

# Évaluation de la liquidité des options de type américain entre la bourse de Montréal et Chicago

par

Damien CROAIN-POULETTE

MÉMOIRE PRÉSENTÉ À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
COMME EXIGENCE PARTIELLE À L'OBTENTION DE LA MAÎTRISE  
AVEC MÉMOIRE EN GÉNIE, CONCENTRATION PERSONNALISÉE  
M. Sc. A

MONTRÉAL, LE 7 JANVIER 2022

ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE  
UNIVERSITÉ DU QUÉBEC



Damien Croain-Poulette, 2022



Cette licence [Creative Commons](#) signifie qu'il est permis de diffuser, d'imprimer ou de sauvegarder sur un autre support une partie ou la totalité de cette œuvre à condition de mentionner l'auteur, que ces utilisations soient faites à des fins non commerciales et que le contenu de l'œuvre n'ait pas été modifié.

**PRÉSENTATION DU JURY**

CE MÉMOIRE A ÉTÉ ÉVALUÉ

PAR UN JURY COMPOSÉ DE :

M. Edmond Miresco directeur de mémoire  
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

M. Adel Francis, président du jury  
Département de génie de la construction à l'École de technologie supérieure

M. Martin Noël, examinateur externe  
Corporation financière Monétis

IL A FAIT L'OBJET D'UNE SOUTENANCE DEVANT JURY ET PUBLIC

LE 15 DÉCEMBRE 2021

À L'ÉCOLE DE TECHNOLOGIE SUPÉRIEURE



## AVANT-PROPOS

En économie, l'asymétrie d'information est un concept se caractérisant comme l'inefficacité des marchés causée par le manque d'information, tant du côté vendeur qu'acheteur. Que ce soit dans le marché du travail, des biens de consommation, et même des produits financiers, il existe toujours un risque qu'un agent économique soit désavantagé par cette inefficacité. Un directeur des ressources humaines aura souvent plus d'informations sur des emplois disponibles de l'entreprise où il travaille qu'un chercheur d'emplois moyen. Idem pour un analyste financier spécialisé dans les ressources naturelles qui investit sur des contrats à terme sur l'or comparativement à l'investisseur moyen. Ces situations d'asymétrie entraînent souvent un désintérêt à transiger sur un marché, quelquefois par la méconnaissance de ce dernier, et en résulte à la non-optimalité des prix. C'est ce qu'on appelle un *marché étroit* (ou *thin market*). Il existe plusieurs exemples, ceux-ci davantage appliqués aux marchés des options, qui peuvent expliquer un marché étroit. On peut premièrement penser à une mauvaise évaluation du prix réel d'une option simplement parce que nos modèles d'évaluations ne prennent pas en compte tous les facteurs du marché dans lequel on veut acquérir ou se départir d'une option. On transige donc avec un prix qui est soit sous ou surévaluer par rapport au prix réel. Plus simplement, il existe des marchés d'options moins populaires, où le volume de transactions est moindre et que même si nous avions une évaluation exacte du produit financier, nous devrions nous plier à acheter ou à vendre à un prix non optimal. Pour paraphraser Erik Kobayashi-Solomon dans son livre intitulé *The Intelligent Option Investor*, allant plus loin dans le raisonnement, il explique que même un investisseur ayant toutes les informations possibles sur l'évaluation d'une option, de penser avoir une certitude quant au prix réel peut s'avérer désavantageux et risqué.



## **REMERCIEMENTS**

En premier lieu, j'aimerai dédier cet ouvrage à Vincent Gigliotti, professeur d'économie du Collège de Valleyfield. Il a été le premier à m'intéresser aux sciences économiques et à la finance. Je lui serai toujours reconnaissant du dévouement qu'il a eu en prenant le temps de m'expliquer des concepts complexes. En me poussant à réfléchir davantage sur les enjeux économiques, il m'a ainsi transmis sa passion sur le sujet.

Je remercie mon directeur de recherche Edmond Miresco. Tout d'abord pour la qualité de son enseignement, mais également pour son expérience, son encadrement ainsi que sa grande disponibilité qui m'ont été essentiels dans ce travail.

J'aimerais remercier Vadim Di Pietro et le regretté Marc Stern, professeurs du programme, qui ont répondu à mes questions lors de l'écriture de ce travail.

Enfin, je remercie mes parents de m'avoir appris les valeurs de résilience et de rigueur dans tout ce que j'entreprends. Je remercie aussi ma femme, Alina, qui m'a soutenu et encouragé tout au long de mon parcours.



# **Évaluation de la liquidité des options de type américain entre la bourse de Montréal et Chicago**

Damien CROAIN-POULETTE

## **RÉSUMÉ**

Ce travail de recherche examine la possibilité d'un manque de liquidité dans le marché des options d'action canadiennes. L'analyse est examinée sur deux marchés en importance en Amérique du Nord soit le Chicago Board Option exchange (CBOE) et le Montreal Exchange (MX). Il met en abîme les différents enjeux reliés à l'analyse de la liquidité d'un produit dérivé comme les options. L'étude est réalisée sur des fonds négociés en bourses (FNB) suivant l'indice S&P 500 et transigeant respectivement dans ces deux bourses. Pour arriver à cet objectif, plusieurs indicateurs mesurant la liquidité sur le marché des actions ont été adaptés au marché des options. Sur presque l'ensemble des indicateurs, nous notons une liquidité supérieure du côté américain par rapport au côté canadien sans toutefois pouvoir déceler les raisons de cette disparité. Cette recherche propose également un modèle unique basé une la régression multiple où l'objectif est de maximiser les connaissances de la littérature en évaluation des options afin d'obtenir une évaluation accrue du prix de l'option. La différence entre les prix réels du marché et le prix évalué par notre modèle (i.e. terme d'erreur de la régression) est donc une portion du prix inexplicable par les informations fondamentales du marché. Ceci peut être expliqué par un manque de liquidité. Ayant basé nos évaluations de prix sur un bassin trop restreint de contrats d'options, les coefficients de notre régression sont trop élevés pour assurer la fiabilité du modèle dans une optique d'outil d'investissement. Cependant, les résultats démontrent une évaluation des prix manifestement supérieure de notre modèle comparativement à l'utilisation d'une technique quelconque prise individuellement.

**Mots-clés :** liquidité, options, ingénierie financière



# **Evaluation of the liquidity of American-style options between the Montreal and Chicago markets**

Damien CROAIN-POULETTE

## **ABSTRACT**

This research work examines the possibility of a lack of liquidity in the Canadian equity options market. The analysis is based on two major markets in North America, the Chicago Board Option Exchange (CBOE) and the Montreal Exchange (MX). It highlights the different issues related to the analysis of the liquidity of a derivative product such as options. The study is conducted on exchange-traded funds (ETFs) that track the S&P 500 index and trade on these two exchanges respectively. To achieve this objective, several indicators measuring liquidity in the equity market were adapted to the options market. On almost all indicators, we find a higher liquidity on the US side than on the Canadian side, without however being able to identify the reasons for this disparity. This research also proposes a unique model based on multiple regression where the objective is to maximize the knowledge of the options pricing literature in order to obtain a better valuation of the option price. The difference between the actual market price and the price estimated by our model (i.e. The error term of the regression) is therefore a portion of the price unexplained by fundamental information. This can be explained by a lack of liquidity. Having based our price evaluations on too small a pool of option contracts, the coefficients of our regression are too high to ensure the reliability of the model as an investment tool. However, the results show that the model clearly outperforms any individual technique in terms of price discovery.

**Keywords:** liquidity, options, financial engineering



## TABLE DES MATIÈRES

	Page
INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 LA LIQUIDITÉ .....	5
1.1 Généralités .....	5
1.2 Les coûts de transaction .....	8
1.3 Mesures basées sur les prix .....	24
1.4 Mesures basées sur les impacts sur le marché .....	29
1.5 Interprétation de l'analyse de la liquidité.....	33
CHAPITRE 2 LES MÉTHODES D'ÉVALUATIONS .....	37
2.1 Généralités .....	37
2.2 Le modèles binomial (application sous forme Monte Carlo) .....	39
2.3 Modèle binomial : interprétation des résultats.....	59
2.4 Le modèle Black-Scholes (Merton) .....	60
2.5 Modèle Black-Scholes (Merton) : interprétations et résultats .....	65
2.6 Appréciation des deux premiers modèles sur la liquidité .....	65
2.7 Le modèle Barone-Adesi Whaley (application option d'actions).....	66
2.8 Le modèle Barone-Adesi Whaley : interprétation des résultats.....	71
2.9 Les fonds négociés en bourse sélectionnés .....	72
CHAPITRE 3 LE MODÈLE DE RÉGRESSION : LA PIÈCE MAÎTRESSE .....	75
3.1 Contexte .....	75
3.2 Généralités et fonctionnement .....	76
3.3 Résultats et interprétation .....	81
CONCLUSION.....	89
ANNEXE I DÉRIVATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DE DEUXIÈME ORDRE (EULER) .....	91
ANNEXE II RÉSULTATS EXHAUSTIFS POUR LA MÉTHODE BLACK- SCHOLES.....	93
BIBLIOGRAPHIE.....	95



## LISTE DES FIGURES

	Page
Figure 1.1 <i>Spread</i> en pourcentage pour VFV et XSP (MX) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	10
Figure 1.2 <i>Spread</i> en pourcentage pour VOO et IVV (CBOE) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	11
Figure 1.3      VFV Taux de Roulement (MX) <i>trained set</i> (12 au 16 novembre 2018) ...	15
Figure 1.4      VFV Taux de Roulement (MX) <i>validation set</i> (7 au 11 janvier 2019).....	15
Figure 1.5      XSP Taux de Roulement (MX) <i>trained set</i> (12 au 16 novembre 2018) ....	15
Figure 1.6      XSP Taux de Roulement (MX) <i>validation set</i> (7 au 11 janvier 2019) .....	16
Figure 1.7      VOO Taux de Roulement (CBOE) <i>trained set</i> (12 au 16 novembre 2018) .....	16
Figure 1.8      VOO Taux de Roulement (CBOE) <i>validation set</i> (7 au 11 janvier 2019) .....	16
Figure 1.9      IVV Taux de Roulement (CBOE) <i>trained set</i> (12 au 16 novembre 2018) .....	17
Figure 1.10     IVV Taux de Roulement (CBOE) <i>validation set</i> (7 au 11 janvier 2019) .....	17
Figure 1.11     Ratio Hui-Hebel pour VFV et XSP <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	19
Figure 1.12     Ratio Hui-Hebel pour VOO et IVV (CBOE) <i>trained set</i> et <i>Validation set</i> .....	20
Figure 1.13     Ratio Amivest ( <i>Liquidity ratio</i> ) pour VFV et XSP (MX) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	22
Figure 1.14     Ratio Amivest ( <i>Liquidity ratio</i> ) pour VOO et IVV (CBOE) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	23
Figure 1.15     Ratio MEC ( <i>Market Efficience Coefficient</i> ) pour VFV et XSP (MX) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	26
Figure 1.16     Ratio MEC ( <i>Market Efficience Coefficient</i> ) pour VOO et IVV (CBOE) <i>trained set</i> et <i>validation set</i> .....	26

Figure 1.17	Ratio impact de marché (VFV par rapport à VUN) <i>trained set</i> .....	31
Figure 1.18	Ratio impact de marché (VFV par rapport à VUN) <i>validation set</i> .....	32
Figure 1.19	Ratio impact de marché (VOO par rapport à VTI) <i>trained set</i> .....	32
Figure 1.20	Ratio impact de marché (VOO par rapport à VTI) <i>validation set</i> .....	33
Figure 2.1	Progression binomiale aléatoire .....	41
Figure 2.2	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VFV <i>trained</i> .....	51
Figure 2.3	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VFV <i>validation</i> .....	52
Figure 2.4	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) XSP <i>trained</i> .....	53
Figure 2.5	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) XSP <i>validation</i> .....	54
Figure 2.6	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VOO <i>trained</i> .....	55
Figure 2.7	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VOO <i>validation</i> .....	56
Figure 2.8	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) IVV <i>trained</i> .....	57
Figure 2.9	Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) IVV <i>validation</i> .....	58
Figure 2.10	Exemple d'utilisation de la fonction Linest .....	64
Figure 2.11	Évaluation des options avec méthode BAW .....	71
Figure 3.1	Exemple d'utilisation de la fonction Linest .....	76
Figure 3.2	Régressions multiples pour les marchés de Montréal (MX) et Chicago (CBOE).....	83
Figure 3.3	Régressions simples des différentes méthodes d'évaluations.....	84

## **LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES**

ATM	At the money
BAW	Barone-Adesi Whaley
B-S	Black-Scholes
CAD	Dollar canadien
CAPM	Capital Asset Pricing Model
CBOE	Chicago Board Option Exchange
ETF	Exchange traded fund
FNB	Fonds négociés en bourse
ITM	In the money
IVV	iShare Core S&P 500 ETF
JCI	Jakarta stock Composite index
KLCI	Kuala Lumpur Composite Index
KOSPI	Korea composite stock price index
LR	Ratio de liquidité (liquidity ratio)
MEC	Market-efficiency coefficient
MEXBOL	Mexican Stock Exchange
MX	Bourse de Montréal
NASDAQ	National Association of Securities Dealers Automated Quotations
OTM	Out of the money
RANFU	Random Number Generator Function
RND	Random function (fonction aléatoire)

USD	Dollar américain
VBA	Visual Basic for Applications
VIX	CBOE volatility index
VIX3M	CBOE 3 months volatility index
VIXC	Canadian volatility index
VFV	Vanguard S&P 500 Index ETF
VOO	Vanguard 500 Index Fund
VTI	Vanguard Total Market Index
VUN	Vanguard U.S. Total Market Index
VWAP	Volume weighted average price
XSP	iShares Core S&P 500 Index ETF (CAD-Hedged)

## LISTE DES SYMBOLES ET UNITÉS DE MESURE

k	Nombre de transactions durant une période définie
K	Prix du sous-jacent
n	Nombre de variations du prix sous-jacent au cours de la vie de l'option
r	Taux d'intérêt sans risque
R <sup>2</sup>	Coefficient de détermination
S	Prix d'exécution du contrat
S*	Valeur critique (méthode BAW)
t	Variable de temps
v	La volatilité (annualisée)
y	Taux de croissance des dividendes
Σ	Sommation (sigma)
β	Risque systématique
Δ	Changement (delta)
ε	Terme d'erreur (ou risque idiosyncrasique)
η	Résiduel avec moyenne de 0 et variance constante
σ	Écart-type de la population
e	Constante d'Euler
δ	Taux de croissance des dividendes



## INTRODUCTION

Dans les dernières années, plusieurs études ont démontré le manque d'intérêt pour les marchés canadiens des actions au profit des autres marchés nord-américains (NASDAQ, NYSE, etc.). On y recense entre autres des éléments reliés à des structures financières et fiscales possiblement plus contraignantes, un contrôle des valeurs mobilières moins présents ainsi que des coûts de transaction comparativement désavantageux (Carpentier, L'Her, & Suret, 2008; Halpern, & Puri, 2007). En outre, plusieurs observateurs ont noté des taux de fusion, privatisations et de désinscription des compagnies inscrites aux bourses canadiennes plus élevées que la moyenne occidentale. Ces mêmes marchés nord-américains occupent également une part relative de moins en moins importante sur les marchés internationaux au profit des marchés européens alternatifs et asiatiques ce qui exacerbe la situation canadienne (United States Senate, 2007; Zingales, 2007). Ces facteurs dissuasifs ont donc pour conséquence de rebuter des premiers appels publics à l'épargne (IPO) ainsi que leur capitalisation ou d'empêcher l'atteinte de volumes de transaction compétitifs (notamment sur le Toronto Stock Exchange, TSX).

Carpentier, L'Her et Suret (2008) examinent de manière exhaustive cette stagnation voire décroissance de l'activité des marchés canadiens pour la période des années 1990 et 2000 et notent par ailleurs que cette tendance n'ira pas en s'améliorant, et ce, compte tenu de l'émergence économique accrue des pays en voie de développement. Plus précisément, entre la période 1990 à 2007, ces auteurs ont recensé une baisse des inscriptions en bourse pour les marchés américains et canadiens de 11,83% et 9,39%, respectivement. Sur la même période, on enregistrait une augmentation de 315% pour Hong Kong et de 25% pour Euronext. On a également noté une moins grande progression de la capitalisation boursière des marchés canadiens (2,37% en moyenne annuellement) comparativement aux marchés européens et asiatiques (par exemple : Hong Kong à 11% annuellement en moyenne). Même constat pour le volume alors que celui des marchés canadiens (i.e. TSX) augmente en moyenne de 11,39% par année et décroît au fil des années tandis que les marchés asiatiques sont sur une montée

(par exemple : Hong Kong 15,85% annuellement). Un portrait détaillé de ce comparatif se trouve dans leur ouvrage intitulé *On the competitiveness of the Canadian Stock Market* (2008).

Malgré ces récentes constatations chiffrées, encore relativement peu d'études ont été réalisées afin de connaître la disparité exacte de liquidité des marchés américains et canadiens. Corollairement, on peut se poser des questions quant au niveau de liquidité de tous les produits dérivés canadiens comme les contrats à terme (*forward/futures*), les contrats d'échange (*swaps*) et les options et ce, sur une multitude de sous-jacents. Dans ce présent travail, l'intérêt sera porté sur le marché des options d'action. Plus particulièrement sur les options de fonds négociés en bourse (FNB) qui en plus de leur popularité croissante, prennent de plus en plus de part de marché face aux options d'actions individuelles. Ce travail tentera de répondre à deux questions centrales à savoir s'il existe différents niveaux de liquidités entre le marché des options d'actions canadiennes et américaines. Dans un deuxième temps, advenant des disparités importantes de liquidité, savoir si un modèle de régression multiple intégrant des outils d'évaluations fiables et reconnus dans la littérature sur les options peut quantifier cette 'illiquidité canadienne' et ultimement supporter une stratégie d'investissement. Comme il sera expliqué tout au long du travail, un accent spécifique sera apporté à la popularité et l'efficacité des méthodes d'évaluations plutôt que simplement par leur complexité ce qui fait en sorte qu'un investisseur moyen peut avoir accès et facilement comprendre ces outils.

Pour répondre à la première question de ce travail, il faut comprendre qu'il existe une multitude d'outils disponibles pour mesurer la liquidité du marché des actions, sans pour autant avoir un comparable pour le marché des options. Il y aura donc en premier lieu un effort d'adaptation de ces mesures pour les marchés des options étudiés. L'ensemble de ces mesures sera vérifié et contrevérifié par un ensemble d'essai et de validation dans le but d'assurer la fiabilité des résultats. On remarquera cependant que, par la nature des options d'actions, la quantité de données par échantillons analysés est inférieure à ce qu'on pourrait faire comparativement à d'autres produits financiers. Dans un deuxième temps, on conceptualisera une régression multiple regroupant plusieurs méthodes d'évaluations d'options d'actions. Celles-ci ont été sélectionnées pour leur popularité au sein des analystes de marché, leur flexibilité quant aux

données qu’elles nécessitent pour être calculées ou simplement pour leur efficacité prédicatrice des prix. Par ce modèle, on recherche à créer une plus-value quant à la précision de l’évaluation d’une option par rapport au fait de simplement utiliser une méthode d’évaluation en vase clôt. Ultimement, ce nouvel avantage informationnel que produira ce modèle sur la véracité des prix, pourra constituer la base d’une stratégie d’investissement, ou du moins une variable à considérer dans une stratégie plus complexe.

En résumé, au chapitre 1, une multitude de ratios évalueront les niveaux de liquidités des marchés étudiés. Le processus d’adaptation de ces mêmes ratios provenant du monde des actions vers celui des options sera aussi expliquer en détail. Nous allons ensuite établir un comparatif détaillé et identifier les disparités en ce qui a trait au niveau de liquidité. Dans le deuxième chapitre, les différents modèles d’évaluation des options sélectionnés ainsi que leurs mécanismes d’application sur les marchés étudiés seront présentés. Nous allons de même aborder les explicatifs quant au choix des produits analysés. Au chapitre 3, nous conceptualiserons notre modèle de régression servant à déceler la liquidité existante des marchés étudiés, calculerons ce dernier et évaluerons sa précision. Au terme de ces différentes sections, nous établissons qu’il y a effectivement une disparité à l’avantage de Chicago (CBOE) au niveau de la liquidité et qu’effectivement, il existe une régression multiple capable d’augmenter substantiellement la capacité prédicatrice des méthodes d’évaluation dans un marché ‘illiquide’.



## CHAPITRE 1

### LA LIQUIDITÉ

#### 1.1 Généralités et revue de la littérature

Le but premier de tout cet ouvrage est de quantifier, à l'aide d'une régression, l'aspect de la liquidité qui n'est pas prise en compte par les méthodes 'traditionnelles' d'évaluation des options. Cette analyse sera accomplie en deuxième partie de cet ouvrage. Notre hypothèse de départ, est que pour un même sous-jacent (i.e. une action), le prix de l'option transigé dans différents marchés est différent. Que l'illiquidité est davantage présente dans les marchés des options canadiennes qu'américaine. En effet, nous avons choisi le *Chicago Board Option Exchange* (CBOE) comme marché d'options américaines et la Bourse de Montréal (MX) comme marché d'options canadiennes. Si nous sommes capables d'utiliser des méthodes de quantification de liquidité connues dans la littérature et ainsi prouver notre hypothèse de départ, nous pourrons ensuite appliquer la régression dans un marché où l'illiquidité est davantage présente qu'ailleurs, et donc, maximiser le plein potentiel de notre modèle. Le choix de ces deux marchés d'échange, soit le CBOE et le MX, est expliqué par plusieurs raisons. Premièrement, puisque le CBOE est le plus grand marché d'option en termes de contrats en vigueur (*open interest*) et donc aux États-Unis et que le MX est le seul marché d'options au Canada. De plus, tel que mentionné un peu plus tard en détail, il existe plusieurs sous-jacents transigés sous forme d'options qui ont des caractéristiques semblables entre ces deux bourses. Avant de parler des similitudes, nous allons aborder les différences majeures entre les deux échanges au niveau de la structure de marché. Pour ce qui est du CBOE, les options sont transigées selon une structure *quote-driven* modifiée aussi appelée une structure hybride. En plus de pouvoir faire des transactions avec des courtiers revendeurs ('*dealers*') ce qui est l'unique possibilité dans des marchés *quote-driven*, l'acheteur ou le vendeur d'options peut faire affaire avec un 'spécialiste' qui sont des courtiers indépendants ajoutant leurs offres d'achat ou de vente ce qui augmente la liquidité générale du marché et réduit le risque d'inventaire (*inventory risk*). Ce système hybride permet d'obtenir à la fois l'avantage des marchés *quote-driven* qui permettent pour les options moins liquides, d'avoir un courtier

proposant de la liquidité tout en réduisant les inconvénients de cette structure soit un manque de transparence dans les prix (i.e. les *spreads*), et ce, compte tenu du nombre limité de courtiers. À l'inverse, le MX est entièrement *order-driven*, ce qui veut dire qu'il n'y a pas d'intermédiation entre le vendeur et l'acheteur par un tiers parti comme les courtiers. Cela à l'avantage d'être plus transparent que la structure du CBOE, cependant structurellement moins liquide, car il n'y a pas autant d'intermédiaires imputables de créer une liquidité dans le marché. C'est peut-être une des composantes qui expliquera les divergences de liquidités, d'ailleurs. Pour ce qui est des compatibilités ayant trait à la structure de marché, on note la possibilité de transiger à n'importe quel moment durant la session boursière. Cet aspect appelé ‘continuité’ à l'avantage de générer des prix incorporant plus rapidement les nouvelles informations du marché et donc des prix qui convergent plus rapidement vers le prix d'équilibre. Le CBOE et le MX sont des marchés continus donc nécessitant pas l'attente d'un moment précis dans la journée pour transiger l'option.

Selon Sarr et Lybek (2002), la liquidité peut être mesurée de quatre manières. Par les coûts de transactions, par la comparaison des volumes des transactions et de la variabilité des prix, par la facilité et la rapidité des prix à converger vers le prix d'équilibre (résilience) et par la différentiation des prix due à d'autres facteurs. Avant de faire les analyses proposées par différents auteurs pour quantifier les coûts de transaction, il était intéressant de voir combien il coûtait de transiger (acheter ou vendre) une option pour un investisseur de type particulier. On s'intéresse seulement à cette clientèle, principalement, car les données sur les prix sont plus accessibles par rapport aux investisseurs institutionnels. Cette partie explicite des coûts de transaction aidera à donner un avant-goût sur l'accessibilité de transiger. Selon la charte des prix de CBOE en date du 1<sup>er</sup> novembre 2018 et du MX du 1<sup>er</sup> août 2018, les coûts de transaction par contrat (options sur actions) sont de 0.50 \$CAD/option pour le MX et de 0\$US/option pour le CBOE. Sans même faire des calculs sur les données du marché, il existe déjà une différence considérable dans les coûts de transactions des deux marchés d'options. Il est en revanche intéressant de noter que les coûts de transaction pour les courtiers sont plus élevés à Chicago qu'à Montréal. Ce conflit de prix d'entrée dans le marché ne permet pas de conclure qui entre les deux marchés à un avantage dans les coûts de transaction explicites. De manière générale,

des coûts de transaction élevés peuvent avoir deux conséquences. L'une étant de décourager les participants à être sur le marché et l'autre d'empêcher la réduction de l'écart entre le prix du marché à un moment  $t$  et le prix d'équilibre théorique à ce même moment  $t$ . Pour donner un exemple concret de l'impact des prix des transactions sur la liquidité, supposons qu'une option d'achat (*call*) pour une compagnie XYZ à expiration dans 3 mois se vend à 3,00\$/contrat, mais que l'évaluation (supposons une évaluation parfaite) est de 2,50\$. Sachant que la transaction coutera à l'investisseur particulier 0,50\$ (i.e. dans le MX), ce dernier n'a aucun avantage à acheter (ou même vendre à découvert) basé sur son avantage informationnel. Si cette même situation survient à la bourse de Chicago, ce même investisseur achètera ce contrat à 2,50\$ et se fera un profit basé sur l'information intrinsèque de l'option et du même coup 'rapprochera' le prix du marché au prix d'équilibre. On peut maintenant aborder les coûts de transactions implicites, ce qui ne nous est pas directement donné, mais facilement identifiables. Ces coûts, sont théoriquement plus grands dans des marchés *quote-driven*, car il y a une moins grande transparence, tel que mentionné plus tôt. En effet, bien que le marché de Chicago soit un cas particulier vu son caractère hybride (plus de courtiers), il est probable de croire que par sa structure de marché, les coûts de transaction implicites peuvent entre autres être expliqués par les frais fixes des courtiers (quoiqu'ils soient marginaux à grand volume). Il y a également les coûts d'inventaire qui sont en quelque sorte la prime qu'un investisseur doit verser au courtier pour qu'il assume à sa charge la volatilité d'un actif. Enfin, les coûts de sélection adverse qui, pour vulgariser, est une protection que le courtier charge à l'investisseur dans le cas où ce dernier ferait affaire avec lui en ayant des informations qu'il ne connaît pas et qui serait à son désavantage. Heureusement, la meilleure façon de quantifier la somme des frais du courtier est de tout simplement regarder le cours acheteur-vendeur (*bid-ask spread*). Bollen, Smith et Whalley (2002) proposent d'ailleurs différentes méthodes pour calculer ces différents coûts de manière individuelle à l'intérieur du *bid-ask spread* dans un excellent article *Modelling the bid-ask spread : measuring the inventory holding premium.*

Sarr et Lybek (2002), dans leur ouvrage *Measuring liquidity in financial Markets*, ont développés une méthode composée de plusieurs outils analytiques disponibles dans la littérature sur la liquidité des actifs financiers. Ils ont ensuite appliqué ces différents

instruments à différents index de marchés à travers le monde. Parmi les analyses qu'ils ont faites, ils se sont attardés aux marchés des actions. Ils ont comparé des indices suivant le Nasdaq aux États-Unis, le MEXBOL au Mexique, le KOSPI en Corée, le KLCI en Malaisie et le JCI en Indonésie, et ce, sur une période de cinq ans. Ils ont pu ainsi dégager des tendances sur les liquidités des différents marchés et surtout comparer ceux-ci. L'avantage des indices est que nous ne comparons pas deux actions précises qui ont peut-être un niveau de liquidité spécifique à chacune et qui ne reflètent pas l'ensemble d'un marché. Ce travail s'est inspiré de leur méthode pour, à son tour, comparer la liquidité des deux marchés d'options. De créer une version de leur méthode applicable pour les options d'actions. Il y a donc eu une modification des instruments utilisés puis, une application à d'autres indices plus pertinents aux marchés des options. Une explication détaillée sur le choix de indices sera donnée ultérieurement dans ce travail. Avant l'application des instruments, on passera en revue tous les instruments utilisés, leur mécanisme ainsi que les propriétés de la liquidité qu'ils mesurent.

## 1.2 Les coûts de transaction

Comme mentionné auparavant, le *bid-ask spread* est un bon indicatif pour mesurer l'ensemble des coûts de transaction tant explicites qu'implicites. Lorsque le *spread* est grand, cela est dû au fait que le courtier se prend une marge de profit plus importante (raisons mentionnées plus tôt). Les prix élevés vont créer une baisse de la demande pour l'option et ainsi diminuer sa liquidité. Le *spread* ainsi que toutes ses variantes calculent deux propriétés importantes pour qu'un marché soit liquide. On parle ici de la largeur du marché (*breadth*) et de la résilience. La largeur étant, dans le cas des options, qu'à un prix quelconque, il existe un grand volume d'acheteur et/ou vendeur intéressés à transiger (Volume d'ordres important pour chaque niveau de prix). Cependant si les coûts de transactions sont élevés et ce qui génère moins d'intérêt pour l'option, la largeur du marché va diminuer. La résilience, telle que définie plus haut, va également baisser, car moins de transactions rendront le marché moins optimal tout en ayant un prix de marché incompatible avec le prix d'équilibre (le juste prix) ou même un temps de réaction plus long entre un choc économique et la manifestation de ce dernier sur le prix du contrat d'option. Une de ces variantes est le *quoted spread* qui est simplement la différence

entre le plus bas *ask* et le plus haut *bid* à un moment et contrat donné. Il existe une alternative au *quoted spread* qui est le *spread* en pourcentage. Ce dernier élimine un désavantage majeur du premier, soit que le *spread* d'une option plus cher sera toujours, en terme absolu, plus grand plus le prix de l'option est élevé. C'est cette dernière variante que nous utiliserons dans notre analyse puisque celle-ci est une mesure relative qui élimine cet effet de grandeur.

$$\text{Spread en pourcentage} = \frac{(P_a - P_b)}{((P_a + P_b) \div 2)} \quad (1.1)$$

$P_a$  = prix du cours acheteur (*ask price*).

$P_b$  = prix du cours vendeur (*bid price*).

Plus concrètement, nous prendrons donc en comparaison des *spreads* en pourcentage journalier de deux sous-jacents très proche en termes de valeur fondamentale, et ce, sur une période d'une semaine d'ouverture de marché. Nous prendrons la semaine du 12 au 16 novembre 2018 comme ensemble d'essai (*trained data*) puis nous évaluerons la semaine du 7 au 11 janvier 2019 comme ensemble de validation (*validation set*). En plus de comparer des sous-jacents très proches, nous évaluerons seulement qu'un sous-ensemble des prix offerts par le teneur de marché (*market maker*) avec un '*moneyness*' précis soit des contrats d'achat '*At the money*' par rapport à leurs sous-jacents et à une expiration fixe (le contrat sur le marché le plus proche de 3 mois était choisi). Le choix de ces modalités (expiration, *moneyness*, durée) est arbitraire dans le cadre de ce travail, car contrairement au marché des actions qui a, pour une entreprise précise, qu'un seul prix à un temps  $t$  quelconque, il existe une multitude d'expirations et d'écart entre le prix courant et le prix cible (*strike*) à chaque même temps  $t$ . Une analyse de toutes les possibilités serait d'ailleurs beaucoup plus longue à faire et les données historiques sont très difficiles à trouver. Nous aurions pu opter pour des options variées (i.e. ATM, ITM, OTM et différents *time values*), mais la recherche de données et l'analyse auraient été beaucoup plus longues et complexes. Les résultats de cet indicateur se retrouvent dans le tableau suivant pour la bourse de Montréal (MX) et la bourse de Chicago (CBOE), respectivement. Malgré une atténuation de la disparité des *spreads* entre les semaines d'essais et les semaines de validation, on note une tendance claire à savoir que les *spreads* en pourcentage du côté du MX sont plus élevés que ceux du CBOE.

**VFV trained (MX) Trained set (12 au 16 novembre 2018 )**

Date	Bid Price	Ask Price	Spread en pourcentage
11/12/2018	1.95	2.80	35.79%
11/13/2018	1.80	2.90	46.81%
11/14/2018	1.60	2.75	52.87%
11/15/2018	1.80	3.05	51.55%
11/16/2018	1.95	3.10	45.54%

**VFV (MX) Validation Set (7 au 11 janvier 2019)**

Date	Bid Price	Ask Price	Spread en pourcentage
1/7/2019	1.80	2.25	22.22%
1/8/2019	1.95	2.65	30.43%
1/9/2019	1.85	2.50	29.89%
1/10/2019	2.10	2.75	26.80%
1/11/2019	2.15	2.60	18.95%

**XSP (MX) Trained set ( 12 au 16 novembre 2018)**

Date	Bid Price	Ask Price	Spread en pourcentage
11/12/2018	1.45	1.65	12.90%
11/13/2018	1.45	1.65	12.90%
11/14/2018	1.30	1.55	17.54%
11/15/2018	1.55	1.65	6.25%
11/16/2018	1.55	1.70	9.23%

**XSP (MX) Validation set (7 au 11 janvier 2019)**

Date	Bid Price	Ask Price	Spread en pourcentage
1/7/2019	1.35	1.60	16.95%
1/8/2019	0.85	1.05	21.05%
1/9/2019	0.90	1.10	20.00%
1/10/2019	0.90	1.15	24.39%
1/11/2019	0.90	1.15	24.39%

Figure 1.1 *Spread* en pourcentage pour VFV et XSP (MX) *trained set* et *validation set*

### VOO trained data

Date	Ask Price	Bid Price	Spread en pourcentage
2018-11-12	8,10	7,10	13,16%
2018-11-13	7,70	6,80	12,41%
2018-11-14	7,00	5,90	17,05%
2018-11-15	8,30	6,90	18,42%
2018-11-16	8,10	7,30	10,39%

### VOO validation data

Date	Ask Price	Bid Price	Spread en pourcentage
2019-01-07	10,40	7,90	27,32%
2019-01-08	11,10	8,50	26,53%
2019-01-09	8,50	5,80	37,76%
2019-01-10	8,90	6,50	31,17%
2019-01-11	8,50	6,60	25,17%

### IVV trained data

Date	Ask Price	Bid Price	Spread en pourcentage
2018-11-12	12,10	9,90	20,00%
2018-11-13	11,60	10,00	14,81%
2018-11-14	14,30	12,00	17,49%
2018-11-15	12,50	9,30	29,36%
2018-11-16	12,10	11,10	8,62%

### IVV validation data

Date	Ask Price	Bid Price	Spread en pourcentage
2019-01-07	10,30	9,30	10,20%
2019-01-07	4,80	0,00	200,00%
2019-01-07	5,00	4,00	22,22%
2019-01-07	5,00	4,20	17,39%
2019-01-07	71,40	66,60	6,96%

Figure 1.2 *Spread en pourcentage pour VOO et IVV (CBOE) trained set et validation set*

La deuxième mesure de la liquidité est basée sur le volume des transactions des contrats d'options. Baker et Filbek (2015) soutiennent que les mesures d'analyses reliées au volume, ici pour les options, sont primordiales pour comprendre le niveau de profondeur (*depth*). La

profondeur du marché se définit d'un actif dont plusieurs ordres vendeurs/acheteurs sont disponibles et ce, à différents incrément de prix soit supérieur ou inférieur au prix du marché. Plus la profondeur est importante, plus le marché est liquide. La littérature est claire au sujet du volume; il a son importance pour l'analyse de la liquidité des marchés, mais ne doit pas être utilisé seul. En effet, dans le marché des options, comme dans le marché des actions, le volume a comme défaut d'être souvent comptabilisé à deux reprises soit lorsque le vendeur vend un actif et l'acheteur achète ce même actif, dans la même transaction. On nomme ce processus la double comptabilisation. Par exemple, si un individu A achète à un individu B, le volume de cette option sera augmenté de deux, car l'achat de A est enregistré comme une transaction et la vente de B à A comme une deuxième transaction. Ce problème n'est pas vraiment majeur puisque on utilisera des mesures liées au volume pour comparer la liquidité des marchés et non pour quantifier l'amplitude d'un seul marché. Il est quand même bon à savoir que cette problématique existe et qu'il y a des instruments qui intègrent le volume dans leurs calculs tout en évitant cette double comptabilité. On parle ici entre autres du taux de roulement (*turnover ratio*). Un peu comme le ratio comptable, ce ratio calcule la fréquence à laquelle l'option change de main. Le *turnover rate* sert à relativiser le volume par rapport à la quantité qu'un actif a dans le marché. De manière générale, plus la quantité d'un actif est grande, plus il y a de chance que l'actif soit transigé. Dans le cas des actions, par exemple, on compare le volume d'une action d'une entreprise sur une période X à sa quantité d'actions en circulation pour la même période. Si nous voulions appliquer cette formule selon ces auteurs (Sarr et Lybek), il faudrait appliquer la formule suivante :

$$\text{Taux de roulement (turnover)} = \frac{V}{(S \cdot P)} \quad (1.2)$$

- V= Volume en dollar (*dollar volume*) soit la somme de toutes les transactions multipliées par leur prix respectif couvrant toute la période X étudiée.
- S= Quantité d'actions en circulation durant la période X. (En ne supposant aucune émission ou aucun rachat de la compagnie sous-jacente, entre autres, durant la période.)
- P= Le prix moyen de l'ensemble des transactions pendant la période X.

Si on voudrait appliquer cette formule à la lettre dans le marché des options, c'est un peu plus complexe. Tout simplement puisque les éléments de la formule n'ont pas tous nécessairement un homologue dans le marché des options. Le volume en dollar ainsi que le prix des transactions, quoique difficile à trouver, sont disponibles. Encore une fois, face à la quantité imposante de transactions liées à différents prix d'exécution (*strike*) et d'expirations, on doit se limiter dans le choix des contrats qu'on analyse ce qui n'est pas un problème pour le marché des actions. On insiste sur le fait que dans le marché des actions, il y a qu'un seul prix pour un titre donné, tandis que dans le marché des options, il y en a plusieurs. La variable qui n'est pas présente dans le marché des options c'est le nombre d'actions en circulation. En effet, contrairement aux actions qui sont émises par une entreprise et qui sont plus facilement calculables, les options 'en circulation' sont tous les contrats en vigueur où deux partis se sont mis d'accord sur des modalités préétablies. Il existe deux quantités de contrats en circulation (*open interest*) soit les contrats d'achats (*calls*) et les contrats de vente (*puts*). On utilisera seulement l'*open interest* des *calls* puisque l'objectif est de faire une étude comparative de deux marchés. La comparaison d'*open interest* d'achat vs de vente (*open calls vs open puts*) aurait été pertinente si on avait voulu étudier la directionnalité d'un marché en particulier, mais ce n'est pas le but de ce travail.

La formulation suivante est plus adaptée au marché des options et à l'information disponible :

$$\frac{\sum(\text{tous les volumes de la semaine} \times \text{leurs prix respectifs})}{\text{moyenne des open interests} \times \text{VWAP}} \quad (1.3)$$

À noter que dans :

*tous les volumes de la semaine* : on considère les volumes d'un contrat en particulier (expiration et prix d'exécution fixé, ici le plus proche d'un ATM à expiration de 3 mois), et ce pour la semaine du 12 au 16 novembre 2018 (*trained*) et du 7 au 11 janvier 2019 (*validation*).

*prix respectifs* : on considère le mid-price entre le bid et le ask et non pas le prix exact, car le volume n'indique pas si c'est un volume vendu ou acheté et à quel prix la transaction s'est faite. Le *mid-price* est donc une bonne approximation.

*Moyenne des open interests* : on considère la moyenne des *open interests* de ce contrat sur **toute la semaine**.

*VWAP* : on applique la formule suivante pour toute la semaine étudiée ce qui sert de prix moyen :

$$\frac{\sum(\text{Volume} \times \text{mid price})}{\sum \text{Volume}} \quad (1.4)$$

**N.B.** Dans la formulation précédente, qui a été utilisée dans les calculs de cette recherche, on suppose que l'équivalence à la quantité d'actions en circulation (dénoté S, dans la formulation de Sarr et Lybek), est *l'open interest* pour le marché des options. Tout en étant conscient que l'équivalence n'est pas parfaite, dans la mesure où *l'open interest* est la quantité de contrats d'option en vigueur à un moment précis, c'est cela qui apparaît donc être le plus proche comme variable du marché des actions. Comme la quantité d'action en circulation dans la formulation originale était supposée être statique dans la période X, on choisit une moyenne des *open interests* pour avoir une donnée fixe et donnant une idée de la semaine analysée dans son ensemble. Des informations pertinentes émanes du tableau des résultats suivant. On remarque que du côté de Montréal les taux de roulement sont tous inférieurs tant dans la semaine d'essai que dans la semaine de validation par rapport à Chicago. Les taux de roulement du MX sont affectés par des niveaux de volume étant dans la quasi-totalité nuls et de bas niveaux d'*open interest*.

	<b>open interest moyen</b>	<b>0.00</b>				
	<b>VWAP</b>	<b>0.00</b>				
	<b>taux de roulement</b>	<b>0.00</b>				
<b>somme des volumes x</b>						
Date	Bid Price	Ask Price	Volume	mid-price	open interest	somme des open interest
11/12/2018	1.95	2.80	0.00	0.00	0.00	0.95
11/13/2018	1.80	2.90	0.00	0.00	0.00	0.94
11/14/2018	1.60	2.75	0.00	0.00	0.00	0.87
11/15/2018	1.80	3.05	0.00	0.00	0.00	0.97
11/16/2018	1.95	3.10	0.00	0.00	0.00	1.01
<b>TOTAL</b>			<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>4.74</b>

Figure 1.3 VFV Taux de Roulement (MX) *trained set* (12 au 16 novembre 2018)

	<b>open interest moyen</b>	<b>20.00</b>				
	<b>VWAP</b>	<b>2.43</b>				
	<b>taux de roulement</b>	<b>0.25</b>				
<b>somme des volumes x</b>						
Date	Bid Price	Ask Price	Volume	mid-price	open interest	somme des open interest
1/7/2019	1.80	2.25	0.00	0.00	20.00	4.81
1/8/2019	1.95	2.65	0.00	0.00	20.00	4.92
1/9/2019	1.85	2.50	0.00	0.00	20.00	4.87
1/10/2019	2.10	2.75	5.00	12.13	20.00	8.40
1/11/2019	2.15	2.60	0.00	0.00	20.00	4.95
<b>TOTAL</b>			<b>5.00</b>	<b>12.13</b>	<b>100.00</b>	<b>27.95</b>

Figure 1.4 VFV Taux de Roulement (MX) *validation set* (7 au 11 janvier 2019)

	<b>open interest moyen</b>	<b>250.00</b>				
	<b>VWAP</b>	<b>0.00</b>				
	<b>taux de roulement</b>	<b>0.00</b>				
<b>somme des volumes x</b>						
Date	Bid Price	Ask Price	Volume	mid-price	open interest	somme des open interest
11/12/2018	1.45	1.65	0.00	0.00	250.00	50.62
11/13/2018	1.45	1.65	0.00	0.00	250.00	50.62
11/14/2018	1.30	1.55	0.00	0.00	250.00	50.57
11/15/2018	1.55	1.65	0.00	0.00	250.00	50.64
11/16/2018	1.55	1.70	0.00	0.00	250.00	50.65
<b>TOTAL</b>			<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>1250.00</b>	<b>253.10</b>

Figure 1.5 XSP Taux de Roulement (MX) *trained set* (12 au 16 novembre 2018)

							<b>open interest moyen</b>	<b>79.00</b>
							<b>VWAP</b>	<b>0.00</b>
							<b>taux de roulement</b>	<b>0.00</b>
<b>Date</b>	<b>Bid Price</b>	<b>Ask Price</b>	<b>Volume</b>	<b>mid-price</b>	<b>somme des volumes x</b>	<b>open interest</b>	<b>somme des open interest</b>	
1/7/2019	1.35	1.60	0.00		0.00		79.00	16.39
1/8/2019	1.45	1.75	0.00		0.00		79.00	16.44
1/9/2019	1.60	1.75	0.00		0.00		79.00	16.47
1/10/2019	1.55	1.80	0.00		0.00		79.00	16.47
1/11/2019	1.50	1.80	0.00		0.00		79.00	16.46
<b>TOTAL</b>					0.00	0.00	<b>395.00</b>	<b>82.23</b>

Figure 1.6 XSP Taux de Roulement (MX) validation set (7 au 11 janvier 2019)

							<b>open interest moyen</b>	<b>47.80</b>
							<b>VWAP</b>	<b>7.28</b>
							<b>taux de roulement</b>	<b>0.23</b>
<b>Date</b>	<b>Bid Price</b>	<b>Ask Price</b>	<b>Volume</b>	<b>mid-price</b>	<b>somme des volumes x</b>	<b>open interest</b>	<b>somme des open interest</b>	
11/12/2018	7.10	8.10	1.00	7.60		41.00		12.96
11/13/2018	6.80	7.70	10.00	72.50		42.00		27.80
11/14/2018	5.90	7.00	0.00	0.00		52.00		12.98
11/15/2018	6.90	8.30	0.00	0.00		52.00		13.44
11/16/2018	7.30	8.10	0.00	0.00		52.00		13.48
<b>TOTAL</b>					11.00	80.10	<b>239.00</b>	<b>80.66</b>

Figure 1.7 VOO Taux de Roulement (CBOE) trained set (12 au 16 novembre 2018)

							<b>open interest moyen</b>	<b>39.00</b>
							<b>VWAP</b>	<b>9.98</b>
							<b>taux de roulement</b>	<b>1.64</b>
<b>Date</b>	<b>Bid Price</b>	<b>Ask Price</b>	<b>Volume</b>	<b>mid-price</b>	<b>somme des volumes x</b>	<b>open interest</b>	<b>somme des open interest</b>	
1/7/2019	7.90	10.40	0.00	0.00		13.00		6.26
1/8/2019	8.50	11.10	53.00	519.40		13.00		121.00
1/9/2019	8.80	11.80	1.00	10.30		57.00		17.78
1/10/2019	10.20	11.60	10.00	109.00		57.00		39.56
1/11/2019	9.50	11.60	0.00	0.00		55.00		15.22
<b>TOTAL</b>					64.00	638.70	<b>195.00</b>	<b>199.82</b>

1.8 VOO Taux de Roulement (CBOE) validation set (7 au 11 janvier 2019)

						<b>open interest moyen</b>	<b>25.00</b>
						<b>VWAP</b>	<b>11.28</b>
						<b>taux de roulement</b>	<b>0.16</b>
<b>somme des volumes x mid-price</b>						<b>somme des open interest</b>	
Date	Bid Price	Ask Price	Volume	mid-price	open interest		
11/12/2018	9.90	12.10	1.00	11.00	25.00	11.80	
11/13/2018	10.00	11.60	0.00	0.00	25.00	9.32	
11/14/2018	9.00	11.10	0.00	0.00	25.00	9.02	
11/15/2018	9.30	12.50	1.00	10.90	25.00	11.74	
11/16/2018	11.10	12.10	2.00	23.20	25.00	14.68	
<b>TOTAL</b>			<b>4.00</b>	<b>45.10</b>	<b>125.00</b>	<b>56.56</b>	

Figure 1.9 IVV Taux de Roulement (CBOE) *trained set* (12 au 16 novembre 2018)

						<b>open interest moyen</b>	<b>30.00</b>
						<b>VWAP</b>	<b>11.40</b>
						<b>taux de roulement</b>	<b>2.33</b>
<b>somme des volumes x mid-price</b>						<b>somme des open interest</b>	
Date	Bid Price	Ask Price	Volume	mid-price	open interest		
1/7/2019	9.30	10.30	0.00	0.00	30.00	9.92	
1/8/2019	10.60	11.30	0.00	0.00	30.00	10.38	
1/9/2019	10.70	12.10	0.00	0.00	30.00	10.56	
1/10/2019	11.50	12.40	0.00	0.00	30.00	10.78	
1/11/2019	11.00	11.80	70.00	798.00	30.00	184.16	
<b>TOTAL</b>			<b>70.00</b>	<b>798.00</b>	<b>150.00</b>	<b>225.80</b>	

Figure 1.10 IVV Taux de Roulement (CBOE) *validation set* (7 au 11 janvier 2019)

Le ratio Hui-Hebel est un autre ratio utilisé qui, au lieu de comparer le volume en dollar (*dollar volume*) et la quantité de l'actif dans le marché, mesure l'effet que le premier a sur les prix. Cela aura comme avantage de quantifier la résilience dont l'importance a été expliquée plus tôt. Sarr et Lybek l'ont utilisé dans un contexte d'analyse du marché des actions, mais peut-être facilement transposé au marché des options, et ce, avec presque les mêmes paramètres. La formule utilisée est une version légèrement modifiée de celle de Sarr et Lybek:

$$HH = \frac{((P_{max} - P_{min}) / P_{min})}{(V / (S \cdot \bar{P}))} \quad (1.5)$$

$P_{max}$  = Le prix maximum d'un contrat au cours d'une période de 5 jours (*strike*, expiration et sous-jacent fixés).

$P_{min}$ = Le prix minimum d'un contrat au cours d'une période de 5 jours (*strike*, expiration et sous-jacent fixés).

$V$  = Volume en dollar (*dollar volume*) total de la même période de 5 jours.

$S$  = Nombre de contrats en circulation (*open interest*).

$\bar{P}$  = Prix de fermeture (*closing price*) de l'option des 5 derniers jours (moyenne).

La première étape est de trouver le maximum et le minimum pour lequel un contrat d'achat établi (*quoted call*) a été transigé. On regarde alors dans la chaîne d'option d'un fond négocié en bourse (FNB) en particulier (*strike* et expiration fixés), et ce, pour une période de 5 jours de marché. Par exemple, pour le FNB VFV (MX) ayant une expiration de deux mois et un prix d'exécution de 64,00\$, on suivra son évolution du 12 au 16 novembre 2018, en observant quel a été son *high* et son *low* pour cette période. On appliquera ensuite la formule au numérateur avec les données trouvées. Au dénominateur, pour le volume en dollar, vu que les prix exacts des transactions ne sont pas disponibles et si ces dernières sont du côté vendeur ou acheteur, on approximera par le *mid-price MOYEN* de la semaine qui sera multiplié par le volume total de cette même semaine. Finalement, pour  $S$ , on prendra la moyenne des *opens interests* sur 5 jours et pour  $\bar{P}$ , la moyenne des prix de fermeture sur la semaine avec encore une fois l'expiration et le prix d'exécution fixés.

L'interprétation de ce ratio est assez simple, plus ce dernier est grand, moins le marché est liquide. Simplement, car le volume qui se trouve au dénominateur (qui n'est rien de moins que le taux de roulement) réduirait davantage une variation des prix au numérateur s'il augmentait. Si le volume augmente sans pour autant affecter la variation des prix (ou du moins minimalement), cela veut dire que le marché est résilient donc possiblement plus liquide. Si plusieurs auteurs soulignent l'utilité de ce ratio, il faut cependant prendre quelques précautions. Gabrielsen, Marzo et Zagaglia (2011) notent un problème majeur dans l'utilisation du ratio Hui-Hebel soit le choix arbitraire de 5 jours qui est souvent utilisé pour son application. Selon eux, plusieurs mouvements à l'intérieur de ces 5 jours peuvent 's'annuler' et donc ne pas être pris en compte par le ratio. Un peu comme si les variations à court terme n'étaient pas 'détectées' par ce dernier. S'il existe une divergence entre un prix dit 'optimal' et le prix du

marché d'une option et que cette divergence se rétablit à l'intérieur de la période de 5 jours, le ratio n'identifiera pas cette 'illiquidité' ou la durée de cette résilience. Encore une fois, ce désavantage est un moindre mal, puisque on utilisera ce ratio comme mesure de comparaison entre deux marchés et donc, l'inconvénient (qu'on peut qualifier d'un 'lissage') sera appliqué également aux deux marchés étudiés. Les niveaux de volume étant souvent nuls du côté du MX produisent des ratios artificiellement bas qui suggèreraient une liquidité supérieure du marché de Montréal par rapport à celui de Chicago. Or, nous remarquons rapidement que bien que les volumes à Chicago soient plus élevés, ces derniers sont néanmoins pertinents.

VFV (MX) Trained set (12 au 16 novembre 2018 )									
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	high-low/low	dollar volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
64	03-15-2019	0,00	0,00	0	0,00	2,91	0,00	0,00%	

VFV (MX) Validation set (7 au 11 janvier 2019)									
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	high-low/low	dollar volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
60	03-15-2019	2,25	2,25	0	11,30	2,55	20,00	0,00%	

XSP (MX) Trained set (12 au 16 novembre 2018)									
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	high-low/low	dollar volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
30	03-15-2019	0,00	0,00	0	0,00	1,63	250,00	0,00%	

XSP (MX) Validation set (7 au 11 janvier 2019)									
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	high-low/low	dollar volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
28	03-15-2019	0,00	0,00	0	0,00	1,74	79,00	0,00%	

Figure 1.11 Ratio Hui-Hebel pour VFV et XSP *trained set* et *validation set*

VOO (CBOE) Trained set (12 au 16 novembre 2018 )								
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	dollar high-low/low volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
250	01-18-2019	8,10	7,70	0,051948052	80,52	3,16	47,80	9,74%

VOO (CBOE) Validation set (7 au 11 janvier 2019)								
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	dollar high-low/low volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
235	04-18-2019	10,50	9,70	0,082474227	648,96	6,14	39,00	3,04%

IVV (CBOE) Trained set (12 au 16 novembre 2018)								
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	dollar high-low/low volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
275	03-15-2019	12,00	10,00	0,2	43,48	4,40	25,00	50,60%

IVV (CBOE) Validation set (7 au 11 janvier 2019)								
Strike Price	Expiry Date	High Price	Low Price	dollar high-low/low volume	moyenne prix clôture	open interest	ratio	
255	03-15-2019	0,00	0,00	0	777,00	0,00	30,00	0,00%

Figure 1.12 Ratio Hui-Hebel pour VOO et IVV (CBOE) *trained set et validation set*

Comme abordé plus tôt, lorsqu'il a été le temps de calculer le ratio, nous avons remarqué que la quasi-absence de volume transigé pour les différents contrats analysés, faisait en sorte que le ratio générât '0' à chaque fois (dans MX). En effet, s'il n'y a pas de volume dans toute la semaine, nous ne pouvons pas enregistrer un *high* et un *low* pour celle-ci et donc rend le ratio ininterprétable. Cependant, si nous partons de la logique que les deux marchés analysés ont des teneurs de marchés qui se doivent d'acheter ou de vendre et de coter un prix, nous aurions pu décider de substituer le *high* et *low* du volume transigé et de le remplacer par *high and low* du *mid-price*. En d'autres termes, d'évaluer la liquidité théorique s'il y avait eu des participants sur le marché plutôt que ce qui s'est réellement passé. Cela est une alternative proposée par plusieurs auteurs. Malheureusement dans notre cas, étant donné que le ratio prend également le volume en ligne de compte (au dénominateur) l'opération se verrait inefficace.

La dernière mesure de liquidité basée sur le volume qui sera utilisée est le ratio de liquidité ou le ratio Amivest. Ce ratio développé par Amihud, Maldelson et Lauterbach (1997) est simple d'application. Ce dernier n'a pas été très utilisé par Sarr et Lybek dans leurs analyses, cependant, il est indéniablement une référence dans plusieurs ouvrages sur les mesures de liquidité des marchés. Voici la formule du ratio Amivest :

$$LR_{it} = \frac{\sum_{t=1}^T P_{it} V_{it}}{\sum \left| \left( \frac{P_{it}}{P_{it-1}} - 1 \right) \cdot 100 \right|} \quad (1.6)$$

La mécanique derrière ce ratio est tout simplement la quantité de volume nécessaire d'un actif (représenté au numérateur) pour que le prix de ce dernier augmente de 1%. Nous avons donc au dénominateur la somme des changements des prix en pourcentage entre le temps t et le temps t-1.

$P_{it}$  = Étant le prix de l'actif au temps t (prix de fermeture).

$V_{it}$  = Étant le volume\* de l'actif au temps t.

\* : Ici on ne prend pas le volume en dollar (dollar volume), mais simplement le volume en terme absolu.

Encore une fois, la multitude de possibilités d'expirations et de prix d'exécutions qu'ont les options rend le processus plus complexe que dans le marché des actions. On a donc restreint l'analyse de ce ratio à une expiration précise et un *moneyness* précis. En effet, on a arbitrairement choisi d'analyser que les contrats qui étaient à expiration de 3 mois (ou le plus proche disponible au premier jour de l'analyse) et ceux étant *At the money* (ou le contrat le plus proche du prix du sous-jacent dans la période analysée **au premier jour**). De plus, on a choisi, comme plusieurs autres auteurs semblent opter, pour une période d'analyse d'un mois de marché. On analysera donc du 12 novembre 2018 au 7 décembre 2018 (*trained*) et du 7 janvier 2019 au 1<sup>er</sup> février 2019 (*validation*). Par exemple, pour VFV (MX), on a analysé le contrat venant à expiration en mars 2019 (4 mois) avec un strike de 64,00\$ (prix de marché du FNB étant 64,20\$ à cette même date). On a appliqué la même mécanique pour XSP, VOO et IVV. Pour ce qui est de la formule en soi, au dénominateur, on a opté, comme prix de l'actif ( $P_{it}$ ), le prix de fermeture (*closing price*) quotidien.

Pour reprendre la logique construite par Sinisa Bogdan sur son travail portant sur la liquidité des marchés en Croatie, *Measuring liquidity on stock market, impact on liquidity ratio* (2012),

le ratio Amivest permet de déterminer une quantité importante, soit le volume de contrats transigés étant nécessaire pour que le prix de l'option (aux propriétés préalablement fixées) augmente ou baisse de 1%. Il est intéressant d'ailleurs de noter que si la variation des prix en pourcentage durant une période quelconque est nulle, cela signifie que le niveau de liquidité est inexistant. Les tableaux ci-dessous démontrent que pour les quatre produits analysés, même en observant un mois de marché complet, les bas niveaux de volume expliquent ces ratios très bas. On remarque enfin que les ratios du côté de Chicago sont plus élevés ce qui conclut une plus grande profondeur (*depth*) et par extension, une plus grande liquidité.

VFV_20181112_20181207		VFV_20190107_20190201	
Numerateur	0.00	Numerateur	35.50
Denominateur	290.98	Denominateur	169.66
Ratio amivest	0.00	ratio amivest	0.21
XSP_20181112_20181207		XSP_20190107_20190201	
Numerateur	15.60	Numerateur	1.85
Denominateur	219.75	Denominateur	133.22
ratio amivest	0.07	ratio amivest	0.01

Figure 1.13 Ratio Amivest (*Liquidity ratio*) pour VFV et XSP (MX) trained set et validation set

VOO trained data	VOO validation data
Numerateur Denominateur Ratio amivest	192.54 543.27 0.35
IVV trained data	IVV validation data
Numerateur Denominateur ratio amivest	213.36 124.46 1.71
Numerateur Denominateur ratio amivest	348.03 200.00 1.74

Figure 1.14 Ratio Amivest (*Liquidity ratio*) pour VOO et IVV (CBOE) *trained set* et *validation set*

Un autre élément des options avec lequel il faut faire attention lorsqu'on calcule des ratios est celui d'être consistant dans les contrats qu'on analyse. Sur une chaîne d'options, comme on le sait, il existe une multitude de cotations (*quotes*) de types, expirations et de *moneyness* différents. Si le but d'un ratio en particulier est d'analyser l'évolution d'un contrat dans le temps (i.e. prendre son min/max, établir son taux de retour, etc.), peu importe la durée (une semaine, un mois, etc.), il faut garder les mêmes paramètres tout au cours de la période analysée. Par exemple, il ne ferait aucun sens d'analyser les contrats d'achats de IVV sur 5 jours en comparant le prix d'un contrat *out of the money* (OTM) expirant dans un mois le premier jour avec le prix d'un contrat *at the money* (ATM) expirant dans 3 mois du lendemain. Dans ce cas-ci le ratio n'aurait aucune consistance et n'aurait aucune valeur informationnelle. C'est pour cette raison que pour plusieurs des ratios, on a fixé les paramètres arbitrairement, sélectionné un seul contrat et l'avons fait 'suivre' dans le temps. Autrement, il aurait fallu que nous fassions des regroupements de *quotes* pour chaque type, expiration et exécution préalablement au calcul des ratios ce qui aurait été extrêmement long et laborieux, voir redondant.

### 1.3 Mesures basées sur les prix

Ces mesures sont basées sur le principe central que l'analyse du comportement des prix est le meilleur indicateur de liquidité. Hasbrouck et Schwartz (1988) ont proposé une mesure qui va dans ce sens soit le coefficient d'efficience de marché (*Market Efficiency Coefficient*). Le ratio proposé par ces auteurs se base sur le fait que dans des marchés continus comme à Montréal (MX) et à Chicago (CBOE), aux heures de marché, il est possible d'acheter ou de vendre des options d'actions en tout temps. Conséquemment, le prix peut fluctuer librement et continuellement. Le fait que le CBOE et le MX soient tous les deux des marchés continus a un effet nécessairement positif sur la liquidité et sur l'augmentation de la résilience. Cela étant dit, il sera quand même intéressant de voir lequel entre les deux aura le MEC le plus élevé. Qu'il existe une variation dite normale et de long terme en opposition à une variation causée par des ajustements temporaires d'un prix du marché à un prix d'équilibre. Plus les coûts de transactions sont élevés, plus il est difficile ou long avant d'atteindre le prix d'équilibre à long terme (un exemple est illustré dans la section ‘coûts de transaction’). Cette différence et difficulté sont exprimées par une variance des prix qui sera plus distancée au juste prix dans le cas d'une illiquidité, et ce, sans connaître quel est le prix d'équilibre exact.

Plus concrètement, lorsque on appliquera ce ratio aux marchés des options, nos retours sur la plus longue période seront sur une semaine (5 jours de marché) et nos retours à court terme seront cinq périodes de 1 journée à l'intérieur de cette même semaine. Évidemment, les prix utilisés pour le long et le court terme seront ceux provenant de la même option (i.e. même expiration, même *strike*)

$$MEC = \frac{\text{var}(R_t)}{t * \text{var}(r_t)} \quad (1.7)$$

$\text{Var}(R_t) =$  Variance des retours logarithmiques de la période la plus longue.

$\text{Var}(r_t) =$  Variance des retours logarithmiques des périodes la plus courte.

$t =$  Nombre de courtes périodes dans la période la plus longue.

Il faut faire deux mises en garde concernant l'interprétation du MEC. Premièrement, supposons une option quelconque, dont son sous-jacent (i.e. action) est l'objet de chocs importants qui modifient sa valeur fondamentale, et ce, en un court laps de temps. Peu importe si l'option est liquide ou non, il y aura nécessairement des ajustements importants à court terme pour répondre à ces chocs. On observera donc une variance à court terme plus élevée que celle à long terme. Cela veut dire que même si une option peut être liquide, le MEC peut être très bas. Le MEC calcule la résilience étant, on le rappelle, la facilité et la rapidité d'un prix du marché à s'ajuster au prix fondamental. La situation qu'on vient de décrire est une situation qui pourrait survenir et qui pourrait altérer l'interprétation du ratio, puisque malgré un marché résilient, l'ampleur et la fréquence des chocs par rapport à la normale, pourrait créer une apparence d'illiquidité qui n'est pas à l'image de la réalité. D'où la difficulté d'ailleurs de choisir un laps de temps approprié pour éviter ce genre d'interprétation.

La deuxième mise en garde porte sur le fait que le MEC comme beaucoup d'autres ratios se base sur une valeur fondamentale. Cette valeur fondamentale n'est pas une vérité sur la valeur d'un actif futur, mais bien une estimation. Cette estimation, si elle s'avère fausse ou du moins imparfaite, les acteurs du marché peuvent s'ajuster en conséquence vers une valeur corrigée. Dans ce genre de situation, l'important n'est pas d'observer s'il y a une résilience, mais plutôt ce qui a causé cette mauvaise estimation. Est-ce que c'est parce que nous sommes dans une situation de marché avec des inefficacités d'informations? Par exemple, si le marché prenant en compte des estimations fondamentales, croit que le cours d'un sous-jacent sera haussier, celui-ci achètera des options d'achat (*call*). Si finalement l'estimation est largement surévaluée et que le prix du sous-jacent baisse, les ordres maintenant baissiers n'indiquent pas la présence de résilience, car ici les ordres d'achat ou de vente n'ont pas convergé vers la valeur fondamentale, mais c'est plutôt la valeur du fondamentale qui a bougé ce qui a ensuite créé un mouvement des ordres.

C'est, entre autres, ce mécanisme qui nous amène à nous poser la question centrale de ce travail. À savoir que si nous sommes dans une situation où il y a un déséquilibre entre la valeur fondamentale et le prix de marché, avec peu ou pas de liquidité, il est impossible de transiger

afin d'atteindre ce nouvel équilibre. Cela arrive également en cas de crashes financiers importants ou de bulles spéculatives où le prix du marché diverge du prix fondamental, et même en ayant une évaluation fondamentale parfaite du prix, la liquidité à ce prix est inexisteante (Asymétrie des ordres). Voici le sommaire des résultats pour ce ratio.

retour log court VFV_20181112_20181116	retour log court VFV_20190107_20190111	retour log court XSP_20181112_20181116	retour log court XSP_20190107_20190111
-0.063513406	0.144581229	-0.241162057	0.216223108
denominateur	denominateur	denominateur	denominateur
0.009044385	0.009554792	0.013586225	0
retour log long	retour log long	retour log long	retour log long
0.085522173	0.144581229	0	0.117783036
numerateur	numerateur	numerateur	numerateur
0.00222116	0.000314603	0.005815914	0.000969045
MEC ratio	MEC ratio	MEC ratio	MEC ratio
0.245584459	0.032926184	0.428074299	0.422983634

Figure 1.15 Ratio MEC (*Market Efficiency Coefficient*) pour VFV et XSP (MX) *trained set* et *validation set*

retour log court VOO trained data	retour log court VOO validation data	retour log court IVV trained data	retour log court IVV validation
2.041220329	0.079249372	1	0
denominateur	denominateur	denominateur	denominateur
0.886285989	0.001256093	0.00664823	0
retour log long	retour log long	retour log long	retour log long
0	0	0	0
numerateur	numerateur	numerateur	numerateur
0.437589525	0	0.003324115	0
MEC ratio	MEC ratio	MEC ratio	MEC ratio
0.493733999	0	0.5	#DIV/0!

Figure 1.16 Ratio MEC (*Market Efficiency Coefficient*) pour VOO et IVV (CBOE) *trained set* et *validation set*

**N.B.** Pour CBOE, on note plusieurs distorsions. Au niveau des retours logarithmiques sur la grande période (retour log long), la valeur ‘0’ est expliquée du fait que souvent, le *last price* utilisé pour la dernière journée étudiée était nul ce qui ‘annule’ le taux de retour (*rate of return*). Cette valeur était souvent énoncée par les données de la bourse de Chicago soit par le fait qu'il y avait une absence de volume. (i.e. aucun échange de l'option étudiée durant cette journée) ou par l'inexactitude des données fournies. Évidemment, ces erreurs au niveau des retours

logarithmiques sur la longue période ont eu un impact sur la distorsion du numérateur du ratio et du ratio lui-même.

La dernière mesure basée sur les prix qui sera utilisée dans cette analyse comparative entre le MX et le CBOE sera celle développée par Marsh et Rock (1986). Cette mesure, contrairement au *liquidity ratio (LR)* d'Amihud ou toutes mesures basées sur le volume, compare plutôt l'effet qu'a le nombre de transactions sur les prix. Le choix d'utiliser le nombre de transactions plutôt que le volume est expliqué selon eux parce qu'ils considèrent que la liquidité est généralement mieux représentée par l'effet des transactions. Gabrielsen, Marzo et Zagaglia (2011) utilisent un cas de figure qui démontre l'argument de Marsh et Rock et avec lequel je l'adapterai au marché des options. L'exemple utilisé par ces auteurs démontre que deux options peuvent avoir exactement le même volume au cours d'une période donnée, mais que leur liquidité respective peut être différente. Pour bien comprendre ce concept, prenons un cas extrême qui sera facile à visualiser. Supposons une option A qui a un volume de 200 contrats au cours d'une journée et qui se transige à la fréquence d'une centaine de transactions par jour par des personnes différentes. Considérons aussi une option B qui a également un volume de 200 contrats par jour, mais qu'il y a seulement une transaction de 200 au début de la journée et qu'il n'y a pas d'autre activité au cours de la journée. Si nous utilisons des indices/ratios de liquidité basée uniquement sur le volume, l'option A et B auront la même liquidité. Or, il ne fait aucun doute que l'option A est plus liquide que durant cette journée que l'option B. Voici donc la formule proposée par Marsh and Rock (1986) :

$$MR = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left| \frac{P_{ik} - P_{ik-1}}{P_{ik}} \right| \times 100 \quad (1.8)$$

$K$  = Nombre de transactions prisent en compte durant la période ( $i$ ).

Pour ce ratio, on utilisera exactement le même dénominateur que celui utilisé pour le ratio de liquidité (LR). Cela veut donc dire qu'on analysera les deux mêmes semaines et les deux contrats ayant des caractéristiques similaires. La seule modification sera de multiplié par  $1/K$ .

La variable  $K$  étant le nombre de transactions total au cours de la semaine étudiée. Malheureusement, la bourse de Chicago, ne rend pas disponible, du moins pour les investisseurs particuliers, le nombre de transactions pour un contrat et une journée spécifique. C'est donc le seul ratio de liquidité qui n'offrira pas une comparaison entre les deux bourses. Nous avons toutefois décidé de quand même calculer le ratio pour la bourse de Montréal, pour évaluer la théorie des auteurs soutenant qu'il est plus efficace d'évaluer la liquidité d'un actif en étant représenté par son nombre de transactions plutôt que par son volume (i.e. en comparaison avec un ratio comme le *liquidity ratio*, par exemple). Dans le tableau suivant, nous pouvons tirer que tout comme le volume, le nombre de transaction est tout aussi faible ce qui affecte la précision du ratio. En théorie, plus le ratio est bas plus le marché analysé est liquide. Malgré qu'ici il est impossible de comparer avec Chicago, on peut voir que la faible quantité de transactions affecte le ratio à la hausse ce qui est un indicateur clair d'un manque de liquidité.

Tableau 1.1 Ratio Marsh et Rock pour VFV et XSP (MX) *trained set* et *validation set*

	<b>VFV Trained</b>	<b>VFV Validation</b>	<b>XSP Trained</b>	<b>XSP Validation</b>
<i>Liquidity Ratio</i> (LR) Dénominateur	290,98	169,67	219,75	133,22
Somme des transactions de la semaine (k)	0	3	6	1
1/k	0	0,33	0,167	1
Ratio Marsh & Rock	0	56,56	36,63	133,22

## 1.4 Mesures basées sur les impacts sur le marché

Dans les marchés des options qui seront étudiés comme dans n'importe quel marché d'actifs, il existe une liquidité qui est expliquée par le marché dans lequel l'option se trouve et une liquidité expliquée par le secteur ou de l'entreprise en soi analysé. On peut penser à un modèle qui a la même optique soit le *Capital Asset Pricing Model* (CAPM) qui différencie le risque systématique du risque non systématique. Si on regarde la composition du CAPM, le rendement d'un actif provient de deux sources. La première étant un rendement dit ‘minimal’ qui est souvent un actif sans risque. La deuxième est une proportion attribuable à l'actif qui est associé au risque du marché dans lequel l'actif en question se situe. On dénote souvent cette proportion, *beta*. En d'autres mots, plus le beta est élevé, plus le risque systématique est élevé. De la même façon qu'on peut isoler beta dans une régression sur le retour excédentaire d'un actif (CAPM), Hui et Heubel ont voulu estimer l'erreur (le résiduel) pour isoler le risque spécifique.

$$R_{it} = \alpha + \beta R_{mt} + \varepsilon_{it} \quad (1.9)$$

$\beta$  = Représente le risque systématique.

$\varepsilon_{it}$  = Est le rendement d'un actif qui n'est pas expliqué par le marché (résiduel).

$R_{it}$  = Retour journalier de l'option  $i$ .

$R_{mt}$  = Retour journalier du marché.

De la même manière que ces auteurs utilisent cette régression pour le marché des actions, on appliquera cette dernière au marché des options. L'intérêt de s'attarder à ce risque spécifique est en quelque sorte de pouvoir isoler le risque propre d'une option. Or, de savoir la provenance du risque n'est pas la composante la plus importante dans cette recherche. Il faut continuer le processus est faire une deuxième régression explicative du résiduel de la première régression. Soit la deuxième régression :

$$\varepsilon_i^2 = \phi_0 + \phi_1 \Delta V_{it} + \eta_{it} \quad (1.10)$$

$\varepsilon_i^2$  = Résidu de la première régression au carré.

$\Delta V_{it}$  = Changement en pourcentage du volume en dollar (dollar volume) journalier.

$\eta$  = Résiduel avec moyenne de 0 et variance constante.

Toujours selon Hui et Heubel, le cœur de l'analyse de la liquidité se fait dans l'interprétation du coefficient  $\phi_1$ . Si ce dernier est faible, cela voudrait signifier que l'augmentation du volume affecte peu le risque idiosyncrasique (spécifique) et donc serait un actif liquide par rapport à un autre qui aurait un coefficient plus élevé. On peut associer cet effet à la notion de largeur du marché (*breadth*) qui est plus grande plus le coefficient  $\phi_1$  est petit.

Les raisons expliquant la sélection des fonds négociés en bourse (FNB) faisant l'objet de cette recherche seront expliquées de manière exhaustive dans une section subséquente. En ce qui concerne ce ratio d'impact de marché, il est simplement important de noter que le retour journalier de l'option  $i$  ( $R_{it}$ ) sera représenté par VFV et VOO (de la Bourse de Montréal et de Chicago, respectivement). Leurs ‘homologues’ qui serviront de retour journalier du marché ( $R_{mt}$ ) sera représenté par le *Vanguard U.S. Total Market Index* (VUN) et le *Vanguard Total Market Index* (VTI). VUN et VTI sont des fonds négociés en bourse d'index de marché total qui englobent les deux premiers. Autrement dit, VFV est un sous-ensemble de VUN idem pour VOO à VTI. Par exemple, VFV suit l'index S&P 500 étant un sous-ensemble de VUN qui lui, suit l'index Willshire 5000. Ce dernier suit l'ensemble des entreprises américaines (tous secteurs et capitalisations confondus) et comporte au-delà de 3000 entreprises.

Lorsqu'il a été le temps de calculer le ratio, nous avons utilisé la fonction *Linest* qui a généré les coefficients nécessaires pour les deux régressions. À la deuxième régression, le fait d'étudier des marchés très peu actifs, c'est-à-dire peu de volume voire pas du tout, a affecté la qualité du coefficient  $\phi_1$  sur les deux marchés. En effet, ces absences de volume ont fait en sorte de générer un changement en pourcentage souvent nul (ou parfois existant mais extrême) et donc d'avoir une variable indépendante faible (ou parfois distordu) pour la deuxième régression. Ceci a ensuite créé une répercussion sur notre coefficient  $\phi_1$  qui rend son

interprétation plus difficile. Lors des calculs pour ce ratio, nous avons également remarqué que le faible niveau de volume sur les marchés du VUN et VTI a accentué la difficulté d'interprétation.

	VUN (trained data) Daily Stock return	VFV (trained data) Daily Stock return	Regression	Residue 	residuel au carré
	-0,178571429	-0,138461538	-0,106450902	-0,03201	0,001024681
	0	0,035714286	-0,001079974	0,036794	0,001353818
	-0,108695652	-0,051724138	-0,0652188	0,013495	0,000182106
	0,219512195	0,109090909	0,128449168	-0,01936	0,000374742
	0	0	-0,001079974	0,00108	1,16634E-06
Linest	0,590077201	-0,001079974			
	changement de volume en pourcentage VFV trained	residuel au carré			
	0	0,001024681			
	0	0,001353818			
	0	0,000182106			
	0	0,000374742			
	0	1,16634E-06			
Linest	0	0			

Figure 1.17 Ratio impact de marché (VFV par rapport à VUN) *trained set*

	VUN (validation data) Daily Stock return	VFV (validation data) Daily Stock return	Regression	Residue I	residuel au carré
	0,16	0	0,088734703	-0,08873	0,007873847
	0,103448276	0,177777778	0,059365376	0,118412	0,014021497
	-0,0625	-0,056603774	-0,026817479	-0,02979	0,000887223
	0,033333333	0,1	0,022952187	0,077048	0,005936365
	0,032258065	-0,054545455	0,022393762	-0,07694	0,005919643
Linest	0,519335646	0,005640999			
	changement de volume en pourcentage VFV validation	residuel au carré			
	0	0,007873847			
	0	0,014021497			
	0	0,000887223			
	0	0,005936365			
	-100	0,005919643			
Linest	1123,783321	-27,78525081			

Figure 1.18 Ratio impact de marché (VFV par rapport à VUN) *validation set*

	VOO (trained data) Daily Stock Return	Daily Stock Return	Regression	Residuel	residuel au carré
	0	0	-0,25	0,25	0,0625
	0	0	-0,25	0,25	0,0625
	-1	0	0	0	0
	0	-1	-0,25	-0,75	0,5625
	0	0	-0,25	0,25	0,0625
Linest	-0,25	-0,25			
	changement de volume en pourcentage VOO trained	residuel au carré			
	0	0,0625			
	0	0,0625			
	0	0			
	-100	0,5625			
	0	0,0625			
Linest	-191,3043478	8,695652174			

Figure 1.19 Ratio impact de marché (VOO par rapport à VTI) *trained set*

	VTI (validation data) Daily Stock Return	VOO (validation data) Daily Stock Return	Regression	Residue I	residuel au carré
	4,3	0	-0,063354515	0,063355	0,004013795
	0,255813953	0	-0,198749773	0,19875	0,039501472
	-1	0,082474227	-0,240793154	0,323267	0,104501799
	0	0	-0,207314165	0,207314	0,042979163
	0	-1	-0,207314165	-0,79269	0,628350832
Linest	0,033478988	-0,207314165			
	changement de volume en pourcentage VOO validation		residuel au carré		
	0		0,004013795		
	0		0,039501472		
	-97,9575958		0,104501799		
	900		0,042979163		
	-100		0,628350832		
Linest	-543,587271	229,4858075			

Figure 1.20 Ratio impact de marché (VOO par rapport à VTI) *validation set*

## 1.5 Interprétation de l'analyse de la liquidité

Dans cette interprétation, nous allons comparer les différentes mesures de liquidité entre les deux marchés étudiés. Dans un premier temps nous allons regarder les ratios de manière isolées, puis évaluerons les tendances dans leurs ensembles. Le premier ratio est le *spread* en pourcentage. On remarque clairement que VFV (MX) par rapport à son homologue VOO (CBOE) a des *spreads* plus grands dans la semaine d'essai, mais que cette disparité est inexisteante pour la semaine de validation. Pour XSP (MX) par rapport à IVV (CBOE), on a une situation complètement à l'opposé avec des *spreads* plus grands pour IVV pour la semaine d'essai, mais plus petits que XSP dans la semaine de validation. Malgré ces divergences, on a tendance à relever des *spreads* légèrement moins élevés à la bourse de Chicago (CBOE). On peut donc supposer que sur ce point, la bourse de Chicago a probablement une meilleure résilience et surtout une meilleure largeur (*breadth*).

Le deuxième ratio est le taux de roulement. Avant toute chose, il a été très difficile d'obtenir des taux significatifs compte tenu des niveaux de volume très bas, et ce, dans les deux marchés

analysés. Ce problème aurait peut-être été moins apparent si nous avions pris une plus large quantité de données (par exemple : données sur un mois au lieu d'une semaine). Néanmoins nous pouvons remarquer un certain avantage des produits du CBOE par rapport à ceux du MX et ce, dans les deux semaines analysées. On peut donc supposer une meilleure profondeur du marché (*depth*) du côté de Chicago.

Le prochain ratio est celui de Hui-Hebel. Comme abordé auparavant, l'absence de volume du côté de Montréal produit une valeur de zéro tant du côté de la semaine d'essai, que de la semaine d'évaluation. Nous ne pouvons donc pas lire l'effet du volume sur les prix. Pour remédier à ce problème, nous aurions pu prendre des périodes plus grandes pour tenter de capter un certain volume afin de rendre les ratios plus pertinents. Cependant, sur les mêmes semaines analysées, nous obtenons des ratios beaucoup plus significatifs du côté de Chicago. Malgré qu'en règle général plus le ratio Hui-Hebel est grand, moins il y a de liquidité, ici les ratios de Chicago démontrent à nouveau un niveau de volume supérieur à celui de Montréal, et donc une liquidité supérieure. À noter que le ratio pour IVV dans la semaine de validation est nul, en raison d'une erreur dans les données fournies par CBOE ne fournissant pas un *high* et un *low* pour le volume ayant été transigé. L'hypothèse d'une liquidité supérieure dans le marché américain est davantage probable, lorsque nous regardons les résultats du ratio de liquidité (Ratio Amivest). Ce dernier est supérieur tant dans la semaine d'essai que dans la semaine de validation. Cela veut non seulement dire que la liquidité est plus élevée, mais qu'un volume plus élevé de transaction à moins d'influence sur les prix sur le CBOE que sur le MX.

Du côté du MEC (*Market Efficiency Coefficient*), un coefficient plus petit que 1 signifie généralement que le marché est illiquide. Les deux marchés ont des coefficients en bas de 1, toutefois désigner un marché moins liquide que l'autre en prenant compte seulement ce ratio est impossible. Le ratio le plus proche de 0 indiquerait que les retours à court terme sont plus élevés que ceux à long terme et une variance plus grande des prix de transaction autour du prix d'équilibre. Encore une fois, malgré des ratios légèrement plus favorables pour le CBOE, il est difficile de déterminer clairement un marché supérieur à l'autre. Ensuite, malgré les complications énoncées plus tôt, on peut dégager une certaine interprétation du ratio d'impact de marché. De manière générale, plus  $\phi_1$  est petit, plus le prix d'un contrat d'option est

in affecté par une variation du volume, ce qui indique un produit plus liquide et ayant une plus grande largeur (*breadth*). On remarque que les ratios sur le marché de Chicago sont moins élevés, cependant il est important de réitérer que les ratios auraient sûrement été plus pertinents s'ils avaient couvert une plus longue période et/ou couvert des contrats avec un peu plus de volume.

Selon ces résultats, deux conclusions peuvent être tirées. La première est par rapport à la difficulté d'adaptation des ratios qui sont à l'origine applicable au marché des actions vers le marché des options. De plus, le calcul des ratios montre une réalité de ces marchés et plus particulièrement à Montréal, soit que des contrats d'options sur index (S&P 500) ont peu d'intérêt. Même en appliquant des paramètres moins limitatifs (i.e. différents *moneyness*, expirations, et prix d'exécutions) ou en augmentant la période d'analyse, la situation de manque de volume persiste. Il est vrai qu'il existe des options sur FNB dans le marché qui sont à priori plus liquides (meilleur volume et *open interest*), mais comme nous expliquerons plus tard dans ce travail, les FNB que nous avons choisi ont des caractéristiques intéressantes pour bien comparer les deux marchés (MX vs CBOE). La deuxième conclusion, malgré tout, est que pour des produits semblables, le marché de Chicago offre une meilleure liquidité que le marché de Montréal.



## CHAPITRE 2

### LES MÉTHODES D'ÉVALUATIONS D'OPTIONS

#### 2.1 Généralités

Avant de discuter des différents modèles d'évaluations disponibles dans la littérature et/ou largement utilisés par les investisseurs, regardons d'abord les différents facteurs qui affectent le prix des options. Plusieurs de ces modèles incorporent ces facteurs plus ou moins complexes et il est important de bien les comprendre. L'ensemble de ces facteurs sera étudié dans une situation d'une option d'achat (*call*), mais une logique semblable est concevable et applicable pour une option de vente (*put*).

Supposons une entreprise XYZ dont des options d'achat sur ses titres (i.e. actions) sont disponibles. Les deux premiers facteurs qui déterminent le prix de l'option sont le prix du sous-jacent et le prix d'exécution (*strike*). Si le prix de l'action de XYZ est de 50\$ et que le prix d'exécution de l'option à une période quelconque est de 40\$, son prix sera nécessairement plus élevé que si le prix de l'action était de 45\$. Dans le premier cas, l'option aurait une valeur intrinsèque de 10\$ et dans l'autre, de 5\$. De la même manière, si au lieu que ce soit le prix du sous-jacent qui diminue c'est plutôt le prix d'exécution de l'option qui diminue de 40\$ à 35\$, alors la valeur de l'option augmentera de cette même valeur.

Un autre facteur largement pris en compte par les différents modèles d'évaluations est la valeur du temps (*time value*). La *time value* est la composante de la prime que l'acheteur d'une option de XYZ doit payer au vendeur pour la durée qu'il a de profiter de son droit d'acheter des sous-jacents de XYZ à un prix d'exercice établit. À l'opposé, il est normal que le vendeur soit compensé pour le risque qu'il doit supporter en garantissant un prix d'exécution à l'acheteur jusqu'à expiration. En effet, plus la date d'expiration est loin dans le futur, *ceteris paribus*, plus cette prime de temps sera élevée. Corollairement, pour une date d'expiration **fixe**, une option dont le *strike* sera largement supérieure ou inférieure au prix d'exécution aura probablement moins de chance d'atteindre une valeur proche du sous-jacent à l'expiration.

Cela veut dire que la valeur du temps est plus grande plus la différence entre le *strike* et le prix du sous-jacent est petite.

Le prochain facteur étant crucial dans l'évaluation est la volatilité. La volatilité est l'amplitude ainsi que la fréquence de variation du prix qu'une option a pendant une certaine période de temps. Ici, c'est évidemment la volatilité du sous-jacent dont on parle. Une option d'achat de la compagnie XYZ ayant de larges variations dans ses prix, et ce, de façon plus fréquente, sera comparativement plus dispendieuse qu'une option de la compagnie ABC qui aurait exactement les mêmes caractéristiques, mais dont le prix de l'action est beaucoup plus stable. Il faut donc s'attendre à une prime plus élevée. Cela est expliqué par une logique similaire au paragraphe précédent. L'acheteur qui veut se protéger davantage d'un risque de différenciation entre le prix d'exécution et le prix du sous-jacent à l'expiration et par extension, permettre au vendeur d'être compensé pour ce risque, devra payer pour cette protection. De la même façon qu'un assureur charge plus cher pour assurer un bien dont sa valeur est sujette à des variations plus grandes et plus nombreuses. Nous allons étudier cette volatilité plus précisément dans les différentes méthodes d'évaluations, mais il est important de noter en introduction que cette volatilité est souvent induite par des données historiques du comportement du sous-jacent. Finalement, les taux d'intérêt (i.e. sans risques) et les dividendes du sous-jacent, toujours dans le contexte d'un *call*, sont également à considérer.

En effet, comme dans n'importe quel investissement, l'acheteur d'une option a fait le choix d'investir dans des options plutôt qu'ailleurs ou, dans la forme la plus triviale, ne pas investir dans aucune forme d'actif. On peut croire que cette dernière forme est en soi un choix de ne rien faire et de gagner un taux d'intérêt sans risque. Si ce choix (i.e. taux) fluctue par rapport à celui d'investir, les options deviennent comparativement plus ou moins attrayantes. Prenons un cas théorique simple, où l'investisseur n'a que deux choix. Soit il n'investit pas et reçoit un taux d'intérêt sans risque de 3% ou il investit dans des options d'achat (*call*). Le fait d'acheter une option d'achat permet au détenteur de l'option d'avoir un prix bloqué (*strike*) sur l'achat d'un sous-jacent. Le taux d'intérêt sans risque est en quelque sorte le coût de renonciation de choisir d'investir dans les options. Si ce coût augmente, par le fait qu'une option a l'effet de

bloquer un prix, de bloquer un prix qui a une pression de plus en plus forte à la hausse, nécessite une compensation de l'acheteur de l'option. (i.e. augmentation du prix de l'option). Avant de parler de l'importance de l'existence de la fréquence ainsi que du montant des dividendes d'un sous-jacent sur le prix des options, il faut rappeler que même si on est détenteur d'une option, cela ne nous rend pas propriétaire du sous-jacent et ne nous donne pas droit à la réception des dividendes. De manière générale, savoir qu'il y a émission de dividendes par l'entreprise XYZ du sous-jacent à un impact positif sur les prix par rapport à une option d'une entreprise ABC ne versant pas de dividendes, toute autre chose étant égale par ailleurs. Cet impact est souvent quantifié par plusieurs indices (i.e. avec les Grecques :  $\Psi$  (psi) pour dividendes,  $P$  (rho) pour taux d'intérêt, etc.), mais ce qu'il faut retenir, c'est que puisqu'une option d'achat (*call*) est un droit d'acheter à un prix déterminé, de pouvoir obtenir un sous-jacent ayant des dividendes lorsque l'acheteur aura exercé son droit, fait augmenter la valeur et le prix de l'option.

## 2.2 Le modèle binomial (application sous forme Monte Carlo)

Commençons par un des modèles les plus populaires soit le modèle proposé par Cox, Ross and Rubinstein (1979), le modèle binomial. Souvent apprécié par ses utilisateurs pour sa facilité de compréhension et sa flexibilité lors de l'évaluation d'options plus 'complexes', nous allons comprendre son mécanisme, ses limites et surtout les possibles failles que le modèle a face à des situations d'illiquidités. Avant de commencer, il faut comprendre les conditions dans lesquelles le modèle, tel que vu par ses auteurs, peut s'appliquer. Ces conditions sont :

- 1- Que le taux d'intérêt utilisé dans le modèle soit constant et que ce dernier est le même à l'emprunt qu'au prêt.
- 2- Tous les acteurs économiques sont neutres au risque.
- 3- Variance des prix ( $\sigma^2$ ) du sous-jacent sont constants.
- 4- Absence de coûts de transaction dans la décision d'exécuter, conserver ou vendre l'option (dans le cas d'un *call*).

Ces conditions, qui sont également présentes dans le modèle de Black-Scholes sont en contradiction avec les notions de liquidité expliquées plus tôt dans ce travail. Ce dernier point sera abordé plus tard dans l'appréciation de ces deux modèles. Ces mêmes conditions seront par ailleurs précisées au fur et à mesure que le modèle sera expliqué. Une autre notion primordiale est que le modèle est basé sur la prémissse qu'il n'y a pas de situation d'arbitrage dans le marché. Une situation d'arbitrage peut survenir dans plusieurs types d'actifs. On peut penser aux devises, aux actions, aux contrats à terme, etc. Plus particulièrement dans le marché des options, l'absence de parité entre une option d'achat (*call*) et une option de vente (*put*) peut être vue comme une situation d'arbitrage. Par exemple, supposons que nous avons une action qui transige actuellement à 52\$ et que son prix d'option d'achat (*call*) à maturité de 6 mois pour un prix d'exercice de 51\$ (*strike*) est de 4\$. Supposons aussi qu'au même moment, le prix pour une option de vente (*put*) (même exercice et même maturité) transige à 2\$ et que le taux d'intérêt sans risque du marché est de 5%. Dans ce cas précis, il suffirait de vendre à découvert (*short sell*) l'action à 52\$ et de vendre une option de vente (*naked put*) à 2\$. En faisant ces deux opérations, nous avons une entrée d'argent de 54\$. Simultanément, si on achète une option d'achat à 4\$ et qu'on investit la valeur présente du prix d'exercice pendant la maturité de l'option au taux d'intérêt sans risque, soit  $\left(\frac{51}{1,05^{0,5}}\right)$  (*fiduciary call*), cela produira donc une sortie d'argent de 53,77\$ ( $49,77\$ + 4\$$ ). Nous avons donc exécuté deux stratégies opposées simultanément et gagnés, sans risquer de capital, 0,23\$ pour chaque option. Voici donc un exemple simple d'arbitrage. Comme résume bien Sarvar Ravshanovich (2016) dans son mémoire *Pricing option via double auction*, l'hypothèse d'absence de situations d'arbitrage tient généralement dans la réalité, car le marché est inter relié à un point tel que même s'il y avait des iniquités, celles-ci seraient rapidement rétablies.

Il faut comprendre que le modèle binomial n'est pas un modèle qui s'affaire à approximer directement un prix d'option en prenant en compte les variables du marché. En effet, comme plusieurs modèles, le processus d'évaluation se fait au niveau du sous-jacent (i.e. l'action) et une fois que cette prévision est estimée, on déduit le prix de l'option (i.e. *Stock-Strike*, pour un call). Le modèle a pour caractéristique de prendre en compte les différentes possibilités de directionnalité et d'amplitude que peuvent prendre une action et par extension, une option.

Cela a pour avantage de refléter une réalité soit que la valeur d'une option peut changer à plusieurs reprises, et ce au cours d'une même journée. On peut d'ailleurs faire un parallèle entre la capacité du modèle à s'ajuster face au mouvement des prix et à une caractéristique importante à la liquidité des marchés, soit la continuité, expliquée plus tôt. La façon la plus élémentaire qu'on peut démontrer la progression binomiale d'un actif est par la construction d'un arbre des possibilités. En effet, l'actif à n'importe quel temps  $t$ , est illustré par la jonction des branches d'un arbre.

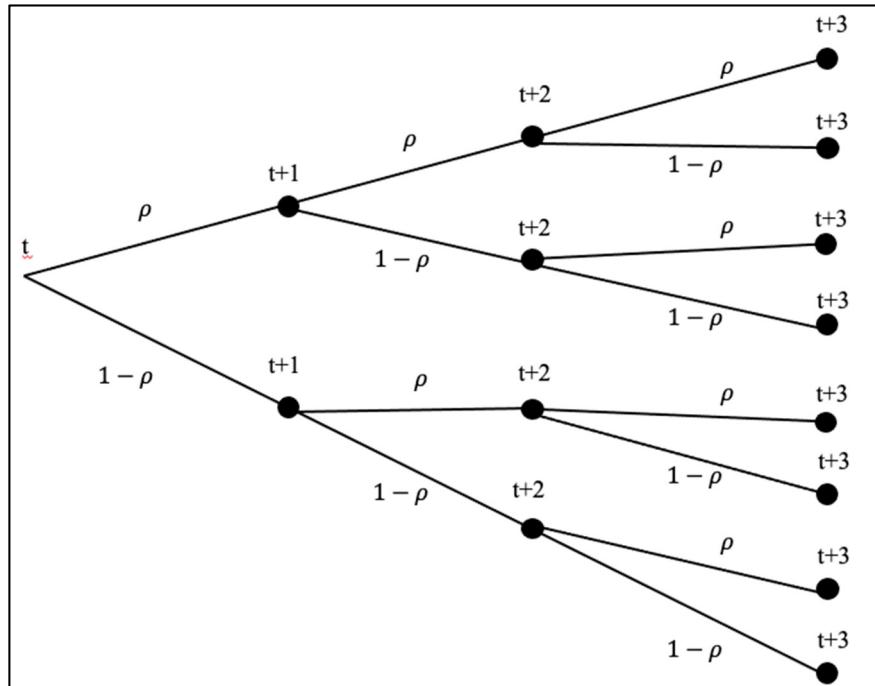


Figure 2.1 Progression binomiale aléatoire

La progression d'une branche à l'autre est aléatoire suivant une probabilité  $\rho$  de monter et  $1-\rho$  de descendre à chaque période  $t$ . Notons que la période  $t$  peut être infiniment petite. En plus de la probabilité déterminant la direction de l'actif au prochain temps  $t$ , il faut ajouter les facteurs d'augmentation et de diminution associés respectivement aux probabilités d'augmentation et de diminution. Dans la représentation graphique précédente, il n'y avait que trois périodes entre le début de la vie de l'option et l'expiration. Le début de l'arbre représente

le début de la vie de l'action et à son extrémité représente le prix de l'action à expiration (expiration du *call*, par exemple). Ici, cela voudrait dire qu'il y a eu 3 moments où l'action a pu soit augmenter ou descendre. Dans la réalité, il existe une grande quantité de possibilités de changement de valeur du sous-jacent entre la date d'émission d'une option et son expiration. On parle ici de plusieurs fois par jour. Dans ce même graphique il existe huit valeurs terminales à 't+3' donc 8 valeurs possibles que peut prendre le sous-jacent à expiration de l'option. De ces valeurs, on peut donc évaluer huit valeurs possibles que peut prendre l'option d'achat. Le but de cette méthode d'évaluation est simplement de reculer l'arbre des probabilités jusqu'au point d'origine. Le moment d'origine peut être simplement le moment présent ou une date antérieure fixe avant l'expiration.

L'hypothèse de non-arbitrage qui est la base de ce modèle doit être respectée en tout temps. Elle permet entre autres qu'il n'y ait pas de possibilités de tirer avantage d'une position dans les options et d'une position opposée simultanée dans les actions et d'obtenir des profits garantis (sans risques). C'est justement sur ce fondement que plusieurs qui étudient le modèle basent leur mécanique qui permet d'arriver aux formules évaluant la valeur de l'option. En effet, on construit un portfolio fictif composé d'une vente à découvert d'une option d'achat (*short call*) pour un montant  $f$  et on utilise cet argent pour acheter  $\Delta$  actions (*long stock*) étant le même sous-jacent que celui de l'option. Ce portfolio fictif ressemblera à ça :

$$S_0\Delta - f \quad (2.1)$$

$S_0$  = Le prix du sous-jacent (i.e. action) au temps t.

$\Delta$  = Quantité fictive achetée de cette action dans le portfolio.

$f$  = Valeur qu'on devra ultimement rembourser qui est l'option à rembourser.

**N.B.** la différence entre les deux termes étant la valeur du portfolio.

Au temps  $t+1$ , l'action peut prendre deux directions, soit monter ou descendre. Cela veut dire qu'au temps  $t$ , dépendamment de la progression de 'S', le portfolio peut prendre deux valeurs :

$$S_0\Delta - f = (S_0u\Delta - fu) e^{-rT} \quad \rightarrow \text{Si } S_0 \text{ augmente.} \quad (2.2)$$

$$S_0\Delta - f = (S_0d\Delta - fd) e^{-rT} \quad \rightarrow \text{Si } S_0 \text{ diminue.} \quad (2.3)$$

Il est à noter que ces équations, étant citées entre autres par Savar Ravshanovich (2016), ont des éléments intéressants. Le premier étant par rapport au terme  $e^{-rT}$ . Celui-ci est simplement une méthode d'actualisation continue pour ramener la valeur future de  $t+1$  à  $t$ , soit la valeur présente. De plus, ces équations viennent du fait que le système binomial doit avoir un risque nul entre les périodes. Cela veut dire que la quantité d'actions achetées au temps présent, moins le prix de l'option doit être égal au prix futur de cette même quantité au prix augmenté d'une proportion ' $u$ ' (idem pour ' $d$ ') moins le prix futur de l'option réagissant à ce même facteur d'augmentation (diminution). Pour déterminer notre valeur de l'option ' $f$ ' ce qui est l'ultime but, il faut isoler  $\Delta$  dans notre équation et en deuxième temps isoler ' $f$ '. Pour ce faire, on égalise les deux cas, car on suppose une absence d'arbitrage et ensuite on isole :

$$(S_0u\Delta - fu) e^{-rT} = (S_0d\Delta - fd) e^{-rT} \quad (2.4)$$

$$\text{Et isoler } \Delta = \frac{f_u - f_d}{S_0u - S_0d} \quad (2.5)$$

Par la suite, cette même égalité va nous permettre d'enfin isoler  $f$ , soit le prix de l'option :

$$f = -e^{-rT}\Delta S_u + e^{-rT}f_u + \Delta S \quad (2.6)$$

Cette dernière équation peut être réécrite de façon à refléter la probabilité que l'option augmente d'un facteur  $u$  ( $p$ ) et de la probabilité qu'une option a de diminuer d'un facteur  $d$  ( $1-p$ ). On peut déduire que la probabilité de diminution d'une option d'achat est

équivalente à une probabilité d'augmentation d'une action. Toujours en se basant sur les hypothèses de départ du modèle, on peut déterminer que :

$$f = e^{-rT}(pf_u + (1 - p)f_d) \quad (2.7)$$

En ayant

$$p = \frac{e^{rT} - d}{(u - d)} \quad (2.8)$$

Il est intéressant de remarquer que cette dernière équation ne prend pas en compte les probabilités réelles d'augmentation et de diminution et que celles-ci sont déduites des facteurs d'augmentation et de diminution même. Cette méthode quoique facile à comprendre est difficile d'application dans la réalité, car elle nous laisse avec plusieurs inconnus. Elle suppose que nous connaissons le comportement futur du sous-jacent. Le mieux qu'on peut faire est d'approximer les valeurs futures possibles du sous-jacent et d'ensuite inférer une valeur pour l'option. Au temps  $t$  (présent), il est impossible dans le cas d'options de type américaines, de connaître à quel moment nous allons exécuter l'option et combien de fois le sous-jacent aura changé de prix entre le moment de l'émission de l'option et son exécution. Nous ne savons pas non plus les proportions futures dont le sous-jacent augmente ou descend. Il existe une alternative à l'application du modèle par l'arbre des probabilités qui, malgré une perte de flexibilité, pourra rendre le modèle plus applicable et les options plus faciles à évaluer. McCormick et Katz (2005) utilisent le modèle binomial et génèrent des valeurs futures pour le sous-jacent en faisant des simulations Monte Carlo. Dans cette nouvelle application du modèle, il suffit d'être en conformité avec les hypothèses de non-arbitrage et de marché sans risques ce qui nous permettra de statuer que  $p, u$  et  $d$  sont constants à travers le temps. Cela revient à fixer de manière arbitraire  $p = 0,5$  (donc  $1 - p = 0,5$ ). Il est à noter que ce choix de probabilités peut être très loin de la réalité, mais théoriquement sain.

Les deux autres variables nécessitant être connus, toujours selon McCormick et Katz, pour évaluer le prix futur d'un sous-jacent sachant les facteurs d'augmentation/diminution et leurs probabilités, est la volatilité et le taux d'intérêt sans risque. Ces variables peuvent être obtenues par des données du marché, comme la volatilité historique et le bond du trésor de la banque du Canada, par exemple. Ils réussissent toutefois à trouver des formules 'génériques' pour le taux d'intérêt et la volatilité. Ces équations ne seront pas étudiées ici, car ces dernières dépendent eux-mêmes de  $u$  et  $d$  qui sont inconnus. Cependant, elles permettent aux auteurs de dégager des formules pour  $u$  et  $d$  qui seront utilisées dans leur processus Monte Carlo :

$$u = \frac{2e^{r\Delta t + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1} \quad (2.9)$$

$$d = \frac{2e^{r\Delta t}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1} \quad (2.10)$$

Dans l'évaluation des options des FNB que nous avons choisis, nous utiliserons une méthode inspirée de celle de McCormick et Katz adaptée aux besoins de notre analyse. Comme mentionné à plusieurs reprises déjà, nous évaluerons des options ciblées à des dates et expirations précises et les évaluerons dans le marché canadien (i.e. MX) et nous ferons le même processus pour des options équivalentes dans le marché américain (i.e. CBOE). Le but est de faire une régression composée de toutes les méthodes les plus populaires et de produire un outil d'évaluation plus performant et plus précis qui sera peut-être plus sensible face à des situations d'illiquidités.

Pour revenir à la simulation Monte Carlo, nous utiliserons cet algorithme écrit sous VBA (*Visual Basic for Applications*) d'Excel qui est une modification de l'algorithme utilisé par ces mêmes auteurs initialement écrits sous Fortran 77 :

## Algorithme 2.1 Méthode Monte Carlo sur Fortran 77

```

subroutine MCBRW (s, n, t, v, r)
dimension s(n)
p = 0.5
dt = t/(n - 1)
evt = EXP (2.0 * v * SQRT (dt))
ert = 2.0 * EXP (r * dt)
d = ert/(evt + 1.0)
u = d * evt
do 10 i = 2, n

      if (RANFU () .lt. p) then
          s(i) = s(i-1) * u
      else
          s(i) = s(i-1) * d
      endif
10    continue
      return
end

```

Cet algorithme est essentiellement le même processus que l'arbre binomial. Ce dernier varie en fonction de cinq variables soient  $s$ ,  $n$ ,  $t$ ,  $v$  et  $r$ . Ce sont respectivement le prix du sous-jacent au moment de l'émission de l'option (i.e. l'action), le nombre de variations du prix du sous-jacent au cours de la vie de l'option, le temps restant entre l'émission et l'expiration (annualisé), la volatilité (annualisée) et le taux d'intérêt sans risque au moment de l'émission de l'option. Dans notre analyse, pour chaque index que nous évaluerons, nous utiliserons  $n = 30$  (nombre de nœuds) soit la ‘fréquence’ de changement de prix avant d'atteindre la valeur terminale du sous-jacent. On identifie aussi le fait que la probabilité pour que  $S$  augmente est de 0,5 ( $p=0,5$ ) La variable  $t$  sera environ 90 jours/365,25, car nous utiliserons des options à expiration de trois mois. L'estimation de volatilité que nous avons choisie de prendre est le coefficient VIX. Les termes  $u$  et  $d$  du code sont les mêmes formules que celles de la page précédente et  $ert$  et  $evt$  sont leurs termes exponentiels. Nous utilisons une boucle ‘*For...else*’ qui nous servira à multiplier le prix de l'action soit par  $u$  ou par  $d$ ,  $n$  nombre de fois. C'est une fonction aléatoire RND () qui renvoie un entier entre 0 et 1 et qui servira de règle de décision à savoir si notre action à la prochaine période augmente ou diminue. Lorsque la boucle sera terminée, notre algorithme produira une valeur terminale pour l'action. Ce qui en fait un

processus Monte Carlo est que cette boucle sera exécutée des milliers de fois. Pour chaque option étudiée, nous avons réalisé 250000 simulations. Il est à noter que la fonction RND () dans VBA n'est pas aussi performante que d'autres fonctions aléatoires dans des langages différents (i.e. comme RANFU() de Fortran) et que notre algorithme pourrait être plus rapide en termes d'exécution. Il est cependant suffisamment rapide pour l'objet de notre étude.

Avant d'aborder les détails entourant la programmation de notre simulation Monte Carlo, il est important d'apporter quelques précisions quant à l'indicateur utilisé pour quantifier le niveau de volatilité de chacune de nos options. En effet, bien que le VIX se base sur la volatilité des compagnies du S&P 500, le TSX60 VIX (aussi appelé VIXC) se base plutôt sur les 60 plus grandes compagnies canadiennes (en termes de leur valeur boursière) à la bourse de Toronto. Nous aurions pu prendre simplement le VIX du CBOE du marché américain et l'appliquer aux options canadiennes. En revanche, dans un souci de cohérence, et du fait que tout au long de ce travail, un effort pour trouver des équivalences sur le marché canadien (i.e. FNB canadiens) a été réalisé, il était préférable de choisir un indice de volatilité canadien pour Montréal (MX). De plus, s'il y a des divergences entre les deux marchés, il sera plus facile de déceler celles-ci en utilisant leurs indices propres. Nous aurions plutôt pu prendre la volatilité historique, mais le choix du VIX (qui est une moyenne pondérée des volatilités implicites des options arrivant à échéance dans 30 jours) est motivé par le fait que c'est un indice de plus en plus utilisé et étant directement relié au marché des options étudiées (CBOE et MX). À noter qu'il existe un indice offert par CBOE qui est le VIX3M qui aurait été plus utile compte tenu de la maturité que nous avons choisis pour les options étudiées, **mais**, puisqu'il n'y a pas d'équivalence offerte au Canada, nous allons nous en tenir au VIX de 30 jours (standard).

Algorithme 2.2 Monte Carlo modifié sous VBA

```

ert = 2 * Exp(r * dt)
d = ert / (evt + 1)
u = d * evt
ReDim sAr(n)

For x = 1 To lngSimulationCount
    Erase sAr
    ReDim sAr(n)
    sAr(0) = s
    For i = 1 To n
        If (Rnd() < p) Then
            sAr(i) = sAr(i - 1) * u
        Else
            sAr(i) = sAr(i - 1) * d
        End If
    Next i
    ActiveSheet.Range(sColumn & lngCurrentRow) = sAr(i - 1)
    lngCurrentRow = lngCurrentRow + 1
Next x

```

L'algorithme proposé par ces auteurs permet de trouver des valeurs terminales du sous-jacent (i.e. action) en fonction de différentes variables et différentes périodicités ( $n$ ). Ces valeurs qui sont les différentes valeurs futures possibles du cours de l'action sont donc comparées au prix d'exercice (*strike*) et le montant futur de l'option est trouvé. En seconde partie, pour évaluer l'option de type américaine, il faut régresser son prix futur, périodes par périodes pour trouver à quel moment (à quel nœud de l'arbre) le prix de l'option est supérieur au prix de l'option future, afin de profiter d'une vente 'hâtive' de l'option. La condition mathématique ci-dessous pourrait être implémentée à notre code pour prendre en considération la caractéristique d'une option de type américaine. Cette caractéristique étant qu'elle peut être exécutée n'importe quand avant l'expiration et qu'un investisseur logique ne garderait pas une position si l'espérance du sous-jacent est inférieure à la période suivante. En d'autres mots, on pourrait ajouter une règle de décision (condition *if*) à chaque nœud  $n$  à savoir si le prix de sous-jacent à ce moment précis était supérieur à l'espérance moyenne de sa valeur à la prochaine période actualisée de manière continue au taux d'intérêt sans risque, que logiquement, l'investisseur sortirait du marché pour exercer son option américaine. Cela veut dire qu'à ce moment précis,

la simulation Monte Carlo n'avance plus dans le temps, car l'investisseur est considéré comme avoir exercé son option. Or, implémenter une telle condition impliquerait d'actualiser la valeur finale du sous-jacent pour chacune des 250000 simulations individuellement, et ce pour chacun des nœuds. Cela rendrait le code beaucoup plus complexe et long. De plus, peu de personnes envisageraient une complexité de la sorte ce qui va à l'encontre de l'objet de cette recherche soit d'utiliser des méthodes largement utilisées dans les marchés. Nous laissons cependant la formulation de notre condition qui pourrait faire l'objet d'une analyse plus poussée dans un travail ultérieur. Enfin, pour simplifier, nous avons donc évalué les options en actualisant la valeur du sous-jacent à expiration comme si c'était une option de type européenne.

Voici la condition *if* mathématiquement :

$$S(i) > e^{-\Delta rt}[(0,5 \times u \times s(i)) + (0,5 \times d \times s(i))] \quad (2.11)$$

Si nous continuons dans l'optique d'une option de type européenne, il suffit de déduire la valeur FV trouvée, la soustraire du prix d'exécution ( $S - K$ ) ce qui nous donne la valeur future de l'option. Enfin, pour connaître la valeur de l'option au moment présent, il faut appliquer la formule d'actualisation en capitalisation continue suivante :

$$PV = \frac{FV_{option}}{(e^{rt})} \quad (2.12)$$

Où  $t = 90/365.25$  jours, soit le temps avant l'expiration des options étudiées divisées par le nombre de jours dans une année.

Plus concrètement, en prenant en exemple l'option VFV (MX) durant la semaine d'essai (*trained*), le prix du sous-jacent au premier jour de la semaine d'essai (prix du FNB au 12 novembre 2018) était de 64,20\$ ('s' dans le code). Le taux d'intérêt qui nous sert de taux sans risque est le bond du trésor à échéance de trois mois du Canada également en date du 12 novembre soit 1.73% ('r') et le VIXC, de 19.75% (donnée annualisée, codée sous 'v'). Le

temps restant avant l'échéance est de 90 jours, donc  $90/365.25$  soit environ 25%, annualisé. Une méthodologie similaire est appliquée pour les contrats d'options américaines, en ayant pris des informations du marché américain (i.e. *t-bill 3 months*, VIX (CBOE)). Enfin, nous avons exécuté le code à 250000 reprises en supposant que l'option avait théoriquement 30 possibilités de changement de prix (i.e. 30 nœuds à l'arbre jusqu'à l'expiration de l'option). Ensuite, dans un tableau, nous avons indiqué la fréquence absolue que chacune des valeurs terminales du sous-jacent avait de se réaliser sur 250000 essais, sa fréquence relative et nous avons multiplié les deux pour avoir le pourcentage de réalisation. Ce pourcentage de réalisation a finalement été multiplié par la valeur de l'option intrinsèque (S-K) pour avoir le produit des probabilités des prix d'options. La somme de tous ces produits (probabilités x options) donne la valeur espérée de l'option à expiration. Ces tableaux des résultats pour tous les produits faisant l'objet de la recherche sont présentés dans les figures suivantes :

p	0.5	n	30	v	0.1975
s	64.20	t	0.246	r	0.01730
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
42.99	0	7	0.00%	0.00	0.00
44.58	0	43	0.02%	0.01	0.00
46.24	0	127	0.05%	0.02	0.00
47.95	0	458	0.18%	0.09	0.00
49.73	0	1412	0.56%	0.28	0.00
51.57	0	3286	1.31%	0.68	0.00
53.48	0	7002	2.80%	1.50	0.00
55.47	0	12755	5.10%	2.83	0.00
57.52	0	20185	8.07%	4.64	0.00
59.66	0	27894	11.16%	6.66	0.00
61.87	0	33771	13.51%	8.36	0.00
64.16	0	36064	14.43%	9.26	0.00
66.54	2.34	34113	13.65%	9.08	0.32
69.01	4.81	28120	11.25%	7.76	0.54
71.57	7.37	19943	7.98%	5.71	0.59
74.22	10.02	12654	5.06%	3.76	0.51
76.98	12.78	6932	2.77%	2.13	0.35
79.83	15.63	3295	1.32%	1.05	0.21
82.79	18.59	1322	0.53%	0.44	0.10
85.86	21.66	447	0.18%	0.15	0.04
89.04	24.84	118	0.05%	0.04	0.01
92.35	28.15	46	0.02%	0.02	0.01
95.77	31.57	6	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	64.47	2.67

Figure 2.2 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VFV trained

p	0.5	n	30	v	0.2237
s	60.15	t	0.246	r	0.01630
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
35.11	0	1	0.00%	0.00	0.00
38.13	0	8	0.00%	0.00	0.00
39.73	0	37	0.01%	0.01	0.00
41.41	0	131	0.05%	0.02	0.00
43.15	0	485	0.19%	0.08	0.00
44.97	0	1341	0.54%	0.24	0.00
46.86	0	3237	1.29%	0.61	0.00
48.83	0	6981	2.79%	1.36	0.00
50.89	0	12885	5.15%	2.62	0.00
53.03	0	20131	8.05%	4.27	0.00
55.26	0	27676	11.07%	6.12	0.00
57.59	0	34007	13.60%	7.83	0.00
60.02	0	36009	14.40%	8.65	0.00
62.54	2.39	33981	13.59%	8.50	0.32
65.18	5.03	27725	11.09%	7.23	0.56
67.92	7.77	20286	8.11%	5.51	0.63
70.78	10.63	12655	5.06%	3.58	0.54
73.76	13.61	7080	2.83%	2.09	0.39
76.87	16.72	3287	1.31%	1.01	0.22
80.1	19.95	1391	0.56%	0.45	0.11
83.47	23.32	482	0.19%	0.16	0.04
86.99	26.84	134	0.05%	0.05	0.01
90.65	30.5	41	0.02%	0.01	0.01
94.47	34.32	8	0.00%	0.00	0.00
98.45	38.3	1	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	60.41	2.83

Figure 2.3 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VFV validation

<b>p</b>	<b>0.5</b>	<b>n</b>	<b>30</b>	<b>v</b>	<b>0.1975</b>
<b>s</b>	<b>30.82</b>	<b>t</b>	<b>0.246</b>	<b>r</b>	<b>0.01730</b>
<b>Final Stock Price</b> <b>Final Option Price</b> <b>Sample Frequency</b> <b>Sample Probability</b> <b>Probability * Stock Price</b> <b>Probability * Option Price</b>					
19.9	0	1	0.00%	0.00	0.00
20.64	0	4	0.00%	0.00	0.00
21.4	0	34	0.01%	0.00	0.00
22.2	0	159	0.06%	0.01	0.00
23.02	0	465	0.19%	0.04	0.00
23.87	0	1415	0.57%	0.14	0.00
24.76	0	3438	1.38%	0.34	0.00
25.68	0	7038	2.82%	0.72	0.00
26.63	0	12498	5.00%	1.33	0.00
27.62	0	19879	7.95%	2.20	0.00
28.64	0	28028	11.21%	3.21	0.00
29.7	0	33750	13.50%	4.01	0.00
30.8	0	36256	14.50%	4.47	0.00
31.94	1.12	33899	13.56%	4.33	0.15
33.13	2.31	27861	11.14%	3.69	0.26
34.36	3.54	20249	8.10%	2.78	0.29
35.63	4.81	12683	5.07%	1.81	0.24
36.95	6.13	7015	2.81%	1.04	0.17
38.32	7.5	3380	1.35%	0.52	0.10
39.74	8.92	1342	0.54%	0.21	0.05
41.22	10.4	442	0.18%	0.07	0.02
42.75	11.93	123	0.05%	0.02	0.01
44.33	13.51	32	0.01%	0.01	0.00
45.98	15.16	9	0.00%	0.00	0.00
	0	0	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	30.96	1.29

Figure 2.4 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) XSP *trained*

<b>p</b>	<b>0.5</b>	<b>n</b>	<b>30</b>	<b>v</b>	<b>0.2237</b>
<b>s</b>	<b>28.45</b>	<b>t</b>	<b>0.246</b>	<b>r</b>	<b>0.01630</b>
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
18.03	0	6	0.00%	0.00	0.00
18.79	0	29	0.01%	0.00	0.00
19.58	0	143	0.06%	0.01	0.00
20.41	0	481	0.19%	0.04	0.00
21.27	0	1380	0.55%	0.12	0.00
22.16	0	3304	1.32%	0.29	0.00
23.1	0	6942	2.78%	0.64	0.00
24.07	0	12714	5.09%	1.22	0.00
25.08	0	20164	8.07%	2.02	0.00
26.14	0	28266	11.31%	2.96	0.00
27.24	0	33855	13.54%	3.69	0.00
28.39	0	36109	14.44%	4.10	0.00
29.58	1.13	33774	13.51%	4.00	0.15
30.83	2.38	27605	11.04%	3.40	0.26
32.13	3.68	20244	8.10%	2.60	0.30
33.48	5.03	12576	5.03%	1.68	0.25
34.89	6.44	6966	2.79%	0.97	0.18
36.36	7.91	3419	1.37%	0.50	0.11
37.89	9.44	1361	0.54%	0.21	0.05
39.48	11.03	477	0.19%	0.08	0.02
41.14	12.69	134	0.05%	0.02	0.01
42.88	14.43	42	0.02%	0.01	0.00
44.68	16.23	7	0.00%	0.00	0.00
46.56	18.11	1	0.00%	0.00	0.00
48.52	20.07	1	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	28.56	1.34

Figure 2.5 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) XSP validation

<b>p</b>	<b>0.5</b>	<b>n</b>	<b>30</b>	<b>v</b>	<b>0.2045</b>
<b>s</b>	<b>250.41</b>	<b>t</b>	<b>0.246</b>	<b>r</b>	<b>0.02355</b>
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
153.49	0	1	0.00%	0.00	0.00
165.52	0	13	0.01%	0.01	0.00
171.87	0	27	0.01%	0.02	0.00
178.48	0	138	0.06%	0.10	0.00
185.34	0	478	0.19%	0.35	0.00
192.46	0	1343	0.54%	1.03	0.00
199.85	0	3333	1.33%	2.66	0.00
207.53	0	6894	2.76%	5.72	0.00
215.5	0	12785	5.11%	11.02	0.00
223.78	0	19976	7.99%	17.88	0.00
232.38	0	28013	11.21%	26.04	0.00
241.31	0	33690	13.48%	32.52	0.00
250.58	0.17	36477	14.59%	36.56	0.02
260.21	9.8	33446	13.38%	34.81	1.31
270.2	19.79	27867	11.15%	30.12	2.21
280.58	30.17	20373	8.15%	22.87	2.46
291.36	40.95	12910	5.16%	15.05	2.11
302.56	52.15	6971	2.79%	8.44	1.45
314.18	63.77	3282	1.31%	4.12	0.84
326.25	75.84	1340	0.54%	1.75	0.41
338.79	88.38	484	0.19%	0.66	0.17
351.81	101.4	125	0.05%	0.18	0.05
365.32	114.91	31	0.01%	0.05	0.01
379.36	128.95	3	0.00%	0.00	0.00
	0	0	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	251.96	11.05

Figure 2.6 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VOO trained

p	0.5	n	30	v	0.2140
s	233.65	t	0.246	r	0.02409
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
145.58	0	2	0.00%	0.00	0.00
151.43	0	7	0.00%	0.00	0.00
157.53	0	35	0.01%	0.02	0.00
163.87	0	133	0.05%	0.09	0.00
170.46	0	466	0.19%	0.32	0.00
177.32	0	1362	0.54%	0.97	0.00
184.46	0	3326	1.33%	2.45	0.00
191.88	0	7100	2.84%	5.45	0.00
199.6	0	12616	5.05%	10.07	0.00
207.63	0	20275	8.11%	16.84	0.00
215.99	0	28039	11.22%	24.22	0.00
224.68	0	33698	13.48%	30.29	0.00
233.72	0.07	36017	14.41%	33.67	0.01
243.13	9.48	34195	13.68%	33.26	1.30
252.91	19.26	27545	11.02%	27.87	2.12
263.09	29.44	20092	8.04%	21.14	2.37
273.67	40.02	12777	5.11%	13.99	2.05
284.69	51.04	6977	2.79%	7.95	1.42
296.14	62.49	3380	1.35%	4.00	0.84
308.06	74.41	1356	0.54%	1.67	0.40
320.46	86.81	411	0.16%	0.53	0.14
333.35	99.7	154	0.06%	0.21	0.06
346.77	113.12	33	0.01%	0.05	0.01
360.72	127.07	4	0.00%	0.01	0.00
	0	0	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	235.05	10.73

Figure 2.7 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) VOO validation

p	0.5	n	30	v	0.2045
s	274.51	t	0.246	r	0.02355
174.73	0	2	0.00%	0.00	0.00
181.44	0	8	0.00%	0.01	0.00
188.42	0	31	0.01%	0.02	0.00
195.66	0	127	0.05%	0.10	0.00
203.17	0	472	0.19%	0.38	0.00
210.98	0	1404	0.56%	1.18	0.00
219.08	0	3325	1.33%	2.91	0.00
227.5	0	7025	2.81%	6.39	0.00
236.24	0	12598	5.04%	11.90	0.00
245.32	0	20173	8.07%	19.80	0.00
254.74	0	27513	11.01%	28.03	0.00
264.53	0	33798	13.52%	35.76	0.00
274.69	0.18	36145	14.46%	39.71	0.03
285.25	10.74	34153	13.66%	38.97	1.47
296.21	21.7	27743	11.10%	32.87	2.41
307.59	33.08	20280	8.11%	24.95	2.68
319.41	44.9	12730	5.09%	16.26	2.29
331.68	57.17	7171	2.87%	9.51	1.64
344.42	69.91	3296	1.32%	4.54	0.92
357.65	83.14	1333	0.53%	1.91	0.44
371.4	96.89	466	0.19%	0.69	0.18
385.66	111.15	155	0.06%	0.24	0.07
400.48	125.97	37	0.01%	0.06	0.02
415.87	141.36	12	0.00%	0.02	0.01
431.85	157.34	3	0.00%	0.01	0.00
		250000	100.00%	276.25	12.15

Figure 2.8 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) IVV trained

p	0.5	n	30	v	0.2140
s	255.77	t	0.246	r	0.02409
Final Stock Price	Final Option Price	Sample Frequency	Sample Probability	Probability * Stock Price	Probability * Option Price
165.77	0	7	0.00%	0.00	0.00
172.44	0	45	0.02%	0.03	0.00
179.38	0	152	0.06%	0.11	0.00
186.6	0	499	0.20%	0.37	0.00
194.11	0	1347	0.54%	1.05	0.00
201.92	0	3403	1.36%	2.75	0.00
210.05	0	7011	2.80%	5.89	0.00
218.5	0	12740	5.10%	11.13	0.00
227.29	0	19939	7.98%	18.13	0.00
236.44	0	28454	11.38%	26.91	0.00
245.95	0	33657	13.46%	33.11	0.00
255.85	0.08	36300	14.52%	37.15	0.01
266.14	10.37	33779	13.51%	35.96	1.40
276.85	21.08	27869	11.15%	30.86	2.35
287.99	32.22	19923	7.97%	22.95	2.57
299.58	43.81	12536	5.01%	15.02	2.20
311.64	55.87	6976	2.79%	8.70	1.56
324.18	68.41	3363	1.35%	4.36	0.92
337.22	81.45	1382	0.55%	1.86	0.45
350.79	95.02	447	0.18%	0.63	0.17
364.91	109.14	129	0.05%	0.19	0.06
379.59	123.82	34	0.01%	0.05	0.02
394.87	139.1	7	0.00%	0.01	0.00
410.76	154.99	1	0.00%	0.00	0.00
	0	0	0.00%	0.00	0.00
		250000	100.00%	257.23	11.70

Figure 2.9 Résultats évaluation de Monte Carlo (méthode binomiale) IVV validation

Voici un tableau récapitulatif énonçant tous les évaluations finales :

Tableau 2.1 Sommaire des résultats évaluation de Monte Carlo

<b>Options</b>	<b>Avant actualisation</b>	<b>Évaluation simulation MC</b>	<b>Prix sur le marché au premier jour de la semaine</b>
VVF trained	2,67\$	2,66\$	2,80\$
VVF validation	2,83\$	2,82\$	2,25\$
XSP trained	1,29\$	1,28\$	1,65\$
XSP validation	1,34\$	1,33\$	1,60\$
VOO trained	11,05\$	11,09\$	8,10\$
VOO validation	10,73\$	10,67\$	10,40\$
IVV trained	12,15\$	12,08\$	12,10\$
IVV validation	11,70\$	11,63\$	10,30\$

### 2.3 Modèle binomial : interprétation des résultats

Encore une fois, dans ce travail, on se concentre sur des options d'achat (*long call*) du côté acheteur. Cependant, comme nous allons le voir plus tard, si nous avons une bonne approximation de la valeur des contrats, des stratégies alternatives peuvent être considérées (*short call, long put, etc.*) En comparant les évaluations des différentes options par le modèle binomial, aux prix demandés (*ask price*) par les échanges (i.e. Bourse de Montréal et Chicago), on remarque des écarts assez importants. On voit que de manière générale, les options à la bourse de Montréal sont surévaluées tandis que des options similaires en termes de sous-jacent et de paramètres sont sous-évaluées du côté de Chicago. Cette surévaluation peut être expliquée du fait que dans le cas d'une option américaine, celle-ci est caractérisée par l'avantage de

pouvoir être exécuté en tout temps avant l'expiration. Cet avantage, que l'option de type Européenne évalué dans la simulation n'a pas, est monnayable dans une prime qui s'ajoute au prix d'achat. Nonobstant cette exception, on peut dégager une tendance de surévaluation par rapport à son marché homologue américain. Il est intéressant de noter qu'un prix demandé par le marché inférieur au prix évaluer pourrait être expliqué par un moins bon niveau de liquidité. À ce moment-ci, on voit que la bourse de Chicago demande moins que l'évaluation déterminée par la simulation qui ne prend même pas la prime d'option américaine. Ceci est peut-être expliqué par un manque de demande sur le marché pour les produits analysés.

## 2.4 Le modèle Black-Scholes (Merton)

Tout comme le modèle précédent, Black et Scholes (1973) ont développé un modèle largement étudié et utilisé. Pour ce faire, ils ont eux aussi mis en place des conditions préalables pour que leur modèle tienne et qui sont semblables pour la plupart à celles du modèle binomial. Comme plusieurs modèles, leur modèle se base sur l'hypothèse d'efficience du marché (*efficient market hypothesis*), qui implique, entre autres, que toute l'information publique est parfaitement incorporée dans les prix d'un actif (i.e. action), à tout moment. Le modèle a également comme prémisses que les marchés sont parfaitement liquides et qu'il n'y a pas de situations d'arbitrage. Nous allons voir à quel point, ce modèle, qui sert principalement à évaluer des options de type européennes est similaire au modèle binomial. Voici ce que les variables que Black-Scholes prennent en compte :

- prix du sous-jacent (i.e. action).
- prix d'exercice (*strike*).
- volatilité.
- temps avant expiration.
- taux d'intérêt sans risque.
- taux de dividendes (Merton).

En plus des similitudes déjà mentionnées, comme le modèle de Cox, Ross et Rubinstein, B-S suppose que le taux d'intérêt sans risque choisi est constant et qu'il est pareil tant à l'emprunt qu'au prêt, que tous les acteurs sont neutres au risque, que la variance estimée ( $\sigma^2$ ) est constante et qu'il n'y a pas de coût de transaction associé aux échanges. Comme mentionné plus haut, ce modèle est principalement utilisé pour évaluer des options européennes dont la principale caractéristique est qu'on puisse exécuter l'option seulement à la date d'expiration et pas avant (contrairement à une option américaine). Voici les équations (*call* seulement) servant à évaluer une option de type européenne développée par ces auteurs dans leur ouvrage, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* (1973) :

$$C = sN(d1) - ke^{-rt}N(d2) \quad (2.13)$$

Où

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{s}{k}\right) + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d2 = d1 - \sigma\sqrt{t}$$

Dans cette formule, le terme  $e^{-rt}$  est l'actualisation de la valeur présente du prix d'exercice. En effet, lorsqu'on achète une option, on ne paye pas le strike avant d'exercer l'option. Il faut donc actualiser ce prix d'exercice de manière continue (d'où l'exponentielle) pour connaître ce que coûtera notre prix d'exercice au temps  $t=0$ .  $N(d1)$  et  $N(d2)$  sont des probabilités de l'option à générer un profit. On calcul  $d1$  et  $d2$  en premier en fonction de leurs paramètres respectifs ( $s$ ,  $k$ ,  $\sigma$ ,  $t$ ) et ensuite on trouve leurs probabilités cumulées sous la courbe d'une fonction normale. Le taux d'intérêt sans risques utilisé dans B-S doit être ajusté à un processus continu. Par exemple, si on a un taux annuel sans risque ( $i$ ), il faut le transformer de manière continue en faisant  $\ln(1 + i)$ . La seule variable à estimer dans l'équation Black-Scholes est la volatilité, dénoté par  $\sigma^2$ . Comme dans le modèle binomial, il faut se servir d'approximations de la volatilité comme la volatilité implicite ou historique.

Dans leur ouvrage *Advanced option pricing models*, McCormick et Katz expliquent à quel point le modèle binomial est similaire au modèle Black-Scholes. La seule différence majeure entre ces deux modèles, qui se basent sur beaucoup d'hypothèses communes, est la périodicité que le sous-jacent peut changer de prix. Rappelons-nous de l'arbre des probabilités avec les nœuds et les branches. Chaque ‘série’ de nœuds correspondait à un moment discret dans le temps. Dans notre code sous VBA, le nombre ‘séries’ de nœuds était défini par la variable  $n$ . Ces auteurs font remarquer que si on tend  $n \rightarrow \infty$ , les prix terminaux du sous-jacent auront une distribution de plus en plus log-normale, ce qui est une des hypothèses de départ clefs du modèle Black-Scholes. Sans rentrer dans les calculs précis, ce qui était des périodes discrètes et définies dans le modèle binomial est devenu une période continue.

Black et Scholes supposent que les prix terminaux, lorsque la périodicité des périodes de changement de prix tend vers l'infinie ( $n \rightarrow \infty$ ), sont distribués de façon log-normale. En effet, si on suppose l'hypothèse d'efficience des marchés (*efficient market hypothesis*) expliquée plus tôt où la progression des prix est parfaitement aléatoire et n'est nullement basée sur les prix antérieurs et que le marché est parfaitement efficace, il est concevable de croire que la distribution est log-normale. McCormick et Katz vont plus loin en disant que même une périodicité peu élevée et un marché modérément efficace sont suffisants pour supposer la log-normalité de la distribution du sous-jacent. Mais qu'est-ce que la log-normalité implique? Cela implique que la distribution des prix qui a graphiquement une asymétrie vers la droite (*right-skewed*) reflète une réalité d'un produit financier à savoir que le prix du sous-jacent (i.e. action) peut uniquement se situer entre 0 et  $+\infty$  (Pas de possibilité d'avoir le prix d'une action dans les négatifs). Cela crée donc un ‘biais’ positif prenant compte que l'action peut perdre jusqu'à 100% de sa valeur, mais peut avoir une augmentation équivalente à plus de 100% de sa valeur (sans limite positive).

Ces premières équations, développées pour des options de type européennes, ne prennent donc pas en compte une situation où on voudrait exercer l'option avant l'expiration (i.e. option de type américaine). C'est dans cette optique qu'il existe plusieurs solutions pour évaluer des options américaines avec Black-Scholes. La première méthode, souvent utilisée par les

utilisateurs de ce modèle, est de tout simplement d'utiliser la formulation pour une option européenne et de n'apporter aucun ajustement. Cela aura pour effet de surestimer l'évaluation de l'option, car le sous-jacent de cette dernière verse possiblement des dividendes et ceux-ci ne seront pas pris en compte. Nous avons vu en introduction sur les méthodes d'évaluation l'impact des dividendes sur le prix des options. On se rappelle qu'un versement de dividende fait baisser la valeur du sous-jacent le jour après son émission et par conséquent, fait baisser la valeur du *call*. Ici, on suppose que le dividende est le seul incitatif d'exercice hâtif.

La seconde alternative, supposant comme la méthode précédente que le seul moment optimal pour exercer une option d'achat avant l'exercice soit juste avant le versement des dividendes, est d'évaluer l'action chaque jour suivant le versement du dividende (*ex-dividend date*) avec la formulation B-S pour option européenne et choisir l'évaluation maximale de l'option parmi tous les *ex-dividend dates* existantes durant la vie de l'option. Cette dernière méthode est facile à appliquer, cependant, il faut connaître exactement le montant, la date précise, et le nombre de dividendes futurs durant la vie de l'option. En plus, cette dernière est longue à calculer (surtout si on est loin avant l'expiration). La version de Black-Scholes que nous utiliserons ressemblera à la première, mais celle-ci sera ajustée en quelque sorte du versement des dividendes des index (FNB) que nous avons ciblés et sera beaucoup plus rapide que la deuxième. C'est Merton (1973), en collaboration avec Black et Scholes, qui modifie la formule initiale de Black-Scholes, pour refléter un sous-jacent qui verserait des dividendes. Sa version ne nécessite pas le moment exact du versement du dividende, ni de calculer la valeur de l'option plusieurs fois durant la vie de l'option. Les formules pour  $d_1$  et  $d_2$  seront pareilles, mais pour le calcul de l'option :

$$C_{merton} = S e^{-yt} N(d_1) - k e^{-rt} N(d_2) \quad (2.14)$$

Où  $y$ = le taux de croissance des dividendes (*dividend yield*) annualisé de manière continue.

*Dividend yield* = dividendes / valeur actuelle de l'action<sup>1</sup>

Évidemment, la réalité ne veut pas qu'un dividende ne soit versé de manière continue, mais cette méthode est plus précise que de simplement utiliser Black-Scholes pour les options européennes et avoir une surévaluation potentielle de l'option. De plus, cette dernière est plus rapide que l'alternative de calculer plusieurs valeurs d'options à l'*ex-dividend date*. Toujours avec Excel, nous avons fourni les mêmes paramètres de nos contrats ( $s$ ,  $x$ ,  $v$ ,  $r$ ,  $t$ ) que ceux utilisés pour le modèle binomial et ensuite ajouté le taux de croissance en dividende ( $y$ ). Nous avons ensuite calculé 'bloc par bloc' les différentes portions de la formule pour enfin établir notre évaluation de prix. Le tableau suivant est un condensé des résultats pour cette méthode. Les colonnes  $N(d_1)$  et  $N(d_2)$  sont les probabilités de la loi normale et  $Xe^{-rt}$  est le terme d'actualisation précédemment définis sous la notation  $Ke^{-rt}$ . La dernière colonne *Call price* est simplement l'application finale de la formule de Black-Scholes (Merton) donc (*Underlying price*  $\times N(d_1) - Xe^{-rt} \times N(d_2)$ ). Un tableau des résultats plus exhaustif se trouve au tableau 1 de l'annexe II.

Name	Underlying Price	$d_1$	$d_2$	$N(d_1)$	$N(d_2)$	$X e^{-rt}$	$S_0 e^{-qt}$	Call Price
Dashboard	\$ 36.07		0.1751	0.6194	0.5695	\$ 34.98	\$ 36.07	\$ 2.42
VVF trained	\$ 64.20		0.0548	-0.0432	0.5219	0.4828	\$ 63.93	\$ 63.96
VVF validation	\$ 60.15		0.0544	-0.0566	0.5217	0.4774	\$ 59.91	\$ 59.90
XSP trained	\$ 30.82		0.0533	-0.0447	0.5213	0.4822	\$ 30.69	\$ 30.70
XSP validation	\$ 28.45		0.0515	-0.0595	0.5205	0.4763	\$ 28.34	\$ 28.32
VOO trained	\$ 250.41	0.0630		-0.0385	0.5251	0.4846	\$ 248.96	\$ 249.27
VOO validation	\$ 233.65	0.0619		-0.0443	0.5247	0.4823	\$ 232.27	\$ 232.48
IVV trained	\$ 274.51	0.0633		-0.0383	0.5252	0.4847	\$ 272.92	\$ 273.27
IVV validation	\$ 255.77	0.0587		-0.0476	0.5234	0.4810	\$ 254.26	\$ 254.41

Figure 2.10 Sommaire des résultats méthode Black-Scholes

<sup>1</sup> Le taux utilisé est le *dividend yield Trailing 12 Months* (TTM) à la première journée d'analyse de l'option et gardé constant tout au long de la période d'analyse.

## 2.5 Modèle Black-Scholes (Merton) : interprétation des résultats

Comme nous le remarquons dans le sommaire des résultats précédent, il y a plusieurs éléments qu'on peut soulever. Premièrement, on remarque que toutes les évaluations faites par Black Scholes sont en deçà de celle faite par le modèle binomial. On remarque toutefois que les évaluations sont relativement proches entre les deux modèles. On remarque aussi que les évaluations sur les options transigées à Montréal sont plus distancées que la celle estimée par le binomial. À l'inverse, sur le marché de Chicago, Black et Scholes se rapproche généralement plus des valeurs actuelles que le modèle précédent. Il est intéressant de voir aussi que même si le modèle Black-Scholes prend en compte des dividendes ce que le modèle binomial ne faisait pas, les évaluations faites par le modèle binomial sont supérieures à celle du modèle Black-Scholes sur le MX.

## 2.6 Appréciation des deux premiers modèles sur la liquidité

En étudiant ces deux modèles, nous pouvons douter de leur conception qui pourrait entraîner des conséquences sur leur fiabilité ou du moins leur précision et ce, dans leur lecture sur le niveau de liquidité. Pour les deux modèles, on peut penser à l'absence du niveau exact de volatilité pour l'évaluation. Les approximations utilisées comme alternative ne pourront jamais refléter parfaitement la réalité d'un marché au temps présent. En revanche, cette incapacité des modèles à quantifier cette variable est un moindre mal dans le cadre de notre recherche, car puisque nous ne faisons qu'une comparaison de deux marchés, l'erreur d'estimation (biais) devrait être égale dans les deux marchés. Dans le cas de Black et Scholes, il existe des modèles plus performants comme le *Six parameters random volatility jump diffusion* de Bakshi et al. (1997) et le *Four parameters continuous-time stochastic volatility* de Heston (1993) qui incorporent en autres, le *volatility smile* soit le principe suggérant que la volatilité implicite des options n'est pas constante lorsque le '*moneyness*' fluctue. Ces modèles sont toutefois beaucoup plus complexes et ne sont pas autant populaires que celui de Black et Scholes. C'est donc pour ces raisons qu'ils ne seront pas davantage étudiés dans ce travail.

Nous avons vu que le modèle binomial et Black et Scholes ont plusieurs conditions pour que ceux-ci soient viables. Si plusieurs se sont penchés sur la validité des hypothèses et leur applicabilité dans la réalité, ce qui nous intéresse le plus sont les hypothèses qui peuvent entrer en conflit avec les notions de liquidités. En effet, les deux modèles supposent que la variance des prix est constante et qu'il n'y a pas de coût de transaction associé avec l'achat ou la vente de l'option. **Or, nous avons vu que ces deux variables ont un rôle fondamental dans la liquidité des options.** D'assumer de telles hypothèses est équivalent à soutenir que le prix d'achat d'une action est le même que son prix de vente ce qui va à l'encontre de la réalité qui est démontrée par le *bid-ask spread*. Ce dernier donne généralement une bonne approximation du niveau d'illiquidité donc ces modèles ignorent vraisemblablement plusieurs facteurs qui pourraient l'affecter!

## 2.7 Le modèle Barone-Adesi Whaley (application option d'actions)

Il existe d'autres méthodes d'évaluation numériques comme le modèle trinomial de Tran (1993) ou *finite methods* par Brennan et Schwartz (1978), mais la méthode analytique suivante est beaucoup plus performante (entre autres en termes de rapidité de calcul) et largement utilisée. Portant le nom de ses auteurs, le modèle Barone-Adesi Whaley (1987), sera le troisième et le dernier utilisé pour évaluer les options sélectionnées et dernier modèle qui sera intégré à notre régression multiple. Pour comprendre les bases du modèle Barone-Adesi Whaley (BAW), rappelons-nous que Merton (1973) a montré que toutes options, qu'elles soient de type Européenne ou Américaine satisfaisait l'équation différentielle partielle (PDE) suivante :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} - rV = 0 \quad (2.15)$$

Où  $S$  était le prix du sous-jacent,  $(r - \delta)$  = taux d'intérêt- taux de croissance des dividendes ( $y$  plus tôt utilisé),  $V$  le prix de l'option et  $\sigma^2$  la volatilité.

BAW a pour base le modèle Black-Scholes, mais ajoute à ce dernier une prime d'exercice. En d'autres mots, cette prime (dénoté par  $V_{prime}$ ) sera ajoutée à la valeur évaluée par B-S et **doit également satisfaire l'équation différentielle**. Pour avoir une conception visuelle :

$$V_{BAW} = V_{BS} + V_{prime} \quad (2.16)$$

Avant de trouver une prime qui satisfait l'équation différentielle, les auteurs vont définir la prime à partir de variables qu'ils auront introduites :

$$\tau = T - t \text{ (temps avant expiration)} \quad (2.17)$$

$$\alpha = \frac{2r}{\sigma^2} \quad (2.18)$$

$$h(\tau) = 1 - e^{-rT} \quad (2.19)$$

$$\beta = \frac{2(r-\delta)}{\sigma^2} \quad (2.20)$$

$$V_{prime} = h(\tau) \cdot g(S, h) \quad (2.21)$$

$\sigma^2$  = Volatilité du sous-jacent.

$S$  = Prix du sous-jacent.

$r$  = Taux d'intérêt sans risque.

C'est donc la fonction  $g$  ici qui doit satisfaire l'équation différentielle, qui une fois réécrite ressemble à ça :

$$S^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S \frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h} g - (1 - h)\alpha \frac{\partial g}{\partial h} = 0 \quad (2.22)$$

Il est important à noter ici que ce qui fait la particularité du modèle BAW, par opposition à d'autres modèles qui utilisent une approche similaire, est que la variable  $T \rightarrow 0$ . Par conséquent,  $h = 0$  ce qui annule la partie droite de l'équation.

$$S^2 \frac{\partial^2 g}{\partial S^2} + \beta S \frac{\partial g}{\partial S} - \frac{\alpha}{h} g - \underbrace{(1-h)\alpha \frac{\partial g}{\partial h}}_{=0} = 0 \quad (2.23)$$

Nous remarquons que la partie restante donne une équation différentielle ordinaire d'Euler de 2<sup>e</sup> ordre (car il y a des dérivés seconde et homogènes (car = 0)). De manière générale, les solutions de ce genre d'équation ont la forme  $g = aS^q$ . Il nous suffit de résoudre cette nouvelle équation pour trouver la solution générale étant la fonction  $g$ . Le calcul de la dérivation de cette équation différentielle d'Euler avec la définition de l'intervalle solution se trouvent à l'annexe I. Une fois ces conditions déterminées on peut écrire la valeur de l'option américaine de cette manière :

$$C(S, T) = c(s, t) + k_{a2}S^{q2} \quad (2.24)$$

Où  $C(S, T)$  est la valeur de l'option d'achat américaine,  $c(s, t)$  est la valeur de l'option européenne (avec un dividende continu) et  $k_{a2}S^{q2}$  est la valeur de la prime.

Ceci n'est pas la réponse finale du modèle. Avec quelques modifications algébriques, nous allons pouvoir obtenir la valeur de l'option américaine dépendant seulement d'un inconnu, soit la valeur critique ( $a_2$  et  $k$  s'annuleront dans les calculs). Pour résoudre le problème, on s'attarde donc au point primordial du modèle BAW soit, la détermination de cette valeur critique qu'on dénotera  $S^*$ . Cette valeur critique est le prix exact de l'option pour lequel un incrément infinitésimal de plus ou de moins déterminera la façon par laquelle nous allons évaluer notre option. On part de l'évidence qu'au point  $S^*$ , l'option d'achat américaine est égale à sa valeur intrinsèque. En effet, si la valeur du sous-jacent (i.e. *stock*) est en dessous de

cette valeur, la valeur de l'option sera déterminée par l'équation précédente et si le *stock* est au-dessus, l'option sera évaluée en faisant la différence entre le *stock* et le *strike* ( $S - X$ ). La dérivation de cette valeur critique est exposée en plus grand détail dans l'ouvrage des auteurs : *Efficient Analytic Approximation of American Option Values (1987)*. Ce qui est important ici pour l'évaluation de l'option est que si nous connaissons la valeur de  $S^*$ , l'option d'achat américaine sera évaluée de la sorte:

$$C(S, T) = \begin{cases} c(s, t) + A_2 \left(\frac{S}{S^*}\right)^{q_2} & \text{lorsque } S < S^* \quad (1) \\ S - X & \text{lorsque } S \geq S^* \quad (2) \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\text{Où } A_2 = \left(\frac{S^*}{q_2}\right) \{1 - e^{(b-r)T} N[d_1(S^*)]\}$$

Dans des termes plus concrets, le détenteur d'une option d'achat américaine est continuellement confronté à deux choix. Soit il exerce son option avant l'expiration et en gagne les produits associés, soit il attend jusqu'à la fin et reçoit les produits d'une option d'achat européenne. Si le prix du sous-jacent (i.e. stock) atteint le niveau critique  $S^*$ , l'investisseur est indifférent à exercer l'option ou non. Si le sous-jacent est au-dessus de la valeur critique, représenté par (2), on va vouloir immédiatement profiter de la situation et exercer l'option, donc en retirer un profit égal au prix du sous-jacent moins le prix d'exécution ( $S-X$ ). Lorsque le prix du sous-jacent est plus bas que la valeur critique, représenté par (1) l'exécution va se faire également, mais à cela s'ajoute la prime d'exécution hâtive. Il est important de préciser que les cas de figure (1) et (2) se réaliseraient dans la mesure où le coût de portage (*cost of carry*) est moins que le taux d'intérêt sans risque. Si le coût de portage était plus élevé que le taux d'intérêt sans risque, nous ne serions dans ni l'un ni l'autre des cas ci-dessus et nous serions dans une situation d'option européenne, car l'option n'aurait jamais avantage à être exécutée hâtivement. On pourrait donc utiliser la formulation de Black-Scholes Merton. Pour apporter quelques précisions par rapport au coût de portage (dénoté par  $b$  par les auteurs du

modèle BAW pour des contrats à terme sur des matières premières), nous allons utiliser la notation  $r - y$ , soit le taux d'intérêt sans risque moins taux de croissance des dividendes ce qui est plus adapté pour le marché des options sur actions. L'introduction de cette nouvelle notation sera appliquée dans les calculs pour évaluer l'option des différents produits analysés.

Si  $r - y \geq r$ , alors européenne, l'option ne sera jamais exécutée hâtivement donc peut approximer par Black-Scholes Merton.

Si  $r - y < r$ , alors américaine.

Sans rentrer dans les détails, voici une partie du code, écrit sous VBA, ayant servi à générer les résultats pour le modèle BAW. On remarque les règles de décision à savoir si d'une part on évaluait par le modèle de Black-Scholes (cout de portage en deçà du taux d'intérêt sans risque) et par la suite si on évaluait avec laquelle des deux équations du modèle (i.e. (1) ou (2) présentées ci-dessus) en fonction de la valeur critique  $S^*$  (dans le code représenté par  $S_k$ ). Finalement, une autre partie du code, qui n'est pas présentée ci-dessus est le calcul de la valeur critique  $S^*$  qui est exécuté par la méthode Newton-Raphson. Un sommaire des résultats est également présenté à la page suivante.

### Algorithme 2.3 Méthode Barone-Adesi Whaley sous VBA

```
If b >= r Then
    BAWAmericanCallApprox = GBlackScholes("c", S, X, T, r, b, v)
Else
    Sk = Kc(X, T, r, b, v)
    N = 2 * b / v ^ 2
    K = 2 * r / (v ^ 2 * (1 - Exp(-r * T)))
    d1 = (Log(Sk / X) + (b + v ^ 2 / 2) * T) / (v * Sqr(T))
    Q2 = (-(N - 1) + Sqr((N - 1) ^ 2 + 4 * K)) / 2
    a2 = (Sk / Q2) * (1 - Exp((b - r) * T) * CND(d1))
    If S < Sk Then
        BAWAmericanCallApprox = GBlackScholes("c", S, X, T, r, b, v) + a2 * (S / Sk) ^ Q2
    Else
        BAWAmericanCallApprox = S - X
    End If
End If
End Function
```

Name	Underlying Price (\$)	Strike Price (X)	Volatility (v) (p.a.)	Interest Rate (r) (p.a.)	Dividend Yield ( $r_f$ ) (p.a.)	Time to Expiration	Cost-of-carry rate ( $b = r - r_f$ ) (p.a.)	% of year to expiration (T)	Call Price
Book Example - Page 7	\$ 1,56	\$ 1,60	12,00%	6,00%	8,00%		-2,00%	50,00%	\$ 0,0291
Book Example - Page 8	\$ 75,00	\$ 70,00	35,00%	10,00%	5,00%		5,00%	50,00%	\$ 4,0870
VFV trained	\$ 64,20	\$ 64,20	19,75%	1,730%	1,50%	90	0,23%	24,64%	\$ 2,5187
VFV validation	\$ 60,15	\$ 60,15	22,37%	1,630%	1,68%	90	-0,05%	24,64%	\$ 2,6506
XSP trained	\$ 30,82	\$ 30,82	19,75%	1,730%	1,56%	90	0,17%	24,64%	\$ 1,2069
XSP validation	\$ 28,45	\$ 28,45	22,37%	1,630%	1,81%	90	-0,18%	24,64%	\$ 1,2493
VOO trained	\$ 250,41	\$ 250,41	20,45%	2,355%	1,85%	90	0,51%	24,64%	\$ 10,2412
VOO validation	\$ 233,65	\$ 233,65	21,40%	2,409%	2,03%	90	0,38%	24,64%	\$ 9,9549
IVV trained	\$ 274,51	\$ 274,51	20,45%	2,355%	1,84%	90	0,52%	24,64%	\$ 11,2303
IVV validation	\$ 255,77	\$ 255,77	21,40%	2,409%	2,17%	90	0,24%	24,64%	\$ 10,8536

Figure 2.11 Évaluation des options avec la méthode BAW

## 2.8 Le modèle Barone-Adesi Whaley : interprétation des résultats

Quand on regarde les résultats, on remarque que les évaluations faites par le modèle Barone-Adesi Whaley sont très proches du modèle Black-Scholes Merton. Ceci n'est cependant pas toujours le cas avec ces deux modèles. Il est vrai que tous deux prennent en considération le taux de dividende (y), mais l'impact de ce dernier est différent sur chacun des modèles. En effet, lorsque le taux de dividende est faible, comme dans le cas des options sélectionnées pour ce travail, la différence entre les deux évaluations est faible. Cependant, si le taux de dividende avait été de 10%, au lieu d'environ 1,5%, *ceteris paribus*, nous aurions eu des résultats très différents. Comme nous allons le voir dans les prochaines sections du travail, dans un souci de maximisation des trois modèles d'évaluations, nous allons intégrer ces deux modèles dans la régression, bien que leurs résultats soient proches. Rappelons-nous que la seule différence qui distingue une option américaine d'une option européenne est son droit d'être exécuté avant l'expiration. Cela veut dire que l'option américaine a la même valeur 'intrinsèque' qu'une Européenne, toute chose étant égale par ailleurs, à l'exception de cette prime d'exercice hâtif. Dans la réalité, la valeur de cette prime peut être très basse voir, presque nulle. De plus, les taux de dividendes (y) utilisés dans le modèle BS et BAW sont très faibles ce qui produit des résultats proches du modèle binomial. Si pour VFV *trained*, par exemple, nous avions utilisés

un ‘y’ de 15% au lieu de 1,5%, il y aurait eu une différence significative entre le premier modèle et les deux derniers.

## 2.9 Les fonds négociés en bourse sélectionnés

Dans cette partie nous allons voir tous les produits dont la liquidité sera étudiée pour comparer les marchés d’échanges. Ceux-ci seront, en second lieu, utilisés pour construire une régression qui tentera de diminuer les effets de la liquidité n’étant pas pris en compte par les modèles d’évaluations les plus populaires, et ce, par les différents acteurs du marché.

La raison de choisir ces FNB (ETFs) en particulier est de maximiser la comparaison. En effet, les fonds américains qui seront utilisés allouent les mêmes proportions aux mêmes compagnies que les fonds canadiens (ou presque) ce qui nous permet de comparer le même groupe d’entreprises et les mêmes composantes. D’un point de vue du sous-jacent, la seule variable qui diffère est la devise dans laquelle le fond est libellé (USD vs CAD seulement pour une partie de nos choix). Leurs options d’achats sont également transigées sur les deux échanges étudiés dans ce travail soit Chicago et Montréal. Il est vrai que si un investisseur canadien achète un investissement libellé en dollars américains et qu’au moment de la possession du titre, le dollar canadien s’apprécie par rapport au dollar américain, que l’investissement aura une moins grande valeur lors de la conversion de devises. Il est également possible que le dollar canadien déprécie pendant la durée de possession du titre libellé en dollar américain et que, au moment de l’exécution de l’option, les profits convertis en dollar canadien soient donc plus importants. Le problème de la devise ici sera ignoré, car l’investisseur canadien ne connaît pas au moment de l’achat d’options, le cours futur du dollar canadien versus le dollar américain (idem pour l’investisseur américain). De plus, pour pallier ce problème, dans l’une des deux paires de fonds choisis, nous avons pris du côté du marché canadien un investissement américain libellé en dollar canadien (*currency hedged*).

Même si plusieurs sociétés de fonds d’investissement ont créé des fonds d’investissement qui suivent des indices du marché, nous avons décidé de prendre les indices créés par Vanguard

Group, inc. et par BlackRock inc. Ces sociétés ont créé des FNB suivant les principaux indices couvrant une majeure partie (en termes de capitalisation) du marché américain. De plus, ce qui intéressant avec leurs produits c'est qu'ils ont un équivalent du même FNB tant dans le marché américain que canadien et qu'en plus, ces produits sont transigés dans les marchés que nous analysons soit à Chicago (CBOE) et à Montréal (MX), respectivement. L'indice de Vanguard transigeant dans les marchés canadiens ne sera pas couvert contre les fluctuations des devises (*currency unhedged*) tandis que celui de BlackRock le sera. Les FNB que nous avons choisis sont des FNB sur indices. L'indice que nous avons choisi est le S&P 500, et ce pour la simple et bonne raison qu'il s'agissait d'un indice largement utilisé et qui couvrait une majorité d'entreprises américaines. De plus, il s'agit d'un des seuls indices en importance où il existe des options tant à la bourse de Montréal qu'à la bourse de Chicago.

La raison pourquoi nous avons choisi des options sur FNB plutôt que simplement des options sur index est que ces dernières sont souvent des options de type européennes donc leur exécution est seulement possible à la date de l'expiration de l'option. À l'opposé les FNB sur les mêmes index de marchés sont exécutables en tout temps durant la vie de l'option. (i.e. de type Américaine). De façon générale, les options sur FNB suivant les index sont beaucoup plus populaires et flexibles (donc aussi plus liquide) que les options sur les index 'classiques'. Voici les FNB suivant le S&P 500 que nous avons sélectionnés:

<i>Vanguard S&amp;P 500 ETF (VOO)</i> <i>iShares Core S&amp;P 500 ETF (IVV)</i>	} Bourse de Chicago (CBOE)
--	----------------------------

<i>Vanguard S&amp;P 500 ETF (VFV)</i> <i>iShares Core S&amp;P 500 index ETF (XSP)</i>	} Bourse de Montréal (MX)
--	---------------------------

N.B. Pour Montréal, le VFV est *unhedged* tandis que le XSP est *hedged*.



## CHAPITRE 3

### LE MODÈLE DE REGRESSION : LA PIÈCE MAÎTRESSE

#### 3.1 Contexte

La pièce maîtresse de cette recherche n'est pas d'étudier des méthodes d'évaluation des options prise de manière individuelle, mais bien d'obtenir une plus-value lorsqu'on combine celles-ci (hypothèse de départ de cette thèse). Le moyen que nous utilisons pour arriver à combiner et donc, maximiser ces outils, est par la régression. Nous utiliserons un outil fiable, simple d'utilisation et largement connu qu'est la fonction *Lnest* d'Excel. Voici l'idée générale du modèle (la régression multiple) dont les termes seront générés grâce à *Lnest* et qui servira à «isoler l'illiquidité » ( $\varepsilon$ ) des marchés pour ultimement envisager une stratégie d'investissement :

$$\text{Option Valuation} = \beta_0 + \beta_{1binomial} + \beta_{2blackscholes} + \beta_{3baw} + \varepsilon \quad (3.1)$$

Où :

- $\beta_0$ = Ordonnée à l'origine (constante).  
 $binomial$ = Option d'achat (*call*) évaluée par la méthode binomiale.  
 $blackscholes$ = Option d'achat (*call*) évaluée par la méthode Black-Scholes.  
 $baw$ = Option d'achat (*call*) évaluée par la méthode Barone-Adesi Whaley.  
 $\varepsilon$ = Terme d'erreur s'intégrant dans le prix estimé de l'option, mais n'étant **pas** expliquée par une des trois méthodes qui sont largement utilisées, par ailleurs.

### 3.2 Généralités et fonctionnement

Avant de mettre en application notre régression et d'interpréter nos résultats, il est important d'aborder quelques généralités au sujet de la régression, nos hypothèses quant à notre modèle ainsi qu'aux explications sur le fonctionnement et les limites de *LINest*. Dans l'image ci-dessous, nous avons un exemple (non relié à notre recherche) de l'application de *LINest* qui utilise une base de données contenant des âges et des années d'éducation associée au revenu annuel d'individus. À droite de ces données, nous avons la fonction *LINest* qui génère des informations concernant la force explicative des deux premières données sur la troisième. *LINest* génère également une panoplie de données additionnelles qui seront essentielles pour interpréter les données associées à la régression. Ces données sont sous forme de tableau comme on le remarque.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Education	Age	Income							
2	13	26	35905							
3	10	27	32386							
4	16	29	20440							
5	15	31	25333	Coefficients for:		Intercept				
6	11	30	34512	-469.719	-1184.206	59562.91				
7	12	21	27883	225.4751	460.08428	7187.702				
8	14	28	24252	0.499993	4596.4419	#N/A				
9	9	20	39579	8.499747	17	#N/A				
10	16	31	31061	3.59E+08	359163734	#N/A				
11	12	31	25064							
12	14	23	28593							
13	13	22	37829							
14	12	31	36621							
15	19	38	17535							
16	15	33	29017							
17	16	28	29914							
18	10	38	28164							
19	14	32	28345							
20	12	26	39232							
21	14	24	36140							
22										

Figure 3.1 Exemple d'utilisation de la fonction *LINest*

Si la corrélation est ‘forte’ ( $> 0,5$ ), on peut donc dire (avec *Linest*) que le lien entre les différentes méthodes d’évaluation peut prédire les prix du marché de l’option. Ces mêmes corrélations qui seront trouvées nous permettront d’estimer des prix futurs, avec des données connues (*inputs*) et de la même manière estimer la valeur des options. Dans des recherches ultérieures, la valeur générée par le modèle pourrait être ensuite comparée à des données historiques des options (*backtesting*) pour estimer l’efficacité de la régression (du modèle) et même devenir un outil utile dans une stratégie d’investissement. La régression multiple est le type de régression qui sera utilisé dans ce travail où la variable prédictive est la valeur de l’option dans le marché (le revenu dans le modèle fictif de l’image ci-dessus) et les variables prédictrices sont les différentes évaluations de l’option par différents modèles. L’éducation dans l’image citée en exemple représenterait le modèle Black et Scholes, le revenu, la méthode binomiale, ainsi de suite (par exemple). Une des utilités fondamentales de la fonction *Linest* est de nous fournir l’équation qui nous permet de trouver les variables prédictives. Elle nous donne aussi des statistiques auxiliaires sur la fiabilité de cette même équation. La fonction *Linest* a été construite de la manière suivante (plages alphanumériques à titre d’exemple):

$$= \text{Linest}(C2:C21, A2:B21, \text{TRUE}, \text{TRUE}) \quad (3.2)$$

- C2 :C21 Plage des données à analyser (différents prix de l’option sur le marché; les variables prédictives).
- A2 : B21 Plage des données à analyser (variables prédictrices données).
- TRUE (3e position) si FALSE= forcer la constante de la régression à 0. Si TRUE= Ne pas forcer la constante à 0.
- TRUE (4e position) si FALSE= ne pas donner de données auxiliaires explicatives. Si TRUE= les donner.

Pour ce qui est des corrélations partielles, il n’en sera pas question dans cette section ni dans ce travail. Une corrélation partielle serait de vouloir quantifier la relation entre une méthode d’évaluation quelconque (appelons-là *alpha*) avec le prix de l’option en l’absence de corrélation entre celle-ci et une autre méthode d’évaluation (supposons *beta*) et en l’absence

de corrélation entre *beta* et le prix de l'option. La donnée située dans la première colonne, troisième rangée, se nomme en terme statistique,  $R^2$ .  $R^2$  est la proportion de la somme des carrés de la variable prédictive (le prix de marché de l'option) expliquée par la somme des carrés des prédicteurs (des modèles). Dans une régression linéaire simple,  $R^2$  est tout simplement le coefficient de corrélation au carré. Si on veut, le  $R^2$  décrit la proportion de la variance partagée entre les prédicteurs et la variable prédictive. Par exemple un  $R^2$  de 0.70 (0.499 dans l'exemple fictif) veut dire que 70% de la variance entre le prix de l'option évalué par les modèles d'évaluation et le prix de l'option du marché est partagée.

Le problème qu'on retrouve dans une régression multiple c'est que les différentes méthodes d'évaluations qui, en les combinant, estiment un prix de l'option, partagent une corrélation ou une variance (corrélation au carré) entre elles et cela peut avoir un effet sur la corrélation envers la variable prédictive qui est erronée. En effet, puisque les prédicteurs (méthodes d'évaluations) sont corrélés entre eux, si on n'enlève pas cette corrélation, la variance (ou corrélation) entre ceux-ci et la variable prédictive sera surestimée. Pour garder l'avantage de la régression multiple tout en éliminant le fait qu'une portion de la variance entre prédicteurs alpha et la variable prédictive et prédicteur *beta* et la même variable prédictive soit compté en double, on utilisera des corrélations semi-partielles. Plus concrètement, puisque les méthodes d'évaluations sont évidemment pas parfaitement indépendantes l'une de l'autre, la corrélation semi-partielle éliminera leur variance partagée ( $R^2$ ). Heureusement, la fonction *Linenst* d'Excel, dans le cadre d'une régression multiple, exécute déjà par défaut des corrélations semi-partielles donc la donnée à la troisième rangée qui est générée (la corrélation) est déjà ajustée de cette variance partagée ( $R^2$ ) entre prédicteurs. (Et ce même pour plusieurs méthodes d'évaluations)

Pour évaluer la qualité de nos coefficients, on peut plutôt réaliser un t-test avec la fonction =T.DISTR.RT (t ratio, degré de liberté) pour avoir la probabilité exacte qu'un autre échantillon choisi au hasard produise un coefficient de 0 plutôt que celui obtenu par l'échantillon initial. Lors du t-test, par exemple, si à côté de 'coefficient equals zero' il est inscrit 1%, cela veut dire que si le coefficient de régression est en réalité nul (=0), la probabilité d'obtenir le même coefficient que l'échantillon initial est de 1% (ce qui est très peu probable, et indique que le

coefficient est potable). En somme, le ratio  $t$  sert à déterminer si le coefficient de régression est nul ou pas ( $=0$ ). Si le ratio  $t$  est assez grand (en prenant compte de ses degrés de liberté) il est donc suffisamment improbable que le coefficient soit nul si la population en entier était évaluée. Pour les régressions multiples, le t-ratio et le F-ratio sont équivalents. Le F-ratio donné par *Linet* en E8 est utilisé dans un F-test qui celui-ci est utilisé si le  $R^2$  (corrélation au carré, ou variance partagée) est assez grand pour rejeter le fait que  $R^2$  dans une population serait de 0. Le F-test va, au même titre que le t-test, nous donner un pourcentage (i.e. un niveau de signification statistique) pour qu'ensuite on choisisse arbitrairement l'efficacité des coefficients de régression.

**N.B.** Un  $R^2$  de 0 voudrait dire qu'il n'y a pas de variabilité partagée entre les méthodes d'évaluation des options et le prix de l'option.

La corrélation au carré ( $R^2$ ) représente la proportion en décimale (ou en pourcentage) de la variabilité entre les données de l'échantillon et la moyenne de celle-ci (au carré), expliquée par la régression (les données prédites). Plus la proportion ( $R^2$ ) est grande, plus la régression est explicative (donne des meilleures prédictions) des données. En résumé, le résiduel est minime. Dans l'exemple de la fonction *Linet* utilisé plus haut, les informations suivantes sont fournies et nous donnent des explications quant à la qualité de la régression :

- E5 et F5 sont les taux de variations (*slope ()*).
- G5 est l'ordonnée à l'origine (ou l'*intercept*).
- E6, F6 et G6 sont les erreurs types (*standard errors*) du *slope* et de l'*intercept*, respectivement.
- E7 est le  $R^2$  de la régression (corrélation au carré) (variance partagée).
- F7 est l'erreur type de l'estimée (*standard error of estimate*).
- E8 est la statistique F de la régression complète.
- F8 est le nombre de degrés de liberté de la somme des carrés résiduelle (*residual sum of square degrees of freedom*).

- E9 et F9 sont les sommes des carrés pour la régression (*sum of square*) et le résiduel, respectivement.

L'erreur type (*standard error*) du coefficient, lorsqu'on divise celui-ci au coefficient correspondant, donne la distance (en écart type), et donc un niveau de précision, à savoir si ce même coefficient serait de 0 dans la réalité. En effet, plus l'erreur du coefficient est petite, moins il y a de chance qu'il y ait eu une erreur d'échantillonnage et donc, que dans la population entière, le coefficient serait différent de celui trouvé par Linest. En d'autres mots, plus la distance en écart-type est grande, plus les chances sont minces que le coefficient soit effectivement 0 (statistiquement non significatif) dans la population.

Plus précisément, lorsqu'on divise le coefficient par son erreur type, cela nous donne le t-ratio (loi de Student). C'est en fait le ratio  $t$  qui est la distance en erreur type de 0. Le t-ratio, comme mentionné auparavant, peut donner une bonne idée si le coefficient serait nul ou non dans le cas d'une population. L'erreur standard (type) de l'estimée (*standard error of estimate*) est la mesure qui détermine la précision de la prédiction. En effet, plus l'erreur type de l'estimée est petite, plus la régression est précise. La donnée générée par *Linest* est en quelque sorte le ' $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ', qu'on multiplie au t-ratio pour obtenir un intervalle de confiance lorsqu'on veut, plus particulièrement, utiliser notre régression en vue d'estimer une prochaine valeur (Où elle va se situer).

**N.B.** Si on a environ 20 degrés de liberté ou plus et/ou si nous n'avons pas l'écart-type de la population, la loi normale peut être utilisée plutôt que la loi de Student. C'est d'ailleurs pourquoi on utilise la loi de Student.

Par exemple, si la donnée générée par *Linest* pour le *standard of estimate* est de 21,1, cela veut dire que pour établir un intervalle de confiance de 95% sur un estimé produit par la régression, nous allons utiliser la fonction =T.INV.2T(.05,18) qui donnera le chiffre (l'erreur type, ici 2,1) à multiplier à la valeur 21,1 ( $\pm 2,1 \times 21,1$ ). Ceci de permettra de savoir à 95% de certitude, en

termes de précision de la régression, à quel point l'estimé de la nouvelle valeur prédite va se situer.

Ce qui est important de remarquer c'est qu'il y a une relation entre  $R^2$  et l'erreur type (standard) de l'estimée, soit plus  $R^2$  est grand, plus l'erreur type l'estimée sera petite (à un intervalle de confiance constant). Le F ratio est le rapport d'une variance sur une autre. Normalement, plus la relation entre un prédicteur et une variable prédite est forte, moins la probabilité F est grande et plus le F-ratio est élevé.

$$F = \frac{\frac{SS \text{ Between}}{df \text{ Between}}}{\frac{SS \text{ Within}}{df \text{ Within}}} \quad (3.3)$$

La valeur F et sa probabilité servent à calculer la signifiance du modèle de régression. On évalue l'hypothèse nulle comme quoi tous les coefficients seraient égaux à 0. La probabilité est la chance (en pourcentage) que l'hypothèse nulle est vraie. Par exemple, une prob (F) = 0.01, signifie qu'il y a un pourcent de chance que tous les coefficients de la régression sont nuls. Cela veut donc dire qu'au moins quelques coefficients de la régression fournis par *Linest* sont pertinents et expliquent du moins en partie les variables prédites.

### 3.3 Résultats et interprétation

Les coefficients de régression ainsi que les données auxiliaires générées par les fonctions *Linest* pour les deux marchés étudiés sont très intéressants. Nous allons aborder chacune des données statistiques individuellement et ensuite donner une appréciation de la régression dans son ensemble. Ci-dessous, nous remarquons deux tableaux soit une régression multiple pour le marché de Montréal (MX) et une autre pour le marché de Chicago (CBOE). Les deux bourses ayant chacune des caractéristiques propres et dans l'objectif de comparer celles-ci, il est évident que nous ne pouvions pas faire une seule régression les combinant. Les tableaux

suivants montrent différentes régressions simples soit les différentes méthodes d'évaluations pour chaque bourse prises individuellement en guise de comparaison. Ceci nous donne l'ampleur de la plus-value qu'a l'utilisation de toutes les méthodes sur la minimisation du résiduel ( $\varepsilon$ ) d'illiquidité. Pour illustrer la mécanique de la régression, prenons l'option VFV à la semaine d'essai (*trained*). Son prix de clôture à la première journée de la semaine était de 2,80\$. L'évaluation faite par la méthode Monte Carlo (à 2,67\$) multiplié au coefficient Monte Carlo de MX ( $\approx -29,71$ ) (idem pour Black-Scholes et BAW) additionné de l'intercept (l'ordonné à l'origine) donne exactement \$2,80\$. Si en revanche nous avions seulement pris l'évaluation Monte Carlo en vase clos, nous aurions eu  $2,66 \times 0,60 + 0,85 \approx 2,45\$$  ce qui est en deçà du prix de marché. Par exemple, pour obtenir une prévision d'un call sur le marché de Montréal à un jour quelconque, il suffirait de prendre les évaluations qu'on obtient de chacun des modèles d'évaluation pour ce même jour et de les multiplier aux coefficients de la régression qu'on a ici. Plusieurs stratégies d'investissements pourraient découler de l'analyse d' $\varepsilon$  soit la différence entre le prix du marché estimé par la régression multiple et celui réellement observé sur le marché.

	MX			
	Coefficients for			Intercept
	Barone-Adesi and Whaley	Black-Scholes	Monte Carlo	
Slope	62,49731769	-30,31269822	-29,70919958	1,057515871
Standard Error	0	0	0	0
R <sup>2</sup>	1	0		
F Statistic		0		
Regression Sum of Squares	0,9625	0		

	CBOE			
	Coefficients for			Intercept
	Barone-Adesi and Whaley	Black-Scholes	Monte Carlo	
Slope	1416,655618	-1696,171899	254,399795	57,46758314
Standard Error	0	0	0	0
R <sup>2</sup>	1	0		
F Statistic		0		
Regression Sum of Squares	8,0675	0		

Figure 3.2 Régressions multiples pour les marchés de Montréal (MX) et Chicago (CBOE)

	MX - Monte-Carlo		CBOE - Monte-Carlo	
	Coefficient	Intercept	Coefficient	Intercept
Slope	0.598808302	0.858242697	1.683015707	-8.978926485
Standard Error	0.226488361	0.488430768	1.370610364	15.65761974
R <sup>2</sup>	0.777533246	0.327203492	0.429844649	1.516530299
F Statistic	6.990107366	2	1.507815888	2
Regression Sum of Squares	0.74837575	0.21412425	3.467771703	4.599728297

	MX - Black-Scholes		CBOE - Black-Scholes	
	Coefficient	Intercept	Coefficient	Intercept
Slope	0.640279959	0.855033087	1.84510297	-9.272886557
Standard Error	0.235291344	0.47599555	1.523644463	16.11897334
R <sup>2</sup>	0.787348257	0.319904129	0.423044617	1.525547041
F Statistic	7.405048685	2	1.466472556	2
Regression Sum of Squares	0.757822697	0.204677303	3.41291245	4.65458755

	MX - Barone-Adesi and Whaley		CBOE - Barone-Adesi and Whaley	
	Coefficient	Intercept	Coefficient	Intercept
Slope	0.639831338	0.855252259	1.845006306	-9.276683091
Standard Error	0.235519462	0.47669598	1.523173229	16.11796841
R <sup>2</sup>	0.786788516	0.320324877	0.423170048	1.525381204
F Statistic	7.38035775	2	1.467226336	2
Regression Sum of Squares	0.757283946	0.205216054	3.413924365	4.653575635

Figure 3.3 Régressions simples des différentes méthodes d'évaluation

Pour les variables auxiliaires de *Linet*, commençons par l'erreur type (*standard error*) qui est de 0 pour les deux marchés. Ceci est assez intéressant puisque cela signifie les coefficients des régressions sont tels que lorsque les variables prédictrices (données brutes du marché) sont multipliées à ceux-ci, on arrive parfaitement à la variable prédictive. De manière plus commune, nous devrions avoir une imperfection qui conduit à un terme d'erreur, mais pas dans ce cas-ci. C'est d'ailleurs ce qui explique un  $R^2$  de 1 dans les deux marchés, qui signifie que 100% de la variance est partagée entre la combinaison de prédicteurs (les modèles d'évaluations) et la variable prédictive (le prix du marché de l'option). Le t-test n'est pas envisageable puisque les erreurs types dans les deux régressions sont inexistantes. De plus, la valeur F dans une situation avec un  $R^2$  élevé, auraient été pertinente pour évaluer si ces aussi 'bons' résultats sont le fruit du hasard, mais le fait que  $R^2$  soit de 1 et qu'il n'y ait pas de degré de libertés rend son calcul caduc. La qualité des résultats, peut être discutable dans la mesure qu'il est conceptuellement peu probable que dans la réalité, ce modèle de régression composé de trois modèles d'évaluations, décrive parfaitement la réalité des prix des options dans le marché. L'hypothèse préconisée pour expliquer ces résultats vient du fait qu'il y a eu peu de données analysées ainsi que peu de volume sur certains contrats d'options. Cela a entraîné une erreur d'échantillonnage

artificiellement nulle. Il n'en reste pas moins que la construction du modèle est appropriée et que des expériences sur des plus gros échantillons pourraient être effectuées. Cependant, sans pouvoir démontrer avec l'échantillon que nous avons un modèle parfait, ce dernier a certainement des capacités prédictives plus élevées que si nous aurions voulu évaluer les options avec un seul modèle d'évaluation. Enfin, pour les régressions simples de chacun des modèles individuellement (générés par *Linst*), il est intéressant de remarquer que le modèle composé des trois méthodes d'évaluation réduit une part du terme d'erreur présent dans les modèles individuels qui sont en partie expliqués par une illiquidité.

Une des raisons expliquant le manque de résidu dans la régression multiple est expliquée par une meilleure précision de l'évaluation par l'amalgamation des méthodes d'évaluations tel que mentionné plus haut. Cependant, la réduction du résidu peut aussi être expliquée par la méthodologie utilisée. En effet, lorsque nous avons choisi la variable prédictrice, soit le prix du marché de l'option, nous avons arbitrairement choisi le prix de clôture de ce dernier pour la première journée de chaque semaine analysée. Nous avons donc ignoré les autres jours de la semaine. La raison est qu'en observant les données de chacune des semaines, nous avons remarqué que les méthodes d'évaluations sont calculées à partir de variables (i.e. le prix d'exécution, la volatilité, le taux d'intérêt sans risque, etc.) qui ne fluctuent pas à l'intérieur même de la semaine. Donc, si nous avions calculé des régressions entre des évaluations semblables et un prix du marché qui fluctue, nous aurions eu des coefficients de régressions nuls. Il aurait peut-être été pertinent de voir d'analyser les produits sur plusieurs semaines pour voir l'impact de la fluctuation de ces mêmes variables sur les coefficient de régression.

Néanmoins, cette même observation nous prouve que le marché de Chicago et Montréal ne sont pas très liquides car le prix du marché fluctue au courant de la semaine de manière beaucoup plus significative que les variables régissant leur évaluation ce qui indique que les prix ne suivent pas vraiment leur valeur fondamentale.

Tableau 3.1 Sommaire des évaluations préliminaires avant régression

Name	Market Price $y_i$	Binomial	Black-Scholes	Barone-Adesi and Whaley	Average (\$)
<b>VFV trained</b>	2.8000	2.6705	2.5181	2.5187	2.5691
<b>VFV validation</b>	2.2500	2.8331	2.6487	2.6506	2.7108
<b>XSP trained</b>	1.6500	1.2879	1.2065	1.2069	1.2337
<b>XSP validation</b>	1.6000	1.3364	1.2481	1.2493	1.2779
<b>VOO trained</b>	8.1000	11.0505	10.2400	10.2412	10.5106
<b>VOO validation</b>	10.4000	10.7342	9.9521	9.9549	10.2137
<b>IVV trained</b>	12.1000	12.1528	11.2291	11.2303	11.5374
<b>IVV validation</b>	10.3000	11.7042	10.8483	10.8536	11.1354

Dans le tableau précédent, on y trouve les évaluations faites par les trois méthodes d'évaluations ainsi que le prix du marché avant le calcul de la régression. En prenant simplement une moyenne arithmétique des évaluations, on constate la sous-évaluation quasi générale des prix sur les deux marchés. Cela nous amène à croire qu'il y aurait peut-être un résiduel plus significatif que celui obtenu par la régression multiple explicable si nous avions analysés une plus grande quantité de semaines. On pourrait d'ailleurs, à partir de ce constat, simplement baser une méthode d'investissement où on pourrait vendre à découvert lorsque la moyenne des évaluations est au-dessus du prix du marché, par exemple.

En résumé, si nous avions eu des coefficients plus réalistes (en étudiant des produits qui ont plus de volumes et étudier plus de données pour un même produit), on aurait plus facilement été capable d'intégrer cette régression multiple à une stratégie d'investissement. En revanche, à titre démonstratif, nous avons décidé prendre un exemple récent d'un produit avec beaucoup plus de volume pour démontrer qu'elle est l'optique de la régression multiple et quelle décision d'investissement il pourrait en émaner. Nous avons décidé d'évaluer un *call* du produit SPY (du CBOE) à ATM et expiration de 3 mois sur une semaine complète de marché (du 6 au 10 décembre 2021). Concrètement, nous avons évalué le prix de l'option avec les trois modèles d'évaluations sélectionnés du travail sur les 4 premiers jours de la semaine. Nous avons ensuite exécuté une régression multiple entre ces évaluations et le prix observé sur le marché (pour le *call*). Cela a fourni des coefficients de régression qui ont servi à estimer la valeur de la 5e journée qui a été comparée avec le prix réellement observé. Au-delà d'observer des coefficients et des données auxiliaires plus réalistes, on obtient un epsilon de 0,06\$. Donc le prix évalué est 0,06\$ en dessous du *ask* demandé. On pourrait simplement baser notre décision d'investissement sur cette information ou le comparer avec un epsilon d'un autre produit du CBOE ou du MX. Évidemment, l'étude d'un plus grand nombre de données serait nécessaire pour produire une régression fiable, mais cet exemple simple confirme que la mécanique présentée dans ce travail est davantage appropriée avec des produits plus liquides.



## CONCLUSION

La liquidité est certainement plus difficile à quantifier lorsqu'il est question du marché des options. Comme nous l'avons vu, la multitude de contrats en vigueur et ce, à des '*moneyness*' et expirations différentes, empêche de comparer plusieurs produits différents sur un long horizon. Les instruments quantifiant la liquidité des marchés sont donc comparativement moins fiables que lorsque qu'ils sont appliqués au marché des actions en raison d'un potentiel biais d'échantillonnage. Néanmoins, nous avons pu déceler une tendance quant au fait que le marché de Chicago avait une liquidité supérieure à celle de Montréal. On a également noté, tant à Montréal qu'à Chicago, la difficulté au niveau de la disponibilité et l'accessibilité des données historiques pour ces produit dérivés qui peut créer une barrière pour un investisseur de type particulier d'intégrer ces informations rapidement afin d'en reposer une stratégie d'investissement (i.e. données incomplètes, payantes ou accessibles qu'à des courtiers institutionnels).

Il est intéressant de remarquer à quel point les méthodes d'évaluations des options, en opposition aux indicateurs de liquidité, sont très flexibles dans leur structure. En effet, bien que celles-ci aient été conceptualisées pour des options de type européenne, elles sont facilement adaptables à celles de type américaine pouvant s'exercer avant la date d'expiration. Comme nous l'avons expérimenté, elles sont capables d'intégrer de nouvelles variables ainsi que des algorithmes pour maximiser leur précision. Nous avons remarqué que le modèle de régression apportait effectivement une plus-value c'est-à-dire que chacune des méthodes d'évaluation augmentaient marginalement la précision de l'évaluation de l'option. C'est entre autres en comparant la capacité prédictrice d'une méthode d'évaluation à lorsque qu'elle est accompagnée de deux autres (i.e. simplement utiliser la méthode binomiale versus la combiner avec BSM et BAW) que nous avons pu constater des résultats intéressants.

Malheureusement, du fait que nombre de contrats d'options étudié était trop restreint, la corrélation entre le modèle et les prix du marché était anormalement haute. Nous ne pouvons donc nous baser sur ces données pour quantifier exactement l'amplitude de la corrélation du

modèle par rapport au prix du marché. Par conséquent, il aurait été prématuré à ce stade de ‘backtester’ ces résultats pour ensuite l’employer dans une stratégie d’investissement.

Quelques recommandations pourraient être mises en œuvre afin de continuer l’exploration de cette étude. Premièrement, il serait intéressant de varier les expirations des contrats d’options et d’étudier ceux-ci sur une plus longue période (i.e. des mois, voire des années). Cela permettrait peut-être d’identifier des facteurs macroéconomiques ayant un impact sur la liquidité non identifiés dans cette étude. Au niveau des méthodes d’évaluation des options, de relaxer certaines contraintes comme d’absolument prendre un produit parfaitement équivalent en termes de portfolio entre le marché Canadien et Américain. Cela permettrait d’étudier au-delà de fonds négocier en bourse sur index et d’avoir des données ayant des volumes plus importants ce qui contribuerait à la fiabilité des indicateurs. Aussi, favoriser des méthodes d’évaluations plus modernes, quitte à ce qu’elles soient moins couramment utilisées, pourraient être intégrer au modèle de ce travail ce qui rendrait la prédition des prix possiblement plus précise. En effet, bien que les méthodes d’évaluations intégrés dans la régression soient toujours utilisées par plusieurs investisseurs, celles-ci datent de plusieurs décennies (i.e. modèle Black-Scholes Merton en 1973).

Il ne faut donc pas négliger les améliorations apportées par d’autres ainsi que l’évolution constante du domaine de l’ingénierie financière. L’incorporation d’un coefficient de régression prenant en compte les effets de la fiscalité et du taux de change des pays dans lequel le marché d’option se trouve pourrait être également une avenue intéressante afin de réduire le terme d’erreur ( $\epsilon$ ) du modèle de ce travail.

## ANNEXE I

### DÉRIVIATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ORDINAIRE DE DEUXIÈME ORDRE (EULER)

Premièrement, sachant que  $g = aS^q$

$$\begin{aligned} g &= qaS \\ g' &= qaS^{q-1} \end{aligned}$$

$$g'' = qa(q-1)S^{q-2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow S^2[q(a(q-1)S^{q-2}) + \beta S[q(aS^{q-1})] - \frac{\alpha}{h}[aS^q]] &= 0 \\ \rightarrow S^q[q(a(q-1) + \beta qa - \frac{\alpha}{h}a)] &= 0 \\ \rightarrow aS^q[q(q-1) + \beta q - \frac{\alpha}{h}] &= 0 \\ \rightarrow aS^q \left[ q^2 - q + \beta q - \frac{\alpha}{h} \right] &= 0 \\ \rightarrow aS^q \left[ q^2 + (\beta - 1)q - \frac{\alpha}{h} \right] &= 0 \end{aligned}$$

Logiquement, pour que cette équation donne 0, il faut que le terme entre crochets=0. De plus, l'équation entre crochets est tout simplement une équation quadratique avec laquelle on trouvera deux racines distinctes.

En faisant :  $q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  pour trouver les racines, on obtient :

$$q_1 = \frac{-(\beta-1) - \sqrt{(\beta-1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}}{2} \quad q_2 = \frac{-(\beta-1) + \sqrt{(\beta-1)^2 + \frac{4\alpha}{h}}}{2}$$

On suppose ici  $\frac{\alpha}{h} > 0$  alors  $q_1 < 0$  et  $q_2 > 0$ .

Selon la relation d'Euler, lorsque nous avons deux racines distinctes, on aura une solution générale à notre équation différentielle de la forme :

$$g(S) = a_1 S^{q_1} + a_2 S^{q_2}$$

Pour trouver une solution générale à l'équation différentielle, il faut trouver des conditions qui vont restreindre l'ensemble de solutions possibles. En effet, on ne recherche pas une réponse unique qui satisfait l'équation, mais bien un intervalle de possibilités. Des conditions ont été imposées pour 'borner' la solution générale de l'équation différentielle. La première contrainte est que  $a_1$  doit égaler 0. La raison est que puisque nous avons supposé plus tôt que  $q_1 < 0$ , si  $a_1$  avait une autre valeur autre que 0, si on 'tendait'  $S \rightarrow 0$ , on obtiendrait une prime qui oscillerait entre  $+\infty$  et  $-\infty$ .

Or, logiquement, la valeur de la prime pour une option américaine ne doit pas osciller de la sorte. De manière générale, lorsque la valeur du sous-jacent (i.e. stock) se rapproche de 0 ( $S \rightarrow 0$ ), la prime devrait également tendre vers 0. D'où le fait que  $a_1=0$ . Puisque  $q_2 > 0$ , cela n'affectera pas le deuxième terme.

La deuxième contrainte est que  $a_2$  doit être plus grand que 0. En effet, si ce n'est pas le cas et que le  $S$  (*stock*) augmente, la prime de l'option américaine (à un *strike* fixé) n'augmentera pas non plus ce qui n'est pas intuitif.

La solution de l'équation différentielle est donc  $k a_2 S^{q_2}$  (k étant une constante qui s'annulera lors de la détermination de la valeur critique).

## ANNEXE II

### RÉSULTATS EXHAUSTIFS POUR LA MÉTHODE BLACK-SCHOLES

Tableau-A II-1 Tableau exhaustif des données pour le calcul de la méthode Black-Scholes

<b>DO NOT DISTURB ROW</b> 2 - This row is linked to "Black-Scholes Option Pricing" Worksheet.	<b>Underlying Price</b>	<b>Strike Price</b>	<b>Volatility (p.a.)</b>	<b>Interest Rate (p.a.)</b>	<b>Dividend Yield (p.a.)</b>	<b>Time to Expiration</b>	<b>% of year to expiration</b>						
<b>Dashboard</b>	\$ 36.07	\$ 35.00	48.25%	1.00%	0.00%	26	7.12%						
<b>VFV trained</b>	\$ 64.20	\$ 64.20	19.75%	1.730%	1.50%	90	24.64%						
<b>VFV validation</b>	\$ 60.15	\$ 60.15	22.37%	1.630%	1.68%	90	24.64%						
<b>XSP trained</b>	\$ 30.82	\$ 30.82	19.75%	1.730%	1.56%	90	24.64%						
<b>XSP validation</b>	\$ 28.45	\$ 28.45	22.37% ±0.45%	1.630%	1.81%	90	24.64%						
<b>VOO trained</b>	\$ 250.41	\$ 250.41	2.355%	2.355%	1.85%	90	24.64%						
<b>VOO validation</b>	\$ 233.65	\$ 233.65	21.40%	2.409%	2.03%	90	24.64%						
<b>IVV trained</b>	\$ 274.51	\$ 274.51	20.45%	2.355%	1.84%	90	24.64%						
<b>IVV validation</b>	\$ 255.77	\$ 255.77	21.40%	2.409%	2.17%	90	24.64%						
<hr/>													
$\ln(S_0/X)$	$t(r-q + \sigma^2 / 2)$	$\sigma \sqrt{t}$	$d_1$	$d_2$	$N(d_1)$	$N(-d_1)$	$N(d_2)$	$N(-d_2)$	$e^{-rt}$	$X e^{-rt}$	$e^{-qt}$	$S_0 e^{-qt}$	Call Price
0.0301	0.0090	0.1287	0.3038	0.1751	0.6194	0.3806	0.5695	0.4305	0.9993	\$ 34.98	1.0000	\$ 36.07	\$ 2.42
0.0000	0.0054	0.0980	0.0548	-0.0432	0.5219	0.4781	0.4828	0.5172	0.9957	\$ 63.93	0.9963	\$ 63.96	\$ 2.52
0.0000	0.0060	0.1110	0.0544	-0.0566	0.5217	0.4783	0.4774	0.5226	0.9960	\$ 59.91	0.9959	\$ 59.90	\$ 2.65
0.0000	0.0052	0.0980	0.0533	-0.0447	0.5213	0.4787	0.4822	0.5178	0.9957	\$ 30.69	0.9962	\$ 30.70	\$ 1.21
0.0000	0.0057	0.1110	0.0515	-0.0595	0.5205	0.4795	0.4763	0.5237	0.9960	\$ 28.34	0.9955	\$ 28.32	\$ 1.25
0.0000	0.0064	0.1015	0.0630	-0.0385	0.5251	0.4749	0.4846	0.5154	0.9942	\$ 248.96	0.9955	\$ 249.27	\$ 10.24
0.0000	0.0066	0.1062	0.0619	-0.0443	0.5247	0.4753	0.4823	0.5177	0.9941	\$ 232.27	0.9950	\$ 232.48	\$ 9.95
0.0000	0.0064	0.1015	0.0633	-0.0383	0.5252	0.4748	0.4847	0.5153	0.9942	\$ 272.92	0.9955	\$ 273.27	\$ 11.23
0.0000	0.0062	0.1062	0.0587	-0.0476	0.5234	0.4766	0.4810	0.5190	0.9941	\$ 254.26	0.9947	\$ 254.41	\$ 10.85



## BIBLIOGRAPHIE

- Abdullaev, S. R. (2016). Pricing options via double auctions [Unpublished doctoral thesis]. King's College London.
- Amihud, Y., & Mendelson, H. (1991). Liquidity, asset prices and financial policy. *Financial Analysts Journal*, 47(6), 55-66.
- Amihud, Y., Mendelson, H., & Lauterbach, B. (1997). Market microstructure and securities values: Evidence from the Tel Aviv Stock Exchange. *Journal of Financial Economics*, 45(3), 365-390.
- Baker, H. K. & Filbeck, G. (Eds.). (2015). Investment risk management. Oxford University Press.
- Barone-Adesi, G., & Whaley, R. E. (1967). Efficient analytic approximation of American option values. *The Journal of Finance*, 42(2), 301-320.
- Bessembinder, H., & Venkataraman, K. (2010). Bid-ask spreads: Measuring trade execution costs in financial markets. In R. C. Hoboken (Ed.), Encyclopedia of Quantitative Finance, (pp. 184-190). John Wiley & Sons.
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.
- Bogdan, S., Baresa, S., & Ivanovic, S. (2012). Measuring liquidity on stock market: Impact on liquidity ratio. *Tourism and Hospitality Management*, 18(2), 183-193.
- Bollen, N. P. B., Smith, T., & Whaley, R. E. (2004). Modeling the bid/ask spread: Measuring the inventory-holding premium. *Journal of Financial Economics*, 72(1), 97-141.
- Boyle, P. P. (1976). Options: A Monte Carlo approach. *Journal of Financial Economics*, 4, 323-338.
- Carlberg, C. G. (2016). Regression analysis: Microsoft Excel. Que Publishing.
- Carpentier, C., L'Her, J.-F. & Suret, J.-M. (2008). On the competitiveness of the Canadian Stock Market. *Banking & Finance Review*, 24(2), 287-310.
- Constable, S. (2017, 5 novembre). If you're trading options on ETFs, read this first. *The Wall Street Journal*. Répéré à <https://www.wsj.com/articles/if-youre-trading-options-on-etfs-read-this-first-1509937440>

- Cox, J. C., Ross, S. A., & Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Fleming, M. J. (2003). Measuring treasury market liquidity. *Economic Policy Review*, 9(3), 83-108
- Foucault, T., Pagano, M. & Röell, A. (2013). Market liquidity: Theory, evidence, and policy. Oxford University Press.
- Gabrielsen, A., Marzo, M., & Zagaglia, P. (2011). Measuring market liquidity: An introductory survey. arXiv:1112.6169
- Halpern, P., & Puri, P. (2007). 'Canada steps up' - task force to modernize securities legislation in Canada: Recommendations and discussions. *Capital Markets Law Journal*, 2(2), 191-221.
- Hasbrouck, J. & Schwartz, R. A. (1988). Liquidity and execution costs in equity markets. *The Journal of Portfolio Management*, 14(3), 10-16.
- Jain M., & Singla, R. (2018). Liquidity and its measures. *International Journal of Research and Analytical Reviews*, 5(2), 2176-2182.
- Junghenn, H. D. (2012). Option valuation: A first course in financial mathematics. CRC Press.
- Katz, J. O., & McCormick, D. L. (2005). Advanced option pricing models: An empirical approach to valuing options. McGraw-Hill.
- Kobayashi-Solomon, E. (2014). The intelligent option investor: Applying value investing to the world of options. McGraw-Hill Education.
- Kolb, R. (1995). Understanding options. Wiley.
- Marsh, T., & K. Rock. (1986). Exchange listing and liquidity: A comparison of the American Stock Exchange with the NASDAQ National Market System. American Stock Exchange Transaction Data Research Project, Report No. 2.
- Sarr, A. and T. Lybek. 2002. Measuring liquidity in financial markets. *International Monetary Fund Working Paper* 02/232
- Strange, S., & Kaserer, C. (2009). Market liquidity risk: An overview (Working Paper No. 2009-04). Technische Universität München, Center for Entrepreneurial and Financial Studies. Répéré à <https://www.econstor.eu/bitstream/10419/48415/1/605089116.pdf>

United States Senate, 2007. *Sustaining New York's and the US' global financial services leadership.* Report commissioned by New York's Mayor and Senator Schumer.  
<http://graphics8.nytimes.com/images/2008/12/12/business/SchumerBloomberg.pdf>

Zingales, L. (2007). Is the U.S. Capital Market losing its competitive edge? (Working Paper No. 192/2007). European Corporate Governance Institute Working Paper Series in finance.