

Analysis 2

xx.xx.2025

Contents

0.1	Metrische und Normale Räume	6
0.1.1	Def: Metrik, Metrischer Raum	6
0.1.2	Def: Norm	6
0.1.3	Satz: Norm induziert Metrik	6
0.1.4	Def: Skalarprodukt, Euklidischer Raum	6
0.1.5	Satz: Skalarprodukt induziert Norm	7
0.1.6	Def: Äquivalenz von Normen	7
0.1.7	Def: Folgenräume	7
0.2	Konvergenz in Metrischen Räumen	8
0.2.1	Def:	8
0.2.2	Satz: Bolzano Weierstraß	8
0.2.3	Def:	8
0.2.4	Jede konvergente Folge ist Cauchy	8
0.2.5	Def: Vollständiger Raum	8
0.3	Vorherige Vorlesung	10
0.3.1	Äquivalenz von Normen	10
0.3.2	Vollständiger Raum	10
0.4	(1.3) Offene und abgeschlossene Menge	10
0.4.1	Def:	10
0.4.2	Satz:	11
0.4.3	Satz:	11
0.4.4	Def:	11
0.4.5	Teilraumtopologie	11
0.4.6	Produkttopologie	12
0.5	Stetige Abbildung zwischen Metrischen Räumen	12
0.5.1	Def: Stetigkeit	12
0.5.2	Def: Lipschitz Stetig	12
0.5.3	Satz:	12
0.6	Vorherige Vorlesung	14
0.6.1	Def: Homeomorphismus	14
0.6.2	Def:	15
0.6.3	Satz:	15
0.7	Lineare Abbildungen, Operator Norm	15
0.7.1	Satz:	15
0.7.2	Satz:	16
0.7.3	Def:	16

0.8	Kompakte Räume	16
0.8.1	Def:	16
0.8.2	Def: Offene Überdeckung	16
1	Differentialrechnung mehrerer Variablen	19
1.0.1	Differentierbarkeit in \mathbb{R}	19
1.0.2	Ableitung Vektorwertiger Funktion	19
1.1	Kurven in \mathbb{R}^n	19
1.1.1	Def: Kurven	19
1.1.2	Def: Ableitung von Kurven	19
1.1.3	Def: Regulär, Singulär	20
1.1.4	Def: Schnittwinkel	20
1.1.5	Def: Polygonzug	20
1.1.6	Def: Rektifizierbare Kurven	20
1.1.7	Satz:	21
1.1.1	Def:	23
1.1.2	Def: Orientierungstreu	23
1.1.3	Satz:	23
1.2	Partielle Ableitung	23
1.2.1	Ableitung	24
1.2.2	Def:	24
1.2.3	Def:	24
1.2.4	Def: Richtungsableitung	24
1.2.5	Def: Gradient von f	24
1.2.6	Def: Jacobi Matrix	25
1.3	Höhere partielle Ableitung und Differentialoperatoren	27
1.3.1	Def:	27
1.3.2	Satz: Satz von Schwartz	27
1.3.3	Differentialoperatoren	27
1.4	Totale Differenzierbarkeit	28
1.4.1	Def: Totale Differenzierbarkeit	28

Vorlesung 1

0.1 Metrische und Normale Räume

0.1.1 Def: Metrik, Metrischer Raum

Sei X eine Menge. Dann ist $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ eine Metrik, falls

- $d(x, x) = 0, d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

und dann ist (X, d) ein Metrischer Raum.

Beispiel:

Sei $X = \mathbb{R}^n$ und $d(x, y) = \|x - y\|_p$. Dann ist d eine Metrik.

Die Diskrete Metrik

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Die Induzierte Metrik

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, und sei $d_A = d$ dann ist d_A eine Induzierte Metrik auf A .

0.1.2 Def: Norm

Eine funktion $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$ Ist eine Norm, falls

- $\|u\| \geq 0$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

0.1.3 Satz: Norm induziert Metrik

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, dann ist $d(u, v) = \|u - v\|$ eine Metrik.

0.1.4 Def: Skalarprodukt, Euklidischer Raum

sei V ein reeller Vektorraum, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein Skalarprodukt, falls

- $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
- $\langle u, u \rangle \geq 0$

Dann ist $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Raum.

0.1.5 Satz: Skalarprodukt induziert Norm

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein euklidischer Raum. Dann definiert $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ eine Norm auf V .

Lemma:

Sei V ein euklidischer Raum. Dann ist $\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$.

Beweis: $0 \leq \|\lambda u - v\|^2$

0.1.6 Def: Äquivalenz von Normen

Zwei normen f, g sind Äquivalent auf einem Vektorraum V , falls konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren s.d. $c_2 f(u) \leq g(u) \leq c_1 f(u)$ für alle $u \in V$.

Beispiel

$\|\cdot\|_\infty$ und $|\cdot|$ sind äquivalent auf \mathbb{R}^n

$$\|x\|_\infty \leq |x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \leq \left(n \max_i |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

Alle Normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent. Dies gilt nicht für unendliche Räume.

0.1.7 Def: Folgenräume

$$V = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

$$\|x\|_{l^p} = \left(\sum_i x_i^p \right)^{1/p}$$

$$\|x\|_{l^p} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

$$l^p := \{x \in V \mid \|x\|_{l^p} < \infty\}$$

l^p ist VR

für $l = 1$. $x \in \ell^1 \Rightarrow \lambda x \in \ell^1$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, weil

$$\|\lambda x\|_{\ell^1} = \sum_i |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_i x_i < \infty$$

Wenn $x, y \in \ell^1$ dann $x + y \in \ell^1$.

$$\sum_i^N |x_i + y_i| = \sum_i^N |x_i| + \sum_i^N |y_i| \leq \|x\|_{\ell^1} + \|y\|_{\ell^1}$$

$\sum_i^N |x_i + y_i|$ ist monoton wachsend und beschränkt, also konvergent. Somit $x + y \in \ell^1$.

Es gilt $\|x\|_{\ell^\infty} \leq \|x\|_{\ell^1}$ und somit $\ell^1 \subset \ell^\infty$.

zu $\epsilon > 0 \exists i$ s.d. $|x_i| \geq \|x\|_{\ell^\infty} - \epsilon$

Somit $\|x\|_{\ell^\infty} \leq |x_i| + \epsilon \leq \sum_i^{\infty} |x_i| + \epsilon$

0.2 Konvergenz in Metrischen Räumen

0.2.1 Def:

Sei X ein metrischer Raum mit d . Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt beschränkt, falls $x_0 \in X$ und $K > 0$ sodass $d(x_k, x_0) \leq K$ für alle k . $(x_n) \subset X$ heißt konvergent, falls ein $x \in X$ existiert sodass $d(x_k, x) \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

0.2.2 Satz: Bolzano Weierstraß

Jede beschränkte Folge in \mathbb{R}^n besitzt eine konvergente Teilfolge

0.2.3 Def:

Sei X ein metrischer Raum und $(x^k) \subset X$ eine Folge. Diese Folge ist eine Cauchy Folge, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ existiert s.d. $d(x^k, x^m) < \epsilon$ für all $k, m \geq k_0$

0.2.4 Jede konvergente Folge ist Cauchy

Nicht jede Cauchy Folge ist konvergent. Beispiel: $X = \mathbb{Q}$ mit $d(p, q) = |p - q|$.

0.2.5 Def: Vollständiger Raum

Ein Metrischer Raum X heißt vollständig, falls jede Cauchy Folge darin konvergiert. Ein Vollständiger Normierter Raum heißt Banach Raum. Ein Vollständiger Euklidischer Raum heißt Hilbert Raum.

Vorlesung 2

0.3 Vorherige Vorlesung

(X, d) Metrischer Raum

$(V, || \cdot ||)$ Normierter Raum

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ Euklidischer Raum

0.3.1 Äquivalenz von Normen

zwei normen f, g sind äquivalent, falls c_1, c_2 existieren, so dass

$$c_2 f(x) \leq g(x) \leq c_1 f(x)$$

Alle normen auf \mathbb{R}^n sind äquivalent.

0.3.2 Vollständiger Raum

Der metrische Raum (X, d) ist vollständig falls alle Cauchy Folgen konvergieren.

ℓ^1 Vollständigkeit

$(\ell^1, || \cdot ||_{\ell^1})$ ist vollständig. Sei $x \subset \ell^1$ eine Cauchy Folge in ℓ^1 . D.h. dass

$$\forall \epsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} (\underbrace{||x^k - x^m||_{\ell^1}}_{= \sum_i |x_i^k - x_i^m|} < \epsilon) \forall k, m \geq k_0 \quad (0.1)$$

$$\Rightarrow x^k \text{ ist CF für } \mathbb{R} \Rightarrow \exists x_i \in \mathbb{R} (x_i^k \rightarrow x_i, k \rightarrow \infty) \quad (0.2)$$

0.4 (1.3) Offene und abgeschlossene Menge

0.4.1 Def:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$ Dann ist

- $B_r(x_0) = \{x \in X | d(x, x_0) < r\}$ die Offene Kugel
- $\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X | d(x, x_0) \leq r\}$ abgeschlossene Kugel
- $U \subset X$ heißt umgebung von x_0 , falls $\exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x_0) \subset U$.
- $U \subset X$ heißt offen falls $\forall x \in U \exists \epsilon > 0$ mit $B_\epsilon \subset U$.
- $A \subset X$ ist abgeschlossen falls A^c offen ist.

Elementare Eigenschaften

- \emptyset und X sind offen und abgeschlossen.
- $B_r(x_0)$ ist offen. Sei $x \in B_r(x_0)$ und sei $\epsilon = r - d(x, x_0) > 0$ dann ist $B_\epsilon(x) \subset B_r(x_0)$
- $y \in (\overline{B_r(x_0)})^c \Rightarrow d(y, x_0) > r$ und sei $\epsilon = d(y, x_0) - r > 0$ Dann $B_\epsilon(y) \subset (\overline{B_r(x_0)})^c$
- Durchschnitt endlich vieler offenen Mengen ist offen. Sei V, U offen. Sei $x \in U \cap V$, sei ϵ_1, ϵ_2 s.d. $B_{\epsilon_1}(x) \subset U$ und $B_{\epsilon_2}(x) \subset V$ dann sei $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2)$ und $B_\epsilon(x) \subset U \cap V$

0.4.2 Satz:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann existiert eine Umgebung von x und y mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis: $2\epsilon = d(x, y) > 0$ sei $U = B_\epsilon(x), V = B_\epsilon(y)$ dann $\exists z \in B_\epsilon(x) \cap B_\epsilon(y)$ und dann $2\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\epsilon$

0.4.3 Satz:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen, das ist äquivalent zu $\forall (x^k) \subset A$ mit $x^k \rightarrow x$ in X dann gilt $x \in A$.

Beweis: " \Rightarrow ": Annahme: $x \notin A$ dann $\exists \epsilon > 0$ so dass $B_\epsilon(x) \subset A^c$. Widerspruch zu $x_k \in B_\epsilon(x)$ für $k \geq k_0$.

" \Leftarrow ": Nehme an dass A^c nicht offen ist. Dann existiert ein $x \in A^c$ sodass $B_\epsilon(x) \not\subset A^c$ für alle ϵ . Wähle $\epsilon = 1/n$, dann $\exists x_n \in B_{1/n}(x)$, $x_n \in A$ Dann $x_n \rightarrow x$, nach vorherigem $x \in A$ Widerspruch

0.4.4 Def:

Sei (X, d) ein metrischer Raum, Sei $M \subset X$ und $x_0 \in X$ heißt innerer Punkt von M falls $x_0 \in M$ und $\exists \epsilon > 0$ s.d. $B_\epsilon(x_0) \subset M$.

$x_0 \in X$ heißt innerer Punkt, falls alle ϵ Kugel um x_0 ein $y \in M$ und ein $z \in M^c$ enthält.

$x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt von M falls in jeder ϵ Kugel von x_0 ein $y \in M$ mit $y \neq x_0$ liegt.

$x_0 \in X$ heißt Isolierter Punkt falls $x_0 \in M$ aber ist kein Häufungspunkt.

- $\overset{\circ}{M}$ Menge der Inneren Punkte von M
- ∂M Menge der Randpunkte von M
- $\overline{M} = M \cup \partial M$ ist der Abschluss von M

0.4.5 Teilraumtopologie

Sei (X, d) ein metrischer Raum, sei $X_0 \subset X$ dann ist (X_0, d) auch ein metrischer Raum. Dann ist $U_0 \subset X_0$ offen, falls $U \subset X$ existiert, offen und $U \cap X_0 = U_0$ ist.

0.4.6 Produkttopologie

Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume, dann ist $(X \times Y, d)$ ein metrischer Raum mit der metrik

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(d_x(x_1, x_2), d_y(y_1, y_2))$$

$W \subset X \times Y$ ist offen, falls $\forall (x, y) \in W$ eine umgebung U von $x \in X$ existiert und eine Umgebung V von $y \in Y$ s.d. $U \times V \subset W$

0.5 Stetige Abbildung zwischen Metrischen Räumen

0.5.1 Def: Stetigkeit

Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. diese Abbildung ist stetig in x_0 falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (d_y(f(x), f(x_0)) < \epsilon \text{ und } d_x(x, x_0) < \delta)$$

Falls für alle $x \in X$ f stetig ist, dann heißt f stetig.

0.5.2 Def: Lipschitz Stetig

falls $L \geq 0$ existiert und

$$d_y(f(x), f(x')) \leq L d_x(x, x') \quad \forall x, x' \in X$$

0.5.3 Satz:

Seien $(X, d_x), (Y, d_y)$ metrische Räume, $f : X \rightarrow Y$ ist stetig gdw $f^{-1}(V) \subset X$ offen für alle $V \subset Y, V$ offen, ist

Vorlesung 3

0.6 Vorherige Vorlesung

- Stetige Abb $f : X \rightarrow Y$. $\epsilon\delta$ Kriterium ist äquivalent zum Folgenkriterium.
- Lipschitzstetigkeit
- Rechenregeln
- f stetig Äquivalent zu Urbild offener Menge offen

0.6.1 Def: Homeomorphismus

Eine bijektive stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ deren inverse auch stetig ist heißt Homeomorphismus. X ist homeomorph zu Y , falls es einen Homeomorphismus von X zu Y gibt.

Bsp

$f : [0, 2\pi) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (\cos t, \sin t)$ ist eine bijektive stetige Abbildung dessen Inverse nicht stetig ist. Falls der Definitionsraum Kompakt ist (Beschränkt und Abgeschlossen) So ist die Inverse stetig.

Bsp

- $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ ist homeomorph zu \mathbb{R}^n mit $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$
- Invers und stereographischen Projection $p \in \mathbb{R}^n, \alpha > 0$ funktion $i : \mathbb{R}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{p\}$ mit Eigenschaften

– $i(x)$ und x liegen auf Halbgeraden durch punkt x : $i(x) - p = \lambda(x - p)$ für ein λ

– $|i(x) - p||x - p| = \alpha \Rightarrow i(x) = p + \frac{\alpha}{|x-p|^2}(x - p)$

i ist stetig und es gilt $i^{-1} = i$

$$i(x) - p = \frac{\alpha}{|x - p|^2}(x - p) = \frac{1}{\alpha}|i(x) - p|^2(x - p) \quad (0.3)$$

$$\Rightarrow x - p = \frac{\alpha}{|i(x) - p|^2}(i(x) - p) \quad (0.4)$$

Bsp

$\mathbb{R}^n, p = N = (0, \dots, 0, 1)$ und $\alpha = 2$

$$i_N(x) = N + \frac{2}{|X - N|^2}(X - N)$$

Behauptung: i_N bildet die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^{n+1}\}$ auf den Ball $S^1 \setminus \{N\}$ bijektiv ab.

$$1 = |i_N(x)|^2 = |N + \frac{2}{|X - N|^2}(X - N)|^2 \quad (0.5)$$

$$= 1 + 2\langle N, \frac{2}{|X - N|^2}(X - N) \rangle + \frac{4}{|X - N|^2} \quad (0.6)$$

$$0 = \frac{4}{|X - N|^2}\langle X, N \rangle - \frac{4}{|X - N|^2}\langle N, N \rangle + \frac{4}{|X - N|^2} \quad (0.7)$$

$$\Rightarrow \langle N, X \rangle = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = 0 \quad (0.8)$$

Stereographische Projektion $\sigma_N : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n \setminus \{N\}$ definiert als $i_N((x, 0))$

Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2

$P_2 : \mathbb{R}_+ \times (-\pi, \pi), (r, \phi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} P_2(r, \phi) = (r \cos \phi, r \sin \phi)$

Und die Umkehrabbildung $g_2(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \text{sgn}(y) \arccos(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}))$

0.6.2 Def:

Seien X, Y metrische Räume. Sei $f_n : X \rightarrow Y$ eine Funktionenfolge. Diese ist gleichmäßig konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists n \left(d_Y(f_m(x), f_k(x)) < \epsilon \right) \quad \forall x \in X \forall m, k \geq n \quad (0.9)$$

Falls Y vollständig ist, und f_n gleichmäßig konvergiert, so existiert eine Funktion von X nach Y mit $f_n \rightarrow f$, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \left(d_Y(f_n, f) < \epsilon \right) \quad \forall x \in X \forall n \geq n_0$$

0.6.3 Satz:

Sei Y vollständig, $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig konvergent und f_n stetig für alle n , dann ist f stetig

0.7 Lineare Abbildungen, Operator Norm

Hier: $(V, \|\cdot\|_V), W, U$ normierte Vektorräume.

0.7.1 Satz:

lineare Abbildungen A von V nach W sind stetig, falls $\dim V < \infty$.

e_1, \dots, e_n basis von V . $x = x_i e_i$ und $y = y_i e_i$. Definiere $M = \max(\|Ae_1\|_W, \dots, \|Ae_n\|_W)$.
 $\|Ax - Ay\|_W = \|(x_i - y_i)Ae_i\|_W \leq |x_i - y_i| \|Ae_i\|_W \leq M \sum_i |x_i - y_i| \leq MC \|x - y\|_V$

0.7.2 Satz:

Eine Lineare Abbildung $A : V \rightarrow W$ ist stetig, genau dann wenn $c > 0$ existiert sodass $\|Ax\|_W = C\|x\|_V$ für alle $x \in C$. A ist dann auch Lipschitz stetig.

Beweis: " \Leftarrow ": $\|A_x - A_y\|_W = \|A(x - y)\|_W = C\|x - y\|_V$

" \Rightarrow ": A ist stetig: A stetig in $y = 0$: für $\epsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$

$$\|Ay\|_W < 1 \quad \forall \|y\|_V \leq \delta \quad (0.10)$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_W = \|A \frac{\delta x}{\|x\|_V} \frac{\|x\|_V}{\delta}\|_W = \frac{\|x\|_V}{\delta} \|A \frac{\delta x}{\|x\|_V}\|_W \quad (0.11)$$

0.7.3 Def:

Sei $L(V, W)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W .

$$\|A\|_{L(V, W)} = \sup\{\|Ax\|_W \mid \|x\|_V \leq 1\} \quad (0.12)$$

$$= \sup\left\{\frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V} \mid x \in V, x \neq 0\right\} \quad (0.13)$$

ist die Operatornorm auf $L(V, W)$

0.8 Kompakte Räume

0.8.1 Def:

Sei X ein metrischer Raum. Sei $K \subset X$. K heißt (Überdeckungs)kompakt, falls es zu jeder offenen Überdeckung $\cup_i U_i$ von K eine endliche Teilmenge gibt, die K überdeckt.

0.8.2 Def: Offene Überdeckung

Eine Offene Überdeckung ist eine Familie offener Mengen U_i , s.d. jedes $x \in K$ in mindestens einem U_i liegt.

Vorlesung 5

1 Differentialrechnung mehrerer Variablen

1.0.1 Differenzierbarkeit in \mathbb{R}

Sei $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann ist f in x_0 differenzierbar, falls

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.1)$$

existiert.

Das ist äquivalent zu

Es existiert eine lineare Abbildung L s.d.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Lh}{h} = 0 \quad (1.2)$$

1.0.2 Ableitung Vektorwertiger Funktion

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$.

f ist differenzierbar, falls

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}^m \quad (1.3)$$

existiert, oder gleiche Äquivalenzen für oben für die einzelnen Funktionsteile.

1.1 Kurven in \mathbb{R}^n

1.1.1 Def: Kurven

Eine Kurve in \mathbb{R}^n ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Kurve heißt (stetig) differenzierbar, falls γ (stetig) differenzierbar ist. $\gamma(I) \subset \mathbb{R}^n$ heißt Spur von γ .

1.1.2 Def: Ableitung von Kurven

Sei γ eine differenzierbare Kurve. Dann ist

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))^T \quad (1.4)$$

der Tangentialvektor von γ in t . Wobei $|\gamma'(t)|$ die Geschwindigkeit ist, und $T_\gamma = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$ der Tangentialeinheitsvektor

1.1.3 Def: Regulär, Singulär

Eine stetig differentierbare Kurve γ heißt regulär, falls $\gamma'(t)$ ungleich null für alle $t \in I$ ist. Falls $t \in I$ mit $\gamma'(t) = 0$, dann heißt t singulär.

1.1.4 Def: Schnittwinkel

Wir nehmen zwei sich schneidende Graphen γ_1 und γ_2 . Seien beide regulär und $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = x$. Dann ist der Schnittwinkel α in x

$$\cos \alpha = \langle T_{\gamma_1}(t_1), T_{\gamma_2}(t_2) \rangle \quad (1.5)$$

1.1.5 Def: Polygonzug

sei γ eine Kurve. Sei \mathcal{Z} eine Zerlegung von $[a, b]$ mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b \quad (1.6)$$

Verbinde $\gamma(t_{i-1})$ und $\gamma(t_i)$ durch Geraden. Diese Kurve ist ein Polygonzug.

$$P_\gamma(t_0, \dots, t_k) = \sum_i^k |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i+1})| \quad (1.7)$$

ist die Länge des Polygonzugs.

1.1.6 Def: Rektifizierbare Kurven

Die Kurve γ heißt rektifizierbar mit Länge L falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathcal{Z} (\Delta(\mathcal{Z}) < \delta \rightarrow |P_\gamma - L| < \epsilon) \quad (1.8)$$

Lemma:

Sei $\gamma \in C^1$.

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \left(|t - s| < \delta \rightarrow \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t) \right| < \epsilon \right) \quad (1.9)$$

Beweis: für $n = 1$

γ' ist gleichmäßig stetig auf $[a, b]$, dann $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 (|t - \tau| < \delta \rightarrow |\gamma'(t) - \gamma'(\tau)| < \epsilon)$

Per Mittelwertsatz

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} = \gamma'(\tau) \quad \text{für ein } \tau \in (s, t) \quad (1.10)$$

$$\Rightarrow |t - s| < \delta \rightarrow \left| \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t) \right| = |\gamma'(\tau) - \gamma'(t)| < \epsilon \quad (1.11)$$

und für $n \in \mathbb{N}$. Nach $n = 1$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta_i > 0 \left(|t - s| < \delta_i \rightarrow \left| \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(s)}{t - s} - \gamma'_i(t) \right| < \epsilon \right) \quad (1.12)$$

$$\delta = \min_i(\delta_i) \quad (1.13)$$

$$\left| \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} - \gamma'(t) \right| \leq \sqrt{n} \max_i \left| \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(s)}{t - s} - \gamma'_i(t) \right| < \sqrt{n} \epsilon \quad (1.14)$$

1.1.7 Satz:

Sei γ stetig und differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar mit

$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (1.15)$$

Beweis: $|\gamma'(t)|$ stetig impliziert Riemann Integrierbarkeit

$$\text{zu } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \int_a^b |\gamma'(t)| dt - \sum_i^n |\gamma'(t_i)| |t_i - t_{i-1}| \right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall Z \text{ mit } \Delta(Z) < \delta_1 \quad (1.16)$$

$$\text{Vorheriges Lemma: } \exists \delta \in (0, \delta_1] \left(\left| \frac{\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - \gamma'(t_i) \right| < \frac{\epsilon}{2(b-a)} \right) \quad (1.17)$$

Vorlesung 6

1.1.1 Def:

Sei γ eine Kurve. Sei $\phi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijektiv stetig. Dann ist $g = \gamma \circ \phi$ eine Kurve. Falls $\phi, \phi^{-1} \in C^1$ dann ist dies eine C^1 Parametertransformation

1.1.2 Def: Orientierungstreu

ϕ heißt orientierungstreu (umkehrend) falls ϕ streng monoton wachsend (fallend) ist.

1.1.3 Satz:

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \gamma \in C^1$. Sei ϕ eine C^1 Parametertransformation.

$$g(s) = \gamma(\phi(s)) \Rightarrow L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |g'(s)| ds \quad (1.18)$$

Beweis: oBdA, $\phi' > 0$

$$\int_a^b |g'(s)| ds = \int_a^b |\gamma'(\phi(s))| |\phi'(s)| ds \quad (1.19)$$

$$= \int_a^b |\gamma'(\phi(s))| \phi'(s) ds = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (1.20)$$

Bemerkung

Zu jeder regulären Kurve lässt sich eine Umparametrisierung finden, so dass $|g'(s)| = 1$. Das heißt, dass die Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert ist.

1.2 Partielle Ableitung

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist offen, und $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

Beispiele:

Sei $m = n = 1$. $\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in \Omega\}$.

- $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $N_f(x) = \{x \in \Omega | f(x) = c\}$
- Elektrisches Feld einer Raumladung. q in $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x) = q \frac{(x - x_0)}{|x - x_0|^3}$$

- reelle Darstellung von e^z

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} e^x \cos(y) \\ e^x \sin(y) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

1 Differentialrechnung mehrerer Variablen

- Parametrisierung der Sphäre. $f : (-\pi, \pi) \times (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow S^2$

$$f(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

1.2.1 Ableitung

Erste Idee: Halten $n - 1$ variablen fest und differenzieren nach der freien Variable. z.B. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x, y)$ mit y fest, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Das ist eine Partielle Ableitung

1.2.2 Def:

ist $x \in \Omega$ partiell differenzierbar nach x_i , falls

$$\partial_i f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_i) - f(x)}{t} \quad (1.22)$$

existiert.

1.2.3 Def:

f heißt stetig partiell differenzierbar, falls $\partial_i f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und für alle i existiert und stetig ist

1.2.4 Def: Richtungsableitung

Sei $v \in \mathbb{R}^n$ ein vektor mit $|v| = 1$ Dann ist

$$\partial_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \quad (1.23)$$

die Richtungsableitung von $f(x)$ in Richtung v .

1.2.5 Def: Gradient von f

sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(x) \\ \vdots \\ \partial_n f(x) \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

der Gradient von f . Wir können schreiben

$$\partial_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle$$

1.2.6 Def: Jacobi Matrix

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt partiell differenzierbar falls jedes f_i partiell differenzierbar ist.

$$\partial_i f(x) = \begin{pmatrix} \partial_i f_1(x) \\ \vdots \\ \partial_i f_m(x) \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Dies definiert eine Matrix, die Jacobi Matrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \cdots & \partial_n f_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(x) & \cdots & \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

falls $m = n$ dann ist $J_f(x) = \det Df(x)$ die Jacobi oder Funktionaldeterminante.

Vorlesung 7

1.3 Höhere partielle Ableitung und Differentialoperatoren

1.3.1 Def:

Sei $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann ist die höhere partielle Ableitung der Ordnung $k \in \mathbb{N}$

$$\partial_{i_1} \cdots \partial_{i_k} = \partial_{i_1} \left(\cdots \partial_{i_k} \right) f(x)$$

Und wir definieren den VR $C^k(\Omega, \mathbb{R}^m)$ der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen. Für $m = 1$ ist $C^k(\Omega)$.

$C^k(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^m) = \{ f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^m) \mid \text{alle Ableitungen von } f \text{ lassen sich stetig auf } \bar{\Omega} \text{ fortsetzen.} \}$.

1.3.2 Satz: Satz von Schwartz

sei $f \in C^2(\Omega)$. Dann gilt, dass $\partial_{ij}f = \partial_{ji}f$

Beweis:

$$\partial_j^t f = \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$$

dann ist

$$\partial_{ij}f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow 0} \partial_i^s \partial_j^t f(x).$$

Sei $g : \omega \rightarrow \mathbb{R}$, falls $\partial_i g(x)$ existiert, dann existiert ein $\alpha \in (0, 1)$ s.d. $\partial_i^s g(x) = \partial_i g(x + \alpha e_i)$.

$$\partial_i^s \partial_j^t f(x) = \partial_i(\partial_j^t f)(x + \alpha s e_i). \quad \alpha = \alpha(s, t) \in (0, 1) \quad (1.27)$$

$$= \partial_j^t(\partial_i f)(x + \alpha s e_i) \quad (1.28)$$

$$= \partial_j(\partial_i f)(x + \alpha s e_i + \beta t e_j), \quad \beta \in (0, 1) \quad (1.29)$$

$$\rightarrow \partial_j \partial_i f(x), \text{ weil } \partial_j \partial_i f \in C(\Omega) \quad (1.30)$$

1.3.3 Differentialoperatoren

- Divergenz $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\operatorname{div} f(x) = \sum_i^n \partial_i f_i(x) = \operatorname{tr}(Df(x))$$

- Rotation $f \in C^1(\Omega \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

$$\operatorname{rot} f(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 \\ \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 \end{pmatrix} = \nabla \times f$$

- Rotation in \mathbb{R}^2 ,

$$\operatorname{rot} f(x) = \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1$$

1 Differentialrechnung mehrerer Variablen

- Gradient ist Rotationslos

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$$

- Laplace Operator $f \in C^2(\Omega)$

$$\Delta f(x) = \operatorname{div}(\nabla f)(x) = \sum_i^n \partial_i \partial_i f(x)$$

Funktionen für die $\Delta f = 0$ heißen harmonisch.

1.4 Totale Differenzierbarkeit

1.4.1 Def: Totale Differenzierbarkeit

sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, dann ist f in x total differenzierbar, falls es eine Lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, s.d.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Lh}{|h|} = 0$$