



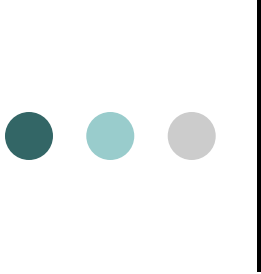
# Analyse multicritère

ELECTRE



# Plan

- Agrégation partielle
- ELECTRE
  - Fonctionnement: Electre sans calculs
    - La balance des préférences
    - Exemple de situations
    - Le graphe des surclassements
  - Les calculs

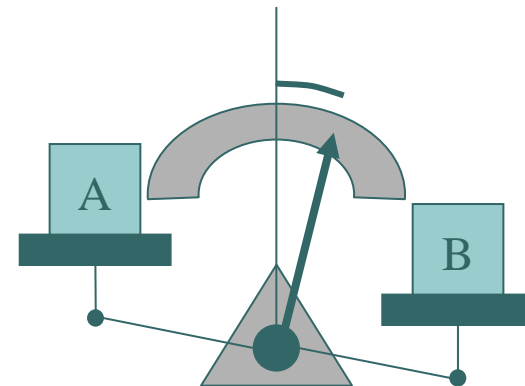
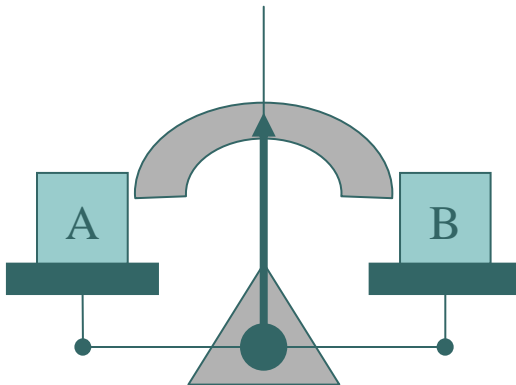


# Agrégation partielle [Schärlig, 97]

- Ensemble de méthodes d'analyse multicritère qui:
  - Essaient de se tenir à ce que le décideur dit.
    - Non-transitivité
  - Limitent la compensation entre critères
    - Introduction de veto
  - Considèrent que toutes les variantes ne sont pas nécessairement comparables
    - Incomparabilité

# ELECTRE

- Auteur
  - Bernard Roy, LAMSADE (Paris)
- Fonctionnement général
  1. La balance de la préférence !
    - Comparaison deux à deux des variantes
    - Calcul d'un indice de surclassement



Je préfère B à A !

# ELECTRE

- La balance des préférences

Est-ce que je préfère B à A ? (B surclasse A ?)

Est-ce que je préfère A à B ? (A surclasse B ?)

- A surclasse B et B surclasse A :

A et B indifférents



- A surclasse B et B ne surclasse pas A :

A est préféré à B



- A ne surclasse pas B et B ne surclasse pas A :

A et B sont incomparables



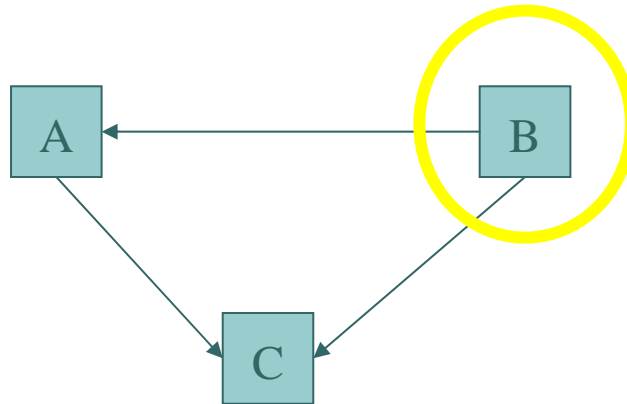
- A ne surclasse pas B et B surclasse A :

B est préféré à A



# ELECTRE

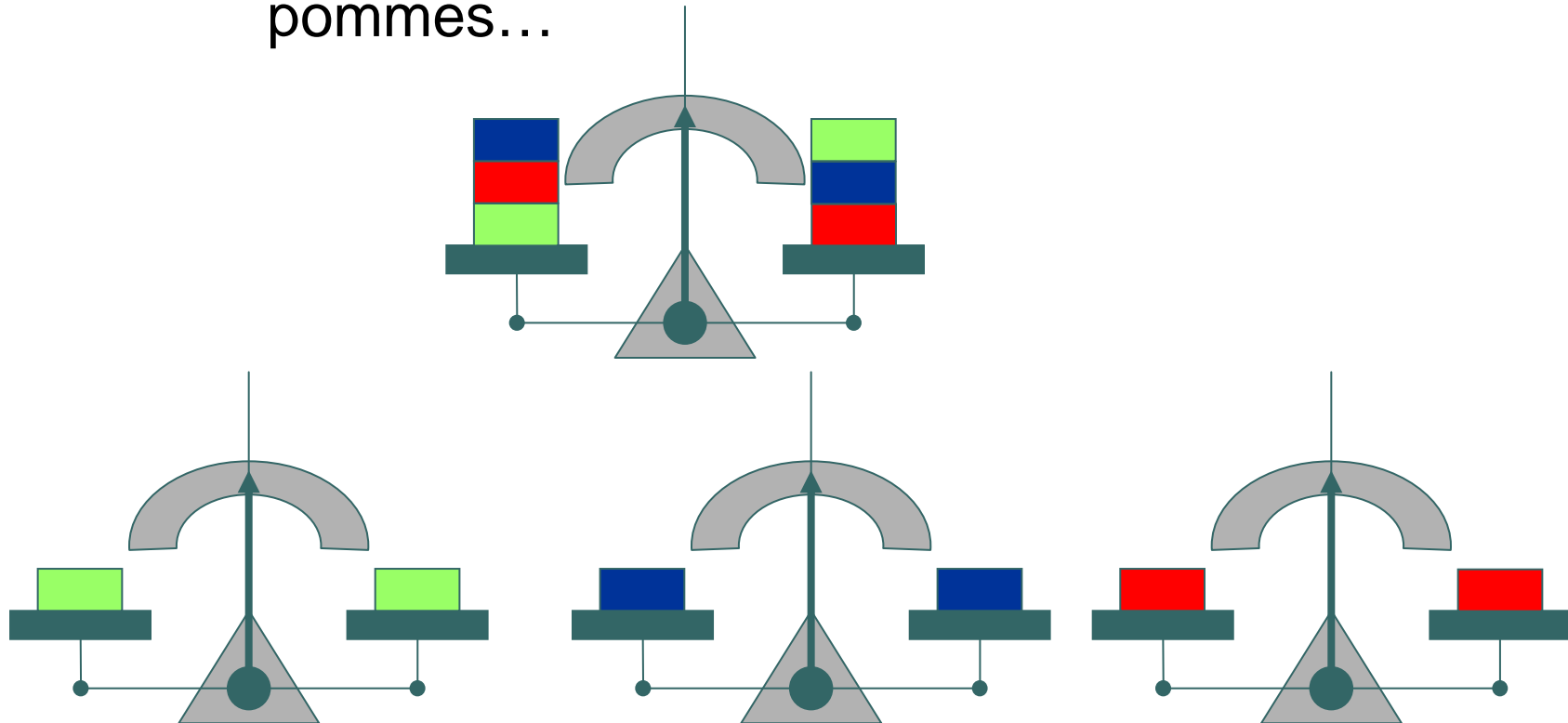
- Fonctionnement général
  - 2. Le graphe des surclassements
    - Analyse du graphe



# ELECTRE

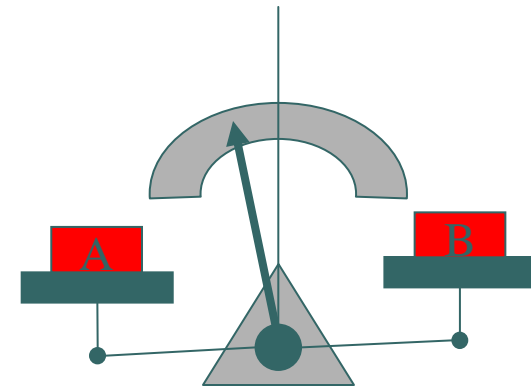
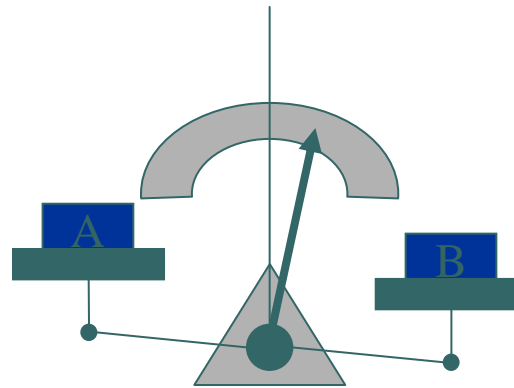
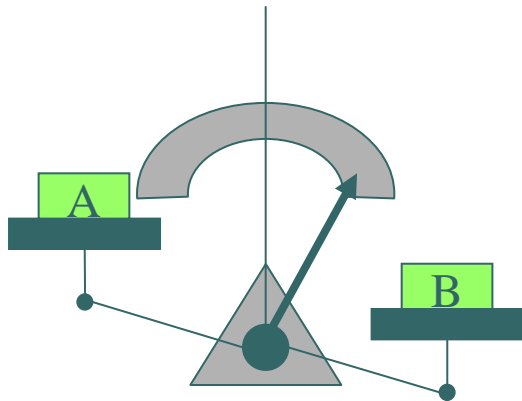
- La balance des préférences

- On ne peut pas comparer des poires et des pommes...



# ELECTRE

- La balance des préférences
  - Les préférences sont pesées critère par critère



On considère une pondération (importance des critères).

Poids critère 1 : 30 %

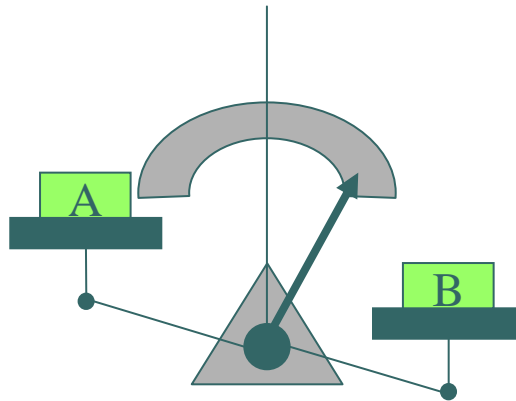
Poids critère 2 : 40 %

Poids critère 3 : 30 %

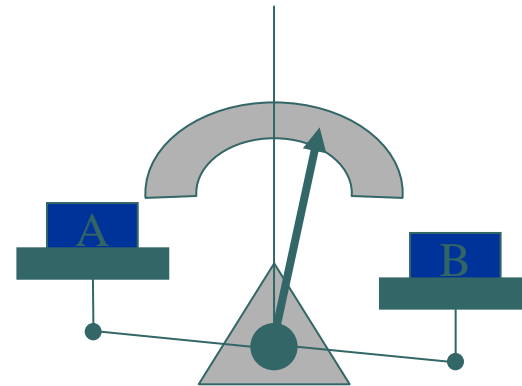


# ELECTRE

- Est-ce que je préfère B à A ?
  - Première question
    - Est-ce qu'une majorité de critères considèrent que B est au moins aussi bon que A ?



Poids critère 1 : 30 %

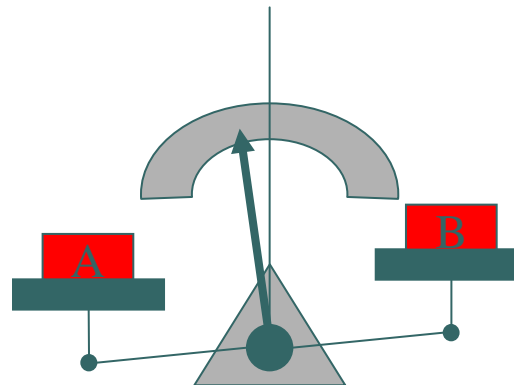


Poids critère 2 : 40 %

Total = 70 %, une relativement forte majorité des critères semble pencher pour le OUI.

# ELECTRE

- Est-ce que je préfère B à A ?
  - Deuxième question
    - Si, sur le critère j, B est faible relativement à A, est-ce que cela peut être compensé ?



L'aiguille n'est pas dans une position extrême - > OUI.



# ELECTRE

- Lorsque les réponses sont

- Question 1 : Oui
- Question 2 : Oui



- Alors, on dit que B **surclasse** A.

- Autrement

- Question 1 : Oui et Question 2 : Non

ou

- Question 1 : Non, et Question 2 : Oui ou Non
- Alors, on dit que B **ne surclasse pas** A.

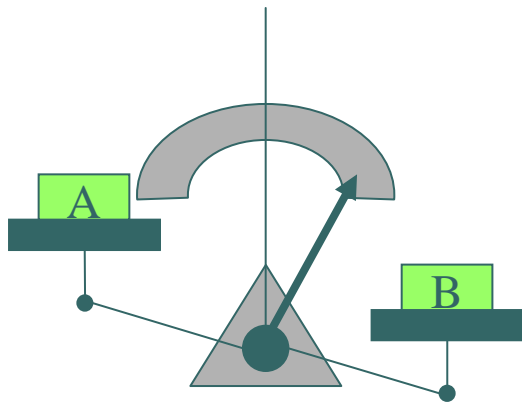


# ELECTRE

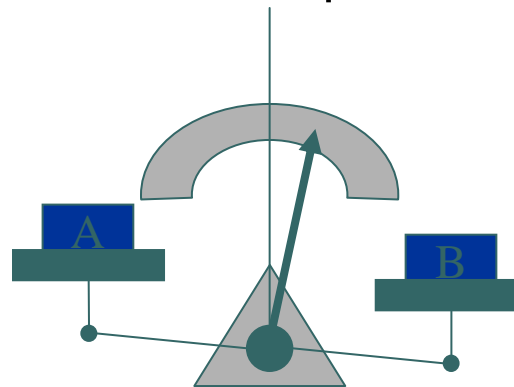
- La balance des préférences

Est-ce que je préfère A à B ? (A surclasse B ?)

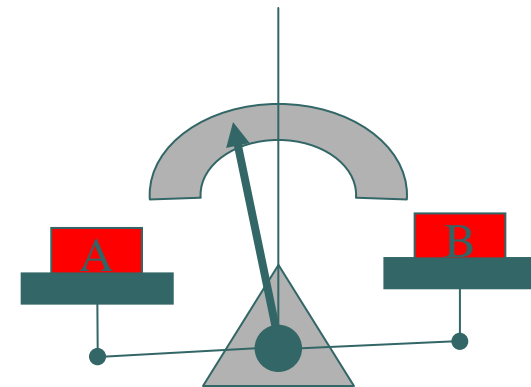
- De manière similaire, on compare ensuite A vers B
- Première question
  - Est-ce qu'une majorité de critères considèrent que A est au moins aussi bon que B ?



Poids critère 1 : 30 %



Poids critère 2 : 40 %

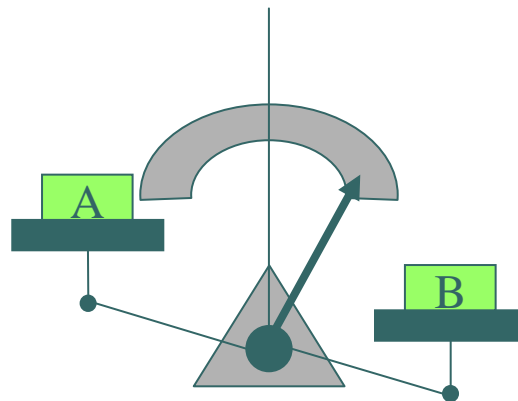


Poids critère 3 : 30 %

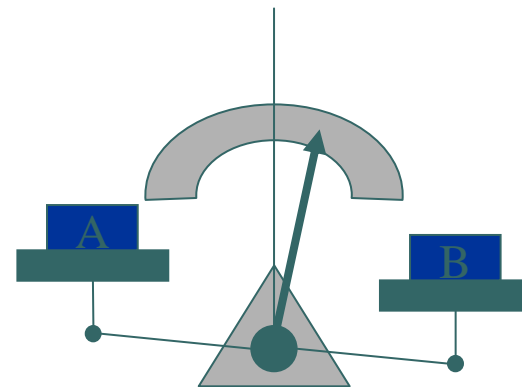
Total = 30 %. Seule une minorité penche pour le OUI -> NON.

# ELECTRE

- La balance des préférences
  - Deuxième question
    - Si, sur le critère  $j$ ,  $A$  est faible relativement à  $B$ , est-ce que cela peut être compensé ?





Critère 1



Critère 2

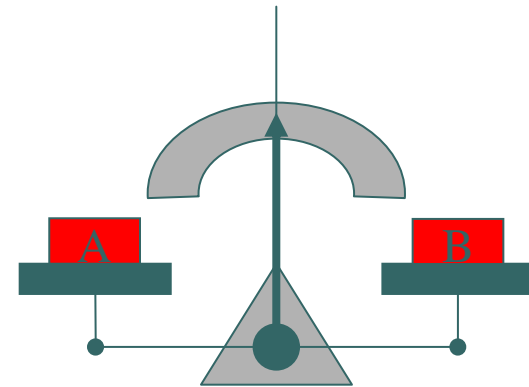
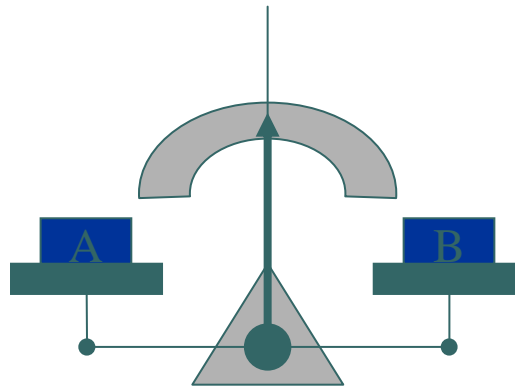
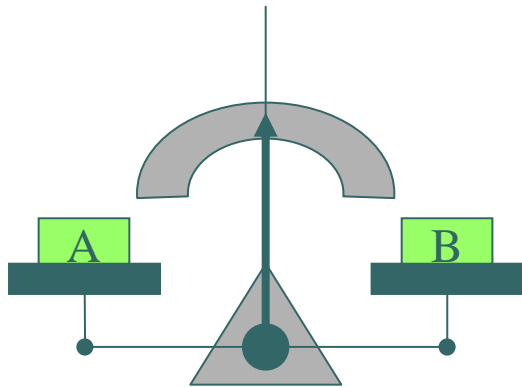
Pour le critère 1, l'aiguille est dans une position extrême, donc NON.

# ELECTRE

- Si on considère que les réponses sont
  - Question 1 : Non
  - Question 2 : Non 
  - Alors, on dit que A ne surclasse pas B.
- En synthèse, pour cet exemple
  - B surclasse A
  - A ne surclasse pas B 
  - Donc, on dit que B **est préféré** à A.

# ELECTRE

- La balance des préférences
  - Et si A et B sont identiques ?

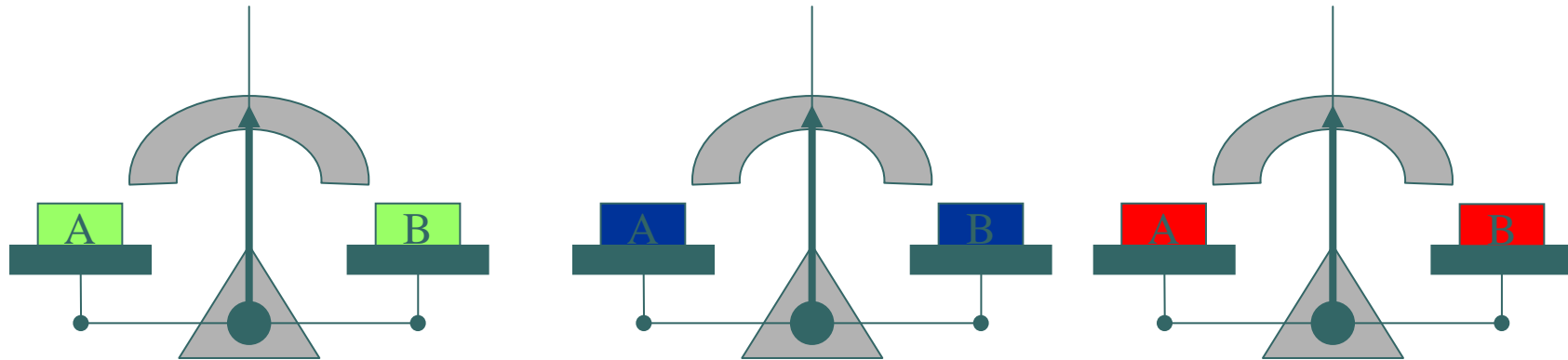


# ELECTRE

- La balance des préférences

- Première question

- Est-ce qu'une majorité de critères considèrent que A est au moins aussi bon que B ?



Total = 100 %, -> OUI.





# ELECTRE

- La balance des préférences
  - Deuxième question
    - Si, sur le critère  $j$ ,  $A$  est faible relativement à  $B$ , est-ce que cela peut être compensé ?

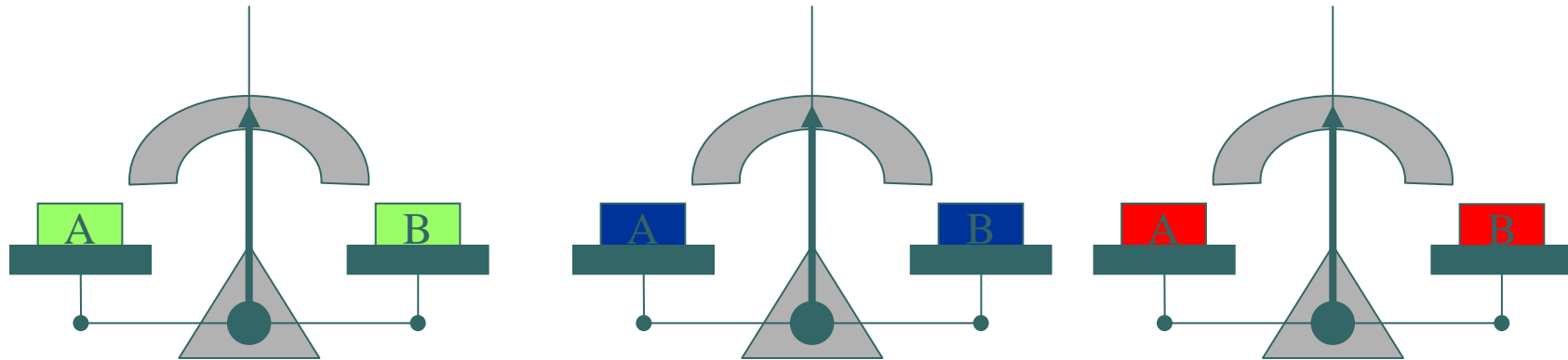
Jamais extrême - > OUI.

# ELECTRE

- La balance des préférences

- Première question

- Est-ce qu'une majorité de critères considèrent que B est au moins aussi bon que A ?



Total = 100 %, -> OUI.



# ELECTRE

- La balance des préférences
  - Deuxième question
    - Si, sur le critère  $j$ ,  $B$  est faible relativement à  $A$ , est-ce que cela peut être compensé ?

Jamais extrême donc - > OUI.

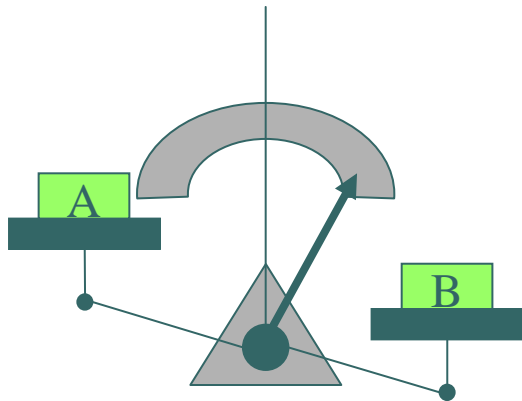
# ELECTRE

- A surclasse-t-il B ?
  - Question 1 : Oui
  - Question 2 : Oui
  - Donc, A surclasse B.
- B surclasse-t-il A ?
  - Question 1 : Oui
  - Question 2 : Oui
  - Donc, B surclasse A.
- Dans ce cas, on dit que A et B sont indifférents.

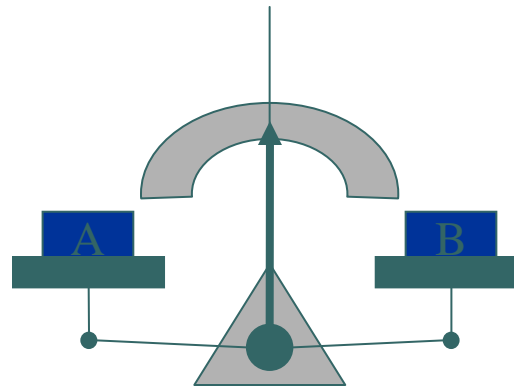


# ELECTRE

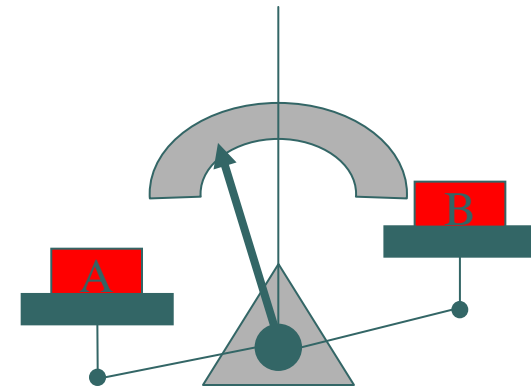
- La balance des préférences
  - Supposons la situation suivante



Poids critère 1 : 25 %



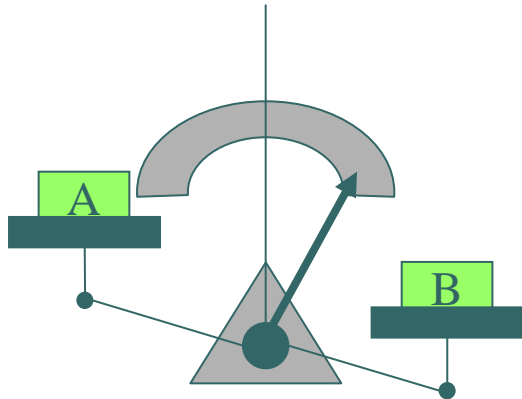
Poids critère 2 : 50 %



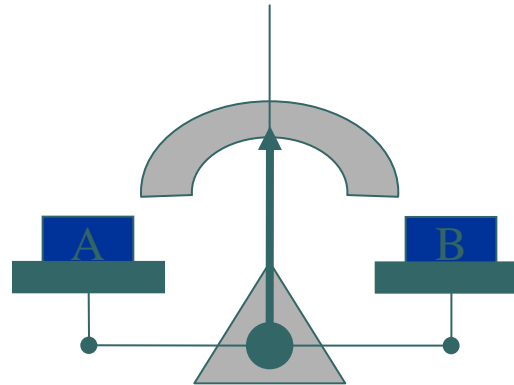
Poids critère 3 : 25 %

# ELECTRE

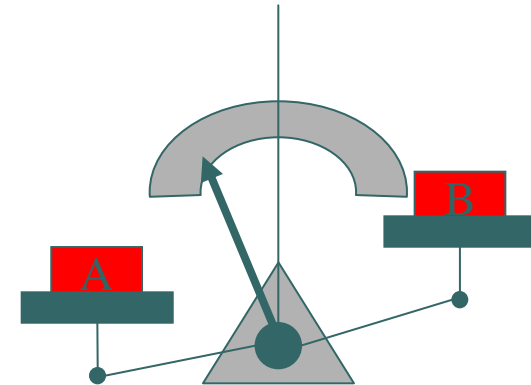
- La balance des préférences



Poids critère 1 : 25 %



Poids critère 2 : 50 %



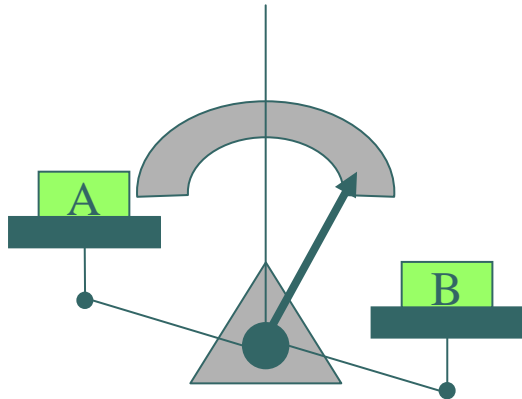
Poids critère 3 : 25 %

- B surclasse A ?

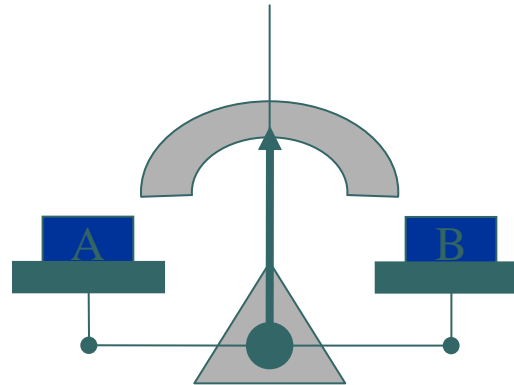
- Question 1 =  $25 + 50 = 75\%$  -> Oui
- Question 2 : Faiblesse extrême sur critère 3 -> Non
- Donc, NON.

# ELECTRE

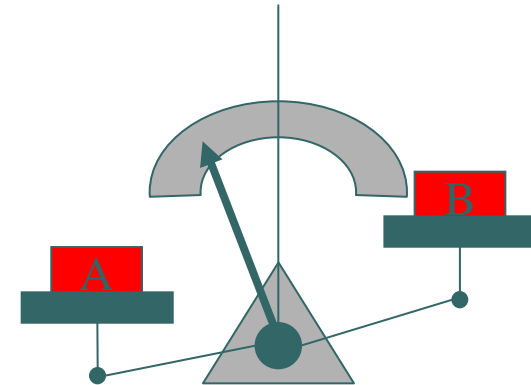
- La balance des préférences



Poids critère 1 : 25 %



Poids critère 2 : 50 %



Poids critère 3 : 25 %

- A surclasse B ?

- Question 1 =  $50 + 25 = 75\%$  -> Oui
- Question 2 : Faiblesse extrême sur critère 1 - > Non
- Donc, NON.



# ELECTRE

- La balance des préférences
  - A ne surclasse pas B
  - B ne surclasse pas A
  - Donc, A et B sont **incomparables** !
- Autrement dit,
  - Il n'y a pas suffisamment d'arguments (critères) pour prendre position entre les deux variantes.



- Rappel: quatre relations possibles

- A surclasse B et B surclasse A :  
A et B indifférents



- A surclasse B et B ne surclasse pas A :  
A est préféré à B



- A ne surclasse pas B et B ne surclasse pas A :  
A et B sont incomparables

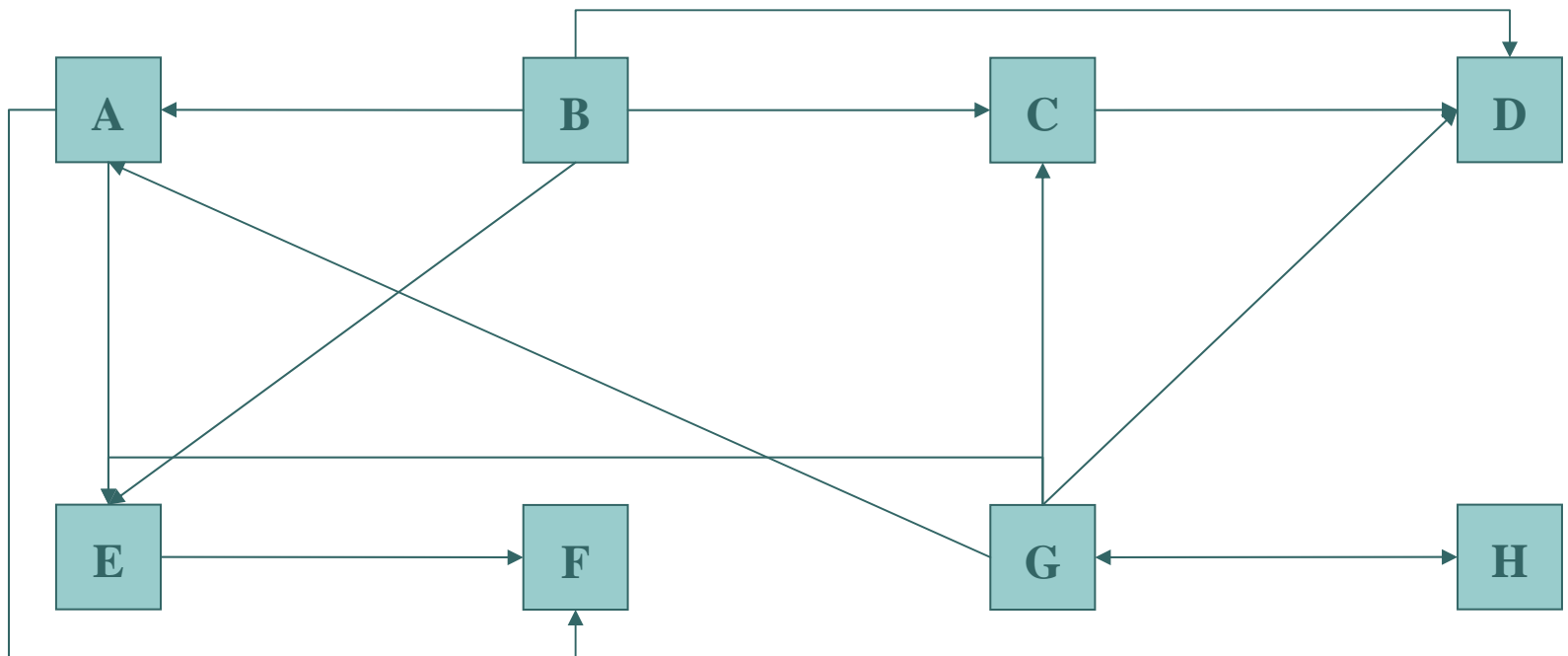


- A ne surclasse pas B et B surclasse A :  
B est préféré à A



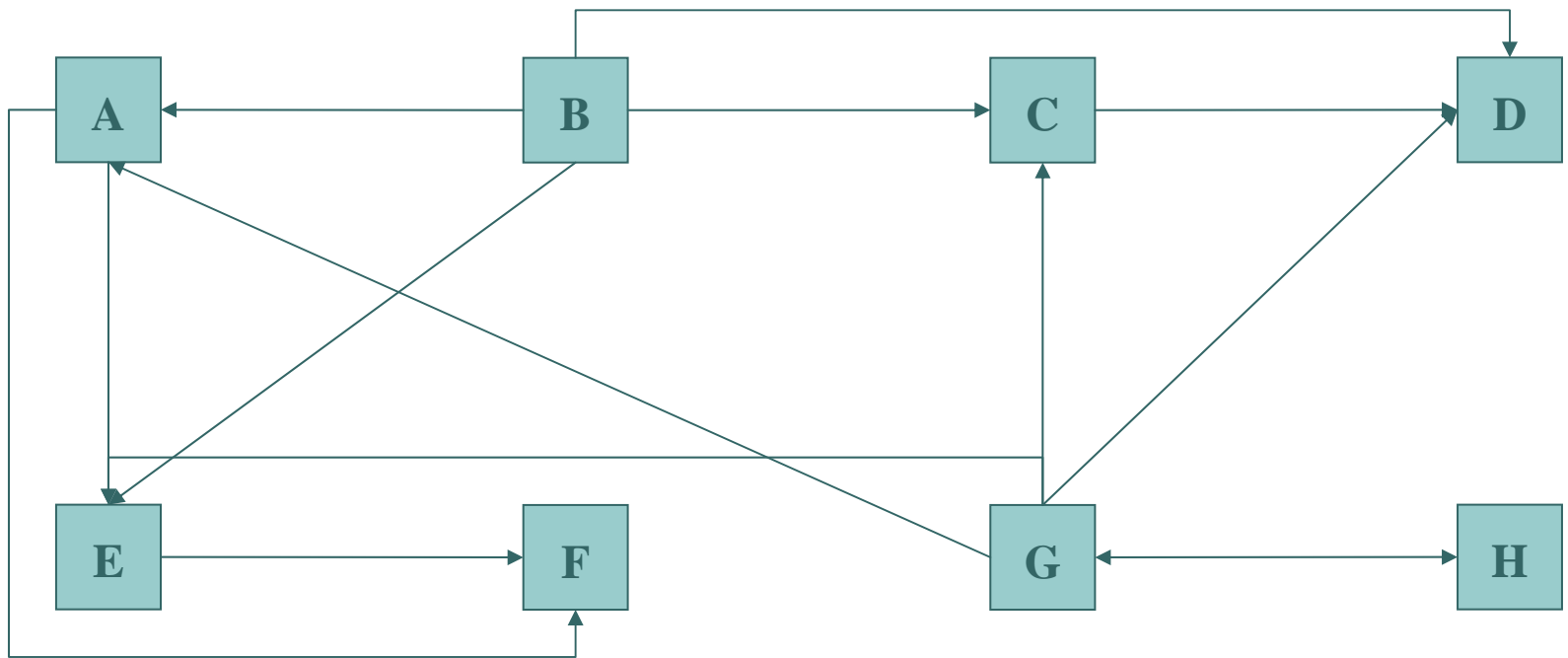
# ELECTRE

## 2. Graphe des surclassements



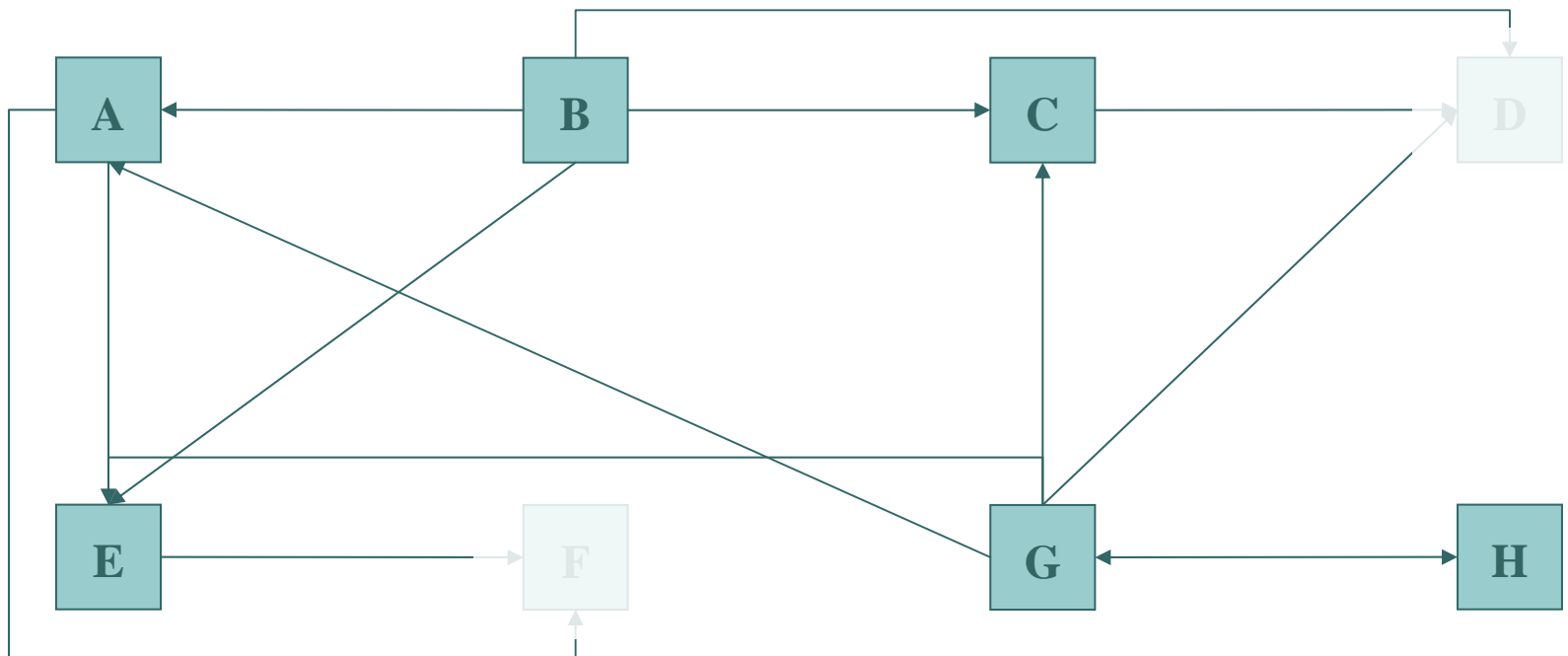
# ELECTRE

- Tri ascendant : débute par les surclassées



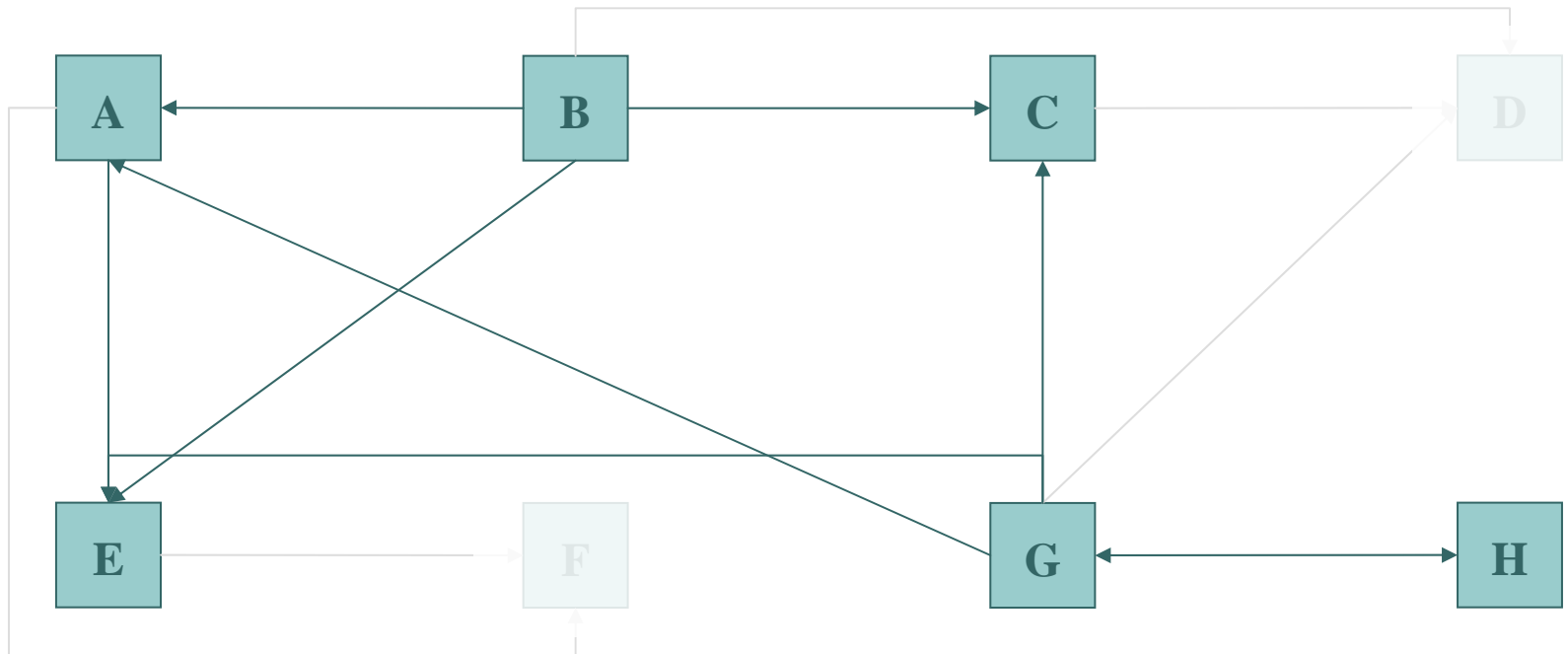
# ELECTRE

- Tri ascendant



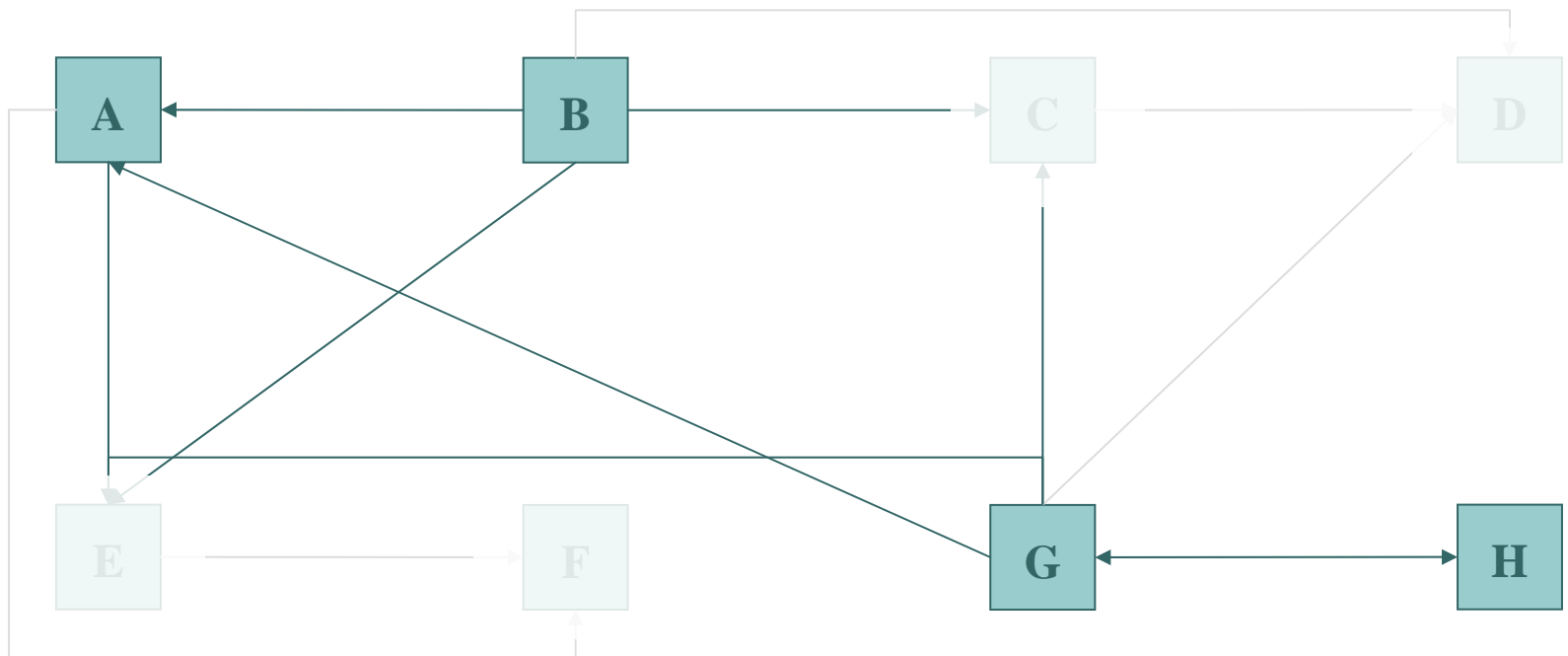
# ELECTRE

- Tri ascendant



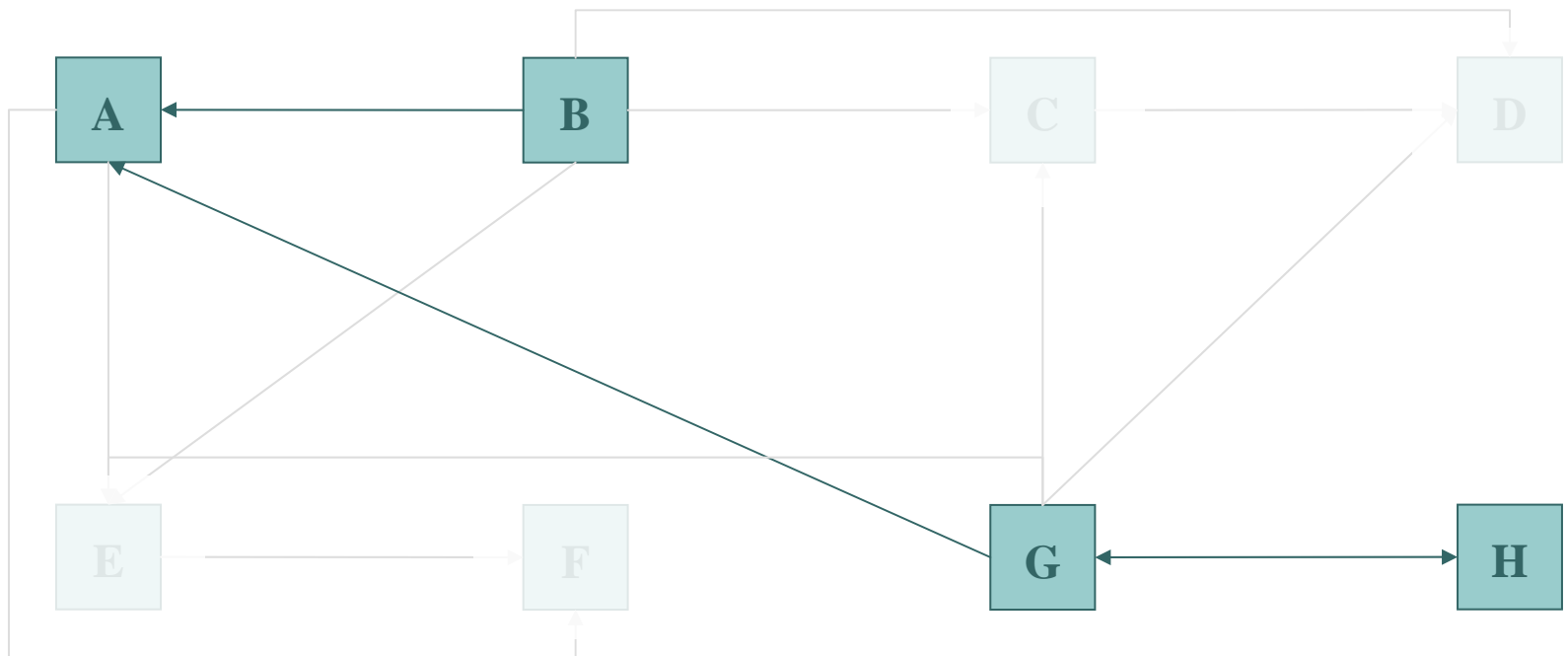
# ELECTRE

- Tri ascendant



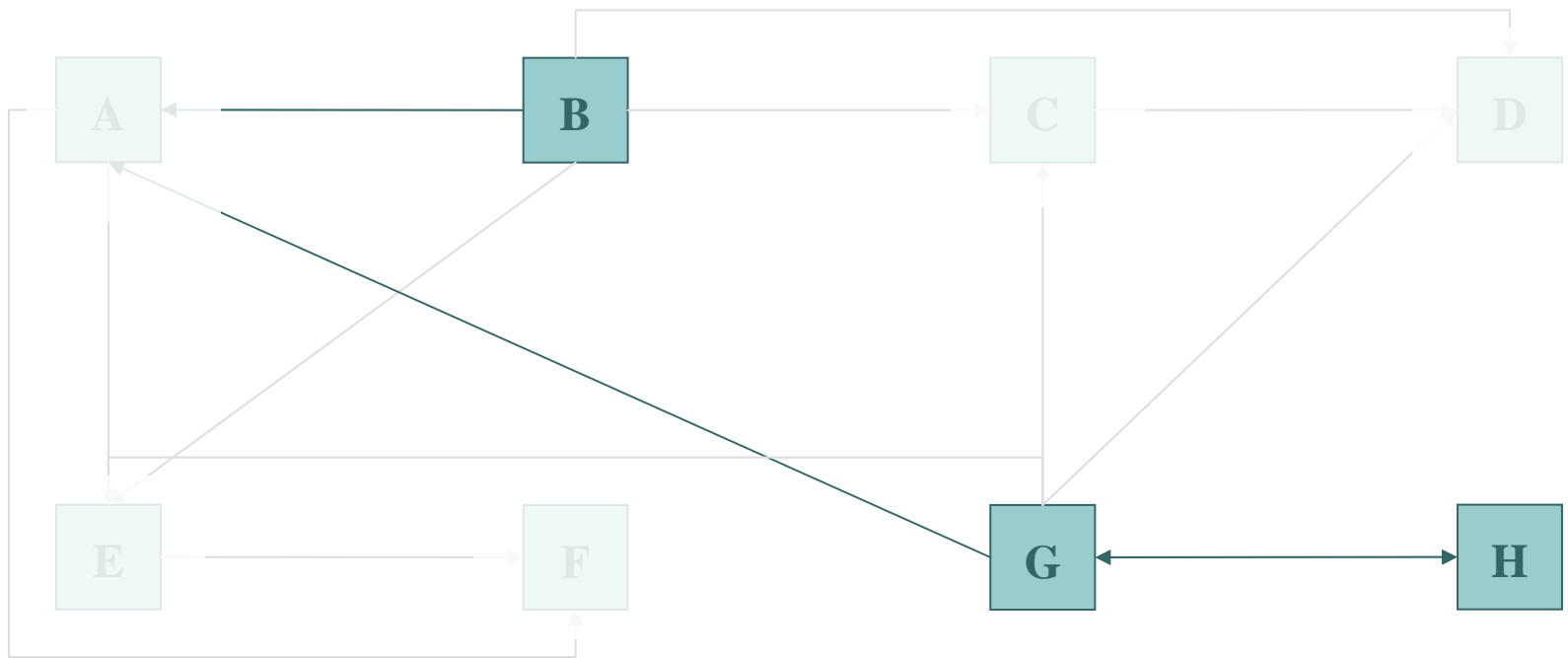
# ELECTRE

- Tri ascendant



# ELECTRE

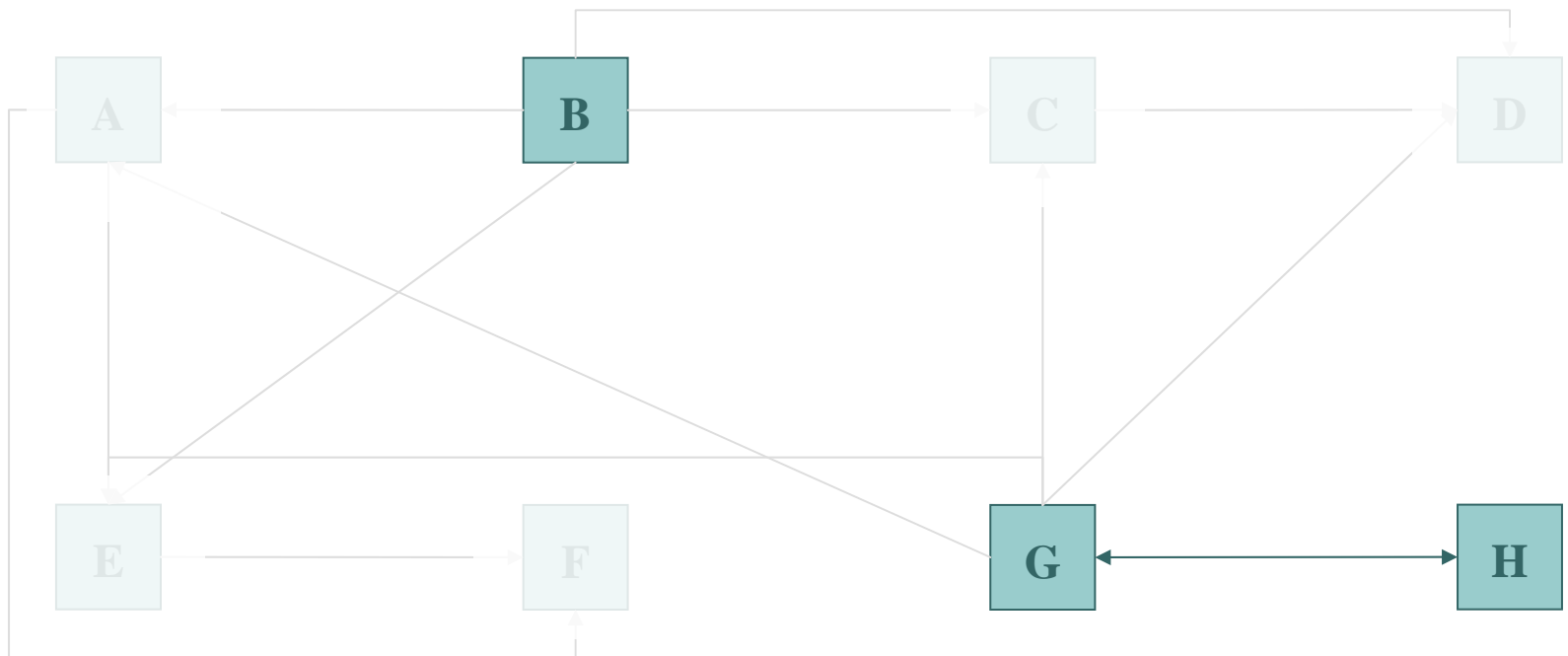
- Tri ascendant





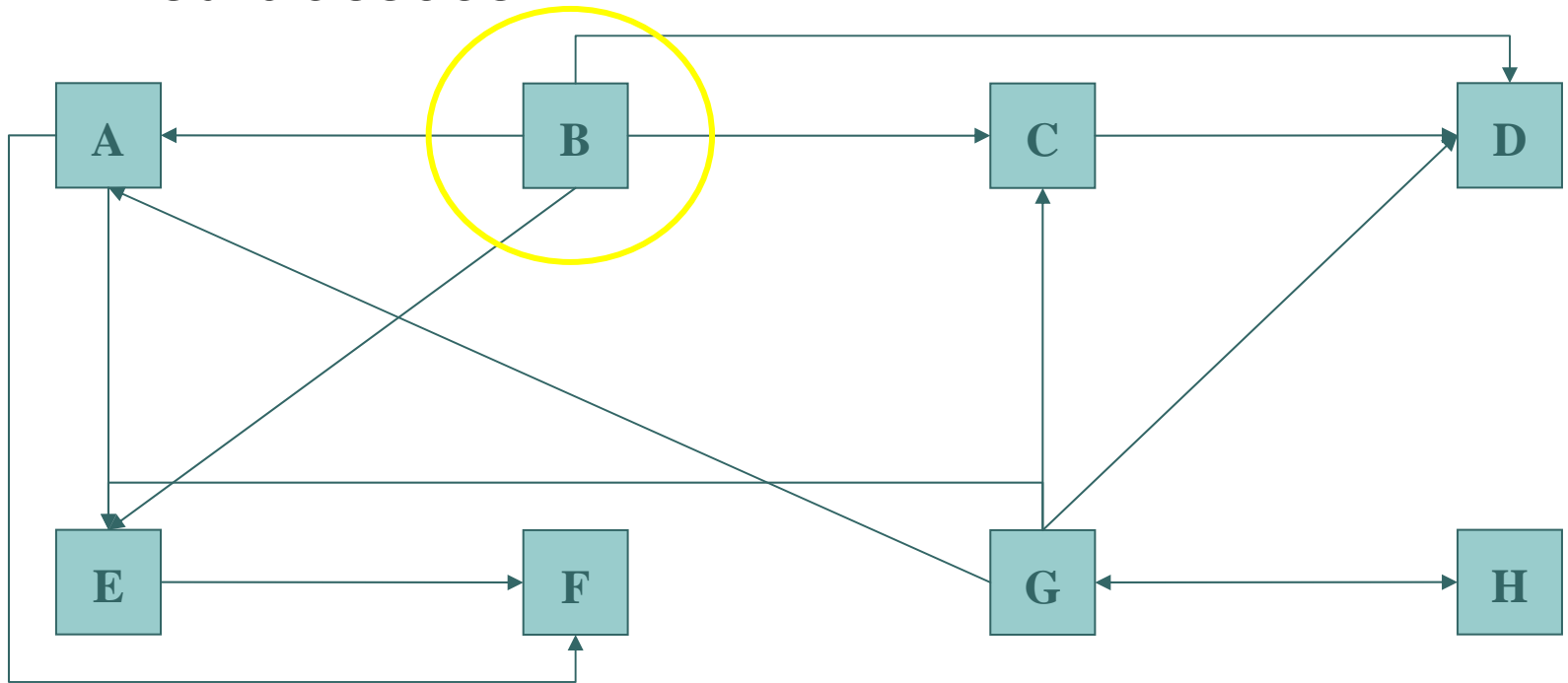
# ELECTRE

- Tri ascendant



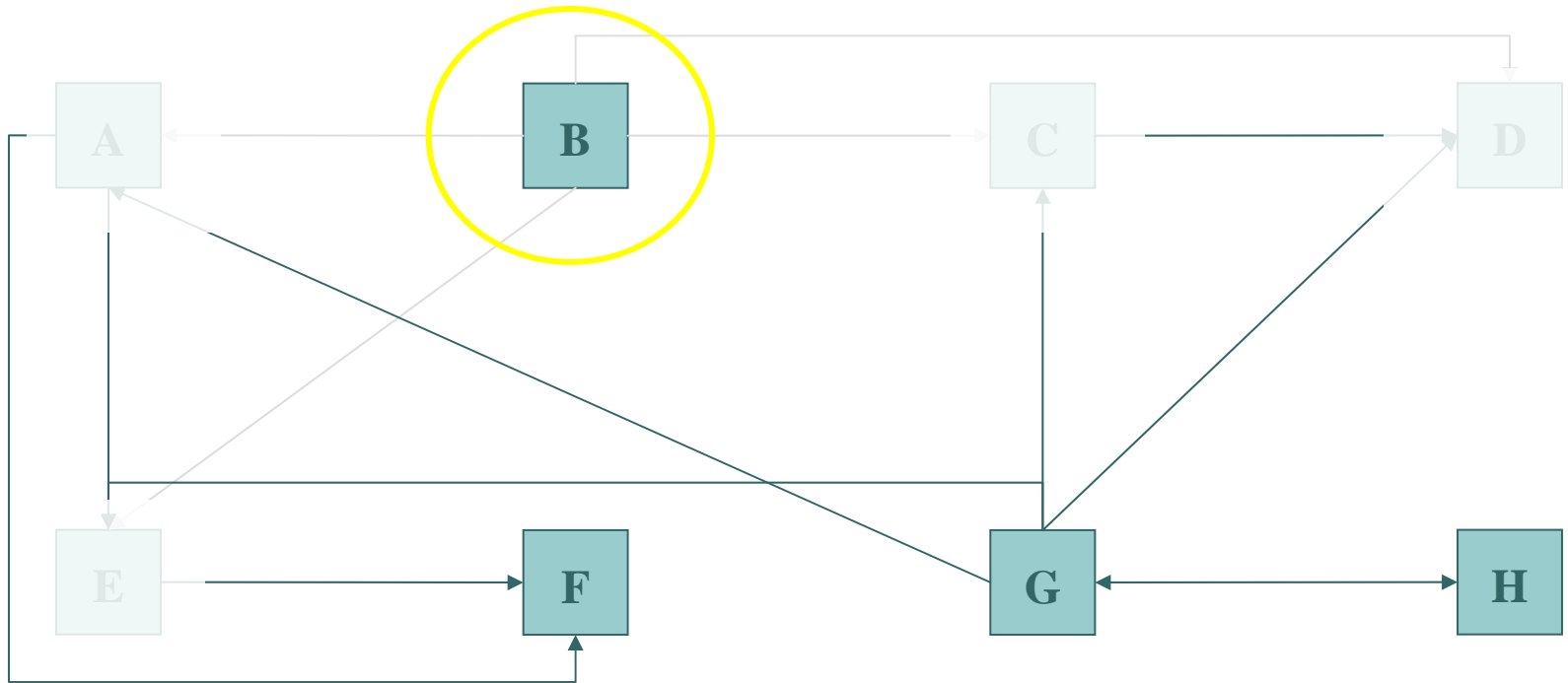
# ELECTRE

- Tri descendant débute par les non surclassées.



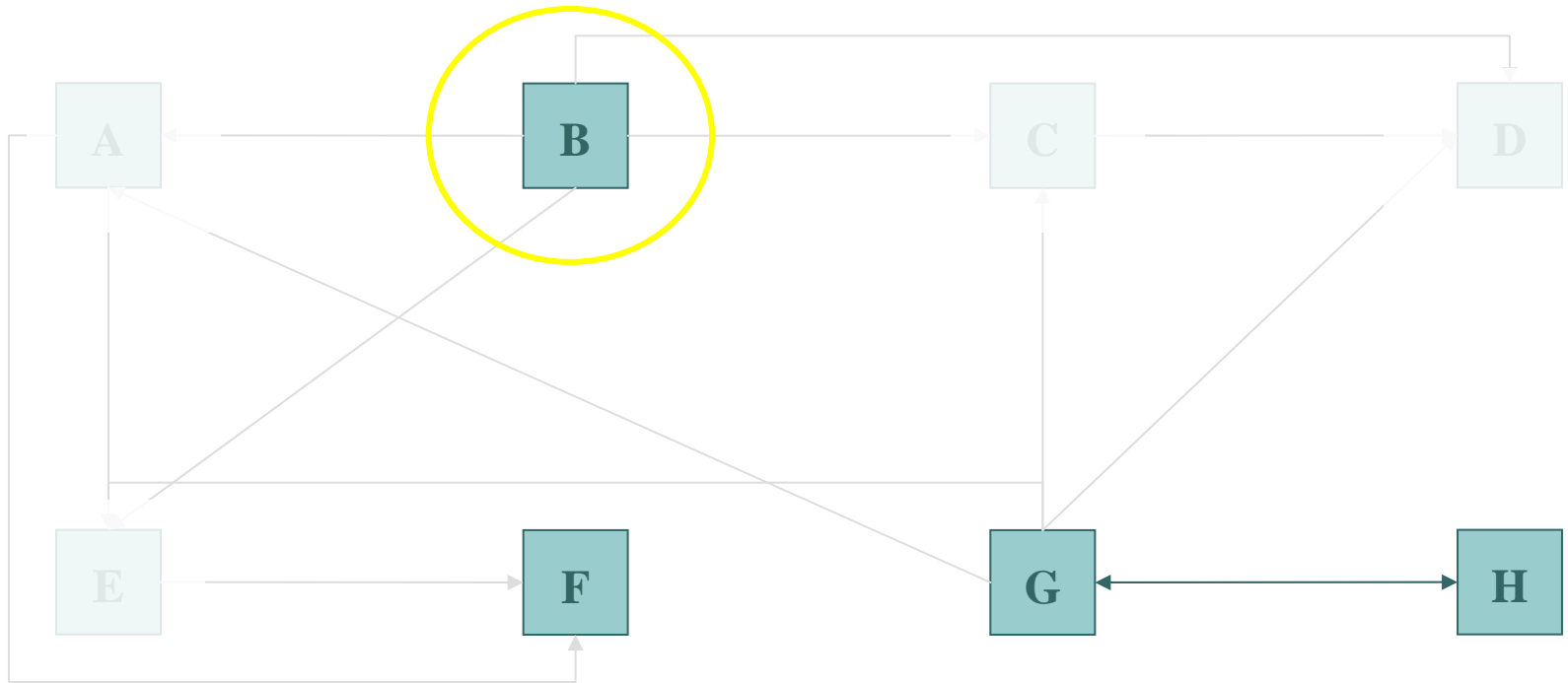
# ELECTRE

- Tri descendant



# ELECTRE

- Tri descendant





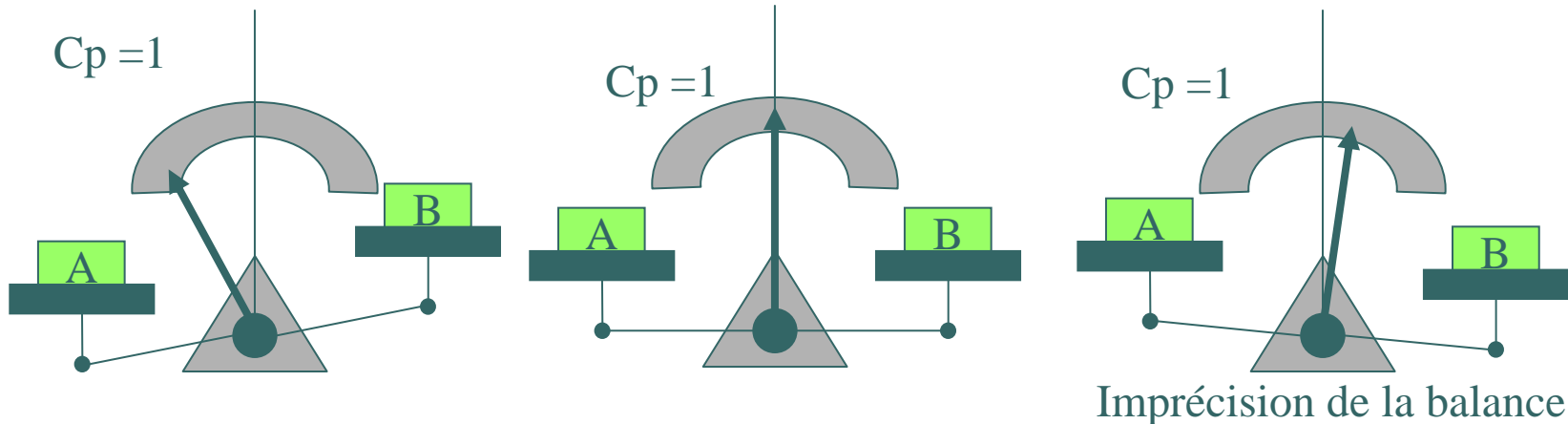
# ELECTRE

- Synthèse de l'analyse du graphe (exemple)
  - B appartient au groupe des meilleures variantes
  - G et H, qui sont indifférentes, appartiennent au groupe des meilleures variantes.
  - Entre B, d'une part, et G ou H, d'autre part, il y a incomparabilité, donc le décideur doit trancher.
  - La variante F est « balladeuse », il faut y porter attention car même si elle semble moins bonne que G ou H, elle pourrait constituer une option intéressante.

# ELECTRE

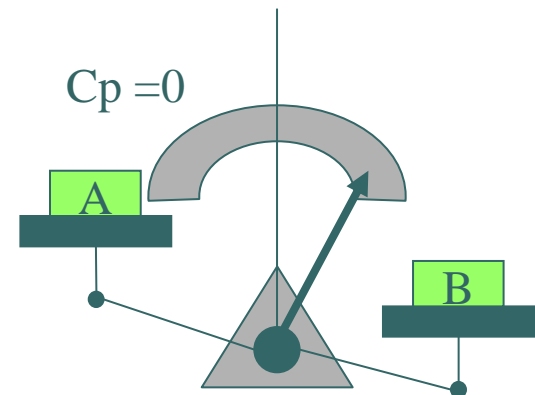
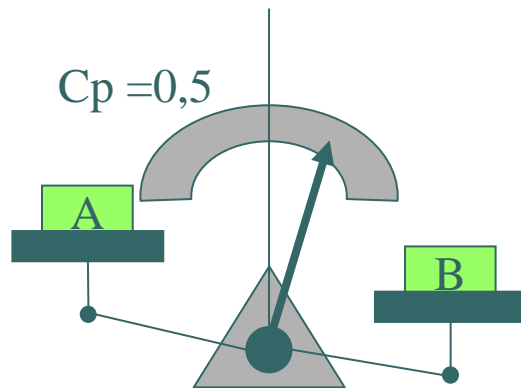
## ○ Calculs

- Question 1 :  
Est-ce que A est au moins aussi bon que B ?
- Indice de concordance partiel



# ELECTRE

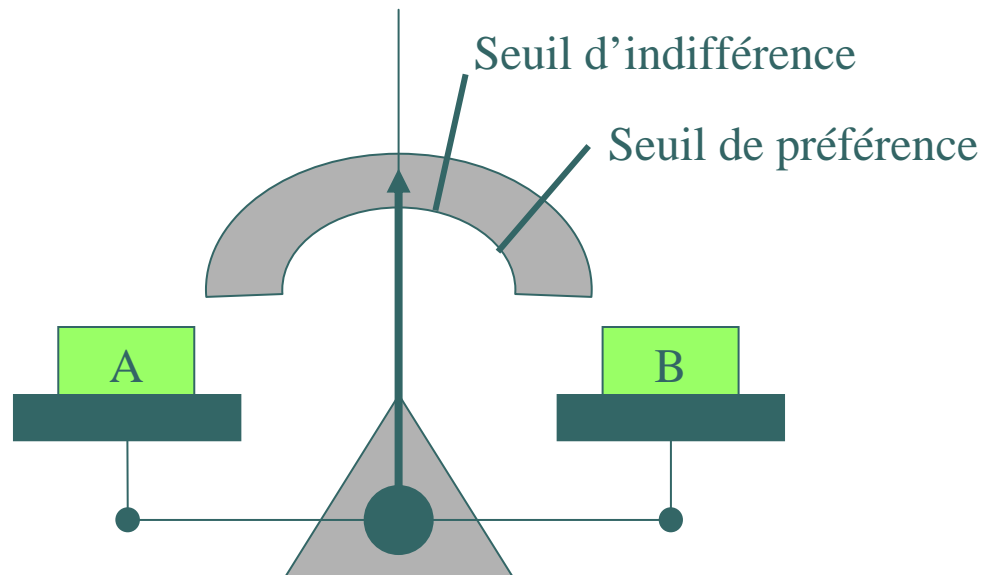
- Calculs
  - Indice de concordance partiel



# ELECTRE

## ○ Calculs

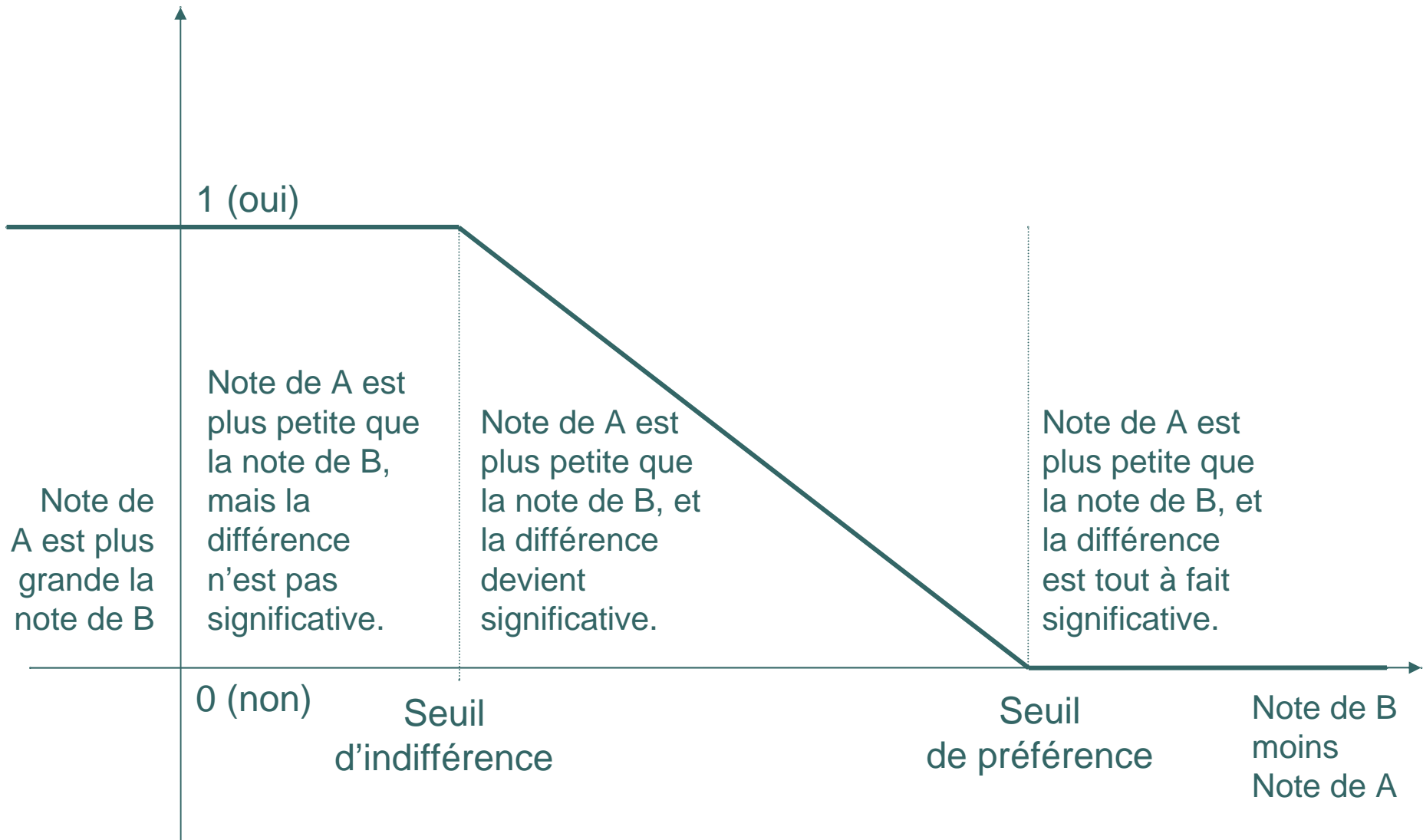
- Est-ce que A est au moins aussi bon que B ?
- Indice de concordance partiel





# Indice de concordance partiel

Est-ce que A est au moins aussi bon que B, pour le critère j?



## Indice de concordance partiel

Est-ce que A est au moins aussi bon que B, pour le critère j?

$$\text{Si } (N_{j,B} - N_{j,A}) \leq i_j \quad c_{j,AB} = 1$$

$$\text{Si } i_j \leq (N_{j,B} - N_{j,A}) \leq p_j \quad c_{j,AB} = \frac{(N_{j,B} - N_{j,A}) - p_j}{i_j - p_j}$$

$$\text{Si } p_j \leq (N_{j,B} - N_{j,A}) \quad c_{j,AB} = 0$$

$c_{j,AB}$  : concordance partielle de la relation A vers B, pour le critère j

$N_{j,B}$  : Note de B sur le critère j

$N_{j,A}$  : Note de A sur le critère j

$i_j$ : seuil d'indifférence pour le critère j

$p_j$ : seuil de préférence pour le critère j

## Indice de concordance global

Est-ce que A est globalement au moins aussi bon que B ?

$$C_{AB} = \frac{\sum_{j=1}^J c_{j,AB} \cdot w_j}{\sum_{j=1}^J w_j}$$

$C_{AB}$  : Concordance globale pour la relation A vers B

$c_{j,AB}$  : concordance partielle pour le critère j et la relation A vers B

$w_j$  : poids du critère j

En général les  $w_j$  sont compris entre 0 et 1 et la somme des poids est égale à 1.

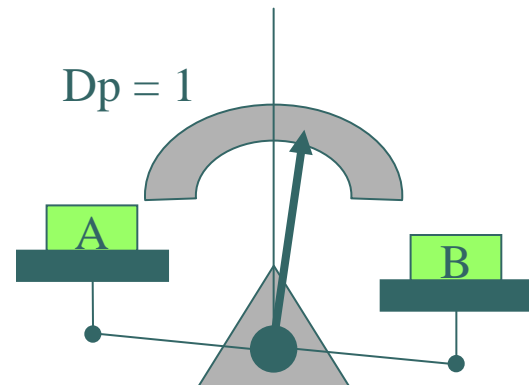
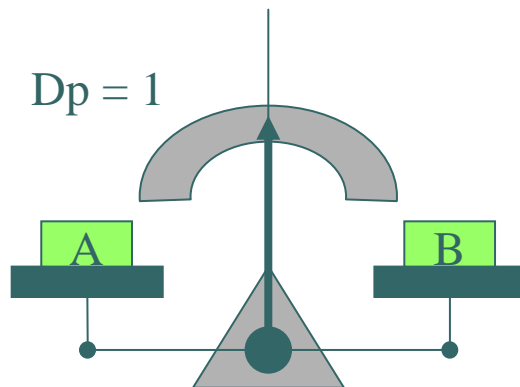
# ELECTRE

## ○ Calculs

- Question 2 :

Si, sur le critère  $j$ , A est faible relativement à B  
est-ce que cela peut être compensé ?

- Indice de discordance partiel



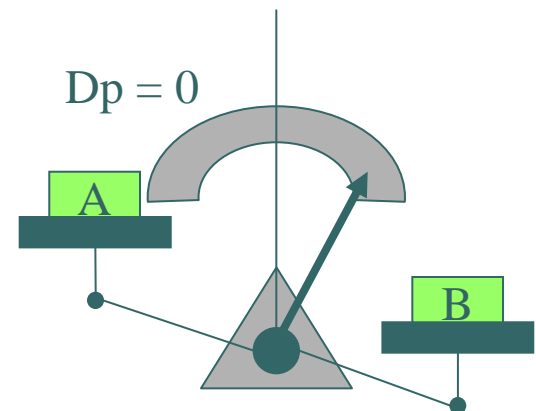
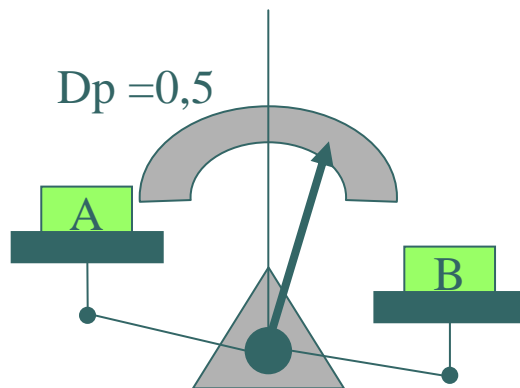
# ELECTRE

## ○ Calculs

### ● Question 2 :

Si, sur le critère  $j$ , A est faible relativement à B  
est-ce que cela peut être compensé ?

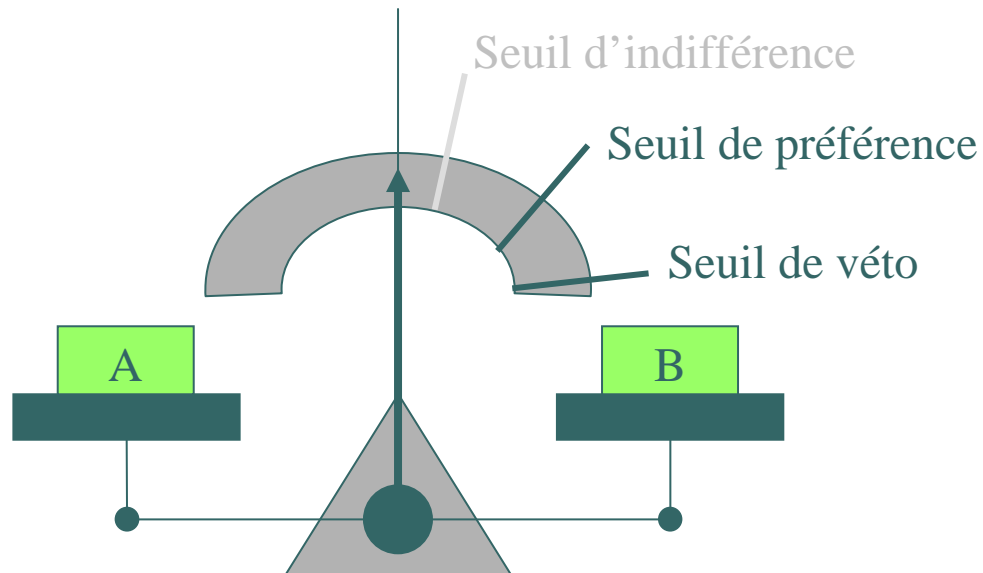
### ● Indice de discordance partiel



# ELECTRE

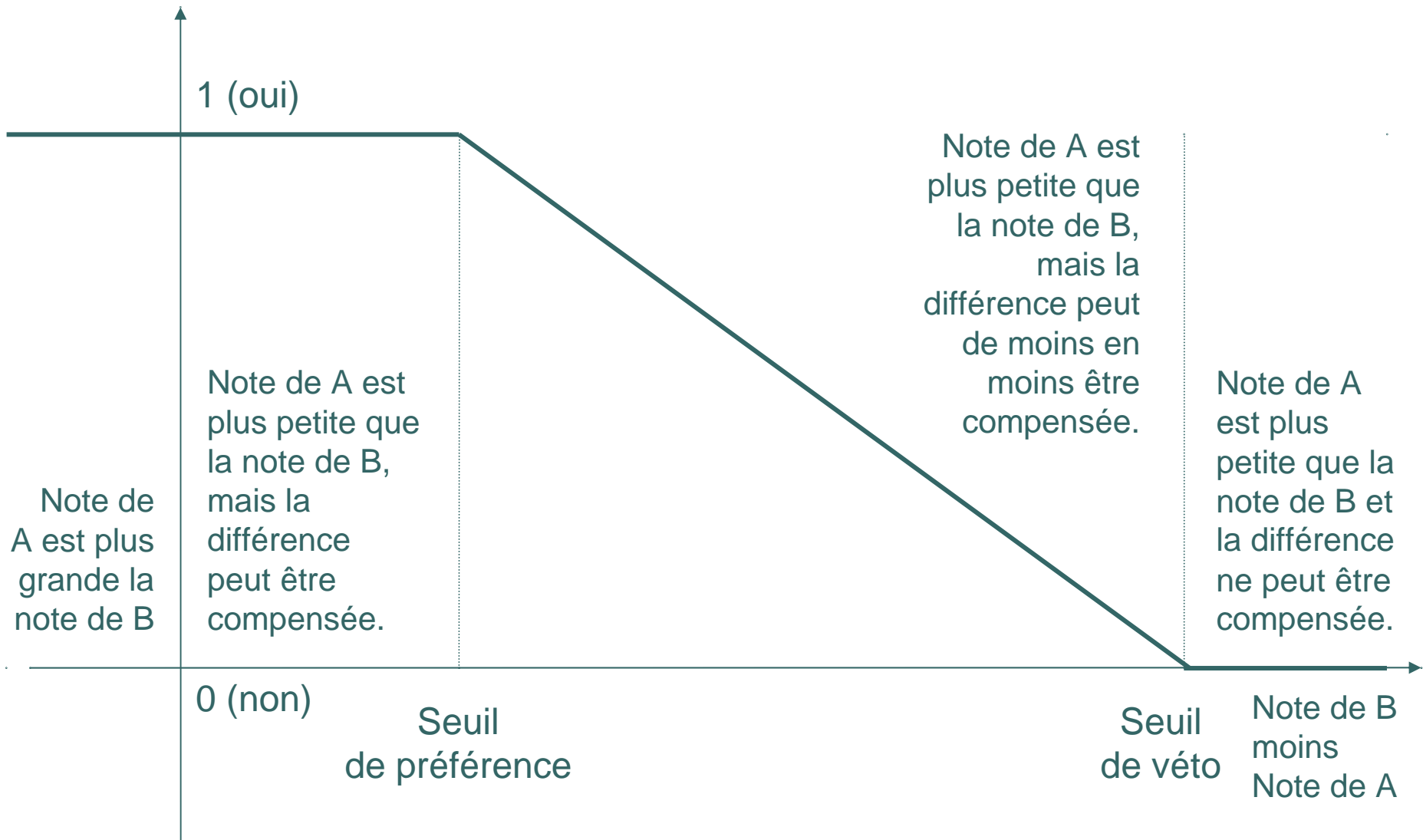
## ○ Calculs

- Si, sur le critère  $j$ ,  $A$  est faible relativement à  $B$   
est-ce que cela peut être compensé ?
- Indice de discordance partiel



# Indice de discordance partielle

Si, sur le critère  $j$ , A est faible relativement à B est-ce que cela peut être compensé ?



## Indice de discordance partielle

Si, sur le critère  $j$ , A est faible relativement à B est-ce que cela peut être compensé ?

$$\text{Si } (N_{j,B} - N_{j,A}) \leq p_j \quad v_{j,AB} = 1$$

$$\text{Si } p_j \leq (N_{j,B} - N_{j,A}) \leq v_j \quad v_{j,AB} = \frac{(N_{j,B} - N_{j,A}) - v_j}{p_j - v_j}$$

$$\text{Si } v_j \leq (N_{j,B} - N_{j,A}) \quad v_{j,AB} = 0$$

$v_{j,AB}$  : discordance partielle de la relation A vers B, pour le critère  $j$ .

$N_{j,B}$  : Note de B sur le critère  $j$

$N_{j,A}$  : Note de A sur le critère  $j$

$p_j$ : seuil de préférence pour le critère  $j$

$v_j$ : seuil de veto pour le critère  $j$



# Indice de discordance global

Est-ce que sur l'ensemble des critères les faiblesses de A, relativement à B, peuvent être compensées ?

$$\text{Si} \quad v_{j,AB} \geq 1 - C_{AB} \quad V_{j,AB} = 1$$

$$\text{Si} \quad v_{j,AB} < 1 - C_{AB} \quad V_{j,AB} = \left( \frac{v_{j,AB}}{1 - C_{AB}} \right)$$

$v_{j,AB}$  : discordance partielle de la relation A vers B, pour le critère  $j$

$V_{j,AB}$  : Facteur d'affaiblissement de la relation A vers B, pour le critère  $j$

$$V_{AB} = \prod V_{j,AB}$$

ce qui signifie :

$$V_{AB} = V_{1,AB} \times V_{2,AB} \times V_{3,AB} \times V_{4,AB} \times \text{etc..}$$

$V_{j,AB}$  : Facteur d'affaiblissement de la relation A vers B, pour le critère  $j$

$V_{AB}$  : Discordance globale

## Indice de crédibilité

Est-ce que A surclasse B ?

$$S_{A,B} = C_{A,B} \times V_{AB}$$

$S_{A,B}$  : Indice de crédibilité de la relation A surclasse B

$V_{A,B}$  : Discordance globale de la relation A surclasse B

$C_{A,B}$  : Indice de concordance globale de la relation A surclasse B

$S_{A,B}$  est compris entre  $[0 ; 1]$ , si  $S_{A,B}$  est élevé ( $>0,7$ )

on considère que le surclassement est vrai.



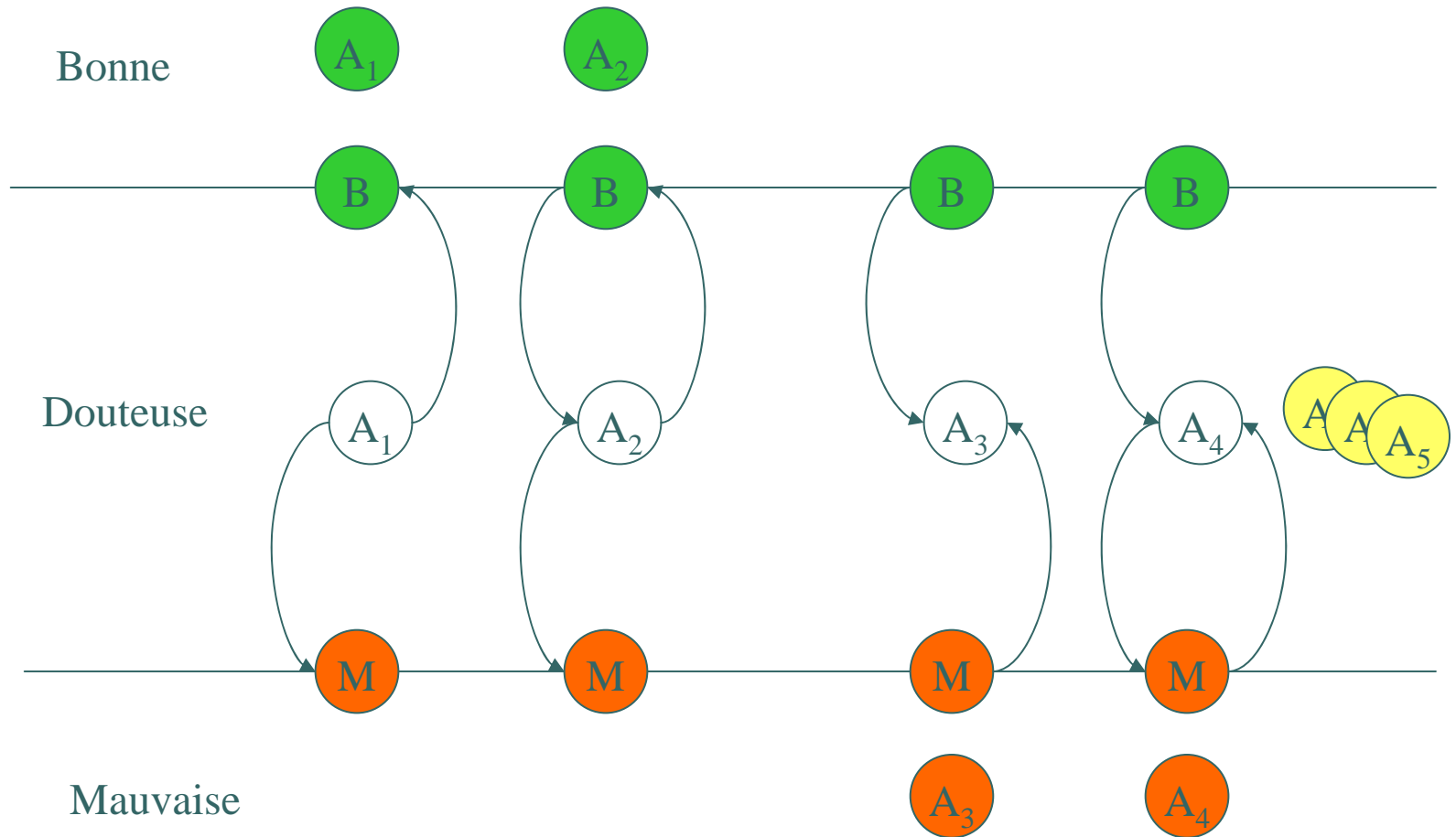
# Electre Tri [Roy et al., 93]

Classement

- Méthode de classement (Béta)
- Fonctionnement
  - Définir deux actions de référence
    - Une bonne (mais pas trop bonne)
    - Une mauvaise (mais pas trop mauvaise)
  - Chaque variante est comparée à la bonne et à la mauvaise
    - Le graphe des surclassements se limite aux surclassements vers les deux actions de référence.

# Electre Tri [Roy et al., 93]

Classement





# Electre Tri [Roy et al., 93]

Classement

- $A_1$  est bonne si
  - Elle surclasse la bonne et la mauvaise
- $A_1$  est mauvaise si
  - Elle est surclassée par la bonne et la mauvaise
- $A_1$  est douteuse dans tous les autres cas
  - Elle ne surclasse pas la bonne, mais la mauvaise ne la surclasse pas.
  - Elle surclasse la mauvaise, mais pas la bonne.
  - Elle ne surclasse ni la bonne, ni la mauvaise
  - Elles surclasse la bonne, mais pas la mauvaise, etc.



# Agrégation partielle

- Points forts
  - Critères qualitatifs ou quantitatifs
  - Moins de contraintes : non-transitivité, Incomparabilité
  - Insensible aux échelles
- Points faibles
  - Difficile à appliquer directement avec beaucoup de variantes.
  - Si l'information est considérée insuffisante, peut donner un résultat qui ne répond pas aux attentes du décideur. Mais c'est aussi un avantage
- Application
  - Critères de natures très différentes. Variantes difficilement comparables.
  - Décisions particulièrement complexes



# Conclusion sur l'analyse multicritère

- Diversité de méthodes d'agrégation
- Le choix de la méthode n'est pas neutre

*« Le multicritère, c'est l'alternative à la technocratie. C'est mettre l'homme au milieu du problème, avec les mathématiques autour, comme instruments périphériques; plutôt que de mettre les mathématiques au centre, et de réduire l'homme à celle qu'elles sont capables d'en comprendre. » [Schärli, 85]*