Analysis 2

xx.xx.2025

Contents

0.1 Vorlesung 1

0.2 Metrische und Normale Räume

0.2.1 Def: Metrik, Metrischer Raum

Sei X eine Menge. Dann ist $d : X \times X \to [0, \infty)$ eine Metrik, falls

- $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

und dann ist (X, d) ein Metrischer Raum.

Beispiel:

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $d(x, y) = ||x - y||_p$. Dann ist d eine Metrik.
Die Diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Die Induzierte Metrik
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, und sei $d_A = d$ dann ist d_A eine Induzierte Metrik auf A.

0.2.2 Def: Norm

Eine funktion $|| \cdot || : V \to [0, \infty)$ Ist eine Norm, falls

- $||u|| \geq 0$
- $||\lambda u|| = |\lambda| ||u||$
- $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

0.2.3 Satz: Norm induziert Metrik

Sei $(V, || \cdot ||)$ ein normierter Raum, dann ist $d(u, v) = ||u - v||$ eine Metrik.

0.2.4 Def: Skalarprodukt, Euklidischer Raum

sei V ein reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt, falls

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, v \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
- $\langle u, u \rangle \geq 0$

Dann ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Raum.

0.2.5 Satz: Skalarprodukt induziert Norm

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle$ ein euklidischer Raum. Dann definiert $||u|| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ eine Norm auf V.

Lemma:

Sei V ein euklidischer Raum. Dann ist $\langle u, v\rangle \leq ||u||||v||$.
Beweis: $0 \leq ||\lambda u - v||^2$

0.2.6 Def: Äquivalenz von Normen

Zwei normen f, g sind Äquivalent auf einem Vektorraum V, falls konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren s.d. $c_2 f(u) \leq g(u) \leq c_1 f(u)$ für alle $u \in V$.

Beispiel

$||\cdot||_\infty$ und $|\cdot|$ sind äquivalent auf $\mathbb{R}^n$

$$||x||_\infty \leq |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2} \leq \left(n \max_i |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{n}||x||_\infty$$

Alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. Dies gilt nicht für unendliche Räume.

0.2.7 Def: Folgenräume

$V = \left\{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} | x_i \in \mathbb{R}\right\}$
$||x||_{l^p} = \left(\sum_i^\infty x^p\right)^{1/p}$
$||x||_{l^p} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$
$l^p := \left\{x \in V | ||x||_{l^p} < \infty\right\}$

l^p ist VR

für $l = 1$. $x \in \ell^1 \Rightarrow \lambda x \in \ell^1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, weil

$$||\lambda x||_{\ell^1} = \sum_i^\infty |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_i^\infty x_i < \infty$$

Wenn $x, y \in \ell^1$ dann $x + y \in \ell^1$.

$$\sum_i^N |x_i + y_i| = \sum_i^N |x_i| + \sum_i^N |y_i| \leq ||x||_{\ell^1} + ||y||_{\ell^1}$$

$\sum_i^N |x_i + y_i|$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Somit $x + y \in \ell^1$.
Es gilt $||x||_{\ell^\infty} \leq ||x||_{\ell^1}$ und somit $\ell^1 \subset \ell^\infty$.
zu $\epsilon > 0 \exists i$ s.d. $|x_i| \geq ||x||_{\ell^\infty} - \epsilon$
Somit $||x||_{\ell^\infty} \leq |x_i| + \epsilon \leq \sum_i^\infty |x_i| + \epsilon$

0.3 Konvergenz in Metrischen Räumen

0.3.1 Def:

Sei X ein metrischer Raum mit d. Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt beschränkt, falls $x_0 \in X$ und $K > 0$ sodass $d(x_k, x_0) \leq K$ für alle k. $(x_n) \subset X$ heißt konvergent, falls ein $x \in X$ existiert sodass $d(x_k, x) \to 0$ für $k \to \infty$.

0.3.2 Satz: Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ besitzt eine konvergente Teilfolge

0.3.3 Def:

Sei X ein metrischer Raum und $(x^k) \subset X$ eine Folge. Diese Folge ist eine Cauchy Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert s.d. $d(x^k, x^m) < \epsilon$ für all $k, m \geq k_0$

0.3.4 Jede konvergente Folge ist Cauchy

Nicht jede Cauchy Folge ist konvergent. Beispiel: $X = \mathbb{Q}$ mit $d(p, q) = |p - q|$.

0.3.5 Def: Vollständiger Raum

Ein Metrischer Raum X heißt vollständig, falls jede Cauchy Folge darin konvergiert. Ein Vollständiger Normierter Raum heißt Banach Raum. Ein Vollständiger Euklidischer Raum heißt Hilbert Raum.

0.4 Vorlesung 2

0.5 Vorherige Vorlesung

(X, d) Metrischer Raum
$(V, ||\cdot||)$ Normierter Raum
$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ Euklidischer Raum

0.5.1 Äquivalenz von Normen

zwei normen f, g sind äquivalent, falls c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_2 f(x) \leq g(x) \leq c_1 f(x)$$

Alle normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.

0.5.2 Vollständiger Raum

Der metrische Raum (X, d) ist vollständig falls alle Cauchy Folgen konvergieren.

ℓ^1 Vollständigkeit

$(\ell^1, ||\cdot||_{\ell^1}$ ist vollständig. Sei $x \subset \ell^1$ eine Cauchy Folge in ℓ^1. D.h. dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N}(\underbrace{||x^k - x^m||_{\ell^1}}_{=\sum_i^\infty |x_i^k - x_i^m} < \epsilon)\forall k, m \geq k_0 \tag{0.1}$$

$$\Rightarrow x^k \text{ ist CF für } \mathbb{R} \ \Rightarrow \exists x_i \in \mathbb{R}(x_i^k \to x_i, k \to \infty \tag{0.2}$$

0.6 (1.3) Offene und abgeschlossene Menge

0.6.1 Def:

Sei (X, d) ein mtrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$ Dann ist

- $B_r(x_0) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ die Offene Kugel
- $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ abgeschlossene Kugel
- $U \subset X$ heißt umgebung von x_0, falls $\exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x_0) \subset U$.
- $U \subset X$ heißt offen falls $\forall x \in U \ \exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon \subset U$.
- $A \subset X$ ist abgeschlossen falls A^c offen ist.

Elementare Eigenschaften

- $\emptyset$ und X sind offen und abgeschlossen.
- $B_r(x_0)$ ist offen. Sei $x \in B_r(x_0)$ und sei $\epsilon = r - d(x, x_0) > 0$ dann ist $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$
- $y \in (\overline{B}_r(x_0))^c \Rightarrow d(y, x_0) > r$ und sei $\epsilon = d(y, x_0) - r > 0$ Dann $B_\epsilon(y) \subset \left(\overline{B}_r(x_0)\right)$
- Durchschnitt endlich vieler offenen mengen ist offen. Sei V, U offen. Sei $x \in U \cap V$, sei ϵ_1, ϵ_2 s.d. $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\epsilon_2}(x) \subset V$ dann sei $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ und $B_\epsilon(x) \subset U \cap V$

0.6.2 Satz:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann existiert eine Umgebung von X und V von y mit $U \cap V = \emptyset$.
Beweis: $2\epsilon = d(x, y) > 0$ sei $U = B_\epsilon(x), V = B_\epsilon(y)$ dann $\exists z \in B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y)$ und dann $2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon$

0.6.3 Satz:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen, das ist äquivalent zu $\forall (x^k) \subset A$ mit $x^k \to x$ in X dann gilt $x \in A$.
Beweis: "$\Rightarrow$": Annahme: $x \notin A$ dann $\exists \epsilon > 0$ so dass $B_\epsilon(x) \subset A^c$. Widerspruch zu $x_k \in B_\epsilon(x)$ für $k \geq k_0$.
"$\Leftarrow$": Nehme an dass A^c nicht offen ist. Dann existiert ein $x \in A^c$ sodass $B_\epsilon(x) \not\subset A^c$ für alle ϵ. Wähle $\epsilon = 1/n$, dann $\exists x_n \in B_{1/n}(x)$, $x_n \in A$ Dann $x_n \to x$, nach vorherigem $x \in A$ Widerspruch

0.6.4 Def:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, Sei $M \subset X$ und $x_0 \in X$ heißt innerer Punk von M falls $x_0 \in M$ und $\exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(x_0) \subset M$.
$x_0 \in X$ heißt innerer Punkt, falls alle ϵ Kugel um x_0 ein $y \in M$ und ein $z \in M^c$ enthält.
$x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt von M falls in jeder ϵ kugel von x_0 ein $y \in M$ mit $y \neq x_0$ liegt.
$x_0 \in X$ heißt Isolierter punkt falls $x_0 \in M$ aber ist kein Häufungspunkt.

- $\dot{M}$ Menge der Inneren Punkte von M
- ∂M Menge der Randpunkte von M
- $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist der Abschluss von M

0.6.5 Teilraumtopologie

Sei (X, d) ein metrischer raum, sei $X_0 \subset X$ dann ist (X_0, d) auch ein metrischer Raum. Dann ist $U_0 \subset X_0$ offen, falls $U \subset X$ existiert, offen und $U \cap X_0 = U_0$ ist.

0.6.6 Produkttopologie

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, dann ist $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum mit der metrik

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2))$$

$W \subset X \times Y$ ist offen, falls $\forall (x, y) \in W$ eine umgebung U von $x \in X$ existiert und eine Umgebung V von $y \in Y$ s.d. $U \times V \subset W$

0.7 Stetige Abbildung zwischen Metrischen Räumen

0.7.1 Def: Stetigkeit

Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. diese Abbildung ist stetig in x_0 falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ und } d_x(x, x_0) < \delta)$$

Falls für alle $x \in X$ f stetig ist, dann heißt f stetig.

0.7.2 Def: Lipschitz Stetig

falls $L \geq 0$ exisiert und

$$d_y(f(x), f(x')) \leq L d_x(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

0.7.3 Satz:

Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume, $f : X \to Y$ ist stetig gdw $f^{-1}(V) \subset X$ offen für alle $V \subset Y$, V offen, ist

0.8 Vorlesung 3

0.9 Vorherige Vorlesung

- Stetige Abb $f : X \to Y$. $\epsilon\delta$ Kriterium ist äquivalent zum Folgenkriterium.
- Lipschitstetigkeit
- Rechenregeln
- f stetig Äquivalent zu Urbild offener Menge offen

0.9.1 Def: Homeomorphismus

Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \to Y$ deren inverse auch stetig ist heißt Homeomorphismus. X ist heomeomorph zu Y, falls es einen Homeomorphismus von X zu Y gibt.

Bsp

$f : [0, 2\pi) \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine bijektive stetige Abbildung dessen Inverse nicht stetig ist. Falls der Definitionsraum Kompakt ist (Beschränkt und Abgeschlossen) So ist die Inverse stetig.

Bsp

- $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist homeomorph zu $\mathbb{R}^n$ mit $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
- Invers und stereographischen Projection $p \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$ funktion $i : \mathbb{R}^n \backslash \{p\} \to \mathbb{R}^n \backslash \{p\}$ mit Eigenschaften
  - $i(x)$ und x liegen auf Halbgeraden durch punkt x: $i(x) - p = \lambda(x - p)$ für ein λ
  - $|i(x) - p||x - p| = \alpha \Rightarrow i(x) = p + \frac{\alpha}{|x-p|^2}(x - p)$

  i ist stetig und es gilt $i^{-1} = i$

$$i(x) - p = \frac{\alpha}{|x - p^2|}(x - p) = \frac{1}{\alpha}|i(x) - p|^2(x - p) \tag{0.3}$$

$$\Rightarrow x - p = \frac{\alpha}{|i(x) - p|^2}(i(x) - p) \tag{0.4}$$

Bsp

$\mathbb{R}^n$, $p = N = (0, \cdots, 0, 1)$ und $\alpha = 2$

$$i_N(x) = N + \frac{2}{|X - N|^2}(X - N)$$

Behauptung: i_N bildet die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ auf den Ball $S^1 \backslash \{N\}$ bijektiv ab.

$$1 = |i_N(x)|^2 = |N + \frac{2}{|X-N|^2}(X-N)|^2 \tag{0.5}$$

$$= 1 + 2\langle N, \frac{2}{|X-N|^2}(X-N)\rangle + \frac{4}{|X-N|^2} \tag{0.6}$$

$$0 = \frac{4}{|X-N|^2}\langle X, N\rangle - \frac{4}{|X-N|^2}\langle N, N\rangle + \frac{4}{|X-N|^2} \tag{0.7}$$

$$\Rightarrow \langle N, X\rangle = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = 0 \tag{0.8}$$

Stereographische Projektion $\sigma_N : \mathbb{R}^n \to S^n \backslash \{N\}$ definiert als $i_N((x,0))$

Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$

$P_2 : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi), (r, \phi) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{t, 0\} P_2(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$
Und die Umkehrabbildung $g_2(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{sgn}(y)\arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$

0.9.2 Def:

Seien X, Y metrische Räume. Sei $f_n : X \to Y$ eine Funktionenfolge. Diese ist gleichmäßig konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \left(d_Y(f_m(x), f_k(x)) < \epsilon\right) \quad \forall x \in X \forall m, k \geq n \tag{0.9}$$

Falls Y vollständig ist, und f_n gleichmäßig konvergiert, so exstiert eine funktion von X nach Y mit $f_n \to f$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \left(d_Y(f_n, f\right) < \epsilon \quad \forall x \in X \forall n \geq n_0$$

0.9.3 Satz:

Sei Y vollständig, $f_n \to f$ gleichmäßig konvergent und f_n stetig für alle n, dann ist f stetig

0.10 Lineare Abbildungen, Operator Norm

Hier: $(V, ||\cdot||_V)$, W ,U normierte Vektorräume.

0.10.1 Satz:

lineare Abbildungen A von V nach W sind stetig, falls $\dim V < \infty$.

$e_1, \cdots, e_n$ basis von V. $x = x_i e_i$ und $y = y_i e_i$. Definiere $M = max(||Ae_1||_W, \cdots, ||Ae_n||_W)$.
$||Ax - Ay||_W = ||(x_i - y_i)Ae_i||_W \leq |x_i - y_i|||Ae_i||_W \leq M\sum_i |x_i - y_i| \leq MC||x-y||_V$

0.10.2 Satz:

Eine Lineare Abbildung $A : V \to W$ ist stetig, genau dann wenn $c > 0$ existiert sodass $||Ax||_W = C||x||_V$ für alle $x \in C$. A ist dann auch Lipschitz stetig.
Beweis: "$\Leftarrow$": $||A_x - A_y||_W = ||A(x-y||_W = C||x-y||_V$
"$\Rightarrow$": A ist stetig: A stetig in $y = 0$: für $\epsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$

$$||Ay||_W < 1 \quad \forall ||y||_V \leq \delta \tag{0.10}$$

$$\Rightarrow ||Ax||_W = ||A\frac{\delta x}{||x||_V}\frac{||x||_V}{\delta}||_W = \frac{||x||_V}{\delta}||A\frac{\delta x}{||x||_V}||_W \tag{0.11}$$

0.10.3 Def:

Sei $L(V, W)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W.

$$||A||_{L(V,W)} = \sup\{||Ax||_W |||x|| \leq 1\} \tag{0.12}$$

$$= \sup\{\frac{||Ax||_W}{||x||_V}|x \in V, x \neq 0\} \tag{0.13}$$

ist die Operattornorm auf $L(V, W)$

0.11 Kompakte Räume

0.11.1 Def:

Sei X ein metrischer Raum. Sei $K \subset X$. K heißt (Überdeckungs)kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung $\cup_i U_i$ von K eine endliche Teilmenge gibt, die K überdeckt.

0.11.2 Def: Offene Überdeckung

Eine Offene Überdeckung ist eine Familie offener Mengen U_i, s.d. jedes $x \in K$ in mindestens einem U_i liegt.

0.12 Vorlesung 5

1 Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.0.1 Differentierbarkeit in $\mathbb{R}$

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 differentierbar, falls

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1.1}$$

existiert.
Das ist äquivalent zu
Es existiert eine lineare Abbildung L s.d.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0) - Lh}{h} = 0 \tag{1.2}$$

1.0.2 Ableitung Vektorwertiger Funktion

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = \left(f(x), \cdots, f_m(x)\right)^T$.
f ist differentierbar, falls

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}^m \tag{1.3}$$

existiert, oder gleiche äquivalenzen für oben für die einzelnen funktionsteile.

1.1 Kurven in $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Def: Kurven

Eine Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Eine Kurve heißt (stetig) differentierbar, falls γ (stetig) differentierbar ist. $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt Spur von γ.

1.1.2 Def: Ableitung von Kurven

Sei γ eine differentierbare Kurve. Dann ist

$$\gamma'(t) = \left(\gamma_1'(t), \cdots, \gamma_n'(t)\right)^T \tag{1.4}$$

der Tangentialvektor von γ in t. Wobei $|\gamma'(t)|$ die Geschwindigkeit ist, und $T_\gamma = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ der Tangentialeinheitsvektor

1.1.3 Def: Regulär, Singulär

Eine stetig differentierbare Kurve γ heißt regulär, falls $\gamma'(t)$ ungleich null für alle $t \in I$ ist. Falls $t \in I$ mit $\gamma'(t) = 0$, dann heißt t singulär.

1.1.4 Def: Schnittwinkel

Wir nehmen zwei sich schneidende Graphen γ_1 und γ_2. Seien beide regulär und $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = x$. Dann ist der Schnittwinkel α in x

$$\cos\alpha = \langle T_{\gamma_1}(t_1), T_{\gamma_2}(t_2)\rangle \tag{1.5}$$

1.1.5 Def: Polygonzug

sei γ eine Kurve. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b \tag{1.6}$$

Verbinde $\gamma(t_{i-1})$ und $\gamma(t_i)$ durch Geraden. Diese Kurve ist ein Polygonzug.

$$P_\gamma(t_0, \cdots, t_k) = \sum_i^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1}| \tag{1.7}$$

ist die Länge des Polygonzugs.

1.1.6 Def: Rektifizierbare Kurvven

Die Kurve γ heißt rektifizierbar mit Länge L falls

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall Z(\Delta(Z) < \delta \to |P_\gamma - L| < \epsilon) \tag{1.8}$$

Lemma:

Sei $\gamma \in C^1$.

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \left(|t - s| < \delta \to |\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t)| < \epsilon\right) \tag{1.9}$$

Beweis: für $n = 1$
γ' ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, dann $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 \left(|t - \tau| < \delta \to |\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| < \epsilon\right)$
Per Mittelwertsatz

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} = \gamma'(\tau) \quad \text{für ein } \tau \in (s, t) \tag{1.10}$$

$$\Rightarrow |t - s| < \delta \ \to \ |\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t)| = |\gamma'(\tau) - \gamma'(t)| < \epsilon \tag{1.11}$$

und für $n \in \mathbb{N}$. Nach $n = 1$:

$$\forall \epsilon > 0 \delta_i > 0 \left(|t - s| < \delta_i \to |\frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(s)}{t - s} - \gamma_i'(t)| < \epsilon \right) \tag{1.12}$$

$$\delta = \min_i(\delta_i) \tag{1.13}$$

$$|\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t)| \leq \sqrt{n} \max_i |\frac{\gamma_i(t)\gamma_i(s)}{t - s} - \gamma_i'(t)| < \sqrt{n}\epsilon \tag{1.14}$$

1.1.7 Satz:

Sei γ stetig und differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t \tag{1.15}$$

Beweis: $|\gamma'(t)|$ stetig impliziert Riemann Integrierbarkeit

$$\text{zu } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\int_a^b |\gamma'(t)| \mathrm{d}t - \sum_i^n |\gamma'(t_i)||t_i - t_{i-1}|| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall Z \text{mit } \Delta(Z) < \delta_1 \tag{1.16}$$

$$\text{Vorheriges Lemma:} \exists \delta \in (0, \delta_1] \left(|\frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \gamma'(t_i)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) \tag{1.17}$$

1.2 Vorlesung 6

1.2.1 Def:

Sei γ eine kurve. Sei $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ bijektiv stetig. Dann ist $g = \gamma \cdot \phi$ eine Kurve. Falls $\phi, \phi^{-1} \in C^1$ dann ist dies eine C^1 Parameter transformation

1.2.2 Def: Orientierungstreu

ϕ heißt orientierungstreu (umkehrend) falls ϕ streng monoton wachsend (fallend) ist.

1.2.3 Satz:

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1$. Sei ϕ eine C^1 Parametertransformation.

$$g(s) = \gamma(\phi(s)) \Rightarrow L = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta |g'(s)|\mathrm{d}s \tag{1.18}$$

Beweis : oBdA, $\phi' > 0$

$$\int_\alpha^\beta |g'(s)|\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta |\gamma'(\phi(s))||\phi'(s)|\mathrm{d}s \tag{1.19}$$

$$= \int_\alpha^\beta |\gamma'(\phi(s))|\phi'(s)\mathrm{d}s = \int_a^b |\gamma'(t)|\mathrm{d}t \tag{1.20}$$

Bemerkung

Zu jeder regulären Kurve lässt sich eine Umparametrisierung finden, so dass $|g'(s)| = 1$. Das heißt, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

1.3 Partielle Ableitung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, und $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Beispiele:

Sei $m = n = 1$. $\Gamma_f = \{(x, f(x))|x \in \Omega\}$.

- $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $N_f(x) = \{x \in \Omega | f(x) = c\}$
- Elektrisches feld einer Raumladung. q in $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x) = q\frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

- reelle darstellung von e^z

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} \tag{1.21}$$

- Parametrisierung der Sphäre. $f : (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2$

$$f(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta \\ \sin\phi\cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

1.3.1 Ableitung

Erste Idee: Halten $n-1$ variablen fest und differenzieren nach der freien Variable. z.B. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g(x) = f(x, y)$ mit y fest, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Das ist eine Partielle Ableitung

1.3.2 Def:

ist $x \in \Omega$ partiell differenzierbar nach x_i, falls

$$\partial_i f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \tag{1.22}$$

existiert.

Def:

f heißt stetig partiell differenzierbar, falls $\partial_i f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und für alle i existiert und stetig ist

Def: Richtungsableitung

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein vektor mit $|v| = 1$ Dann ist

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \tag{1.23}$$

die Richtungsableitung von $f(x)$ in Richtung v.

Def: Gradient von f

sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

der Gradient von f. Wir können schreiben

$$\partial_v r(x) = \langle \nabla r(x), v \rangle$$

Def: Jacobi Matrix

$f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ heißt partiell differenzierbar falls jedes f_i partiell differenzierbar ist.

$$\partial_i f(x) = \begin{pmatrix} \partial_i f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(x) \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

Dies definiert eine Matrix, die Jacobi Matrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

falls $m = n$ dann ist $J_f(x) = \det Df(x)$ die Jacobi oder Funktionaldeterminante.