequenz meist exponentiell größer sind als die Amplituden der hoch frequenten Basisfunktionen, wird eine logarithmische Skalierung auf die Achse der Funktionswerte bzw. der Luminanzwerte 0-255 im Amplituden Spektrum angewandt.²³

²¹ Neubauer: Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg. S. 18

²² Neubauer: Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg. S. 18

²³ Abb. 8

Da die Phasenspektren meist keine visuellen Informationen beinhalten, wird ausschließlich das Amplitudenspektrum betrachtet.

Aufgrund der Symmetrie aus 2.6.1 ist bekannt, dass sich die Frequenzen k,l identisch zu den Frequenzen $M-k, N-l$ verhalten, daher befinden sich die hohen Frequenzen in der Mitte und die niedrigen Frequenzen außen. Da es meistens nützlicher ist die niedrigen Frequenzen in der Mitte und die hohen Frequenzen außen zu haben, wird eine Zentralisierung des Spektrums vorgenommen.²⁴

2.6.3 Vorteile des zentralisierten Spektrums

Aufgrund der Zentralisierung, können nun direkt Informationen über die korrespondierende Basisfunktion erhalten werden, indem der Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ im Amplituden Spektrum betrachtet wird. Die Länge des Vektors beschreibt die Höhe der Frequenz der Basisfunktion²⁵ und der Winkel, den der Vektor mit der horizontalen Achse schließt, ergibt die Oszillationsrichtung der Basisfunktion des Fourierkoeffizienten $F(k,l)$.²⁶

2.7 Filter

Im Folgenden sollen verschiedene Filter auf das Fourierspektrum angewandt werden, um verschiedene funktionale Effekte in dem Bild zu erhalten. Entscheidend hierfür ist, dass hohe Frequenzen für abrupte Farbwechsel sorgen, wohingegen die niedrigen Frequenzen für die allgemeine Farbgebung sorgen.

Dies bedeutet, hohe Frequenzen sind verantwortlich für die Details, während niedrige Frequenzen für die groben Formen zuständig sind.²⁷

Aufgrund des Entferns von Frequenzen werden alle Farbwerte des Bildes verschoben, dies bedeutet, dass bei der Rücktransformation nicht die Farbskalierung 0-255 angewandt werden kann, sondern eine Farbskalierung von $\min(f(m,n))$ - $\max(f(m,n))$.

²⁴ Abb. 9

²⁵ Abb. 7

²⁶ Abb. 10

²⁷ Abb. 11

2.7.1 Lowpass - Filter

Wird ein Lowpass - Filter auf ein Fourierspektrum angewandt, so werden die Amplituden aller Frequenzen, die größer sind als die angegebene Filterfrequenz, auf 0 gesetzt. Dies hat zur Folge, dass alle hochfrequenten Basisfunktionen des Bildes herausgefiltert werden.²⁸

Die Details gehen verloren und das Bild wird unscharf.²⁹ Da der Filter binär ist, werden Frequenzen vollständig herausgefiltert oder bleiben vollständig erhalten. Dadurch kommt es zum sogenannten Ringing Effekt.³⁰

2.7.2 Highpass - Filter

Der Highpass - Filter ist das genaue Gegenteil des Lowpass Filters. Alle Frequenzen, die kleiner als die Filterfrequenz sind, werden entfernt. Wohingegen alle Frequenzen oberhalb der Filterfrequenz vollständig erhalten bleiben. Dies hat zur Folge, dass nur Kanten und Konturen erhalten bleiben.

2.7.3 Gauß Filter

Die Gauß Filter funktionieren ähnlich wie der Lowpass- bzw. der Highpass- Filter, mit einem großen Unterschied: Es gibt nicht eine bestimmte Filterfrequenz, sondern die Amplituden der Basisfunktionen werden stetig verringert, dabei gilt: Je höher die Frequenz, desto geringer die Amplitude (Gaußscher Lowpass - Filter).

Der Verlauf des Filters ist dabei im zentralisierten Spektrum über die Gaußverteilung³¹ mit Maximum bei $M/2$, $N/2$.

$$g(k, l) = e^{\frac{-((k)^2 + (l)^2)}{(2 \cdot \sigma)^2}}$$

²⁸ Abb.12

²⁹ Abb.13

³⁰ Abb.13

³¹ de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46812-two-dimensional-gaussian-high-pass-and-low-pass-image-filter

$g(k,l)$ ist der Gaußkoeffizient der Frequenzen k,l . M,N sind die Dimensionen des zentralisierten Fourier Spektrums. σ gibt an wie „schnell“ die Amplituden abfallen.

Die Gaußkoeffizienten nehmen Funktionswerte zwischen 0-1 an. Dies bedeutet, wenn der Fourierkoeffizient mit dem Gaußkoeffizient multipliziert wird, erhält man die neue Amplitude der Basisfunktion mit Frequenz k,l .

Bei der Highpass Version des Gaußfilters wird $1-g(k,l)$ gerechnet um den Gaußkoeffizienten für den Gauß Highpass Filter zu erhalten..

Da die Amplituden stetig sinken und nicht abrupt wechseln³², gibt es keinen Ringing Effekt, daher bezeichnet man den Gaußchen Lowpass Filter auch als Gaußschen Weichzeichnungs Filter.

2.8 Anwendung der DFT

Um die Szenarien auszuprobieren folgen sie bitte der Anleitung³³

2.8.1 Szenario 1

Auf dem Foto³⁴ ist ein Fingerabdruck auf Stoff abgebildet. Aufgrund der Stofftextur ist es nicht möglich den Fingerabdruck vollständig zu erkennen. Das Ziel ist, den Fingerabdruck zu rekonstruieren bzw. besser erkennbar zu machen.

Es wird begonnen, indem das Bild mithilfe der DFT in das Fourierspektrum übertragen und das Spektrum zentralisiert wird. Schaut man sich anschließend das Spektrum an, so sind Ansammlungen großer Amplituden zu erkennen. Diese Ansammlungen sind für die Stofftextur verantwortlich, daher müssen sie zunächst entfernt werden. Zuletzt wird ein Highpass Filter angewendet, um die Konturen zu verstärken.³⁵

³² Abb. 14

³³ Anleitung.docx

³⁴ fingerprint.jpeg

³⁵ Abb. 15

In dem entstandenen Resultat ist es weiterhin nicht möglich, den Fingerabdruck vollständig zu erkennen, jedoch ist das Ergebnis deutlich besser erkennbar als das Original.

2.8.2 Szenario 2

Artefakte in einer Aufnahme³⁶ der „Lunar Orbiter“ Mission der NASA um 1966. Auch hier wird das Bild zunächst in das zentralisierte Fourierspektrum übertragen, anschließend wird das Spektrum manuell editiert, indem die Frequenzen, die für die Artefakte verantwortlich sind, entfernt werden. Das Resultat der Rücktransformation ist ein Bild, in dem die Artefakte beinahe vollständig entfernt wurden.³⁷

2.8.3 Szenario 3

Versteckte Nachrichten im Fourier Spektrum.

Gegeben ist ein Bild der Größe $M \times N$ (M, N sind im Folgenden gerade, da hierdurch einige Berechnungen vereinfacht werden) und dieses Bild in das Fourierspektrum übertragen wird. Anschließend kann auf das Bild eine „Maske“ angewandt werden. Die Maske kann die Form einer geschriebenen Nachricht, ein Symbol oder ein Wasserzeichen sein. Wichtig dabei ist, dass sich die Nachricht möglichst in den hohen Frequenzen befindet, da so wenige Bildinformationen verloren gehen und der Unterschied zwischen dem modifizierten Bild und dem Originalbild so gut wie nicht erkennbar sind.³⁸

Diese Technik findet viele Anwendungen. So kann man beispielsweise versteckte Nachrichten übertragen oder ein Wasserzeichen einlassen, ohne dass Außenstehende die Möglichkeit haben, diese zu sehen.

Da durch die Modifikation das Ausgangssignal nicht zwingend aus natürlichen Zahlen, sondern aus Dezimalzahlen besteht, müssen diese für die Farbwerte gerundet werden. Aufgrund des Rundens ist das Ergebnis nicht perfekt und die Nachricht wird bei der nächsten DFT undeutlicher dargestellt.

³⁶ moonlanding.png

³⁷ Abb. 16

³⁸ Abb. 17

3. Fazit

Die Diskrete-Fouriertransformation ist ein wirksames Mittel zur Entfernung von periodischen Mustern. Aufgrund dieser Eigenschaft hat die Fouriertransformation viele Anwendungen.

Szenario 1 zeigt, dass die DFT ein wirksames Mittel in der Forensik ist. Mit ihrer Hilfe ist es möglich Bildinformationen, welche durch „Störungen“ überlagert sind, wieder sichtbar zu machen. Ein Beispiel für eine solche Anwendung ist der Fingerabdruck auf einem Stoffmuster. Auch wenn die Forensik aufgrund von DNA-Analysen mittlerweile sehr fortgeschritten ist, haben Fingerabdrücke nach wie vor eine hohe Bedeutung bei der Verbrechensaufklärung.

Wie Szenario 2 zeigt, ist die DFT ebenfalls ein wirksames Mittel, um die Qualität alter beschädigter Aufnahmen zu verbessern. Dank der heutigen Computertechnik ist es möglich die DFT anzuwenden, um Bilder deutlich besser zu rekonstruieren, als es zum Zeitpunkt ihrer Aufnahme jemals möglich gewesen wäre.

Szenario 3 verdeutlicht letztlich, wie Nachrichten, Symbole oder Wasserzeichen in einem Bild versteckt werden können, ohne dass Außenstehende sie bemerken. Da es mit Hilfe digitaler Medien kaum möglich ist, geheime Nachrichten zu versenden, ohne dass Dritte diese mitlesen können, eröffnet die DFT eine Möglichkeit dieses zu gewährleisten. Dies könnte theoretisch eine Möglichkeit für Polizei und Geheimdienste sein. Allerdings könnte sie andererseits auch bei der Verbrechensplanung genutzt werden.

In der vorliegenden Arbeit konnte somit gezeigt werden, dass durch die Implementation der DFT zur Zerlegung von Bildern in komplexe Fourier Koeffizienten vielfältige praktische Anwendungen in der Bildverarbeitung eröffnet werden.

Wie in der Einleitung bereits beschrieben, findet die DFT jedoch nicht nur Anwendung in der Bildverarbeitung, welche hier exemplarisch erläutert wurde, sondern in vielen weiteren Bereichen, wie Video- und Tonverarbeitung.

Über die beschriebenen Anwendungen hinaus, ist es zudem möglich die DFT als Teil eines Komprimierungsalgorithmus zu verwenden, ein Beispiel hierfür ist das Dateiformat .jpg. Die Anwendungsmöglichkeiten der DFT gehen somit weit über den hier beschriebenen Sachverhalt hinaus.

4. Anhang

4.1 Abbildungen

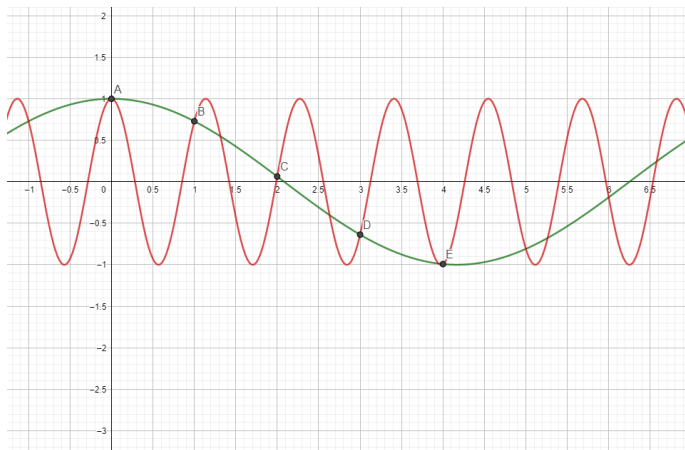


Abbildung 1. (eigene Zeichnung in GeoGebra)

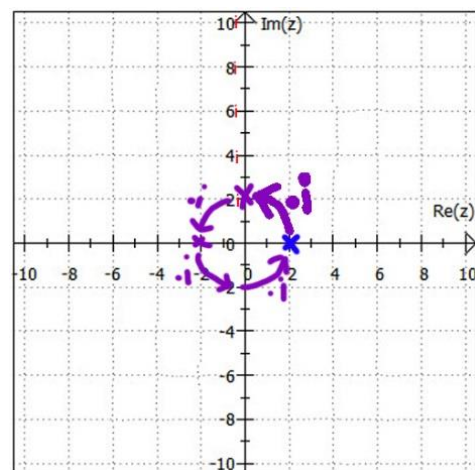


Abbildung 2. (eigene Zeichnung in GeoGebra und Photoshop)

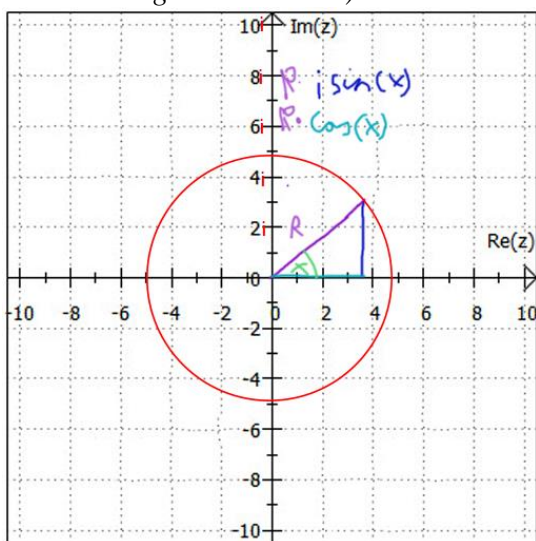


Abbildung 3. (eigene Zeichnung in GeoGebra und Photoshop)

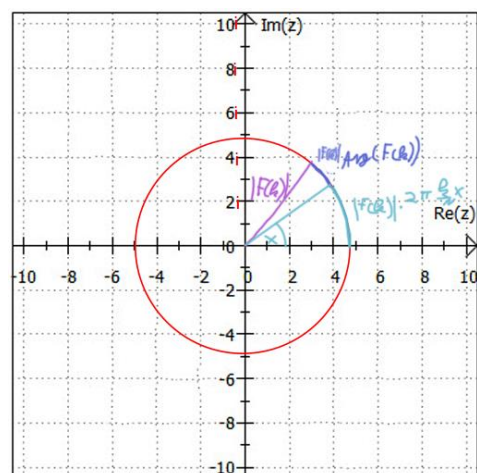


Abbildung 4. (eigene Zeichnung in GeoGebra und Photoshop)

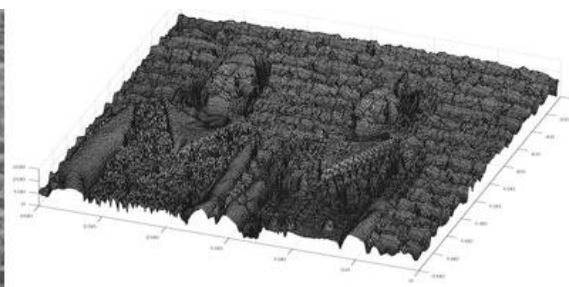


Abbildung 5. www.plus.maths.org/content/fourier-transforms-images. Letzter Aufruf 18.03.2020

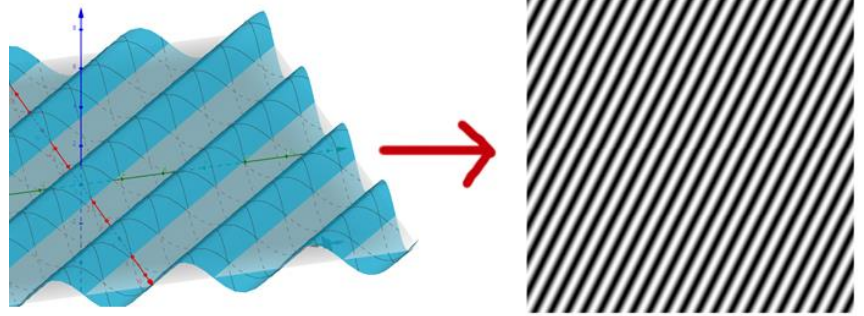
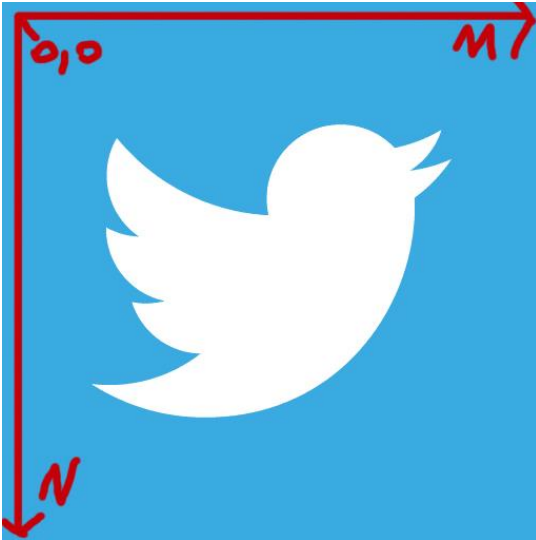


Abbildung 7. Eigene Zeichnung in GeoGebra und Photoshop;
lect2.pdf www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect2.pdf Letzter
Aufruf: 18.03.2020

Abbildung 6. www.copleyraff.com/contact-us/twitter-512x512/. Letzter Aufruf: 18.03.2020

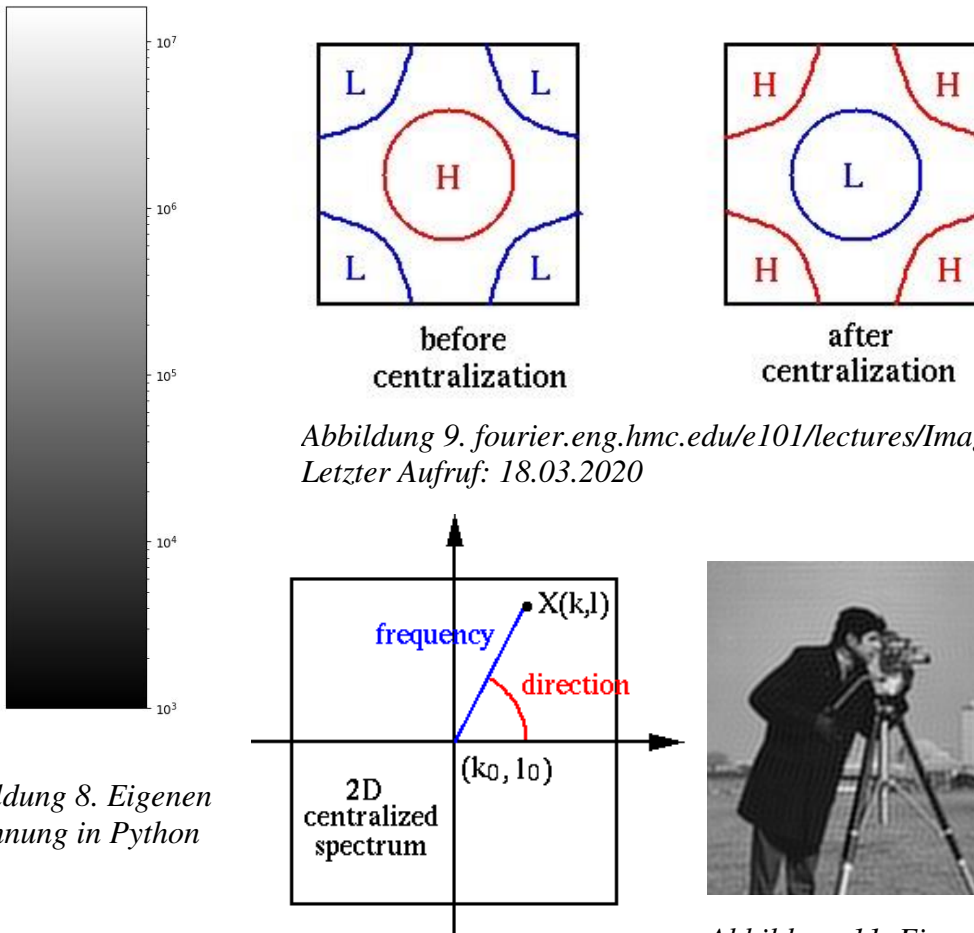


Abbildung 9. fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/Image_Processing/node7.html
Letzter Aufruf: 18.03.2020

Abbildung 8. Eigenen
Zeichnung in Python

Abbildung 10.
fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/Image_Processing/node7.html
Letzter Aufruf: 18.03.2020

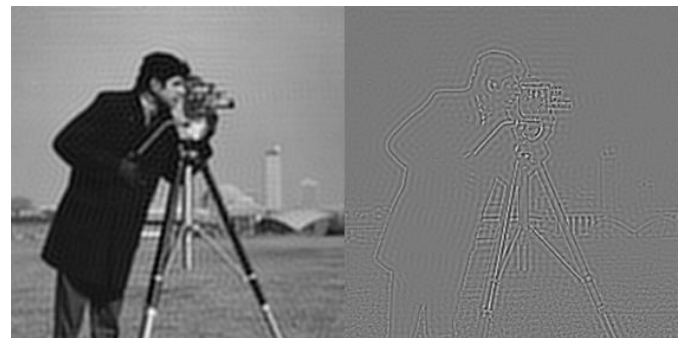


Abbildung 11. Eigene Zeichnung in Python.
Original Bild: www.researchgate.net/figure/Input-test-images-a-Cameraman-grayscale-b-grayscale-Lena-and-c-color-Lena-All_fig1_265988128
Letzter Aufruf: 18.03.2020

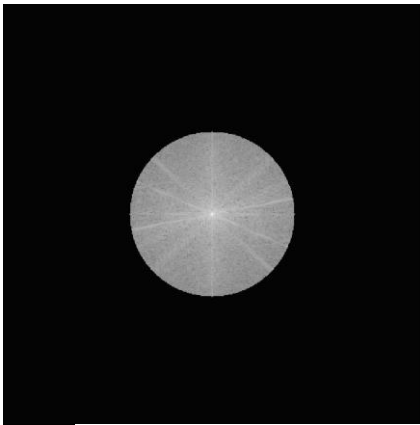


Abbildung 12. Eigene Zeichnung in Python



Lowpass
→



Abbildung 13. Eigene Zeichnung in Python und Photoshop. Original Bild: www.researchgate.net/figure/Input-test-images-a-Cameraman-grayscale-b-grayscale-Lena-and-c-color-Lena-All_fig1_265988128 Letzter Aufruf: 18.03.2020

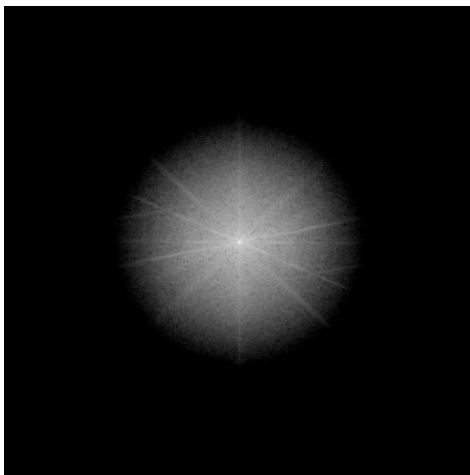
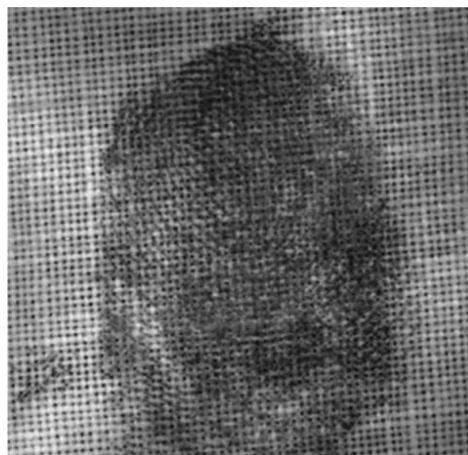
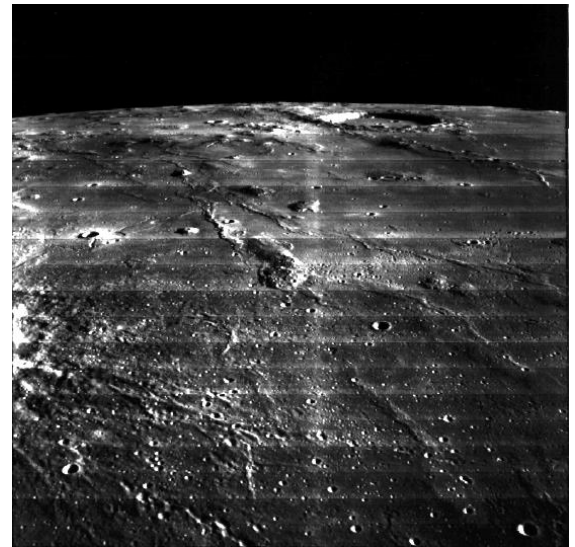
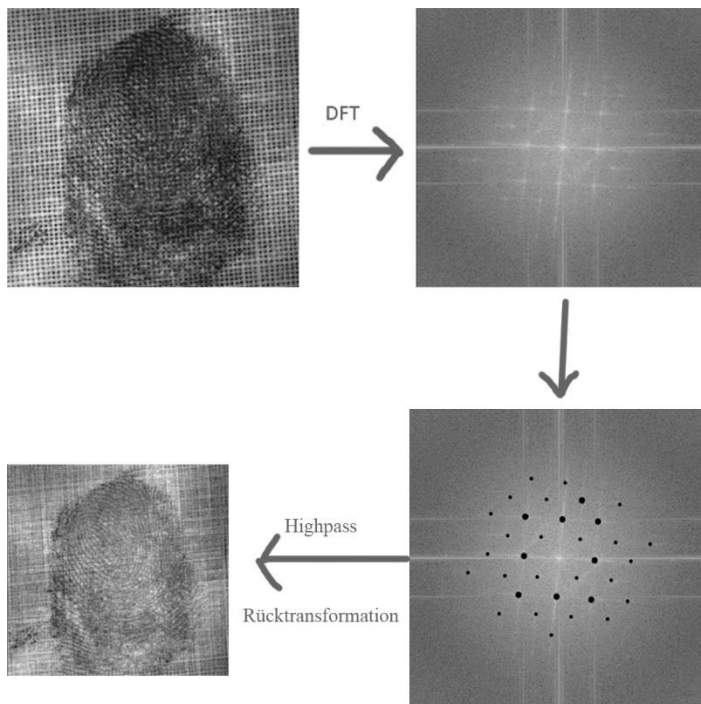


Abbildung 14. Eigene Zeichnung in Photoshop.



fingerprint.jpeg. lect2.pdf,
www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect2.pdf Letzter Aufruf: 18.03.2020



*moonlanding.png.
nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/lunar
orb.html. Letzter Aufruf: 18.03.2020*

Abbildung 15. Eigene Zeichnung in Photoshop und Python

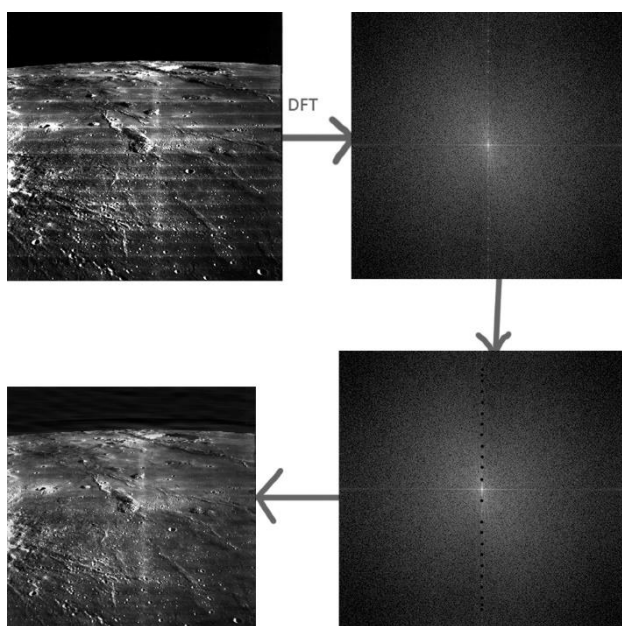


Abbildung 16. Eigene Zeichnung in Python und Photoshop

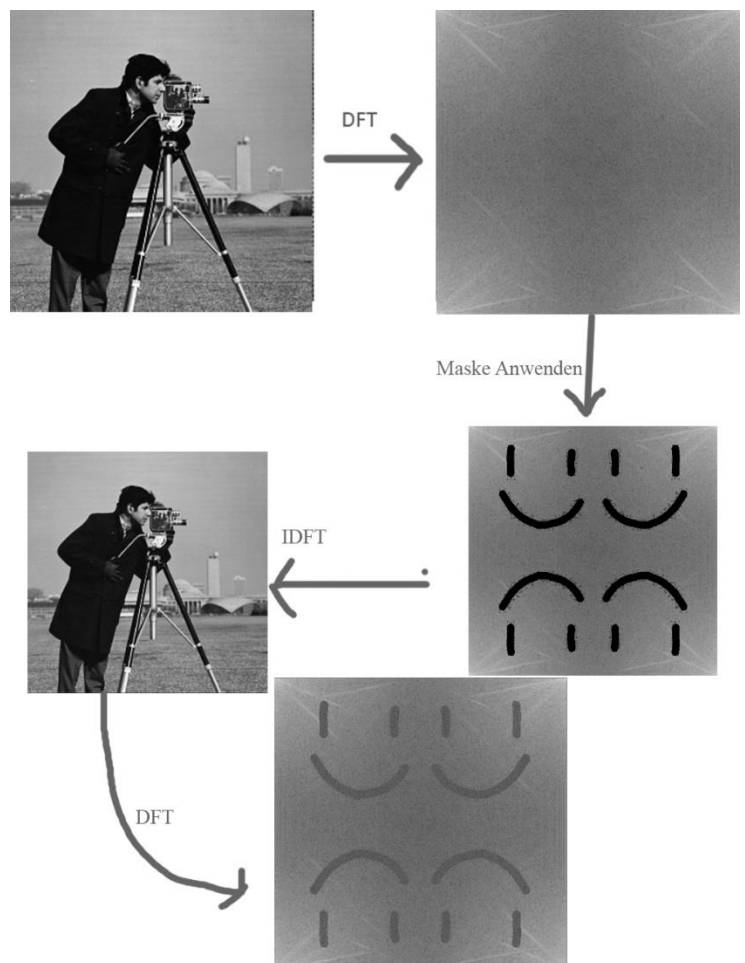


Abbildung 17. Eigene Zeichnung in Python und Photoshop

4.2 Weitere Quellen:

www.domo.com/learn/data-never-sleeps-5?aid=ogsm072517_1&sf100871281=1.

Letzter Aufruf: 18.03.2020

de.wikipedia.org/wiki/Nyquist-Shannon-Abtasttheorem. Letzter Aufruf: 18.03.2020

de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Formel. Letzter Aufruf: 18.03.2020

www.youtube.be/spUNpyF58BY. Letzter Aufruf: 18.03.2020

www.digitalphoto.de/news/groessere-farbtiefe-100368481.html. Letzter Aufruf:
18.03.2020

de.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/46812-two-dimensional-gaussian-high-pass-and-low-pass-image-filter. Letzter Aufruf: 18.03.2020

www.plus.maths.org/content/fourier-transforms-images. Letzter Aufruf 18.03.2020

www.copleyraff.com/contact-us/twitter-512x512/. Letzter Aufruf: 18.03.2020

Bovik, Al: The Essential Guide to Image Processing Second Edition, Elsevier Inc. 2009.
S. 104

Neubauer, André: DFT – Diskrete Fourier-Transformation, Springer Vieweg 2012. S. 6-7

4.3 Bilder Quellen

www.plus.maths.org/content/fourier-transforms-images. Letzter Aufruf 18.03.2020

www.copleyraff.com/contact-us/twitter-512x512/. Letzter Aufruf: 18.03.202

www.robots.ox.ac.uk/~az/lectures/ia/lect2.pdf Letzter Aufruf: 18.03.2020

fourier.eng.hmc.edu/e101/lectures/Image_Processing/node7.html Letzter Aufruf:

18.03.2020 www.researchgate.net/figure/Input-test-images-a-Cameraman-grayscale-b-grayscale-Lena-and-c-color-Lena-All_fig1_265988128 Letzter Aufruf: 18.03.2020

nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/lunar/lunarorb.html. Letzter Aufruf: 18.03.2020

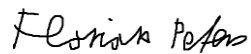
4.4 Weitere Anhänge

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbständig angefertigt, keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt und die Stellen der Facharbeit, die im Wortlaut oder im wesentlichen Inhalt aus anderen Werken entnommen wurden, mit genauer Quellenangabe kenntlich gemacht habe.

Verwendete Quellen aus dem Internet sind ebenfalls angegeben, im Anhang der digitalen Version sind alle Internet-Materialien vollständig beigelegt.

Florian-Lentas Peters

Hannover, den 18.03.2020



Hiermit erkläre ich, dass ich damit einverstanden bin, wenn die von mir verfasste Facharbeit der schulinternen Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird.

Florian-Lentas Peters

Hannover, den 18.03.2020

