Vorlesung 27 - Analysis 1

20.1.2025

Contents

1 Taylorpolynome

Sei $f \in C^{n+1}([a,b])$ mit $x_0, x \in (a,b)$ Dann ist das Taylorpolynom von f gegeben als

$$T_n f(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{1}$$

mit den Restgliedern

$$R_{n+1}(x) = f(x) - T_n f(x, x_0)$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) \mathrm{d}t = f^{(n)}(\xi) \frac{x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

für ein $\xi \in (x, x_0)$.

1.1 Definition 10.5 Landausche Ordnungssymbole

Sei $I = (x_0, b]$ ein Intervall Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in (I \cap B_\epsilon(x_0)) \setminus \{x_0\}$
Wir sagen
1) $f(x) = O(g(x))$ falls $\delta \in (0, \epsilon)$ und $C > 0$ existieren s.d.

$$\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq C \quad \forall x \in (I \cap B_\delta(x_0)) \setminus \{x_0\}$$

2) $f(x) = o(g(x))$ falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3) f und g sind asymptotisch gleich für $x \to x_0$, $f\ g$, falls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

1.1.1 Korollar 10.6

Sei $f \in C^{n+1}([a,b]),\ x_0 \in (a,b), x \in [a,b]$

$$f(x) = T_n f(x, x_0) + o(|x - x_0|^n)$$

2 10.2 Taylorreihen

2.1 Definition 10.7 Taylorreihen

sei $f \in C^\infty([a,b]),\ x_0 \in (a,b)$ dann ist

$$T f(x) = T f(x, x_0) = \sum_{k}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{2}$$

heißt Taylorreihe von f im Punkt x_0

2.2 Definition 10.8 Reell Analytisch

Sei $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f heißt reell analytisch, falls $\forall x \in I$ ein $\delta > 0$ existiert s.d. auf $B_\delta(x) \cap I$ die Taylorreihe $Tf(x, x_0)$ konvergiert und gleich $f(x)$ ist.

3 11. Gewöhnliche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung ist eine Relation zwischen unabhängigen Variablen, Funktionen und dessen Ableitungen.

Gewöhnlichkeit heißt dann dass die unabhängige Variable aus $\mathbb{R}$ ist.

- Newton'schen Bewegungsgleichungen

  Sei $t \in I \subset \mathbb{R}$, und $y(t) : I \to \mathbb{R}^3$, und $v(t) : I \to \mathbb{R}^3$. $m > 0$ Sei die Masse des Teilchens. Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Kraftfeld.

$$\dot{y}(t) = v(t) \tag{3}$$
$$m\dot{v}(t) = F(y(t)) \tag{4}$$

- Matematisches Pendel

$$y(t) = \ell(\sin\theta(t)e_x - \cos\theta(t)e_y) \tag{5}$$
$$F = -mge_y \tag{6}$$