Analysis 1 - Vorlesung 24

8.1.2025

Contents

0.1 Hauptsatz der Differentialrechnung

sei $f \in C^0([a, b])$, dann

a) $c \in [a, b]$, $F(x) = \int_c^x f(t)\mathrm{d}t \Rightarrow F \in C^1([a, b])$

b) F sei die stammfunktion von f, dann $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$

1 Partielle Integration

1.1 Satz 9.24

Seien $f, g \in C^1([a, b])$, dann ist

$$\int_a^b f'(x)g(x) = -\int_a^b f(x)g'(x) + (f(b)g(b) - f(a)g(a))$$

Beweis:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b (fg)'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'g\mathrm{d}x + \int_a^b fg'\mathrm{d}x$$

1.2 Korollar 9.25

seien $f \in C^0([a, b]), g \in C^1$. Dann

$$\int_a^b F(x)g(x)\mathrm{d}x = -\int f(x)g(x)\mathrm{d}x + F(x)g(x)|_{x=a}^b$$

2 9.6 Substitutionsregel

2.1 Satz 9.26

Seien I, J abgeschlossene beschränkte Intervalle. Sei $f \in C^0(I)$ und $\phi \in C^1(J)$ mit $\phi(J) \subset I$. Dann gilt $\forall \alpha, \beta \in J$

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\mathrm{d}t = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$$

Beweis: Sei F die Stammfunktion von f. Sei $g(t) = F(\phi(t))$. Dann ist $g'(t) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$. Somit ist

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(x)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta g'(x)\mathrm{d}t = g(\beta) - g(\alpha) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = \int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)\mathrm{d}x$$

2.1.1 Beispiel

Verschiebung

$$\int_a^b f(t+c)\mathrm{d}t = \int_{a+c)}^{b+c} f(x)\mathrm{d}x$$

Multiplikation

$$\int_a^b f(cx)\mathrm{d}x = \frac{1}{c}\int_{ca}^{cb} f(x)\mathrm{d}x$$

3 9.7 Uneigentliche Integrale 1 (unbeschränkte Integrale)

Ziel: Integral über unbeschränkte Integrale definieren, zum Beispiel

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

3.1 Definition Uneigentliches Integral 9.27

Sei $I = [a, \infty)$ ein Intervall mit $a \in \mathbb{R}$. Sei $f \in R([a,b]) \quad \forall b < \infty, b > a$ dann ist

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

falls dieser limes existiert. Dieses Integral heißt dann uneigentliches Integral von f über $[a, \infty)$. Ansonsten ist das Integral divergent.

3.2 Satz 9.28

Das Uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn $\forall\epsilon > 0 \exists\xi \geq a$ s.d.

$$|\int_b^{b'} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon \quad \forall b, b' > \xi$$

3.3 Definition Absolut Konvergentes Uneigentliches Integral 9.29

Das Integral $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ heißt absolut konvergent, falls $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ konvergiert.

3.4 Satz 9.30

Falls ein Integral absolut konvergent ist, ist es auch konvergent.

Beweis:

$$|\int_b^{b'} f(x)\mathrm{d}x| \leq \int_b^{b'} |f(x)|\mathrm{d}x$$

3.5 Satz 9.31 Majorantenkriterium für Integrale

Sei $g \in R([a,b]), \quad \forall b < \infty, \; g \geq 0, \; \int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$ konvergiert dann existiert ein $y \geq a$ für das $|f(x)| \leq g(x)$ für alle x. Dann konvergiert $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ absolut

Beweis: Sei $\epsilon > 0$.

$$\int_b^{b'} |f(x)|\mathrm{d}x \leq \int_b^{b'} g(x)\mathrm{d}x < \epsilon \;\; \forall b, b' \geq \max(\xi, y)$$