



1. Einleitung

In diesem Versuch wurde die Comptonstreuung von Elektronen untersucht. Mit einer Koinzidenzmessung wurde die Comptonwellenlänge und die Elektronenruheenergie gemessen sowie die Compton- und die Klein-Nishina-Formel überprüft.

2. Der Comptoneffekt

Bei der Wechselwirkung von Photonen mit Materie spielen verschiedene Effekte, insbesondere der Photoeffekt, Comptoneffekt und die Paarbildung, eine Rolle. Beim Comptoneffekt vollzieht ein einfallendes Photon einen elastischen Stoß mit einem Elektron des Streumaterials. Dabei wird ein Teil des Impulses und der Energie des Photons an das Elektron abgegeben, sodass das gestreute Photon eine niedrigere Energie hat. Die Größe der übertragenen Energie ist abhängig vom Streuwinkel.

Bei der Berechnung der Energie des gestreuten Photon E' kann das Elektron vor dem Stoß als ruhend angenommen werden. Ausgangspunkt sind Energie- und Impulserhaltung. Mit einer relativistischen Berechnung folgt:

$$E' = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{m_e c^2}(1 - \cos \theta)} \quad (1)$$

E : Energie des primären Photons

θ : Streuwinkel

$m_e c^2 = 511 \text{ keV}$: Ruheenergie des Elektrons

Für die Änderung der Wellenlänge ergibt sich:

$$\Delta \lambda = \lambda_C (1 - \cos \theta) \quad (2)$$

$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$: Comptonwellenlänge des Elektrons

m_e : Ruhemasse des Elektrons

h : Plancksches Wirkungsquantum

c : Lichtgeschwindigkeit im Vakuum

Eine theoretische Vorhersage des differentiellen Wirkungsquerschnitts $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)$ wurde 1929 von O. Klein und Y. Nishina mithilfe der relativistischen Quantenmechanik berechnet. Die gleichnamige Formel lautet (Variablenbezeichnung wie oben):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{r_0^2}{2} \cdot \frac{1 + \cos^2 \theta}{(1 + \alpha(1 - \cos \theta))^3} \left(1 + \frac{\alpha^2 (1 - \cos \theta)^2}{(1 + \cos^2 \theta)(1 + \alpha(1 - \cos \theta))} \right) \quad (3)$$

$$\text{mit } \alpha = \frac{E}{m_e c^2},$$

klassischer Elektronenradius $r_0 = 2,82 \text{ fm}$

3. Versuchsaufbau

Abbildung 1 zeigt den schematischen Versuchsaufbau. Als Photonenquellen wurden ein ^{137}Cs - und ein ^{22}Na -Präparat verwendet. Zur Messung der Energie der gestreuten Photonen wurde ein NaI-Szintillationsdetektor verwendet, der in der horizontalen Ebene um den Streuer gedreht wurde, sodass in verschiedenen Streuwinkeln gemessen werden konnte. Als Streuer diente ein Plastiksintillator, also ein aktiver Streuer, mit dem die Rückstoßelektronen gemessen wurden. Dies ermöglichte eine Koinzidenzmessung, d.h. es wurden nur Ereignisse verwendet, bei denen in beiden Detektoren „gleichzeitig“ (innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls) ein Signal auftritt.

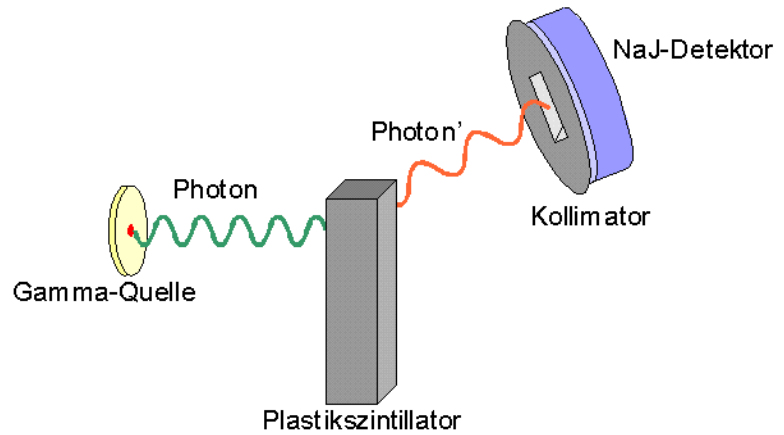


Abbildung 1: Schematischer Aufbau der Messung [1]

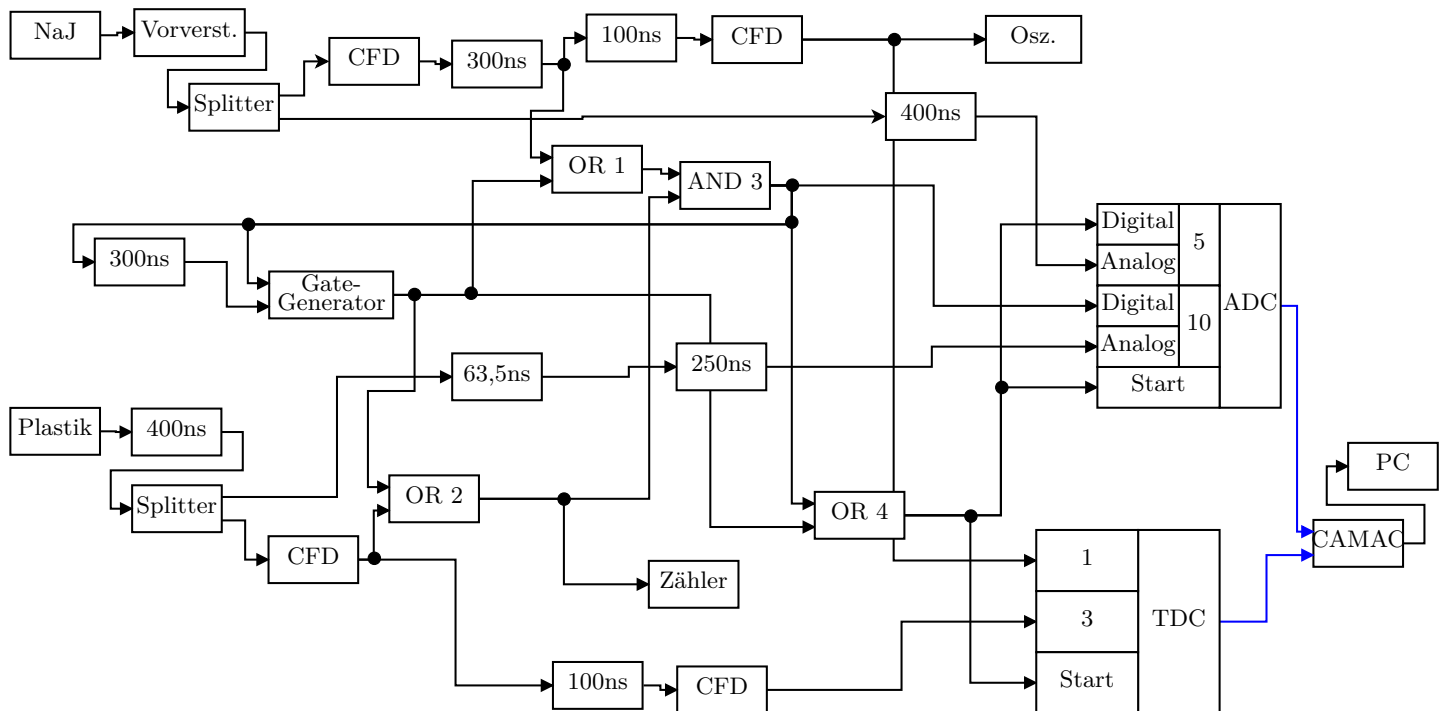


Abbildung 2: verwendete Schaltung

Es wurde eine *Koinzidenzschaltung* verwendet, um gleichzeitige Ereignisse in den beiden Detektoren zu erkennen und Steuersignale (Start, Gates) zu erzeugen. Die verwendete Schaltung ist in Abbildung 2 zu sehen.

4. Durchführung

Zunächst wurde eine *Eichmessung* durchgeführt. Dazu wurden nacheinander eine ^{137}Cs - und ^{22}Na -Probe vor den NaI-Detektor montiert. Dabei wurde nur mit dem NaI-Detektor gemessen und daher

die Koinzidenzschaltung ausgeschaltet, indem *AND3* auf *OR* gestellt wurde (s. Abbildung 2). Dadurch konnte man bereits nach kurzer Zeit (ca. fünf Minuten) genügend Ereignisse messen. Die Eichmessung mit ^{137}Cs wurde nach allen Messungen noch einmal durchgeführt, um mögliche Unterschiede festzustellen. Die relevanten Peaks der Spektren mit bekannter Energie wurden bereits während der Messung mit einer Gaußfunktion gefittet und so deren Position in Anzahl an Kanälen bestimmt.

Für die *winkelabhängige Messung* wurde die Koinzidenzschaltung wieder eingeschaltet. Für die erste Messung wurde das ^{137}Cs -Präparat zunächst zwischen die beiden Detektoren montiert, was einem Streuwinkel von $\theta = 180^\circ$ entsprach. Für die weiteren Messungen wurde das Präparat in der horizontalen Ebene um je 20° um den Plastikszintillator gedreht, was den Streuwinkeln $\theta = 160^\circ$ bis 0° entsprach. Jeder Winkel wurde so lange gemessen, bis der angeschlossene Zähler (s. Abbildung 2) ca. 46800 Ereignisse anzeigte, was etwa je 20 Minuten dauerte. Der Peak der gestreuten Photonen, der zu den Primärphotonen von 662 keV gehörte, wurde analog zur Eichmessung bereits während der Durchführung mit einer Gaußfunktion gefittet.

5. Messwerte

Die gemessenen Spektren und deren Gaußfits sind im Anhang dargestellt. Die davon relevanten Daten sind im Folgenden nochmal in Tabellen zusammengefasst.

Photonen- energie [keV]	Mittelw. μ [Kanäle]	Standardabw. σ [Kanäle]
<i>zu Beginn des Versuchs:</i>		
0	109,7	5,135
662	402,2	43,68
511	352,9	37,44
<i>am Ende des Versuchs:</i>		
0	107,3	5,671
662	404,2	42,41

Tabelle 1: Durch die Eichmessung können die bekannten Energien aus den Photonenquellen einer Kanalzahl der Messapparatur zugeordnet werden.

Streuwinkel θ [$^\circ$]	Counts	Mittelw. μ [Kanäle]	Standardabw. σ [Kanäle]	Peakhöhe [Ereignisse]
180	468227	199,3	17,02	53,21
160	468228	197,4	18,5	50,13
140	470149	205,1	17,17	48,74
120	487832	216,9	19,87	41,86
100	474941	232,1	21,55	33,96
80	469055	254,8	28,7	34,73
60	468963	283,9	35,38	39,83
40	468189	306,1	38,13	38,54

Tabelle 2: Winkelabhängige Messung

6. Auswertung

6.1. Eichung

Um die Energiezuordnung der Kanäle zu erhalten und somit die Messwerte umrechnen zu können, musste zunächst die durchgeführte Eichmessung ausgewertet werden. Dabei wurden die in Tabelle 1



aufgeführten Messwerte vom Beginn des Versuchs zum Fitten einer Eichgeraden verwendet:

$$E(K) = (-246,44279 + 2,2113 \cdot K) \text{ keV} \quad (4)$$

Fehler des Achsenabschnitts: $\Delta a = 42,80623 \text{ keV}$

Fehler der Steigung: $\Delta b = 0,13574 \text{ keV}$

Die Geradenfunktion inklusive der Messwerte vom Beginn des Versuchs findet sich auch in Abbildung 3.

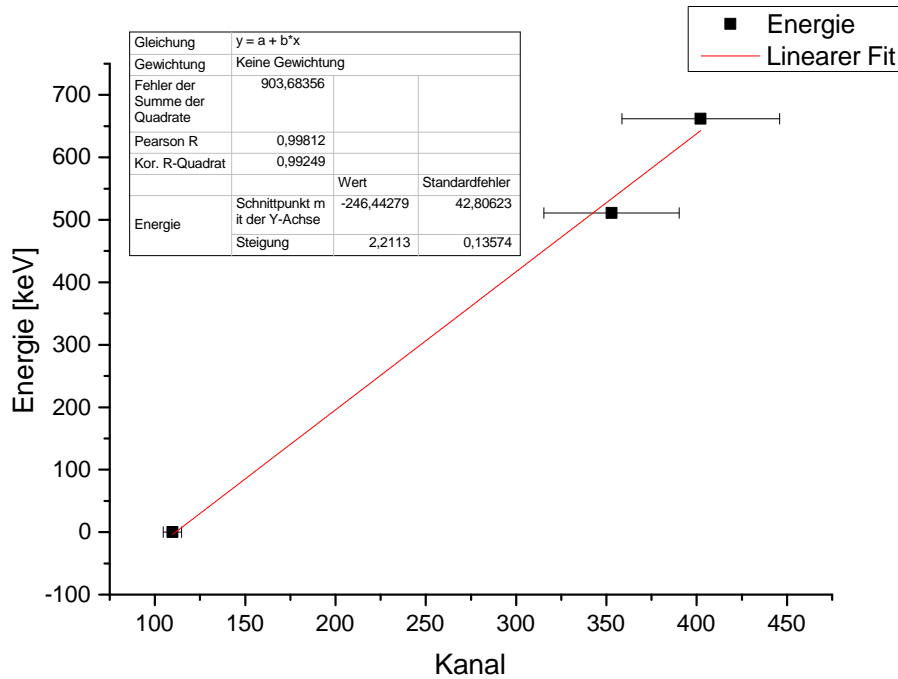


Abbildung 3: Messwerte zur Eichung zu Beginn des Versuchs mit durchgeführtem linearen Fit und den entsprechenden Parametern.

Zur Überprüfung, ob sich die Energiezuordnung während des Versuchs geändert hat, wurde eine zweite Messung am Ende des Versuchs durchgeführt und diese mit der anfangs durchgeführten verglichen. Wie in Tabelle 1 zu sehen, haben sich die Werte nicht signifikant verändert und es kann somit von einer konstanten Energiezuordnung der Kanäle ausgegangen werden.

6.2. Comptonwellenlänge

Im Falle eines Winkels von $\theta = 180^\circ$ gibt das einfallende Photon die maximale Energie ab, sodass seine Wellenlänge um das Doppelte der Comptonwellenlänge ansteigt. Für $\theta = 180^\circ$ folgt aus (2):

$$\lambda_c = \frac{\Delta\lambda}{2} = \frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) = \frac{1}{2} \left(\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} \right)$$

Der Eichung (4) gemäß wurde der Peak dieser Messung auf $E' \approx 194,27 \text{ keV}$ bestimmt, was dem Kanal 199,3 entspricht. Die Ausgangsenergie des Photons lag bei $E = 662 \text{ keV}$, sodass man erhält:

$$\lambda_c \approx \frac{hc}{2} \left(\frac{1}{194,27 \text{ keV}} - \frac{1}{662 \text{ keV}} \right) \approx 2,25 \text{ pm}$$

Unter Berücksichtigung der Standardabweichung von 17,02 Kanälen (Tabelle 2) kann der Fehler $\Delta E'$ abgeschätzt werden.

$$\Delta E' \approx E(K = 199,3) - E(K = 199,3 - 17,02) \approx 37,64 \text{ keV}$$



Daraus folgt dann unmittelbar der Fehler der Compton-Wellenlänge.

$$\Delta\lambda_c = \frac{\partial\lambda_c}{\partial E'} \Delta E' = \frac{1}{2} \frac{hc}{E'^2} \Delta E' = \frac{1}{2} \frac{hc}{(194,27 \text{ keV})^2} \cdot 37,64 \text{ keV} \approx 0,62 \text{ pm}$$

$$\Rightarrow \lambda_c = 2,25 \text{ pm} \pm 0,62 \text{ pm}$$

Der Literaturwert von $2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ liegt demnach im Rahmen der Fehlerangabe.

6.3. Comptonformel

Nun galt es die eigentliche Comptonformel, also die Winkelabhängigkeit der Streuung und somit der Energie zu überprüfen. Die Messwerte aus Tabelle 2 mussten mit Hilfe der Eichgeraden (4) in Energiewerte umgerechnet werden. Um auch die Fehler zu ermitteln, wurde der Fehler der Eichgeraden über Gaußsche Fehlerfortpflanzung mit $\Delta K = \sigma$ ermittelt:

$$\Delta E' = \Delta E(K) = \sqrt{\left(\frac{\partial E(K)}{\partial K} \Delta K\right)^2 + \left(\frac{\partial E(K)}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial E(K)}{\partial b} \Delta b\right)^2}$$

Streuwinkel θ [°]	μ [Kanäle]	σ [Kanäle]	Energie E' [keV]	$\Delta E'$ [keV]
180	199,3	17,02	194,2693	63,09303
160	197,4	18,5	190,06783	64,99154
140	205,1	17,17	207,09484	63,63195
120	216,9	19,87	233,18818	68,04263
100	232,1	21,55	266,79994	71,38496
80	254,8	28,7	316,99645	84,00191
60	283,9	35,38	381,34528	97,15082
40	306,1	38,13	430,43614	103,28655

Tabelle 3: Mittels Eichgerade aus den Kanälen berechnete Energiewerte.

Trägt man nun diese Werte graphisch gegen den Winkel auf, so ergibt sich innerhalb des Fehlerbereichs der erwartete Verlauf, den man über die Comptonformel (1)

$$E'(\theta) = \frac{1}{\frac{1-\cos(\theta)}{m_e c^2} + \frac{1}{E}},$$

mit $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ und der Photonenenergie des ^{137}Cs -Präparats von $E = 662 \text{ keV}$, erhält.

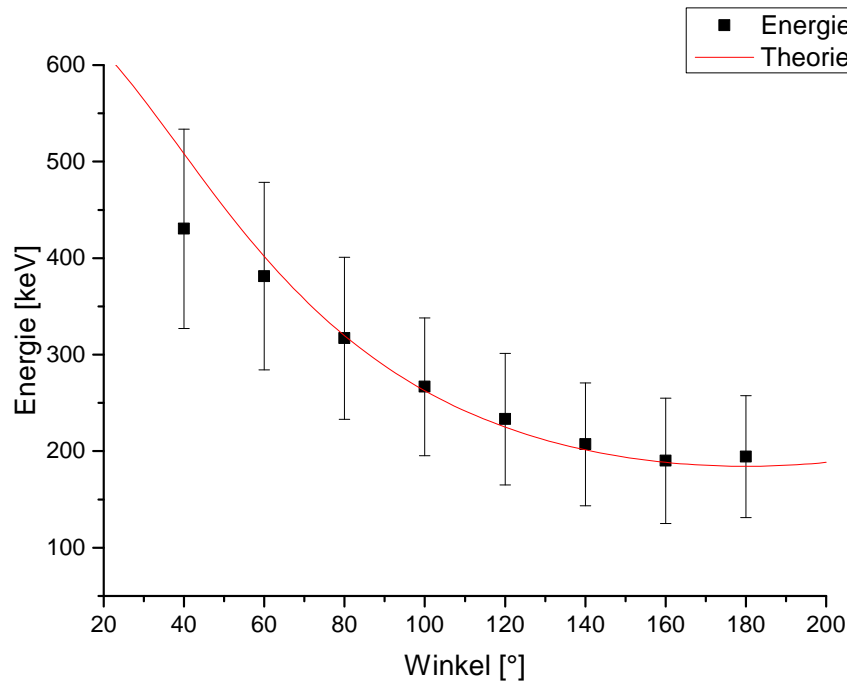


Abbildung 4: Winkelabhängige Energien E' der gestreuten Photonen und theoretischer Verlauf über die Comptonformel mit $E = 662$ keV.

6.4. Elektronenruhemasse

Trägt man $\Delta \frac{1}{E} = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E}$ als Funktion von $1 - \cos(\theta)$ auf, so lässt sich mit Hilfe einer linearen Fitgerade die Elektronenruhemasse bestimmen.

$1 - \cos(\theta)$	$\Delta \frac{1}{E} \left[\frac{1}{\text{keV}} \right]$
2	0,00364
1,93969	0,00375
1,76604	0,00332
1,5	0,00278
1,17365	0,00224
0,82635	0,00164
0,5	0,00111
0,23396	0,00081

Tabelle 4: Berechnete Werte, um $\Delta \frac{1}{E} = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E}$ als Funktion von $1 - \cos(\theta)$ aufzutragen.

Wie in Abbildung 5 dargestellt, ergibt ein linearer Fit die Geradengleichung:

$$\Delta \frac{1}{E}(1 - \cos(\theta)) = \left((3,02747 \pm 0,748272) \cdot 10^{-4} + (17 \pm 0,537637) \cdot 10^{-4} \cdot (1 - \cos(\theta)) \right) \frac{1}{\text{keV}}$$

Möchte man nun die Elektronenruhemasse bestimmen, so wählt man den y -Wert für $\theta = 90^\circ \Leftrightarrow 1 - \cos(\theta) = 1$ und berechnet den Kehrwert. Das ergibt hier $\Delta E = (499 \pm 13,4)$ keV. Der Fehler wurde mit der Gaußschen Fehlerfortpflanzung aus den Fehlern der Fitgeraden (5) berechnet. Somit liegt der Literaturwert von 511 keV im Fehlerbereich des Messwertes.

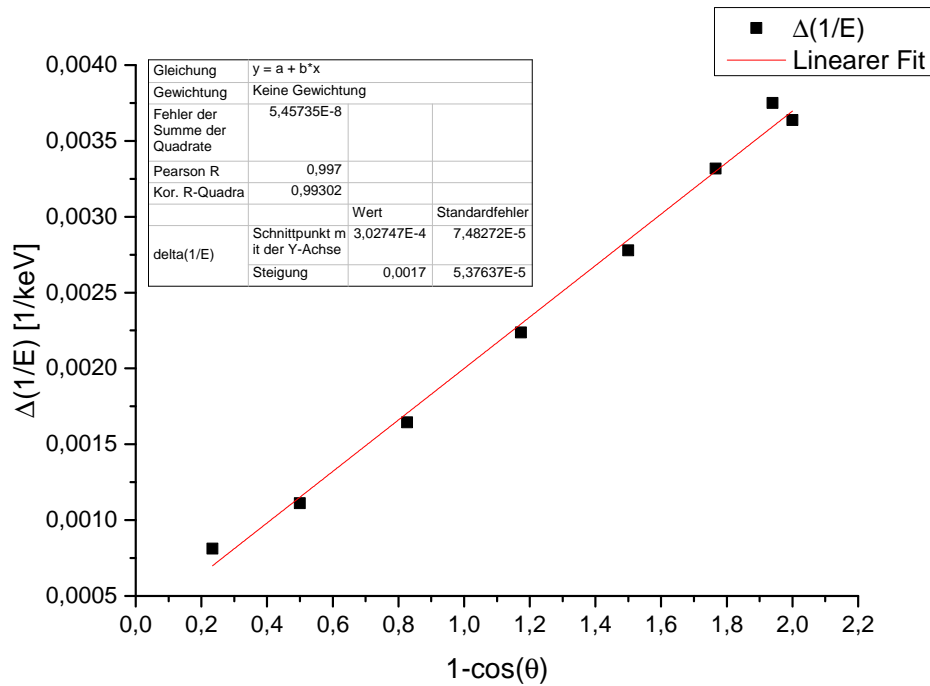


Abbildung 5: $\Delta \frac{1}{E} = \frac{1}{E'} - \frac{1}{E}$ als Funktion von $1 - \cos(\theta)$ und zugehörigem linearem Fit.

6.5. Klein-Nishina-Formel

Abschließend soll noch die Gültigkeit der Klein-Nishina-Formel (3), die die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts beschreibt, überprüft werden. Dazu wird ausgenutzt, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt proportional zum Produkt aus der Peakhöhe, der Peakbreite σ und dem Verhältnis aus Counts zur maximalen Countzahl ist. Es gilt also für die jeweiligen Messungen i :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_i} \propto \text{Peakhöhe}_i \cdot \sigma_i \cdot \frac{\text{Counts}_i}{\text{MAX}(\text{Counts})}$$

Streuwinkel θ [°]	$\propto \frac{d\sigma}{d\Omega}$ [a.u.]
180	869,23856
160	890,13633
140	806,53098
120	831,7582
100	712,49912
80	958,38535
60	1354,6791
40	1410,35823

Tabelle 5: Berechnete Proportionalwerte zu $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in willkürlicher Einheit in Abhängigkeit vom Winkel θ .

Auch wenn der Kurvenverlauf in Abbildung 6 nicht klar den Messwerten folgt, so lässt sich doch eine gewisse Proportionalität erkennen. Die Abweichung kann vom nicht ganz vermeidbaren Untergrundrauschen und/oder dem Fehler beim Fitten der Peaks mittels Gaußfunktion herrühren.

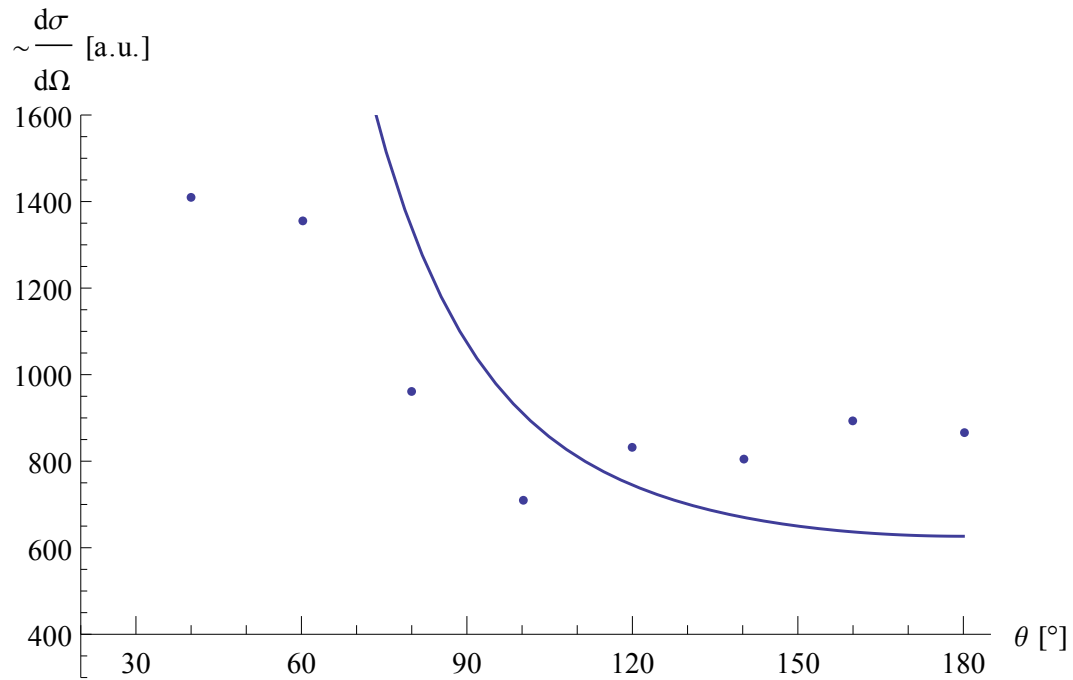


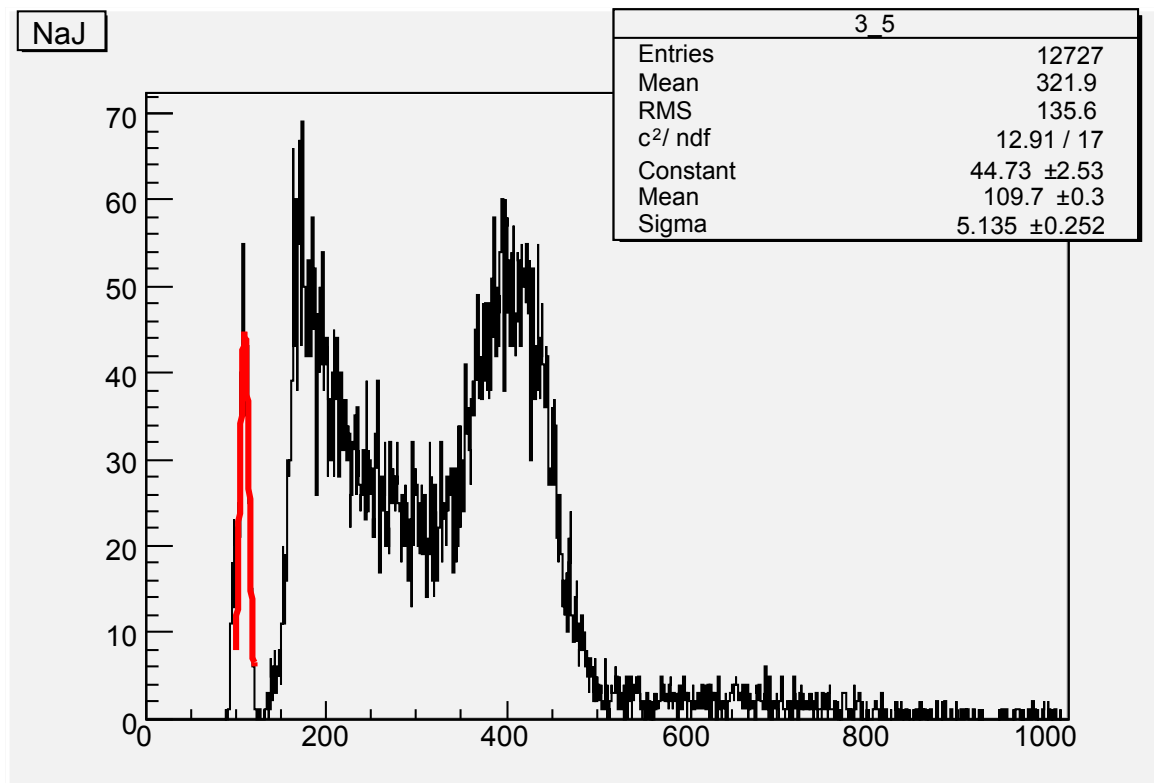
Abbildung 6: Proportionale Werte zu $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ in willkürlicher Einheit und theoretischer Verlauf der Klein-Nishina-Formel (3) mit $E = 662$ keV.

Literatur

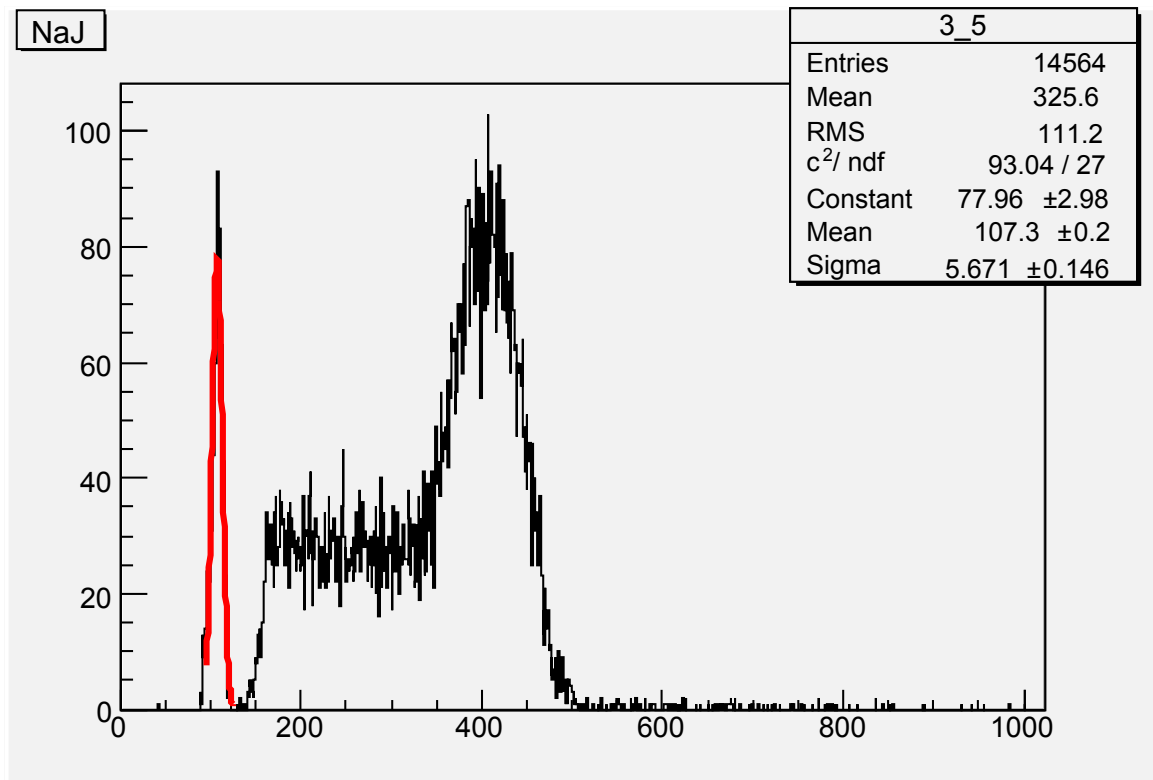
- [1] Sören Lange, *Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene Teil II, Compton-Streuung*, 2009

A. Eichmessungen

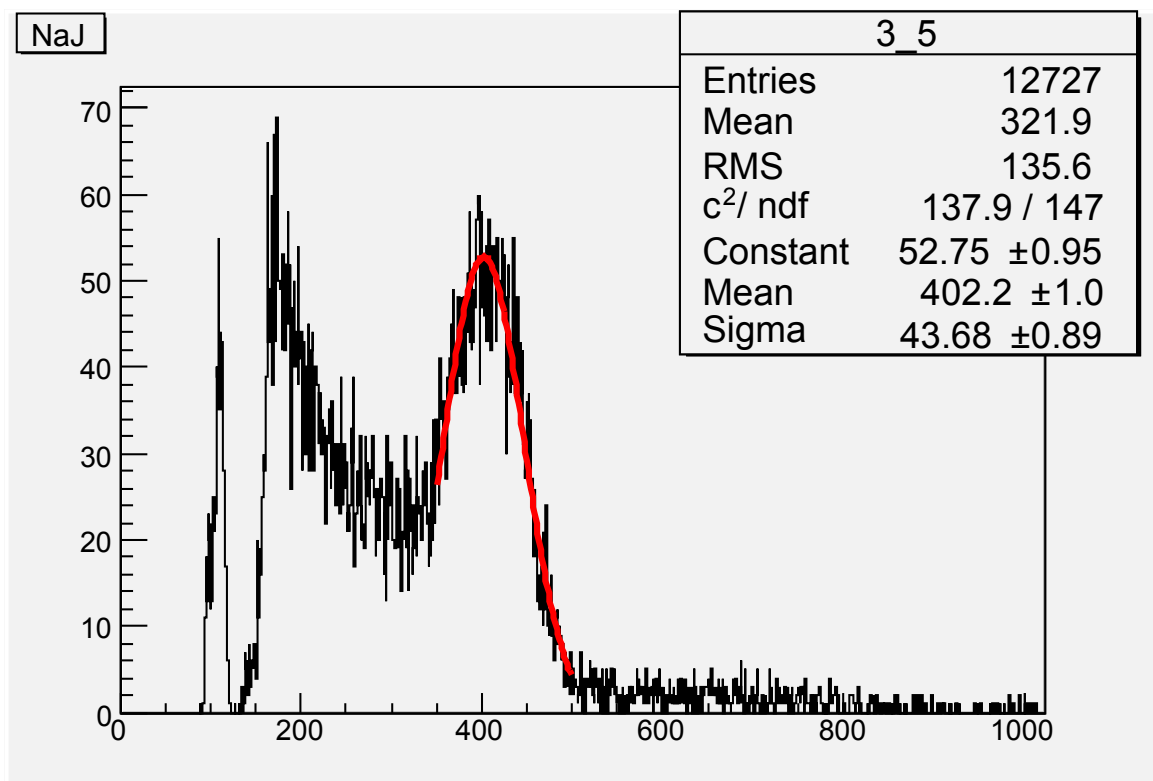
Im Folgenden sind die gemessenen Eichspektren mit dem Gaußfit über den Peak mit der Energie E dargestellt.



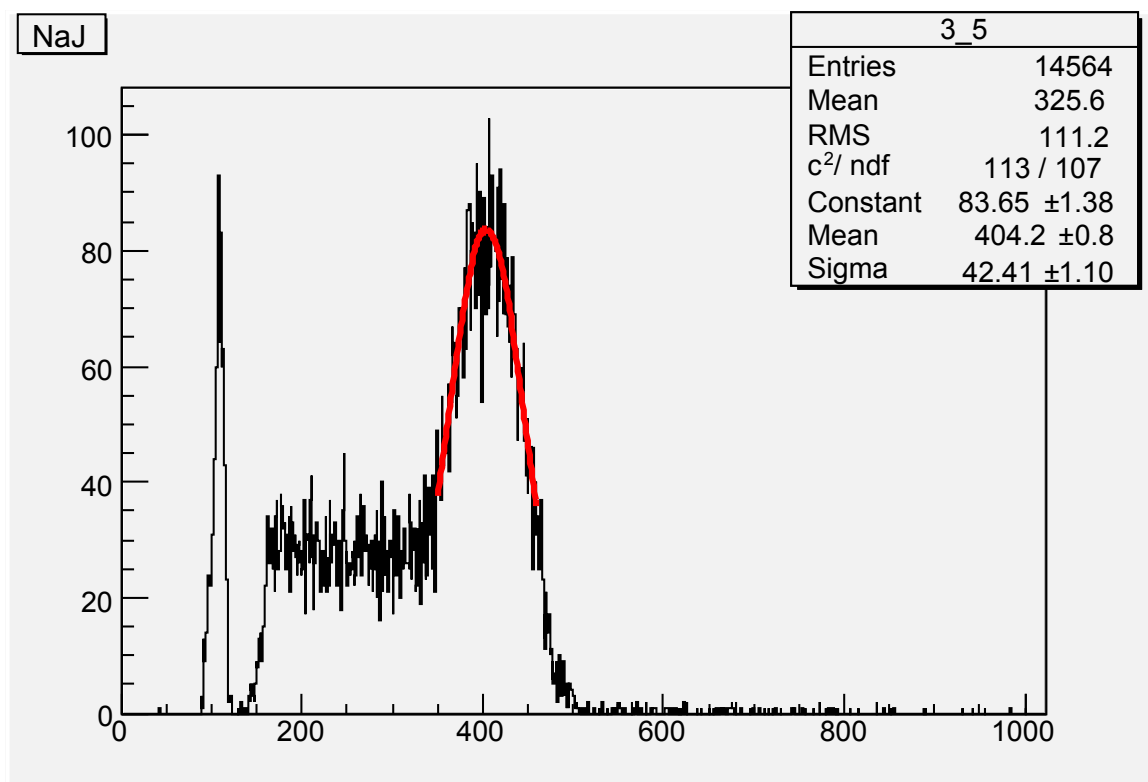
Eichmessung von ^{137}Cs zu *Beginn* des Versuches, $E \approx 0$



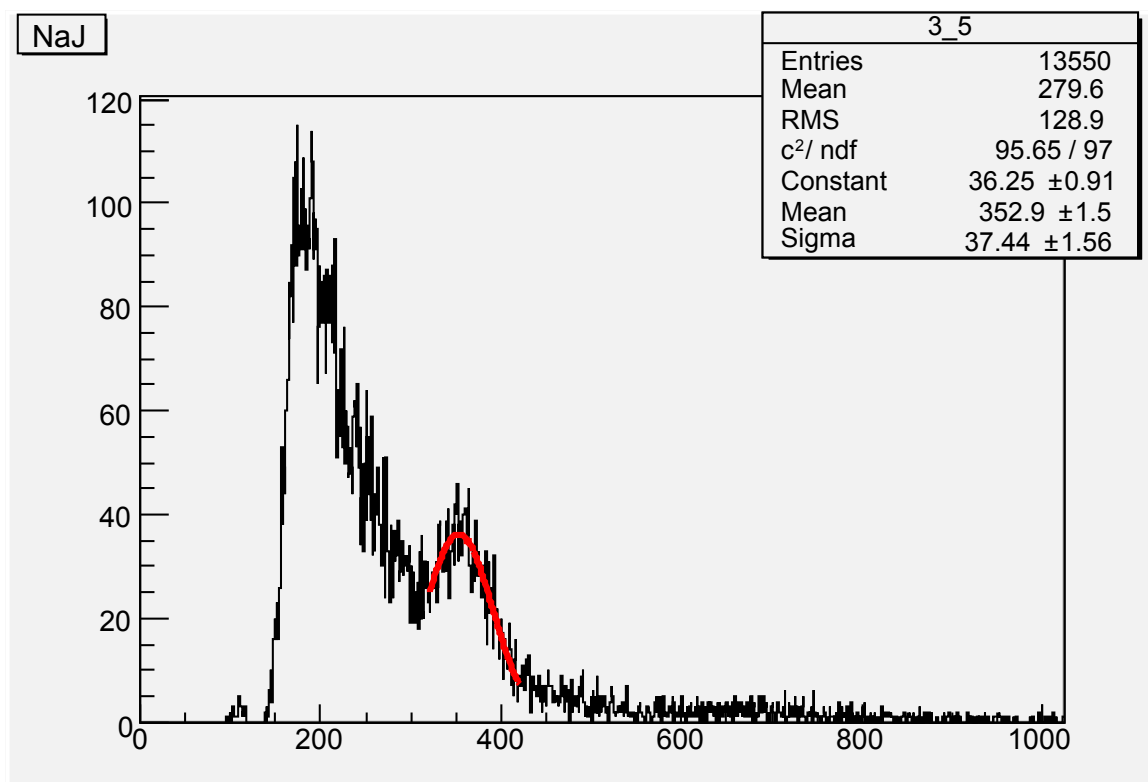
Eichmessung von ^{137}Cs am Ende des Versuchs, $E \approx 0$



Eichmessung von ^{137}Cs zu Beginn des Versuchs, $E = 662 \text{ keV}$



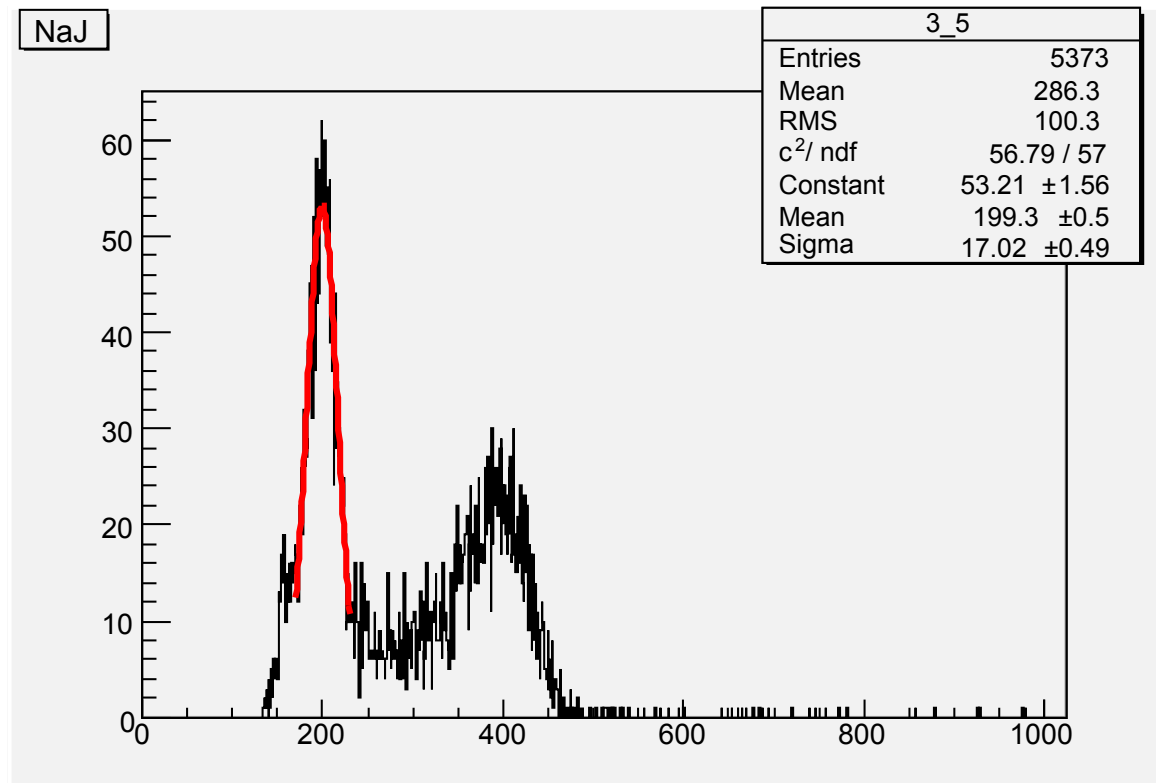
Eichmessung von ^{137}Cs am Ende des Versuchs, $E = 662 \text{ keV}$



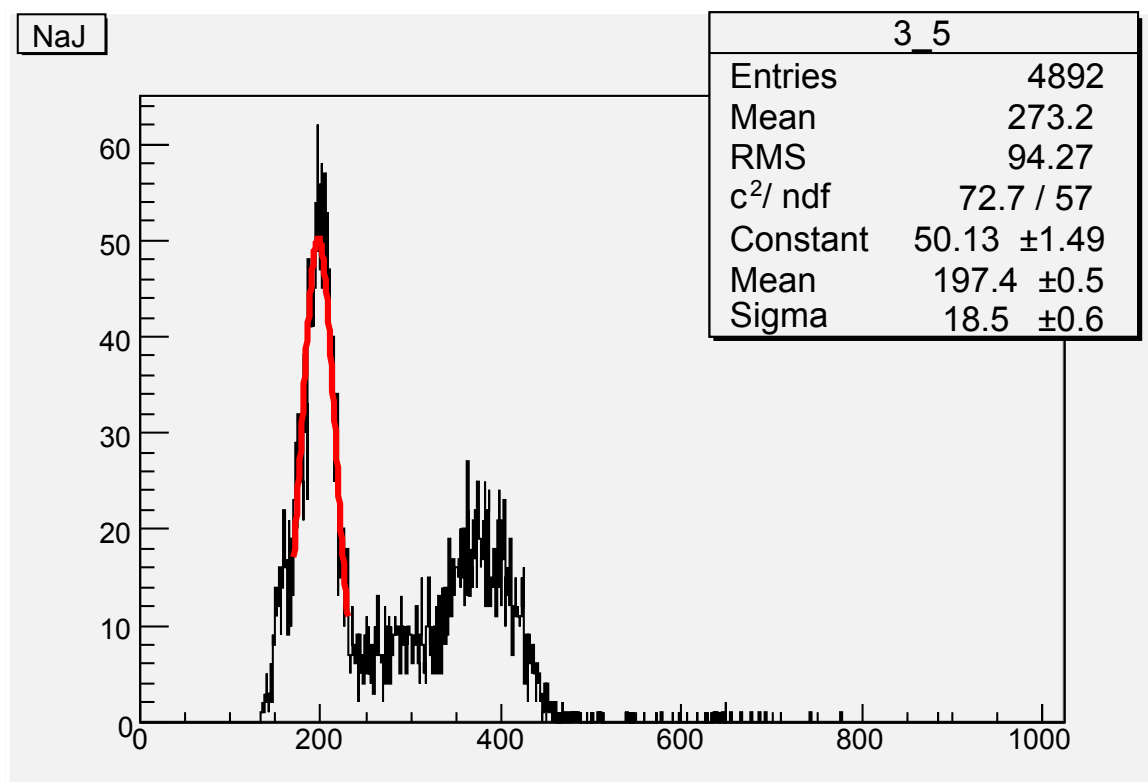
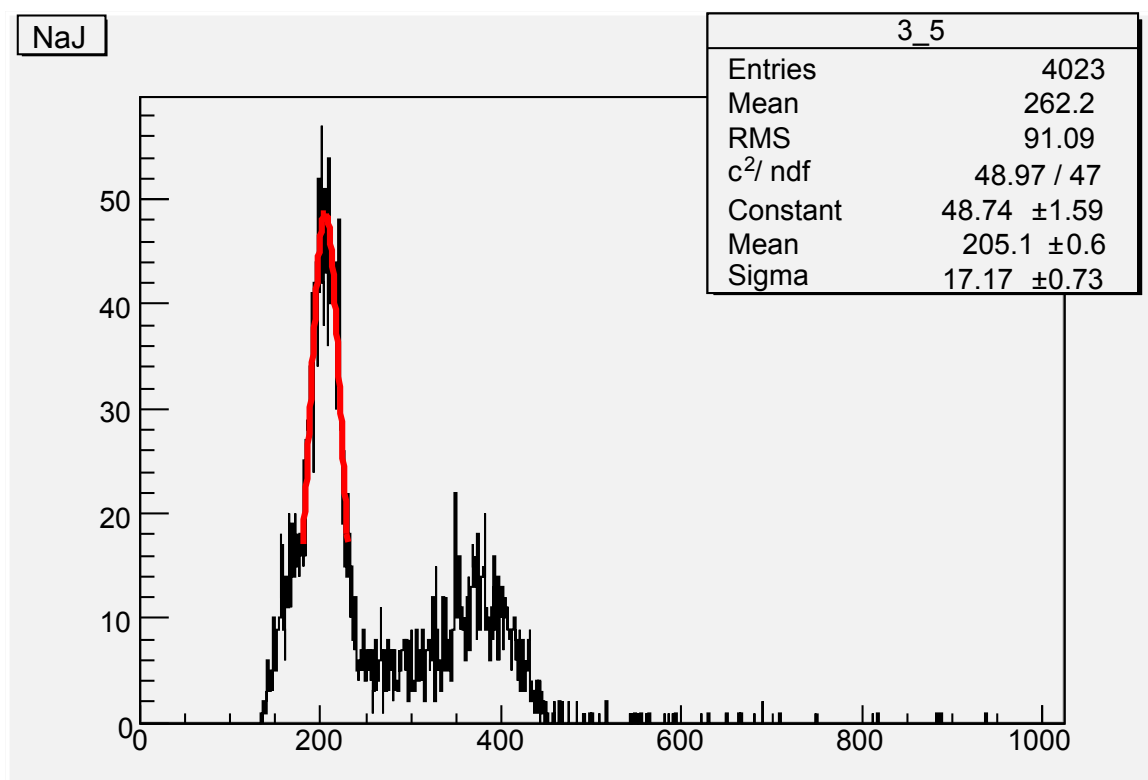
Eichmessung von ^{22}Na zu Beginn des Versuchs, $E = 511 \text{ keV}$

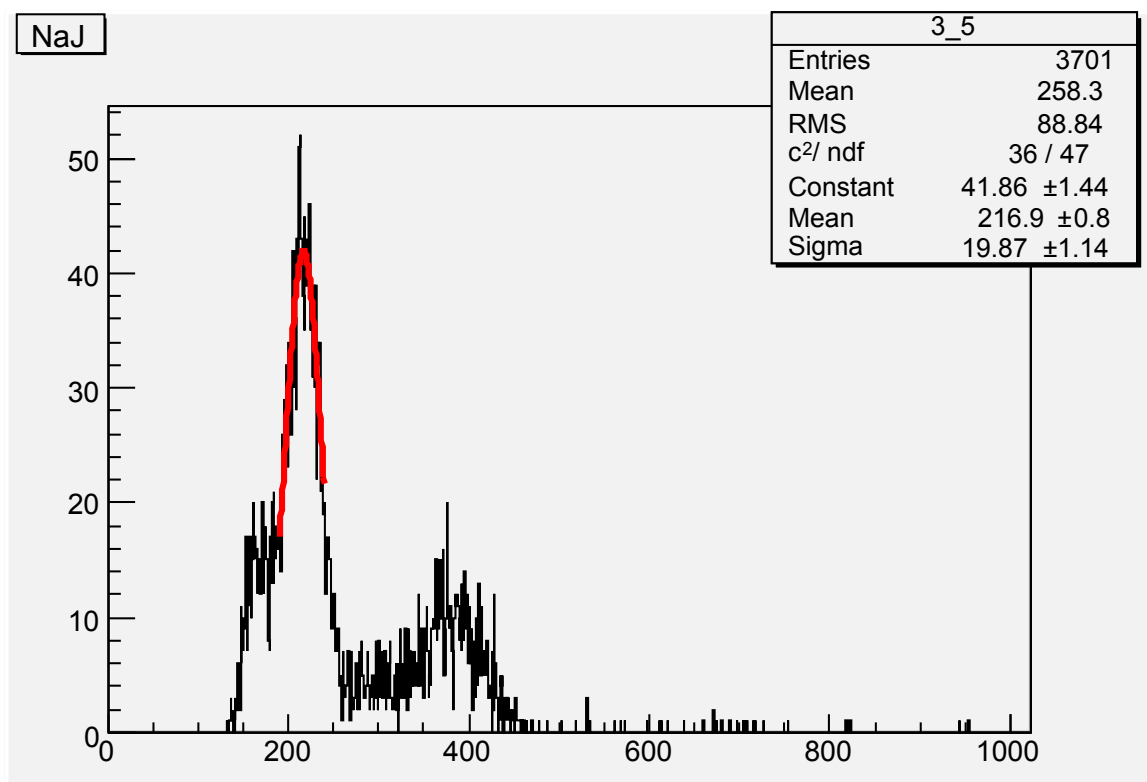
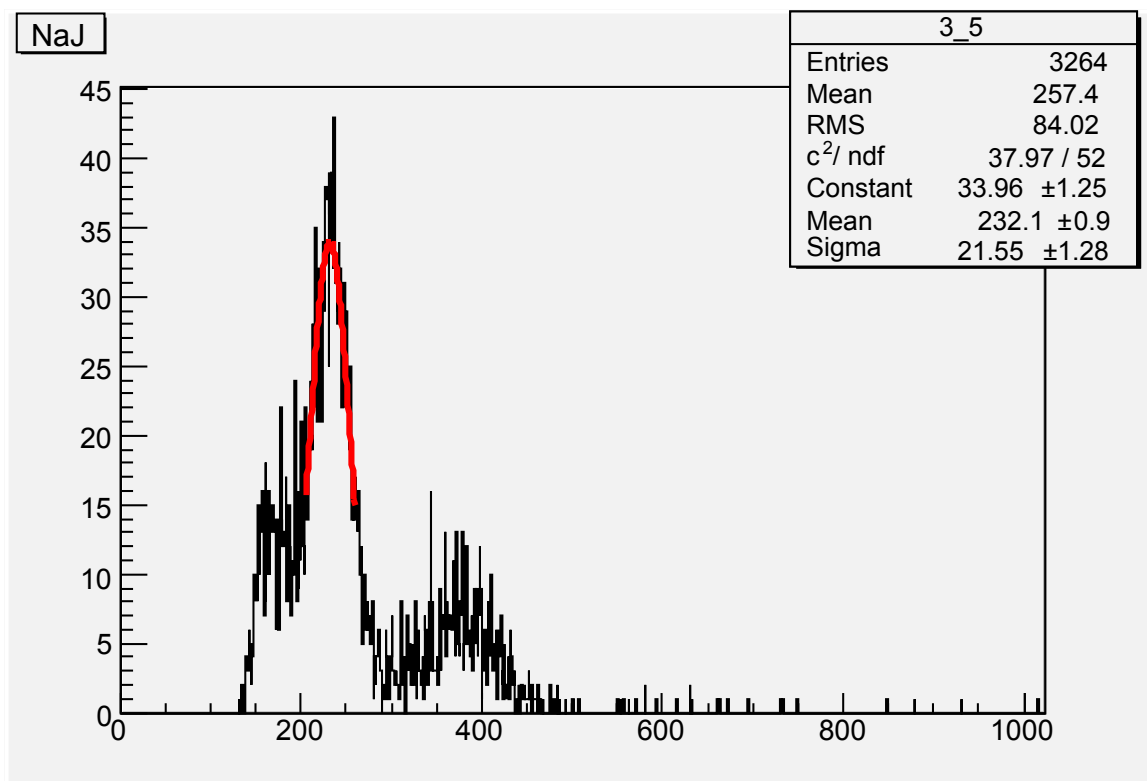
B. Messung mit Winkelabhängigkeit

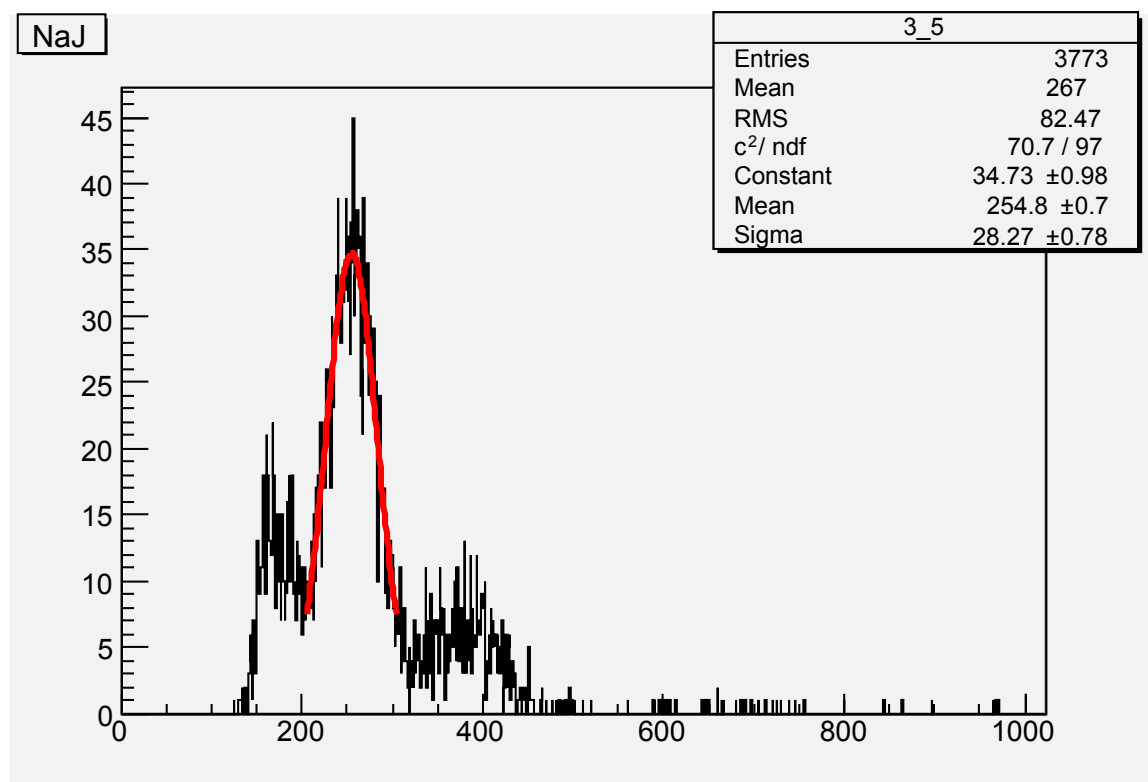
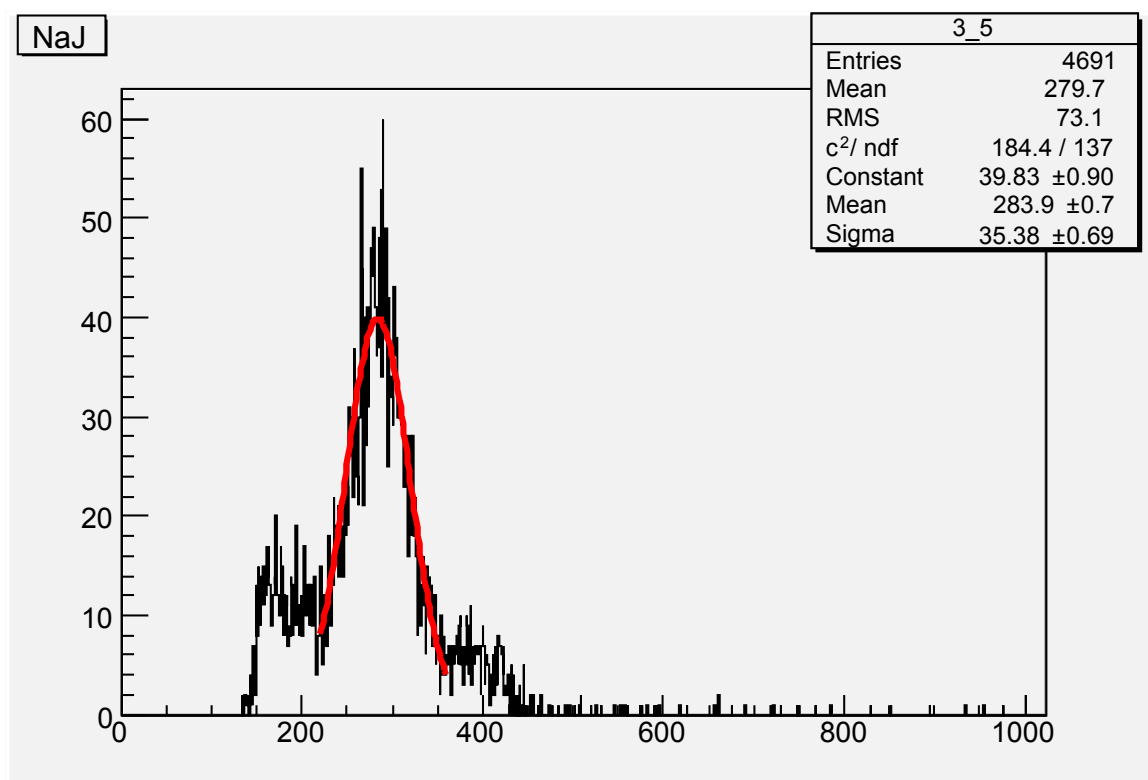
Im folgenden sind die gemessenen Spektren im Streuwinkel θ mit Gaußfit dargestellt. Als Photonenquelle wurde das ^{137}Cs -Präparat mit der Energie $E = 662 \text{ keV}$ verwendet.

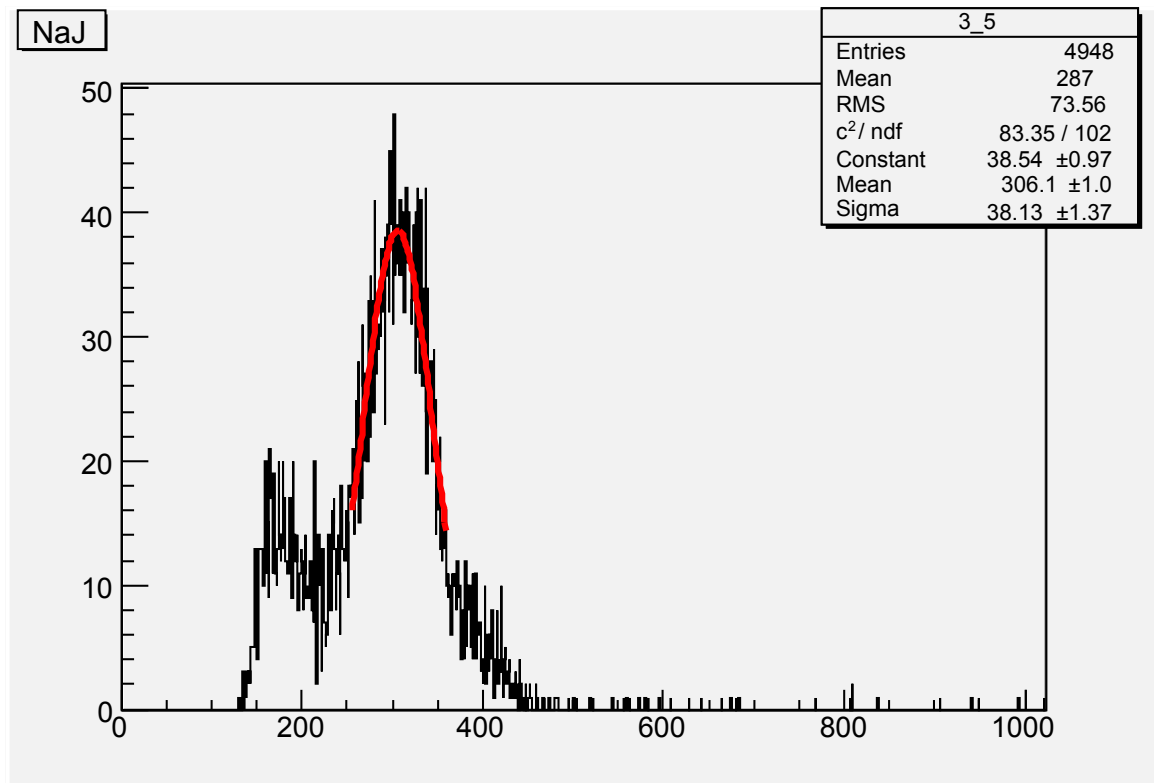


$\theta = 180^\circ$

 $\theta = 160^\circ$  $\theta = 140^\circ$

 $\theta = 120^\circ$  $\theta = 100^\circ$

 $\theta = 80^\circ$  $\theta = 60^\circ$

 $\theta = 40^\circ$