Experimentalphysik 5

Florian Bierlage

April 24, 2025

Contents

Vorlesung 1 - 7.4.25

0.0.1 Salz in Feuer

Aufbau: Weißlichtquelle durch Bunsenbrenner, Löffel mit Salz über dem Bunsenbrenner

Beobachtung: Flamme wird Gelb, Das Salz absorbiert zwei Gelbe frequenzen des weißen Lichtes.

0.0.2 Natriumdampflampe

Anstatt einer Weißlichtquelle wird jetzt eine Natriumdampflampe benutzt. jetzt sind nur noch die beiden frequenzen die vorher absorbiert wurden zu sehen.

0.0.3 Wasserstoffgaslampe

Bei dem Auslesen des Wasserstoffatomes werden mehrere Linien durch mehrere Farben erkannt.

Vorlesung 2 - 11.4.25

0.1 Lorentz Modell

fig 1.1
Dipolmoment: $d = -ex(t)$
Harmonischer Oszillator: $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$

Abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{e^2 x_0^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

Dies vergleichen wir mit der Energie des Elektrons selber

$$E = \frac{m}{2}\omega^2 x_0^2$$

und somit

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -P = -\underbrace{\frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}}_{1/\tau} \cdot E = -\frac{E}{\tau}$$

also fällt die Energie exponentiell ab

Natrium

D-Linie: $\lambda = 589\text{nm}$
$\Gamma = \frac{1}{\tau} = 6 \cdot 10^7$ und der experimentelle fall
$\Gamma_{exp} = 6 \cdot 10^7$

Wasserstoff

$\lambda = 121\text{nm}$

$$\Gamma = 1.5 \cdot 10^9$$
$$\Gamma_{exp} = 6 \cdot 10^8$$

und für Yb $\lambda = 467\text{nm}$

$$\Gamma = 10^8$$
$$\Gamma_{exp} = 10^{-7}$$

0.1.1 Einstein Ratengleichungen

Seien zwei zustände E_2, E_1 mit E_1 Grundzustand.
fig 1.2

Absorption: die änderung von E_2

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = N_1 \cdot B_{12} \cdot \rho(\omega)$$

für Stimulierte Emission

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2 \cdot B_{21} \cdot \rho(\omega)$$

für Spontane Emission

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -N_2 \cdot A_{21}$$

und wir wissen über N_1 dass

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}$$

fig 1.3

Das Plank'sche Strahlungsgesetz

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}$$

und wir finden dass

$$A_{21} = \frac{\hbar\omega_{12}^3}{\pi^2 c^3} B_{21} \tag{0.1}$$

mit B_{21} als Intrinsische Eigenschaft des Atoms von Einstein her.

0.1.2 Atome in einem Magnetfeld

Das bewegte Elektron ist ein Kreisstrom.

$$I = -\frac{er}{2\pi r}$$

besitzt ein Magnetisches moment

$$\mu = -\frac{1}{2} e\vec{r} \times \vec{v}$$

Ein Magnetisches Moment in einem externen Magnetfeld B hat die Wechselwirkungsenergie (Potentielle Energie)

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

0.1.3 Lorentz Modell

$$m\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-m\omega_0^2 r}_{H.O.} - \underbrace{er \times B}_{\text{Lorentzkraft}}$$

wir definieren $B = B_0 e_z$

$$\ddot{r} + 2\Omega_L \dot{r} \times e_z + \omega_0^2 r = 0 \qquad \Omega_L = \frac{eB}{2m} \tag{0.2}$$

Wir lösen mit dem Ansatz

$$r(t) = (x e_x + y e_y + z e_z) e^{-i\omega t} \tag{0.3}$$

und die matrixform ist dann

$$\begin{pmatrix} \omega_0^2 & -2i\omega\Omega_L & 0 \\ 2i\omega\Omega_L & \omega_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{0.4}$$

Eigenwertgleichung mit char. Polynom

$$\left[\omega^4 - (2\omega_0^2 + 4\Omega_L^2)\omega^2 + \omega_0^4\right](\omega^2 - \omega_0^2) = 0 \tag{0.5}$$

Wir nehmen an, dass $\Omega_L << \omega_0$. So finden wir dass $\omega \approx \omega_0 \pm \Omega_L$, und wir erhalten die Eigenvektoren

$$\begin{matrix} \omega = \omega_0 - \Omega_L & \omega = \omega_0 & \omega = \omega_0 + \Omega_L \\ \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ -\sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} & z_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \tag{0.6}$$

1 Quantenmechanik

- diskrete Energieniveaus
- Abstrahlung von Energie führt zu Änderung des Zustands des Elektrons

Offene Fragen

- Auspaltung der D-Linie in Natrium.
- Anormaler Zeemaneffekt (Aufspaltung in Gerade Anzahl von Linien)

1.0.1 Doppelspaltexperiment

Konstruktive Interferenz für

$$\Delta\ell = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

desuktrive Interferenzen für

$$\Delta\ell = (n + 1/2)\lambda$$

Die Intensität auf dem Schirm ist proportional zum Betragsquadrat der

$$I \propto |E_1 + E_2|^2 \tag{1.1}$$

$$I \propto |E_1|^2 + |E_2|^2 + \underbrace{2\mathrm{Re}(E_1 * E_2)}_{\text{Interferenz}} \tag{1.2}$$

Was passiert mit einem Teilchen auf dem Doppelspalt?
deBroglie: Auch Teilchen haben Welleneigenschaften

$$\lambda = h/p$$

Einstein: Energie Impuls Beziehung

$$E = \hbar\omega = \sqrt{(mc^2)^2 + p^2c^2}$$

und für Masselose teilchen $E = pc = \hbar kc = \hbar\omega$ und somit ist $\omega = ck$
Für massive Teilchen $E = mc^2\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2c^2}} \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$ und damit gilt dann $\omega = \frac{\hbar k^2}{2m}$ mit kinetischer Energie kleiner als mc^2.

Vorlesung 3 - 14.4.25

Für masselose Teilchen

$$\hbar\omega = c\hbar k$$

für massive Teilchen

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2n}$$

Wellenfunktion für ein Teilchen

$$\psi(x,t) = C \cdot \exp(ikx - i\omega t)$$

Wobei C eine normierungskonstante ist, die bestimmt werden muss.
ψ legt den Zustand eines Teilchens am Ort x zur Zeit t vollständig fest.
Zeitentwicklung ist gegeben durch eine Wellengleichung

- Zeitentwicklung ist gegeben durch eine Wellengleichung
- Intensität der Welle beschreibt Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$
- Eine Komplexe Phasenverschiebung lässt die Wahrscheinlichkeitsdichte Invariant
- ρ beschreibt die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen am Ort $x, x + \mathrm{d}x$ zu finden.
- $\int_V \rho \mathrm{d}V = 1$, Die Wellenfunktion ist normiert
- die Teilchenzahldichte: $n = N \cdot \rho$

Das Elektron ist unterteilbar und punktförmig, also ist es nur an einer Stelle detektiert werden. Jede Stelle ist möglich, aber nicht gleich wahrscheinlich. Die Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch $\rho(x,t)$.
Im Doppelspalt haben wir zwei Wellenfunktionen, die jeweils durch einen Spalt gehen.

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)\big) \tag{1.3}$$

Wir wissen nicht, durch welchen Spalt das Elektron fliegt. Es fliegt quasi gleichzeitig durch beide. Falls wir messen durch welchen Spalt das Elektron fliegt, verschwindet das Interferenzmuster, sogar falls es nur möglich ist dies zu messen verschwindet das Interferenzmuster.

1.0.1 Die Schrödingergleichung

- Klassische Mechanik:
$$F = ma$$
- Elektrodynamike:
$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\psi(x,t) = C \exp\left[\left(i(px - \frac{p^2}{2m}t)\right)/\hbar\right] \tag{1.4}$$

$$i\hbar\frac{\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,t) \tag{1.5}$$

Eigenschaften der Schrödinger Gleichung:

- Linear in ψ. Falls ψ_1, ψ_2 Lösungen sind, ist $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ auch eine.
- Erste Ordnung in der Zeit; $\psi(x, t_0)$ legt alle Lösungen fest.
- Homogene Differentialgleichung; Daher bleibt die normalisierung erhalten.

Allgemeine Form der Schrödinger Gleichung für Potentiale;

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2}_{\text{kinetische Energie}} + V(x,t)\right)\psi(x,t) \tag{1.6}$$

Da der Operator welcher in der Klammer steht die Gesamte Energie darstellt, heißt dieser auch Hamilton Operator H.

1.0.2 Wellenpakete und Unschärferelation

Biespiel: Zwei ebene Wellen

$$\psi = C\left[e^{i(px-\frac{p^2}{2m}t)/\hbar} + e^{i(px-\frac{p^2}{2m}t)/\hbar}\right] \tag{1.7}$$

$$= Ce^{-\frac{ip^2}{\hbar 2m}t}\underbrace{\left[e^{ipx/\hbar} + e^{-ipx/\hbar}\right]}_{=2\cos(px/\hbar)} \tag{1.8}$$

Den Mittelwert des Ortes bestimmt man durch

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x|\psi(x,t)| \tag{1.9}$$

Schwankungsbreite und Generell berechnet man:

$$\langle\Delta x^2\rangle = \langle(x - \langle x\rangle)^2\rangle \tag{1.10}$$

$$\langle f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f|\psi(x,t)| \tag{1.11}$$

Das produkt der Schwankungsbreiten ist die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\sqrt{\langle\Delta x^2\rangle}\sqrt{\langle\Delta p^2\rangle} = \frac{\hbar}{2} \tag{1.12}$$

Was ein Spezialfall ist

1.0.3 Heisenberg-Mikroskop

Wir wollen wissen wie schnell ein Elektron ist und wo es ist. Wir beleuchten das Elektron mit einem Laser, und nutzen die Streuung des Elektrons um das Licht in einem Detektor aufzufangen. Die Auflösung des Mikroskops ist durch den Öffnungswinkel ϕ gegeben. $d = \frac{\lambda}{\sin(\phi)} = \Delta x$ Der Rückstoß an das Elektron ist $\Delta p_x = \frac{2\pi}{\lambda}\hbar \sin(\phi)$. Die Messung verändert also die Geschwindigkeit des Elektrons. Hier $\Delta x \Delta p = 2\pi\hbar$

Vorlesung 5 - 24.4.25

1.1 7 QM vs klassische Physik

klassische Messgröße: Impuls
QM: Erwartungswert $\langle p\rangle$
Was ist die Bewegungsgleichung für $\langle A\rangle$?

$$\langle A\rangle = (\psi, A\psi) = \int \mathrm{d}^3 x \psi^\dagger A\psi \tag{1.13}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle A\rangle = \int \mathrm{d}^3 x \left(\underbrace{\frac{\partial\psi^\dagger}{\partial t} A\psi}_{=i/\hbar\psi^\dagger H} + \psi^\dagger \frac{\partial A}{\partial t}\psi + \underbrace{\psi^\dagger A \frac{\partial\psi}{\partial t}}_{=-i/\hbar H\psi} \right) \tag{1.14}$$

$$= \langle \frac{\partial A}{\partial t}\rangle + \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle \tag{1.15}$$

Bewegungsgleichung des Erwartungswerts des Operators A.
klassisch: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$
QM:

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\langle \frac{\partial p}{\partial t}\rangle}_{=0} + \frac{i}{\hbar}\langle [H, p]\rangle \tag{1.16}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V \tag{1.17}$$

$$[p^2, p] = p^2 p - p p^2 = 0 \tag{1.18}$$

$$[p, V] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \tag{1.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}\langle p\rangle}{\mathrm{d}t} = -\langle V\rangle \tag{1.20}$$

Also ist die Klassische Trajektorie ein spezialfall der QM.

1.2 8 Drehimpuls in der QM

Klassisch: Teilchen dreht sich um einen Ort, $L = x \times p$. Sphärisch Symmetrische Probleme: Drehimpulserhaltung.
Wir definieren in der Quantenmechanik dann den Drehimpuls als $L = x \times p$. Der Operator hat eine "Länge" L^2. Die Länge ist Rotationsinvariant.

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k \tag{1.21}$$

$$[L_x, L] = [L_x, L_y^2 + L_z^2] = 0 \tag{1.22}$$

Lösungen der Eigenwertgleichungen

$$L^2\psi = \hbar^2\ell(\ell+1)\psi_{lm} \tag{1.23}$$
$$L_z\psi = \hbar m\psi_{lm} \tag{1.24}$$

Def: Auf und Absteigeoperatoren

$$L_+ = L_x + iL_y \tag{1.25}$$
$$L_- = L_x - iL_y \tag{1.26}$$
$$[L_z, L_\pm] = \pm\hbar L_\pm \tag{1.27}$$
$$[L^2, L_\pm] = 0 \tag{1.28}$$

damit kann berechnet werden dass die auf und absteigeoperatoren das m verändern aber nicht das ℓ $|m| \leq \ell$ Wobei ℓ halb oder ganzzahlig sein kann, und m läuft ganzzahlig von $-\ell$ zu ℓ.

1.2.1 Wie sehen die Eigenfunktionen aus?

Wir transformieren in die Polarkoordinaten, dann ist

$$L_z = -i\hbar\partial_\phi \tag{1.29}$$
$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) + \frac{1}{\sin\theta^2\partial_\phi^2}\right) \tag{1.30}$$

Die Lösungen dazu sind die Kugelflächenfunktionen Y_{lm}