Hausaufgabe 1

Florian, Jan

October 11, 2024

Contents

1 Summenformeln

1.1 a)

Beweis: Beweis durch Induktion. Wir beweisen den Basisfall $n = 0$.

$$\sum_{k=1}^{0} k^2 = \frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} \tag{1}$$

$$0 = 0 \tag{2}$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für n stimmt, und beweisen die Aussage für $n \mapsto n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \tag{3}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} \tag{4}$$

$$= \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} + \frac{6n^2+12n+6}{6} \tag{5}$$

$$= \frac{2n^3+n^2+2n^2+n+6n^2+12n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \tag{6}$$

Was wir bekommen wollen ist: $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ also berechnen:

$$\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6} \tag{7}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6} = \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6} \tag{8}$$

Das ist genau das was wir haben wollten. Da Die Aussage für $n = 0$ stimmt, und für $n \mapsto n+1$ stimmt, falls die Aussage für n stimmt, stimmt die Aussage für ganz $\mathbb{N}$.

1.2 b)

Beweis: Beweis durch Induktion. Wir beweisen den Basisfall $n = 0$.

$$\sum_{k=1}^{0} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{0}{0+1} \tag{9}$$

$$0 = 0 \tag{10}$$

Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für n stimmt, und beweisen die Aussage für $n \mapsto n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \tag{11}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \tag{12}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \tag{13}$$

Das ist genau das, was wir haben wollten. Da die Aussage für $n = 0$ stimmt, und für $n \mapsto n + 1$ stimmt, falls die Aussage für n stimmt, stimmt die Aussage für ganz $\mathbb{N}$

2 Ungleichungen

2.1 a)

$$|3 - 2x| = \sqrt{(3-2x)^2} < 5 \tag{14}$$
$$\Rightarrow -5 < 3 - 2x < 5 \tag{15}$$
$$\Rightarrow -8 < 2x < 2 \tag{16}$$
$$\Rightarrow -4 < x < 1 \tag{17}$$

Somit muss $x \in M = \{m \in \mathbb{R} | -4 < m < 1\}$

2.2 b)

$$\frac{x+4}{x-2} < x \tag{18}$$
$$x + 4 < x^2 - 2x \tag{19}$$
$$-x^2 + 3x + 4 < 0 \tag{20}$$
$$x^2 - 3x - 4 > 0 \tag{21}$$
$$(x - 1.5)^2 - 6.25 > 0 \tag{22}$$
$$(x - 1.5)^2 > 6.25 \tag{23}$$
$$-2.5 > x - 1.5 > 2.5 \tag{24}$$
$$-1 > x > 4 \tag{25}$$

That means x is smaller than -1 and bigger than 4. Meaning that the inequality is true for all Real numbers except for numbers -1 to 4.

3 F_2

3.1 a)

Die 1 lässt das Element Invariant unter Multiplikation. Daher ist u die 1.

Die 0 lässt das Element Invariant unter Addition. Daher ist g die 0.