Mathématiques du supérieur I

-

Théorie élémentaire des ensembles

Version avec les démonstrations

Daniel -Barbu- Williams

Mars 2020 - Août 2021

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le premier d'une collection qui tente de démontrer "les mathématiques" du supérieur, c'est-à-dire du niveau BAC+1 à BAC+4 environ.

I - Théorie élémentaire des ensembles.
II - Théorie des ensembles infinis.
III - Arithmétique des entiers relatifs.
IV - Théorie élémentaire des catégories
V - Théorie des groupes
VI - Théorie des anneaux et des corps
VII - Analyse réelle élémentaire
VIII - Analyse complexe élémentaire
IX - A venir

Avant-propos

Cet ouvrage n'a pas pour but d'être pédagogique, et je le rédige avant tout pour moi-même, mais peut-être qu'il vous sera utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire de connaître la logique élémentaire. En particulier, il vous faut connaître :

- la notion d'assertion
- la notion de négation d'une assertion
- la notion de conjonction et la notion de disjonction
- la notion d'implication, ainsi que la notion de contraposée et de réciproque
- la notion d'équivalence
- les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue et Chæris pour leur pinaillage, à Tom pour le LaTeX, et à Maxtimax pour m'avoir fortement débloqué !

Table des matières

1 Théorie élémentaire des ensembles 1

1 Généralités sur les ensembles 2

1.1 Appartenance et égalité 2

1.2 Inclusion et inclusion stricte 5

1.3 Compréhension et vide 11

1.4 Paires et singletons 17

1.5 Ensemble des parties 21

1.6 Ensemble des sur-ensembles 24

2 Opérations sur les ensembles 27

2.1 Réunion 27

2.2 Intersection 39

2.3 Réunion et intersection 51

2.4 Différence ensembliste 55

2.5 Propriétés stables par intersection et ensembles engendrés 69

2 Relations binaires 79

1 Couples et produits cartésiens 80

1.1 Couples 80

1.2 Produits cartésiens 84

2 Relations binaires 98

2.1 Généralités 98

2.2 Domaine et image d'une relation binaire 108

2.3 Composition de relations binaires 115

2.4 Transposée d'une relation binaire 122

2.5 Image directe par une relation binaire 129

2.6 Image réciproque par une relation binaire 138

2.7 Union de relations binaires 144

2.8 Intersection de relations binaires 149

2.9 Restrictions et prolongements de relations binaires 153

3 Applications **165**
1 Généralités 166
1.1 Applications 166
1.2 Applications particulières 178
1.3 Axiome du choix 185
2 Composition d'applications 188
2.1 Composition 188
2.2 Inverses pour la composition 192
3 Injectivité, surjectivité et bijectivité 204
4 Images directes et images réciproques 217
4.1 Images directes 217
4.2 Image réciproque 234
4.3 Image directe et image réciproque 245
5 Restriction et prolongement d'applications 250

4 Familles **261**
1 Familles et sous-familles 262
2 Réunion d'une famille 268
3 Intersection de familles 292
4 Produit cartésien de familles 314
5 Union disjointe d'une famille 326

5 Relations d'équivalence et partitions **333**
1 Partitions 334
2 Relations d'équivalences 350
2.1 Relations d'équivalence 350
2.2 Clôtures 362
3 Classes d'équivalences et ensembles quotients 372

Bibliographie **399**

Mathématiciens **401**

Chapitre 1

Théorie élémentaire des ensembles

Note de l'auteur

Ce chapitre a pour but de poser les bases ensemblistes : il n'est pas exagéré de dire que l'ensemble du reste des mathématiques va reposer sur ce qui va être vu dans ce chapitre.
Ce chapitre est fondamental pour deux raisons.
La première c'est que à beaucoup d'endroits en mathématiques, les ensembles interviennent (ensembles de solutions, une droite peut être vue comme un ensemble de points, les structures algébriques reposent sur la notion d'ensembles, etc.).
La deuxième est que le parti pris de cette collection d'ouvrage est de construire tous les objets mathématiques à partir de cette simple notion d'ensembles, pour ne considérer fondamentalement qu'un seul type d'objet.

Sommaire

1 Généralités sur les ensembles 2

1.1 Appartenance et égalité 2

1.2 Inclusion et inclusion stricte 5

1.3 Compréhension et vide 11

1.4 Paires et singletons 17

1.5 Ensemble des parties 21

1.6 Ensemble des sur-ensembles 24

2 Opérations sur les ensembles 27

2.1 Réunion 27

2.2 Intersection 39

2.3 Réunion et intersection 51

2.4 Différence ensembliste 55

2.5 Propriétés stables par intersection et ensembles engendrés 69

1 Généralités sur les ensembles

1.1 Appartenance et égalité

L'objet au cœur de notre discours est comme nous l'avons dit « *l'ensemble* ». Cependant, il s'agit d'un objet « primitif », c'est-à-dire que nous n'allons pas lui donner de définition à proprement parler. Au lieu de cela, nous allons dire que tous les objets que nous allons manipuler (en dehors des assertions, propositions, théorèmes, etc.) seront des ensembles. Nous pouvons alors nous demander en quoi il est légitime de les appeler « *ensembles* ». En fait, c'est par le biais d'axiomes que nous allons imposer certaines propriétés à nos objets, de sortent qu'ils « *miment* »l'idée intuitive que nous pouvons nous faire de la notion d'ensemble.

Définition 1 (Ensemble)

Tous les objets que nous allons manipuler seront appelés **ensembles**.

Pour deux ensembles x et E, il est possible de former une assertion notée $x \in E$ dont la véracité se déduira des axiomes et des définitions. On dit alors x **appartient** à E.

Sa négation sera notée $x \notin E$.

Remarque :
Les ensembles représentent intuitivement des sacs dans lesquels on peut mettre des objets. L'appartenance $x \in E$ traduit donc intuitivement le fait que l'objet x se trouve dans le sac E.

Axiome 1 (Axiome de l'existence)

Il existe au moins un ensemble.

Notation

Pour E un ensemble et P une assertion pouvant dépendre de paramètres, on notera parfois :

- $\forall x \in E, P(x)$ à la place de $\forall x, \big(x \in E \implies P(x)\big)$
- $\exists x \in E, P(x)$ à la place de $\exists x, \big(x \in E \text{ et } P(x)\big)$

Définissons à présent ce que cela veut dire pour deux ensembles d'êtres égaux.

Définition 2 (Egalité)

Soient E et F deux ensembles.

On dira que E est **égal** à F si et seulement si « *tout élément de E est aussi un élément de F et réciproquement* », ce qui se traduit donc par $\forall x, (x \in E \iff x \in F)$.

On notera alors $E = F$.
Dans le cas contraire, on notera $E \neq F$, et on dira qu'ils sont **distincts**, ou **différents**.

Axiome 2 (Principe de Leibniz)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E = F$, alors toute formule vraie qui fait intervenir E est aussi vraie si on remplace les apparitions de E de notre choix par F.

Proposition 1 (Propriétés de l'égalité)

Soient E, F et G trois ensembles.
On a alors :

1. $E = E$: on dit que l'égalité est **réflexive**.
2. Si $E = F$, alors $F = E$: on dit que l'égalité est **symétrique**.
3. Si $E = F$ et $F = G$, alors $E = G$: on dit que l'égalité est **transitive**.

Démonstration

1. Soit x un ensemble.
   On a alors $x \in E \iff x \in E$ par réflexivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in E\big)$.
Donc $\boxed{E = E}$ par définition de l'égalité.

2

Supposons que $E = F$.

On a donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)$ par définition de l'égalité.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

D'après $(\star)$, on a $x \in E \iff x \in F$.

On a donc $x \in F \iff x \in E$ par symétrie de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in F \iff x \in E\big)$.

Donc $\boxed{F = E}$ par définition de l'égalité.

3

Supposons que $E = F$ et que $F = G$.

On a donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)$ par définition de l'égalité.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

De même, on a $\forall x, \big(x \in F \iff x \in G\big)$ par définition de l'égalité.

Notons $(\star\star\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

D'après $(\star\star)$, on a $x \in E \iff x \in F$.

D'après $(\star\star\star)$, on a $x \in F \iff x \in G$.

On a donc $x \in E \iff x \in G$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in G\big)$.

Donc $\boxed{E = G}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Remarque :

On verra au **chapitre 5** que cela fait de l'égalité une **relation d'équivalence**.

Proposition 2 (Caractérisation de l'inégalité)

Soient E et F deux ensembles.

On a $E \neq F \iff \Big(\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big)$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
E \neq F &\iff \text{non}(E = F) \\
&\iff \text{non}\Big(\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)\Big) \\
&\iff \exists x, \text{non}\big(x \in E \iff x \in F\big) \\
&\iff \exists x, \text{non}\Big(\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \implies x \in E\big)\Big) \\
&\iff \exists x, \Big(\text{non}\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ ou } \text{non}\big(x \in F \implies x \in E\big)\Big) \text{ d'après les Lois de De Morgan} \\
&\iff \exists x, \Big(\text{non}\big(x \notin E \text{ ou } x \in F\big) \text{ ou } \text{non}\big(x \notin F \text{ ou } x \in E\big)\Big) \\
&\iff \exists x, \Big(\big(x \in E \text{ et } x \notin F\big) \text{ ou } \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big) \text{ d'après les Lois de De Morgan} \\
&\iff \Big(\exists x, \big(x \in E \text{ et } x \notin F\big)\Big) \text{ ou } \Big(\exists x, \big(x \in F \text{ et } x \notin E\big)\Big) \\
&\iff \big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin E\big)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E \neq F \iff \Big(\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big)\Big)}$ par transitivité de l'équivalence.
CQFD.

1.2 Inclusion et inclusion stricte

Définition 3 (Inclusion)

Soient E et F deux ensembles.

On dira que E est **inclus** dans F si et seulement si « *tout élément de E est aussi un élément de F* », ce qui se traduit par $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$.

On notera alors $E \subseteq F$, ou encore $F \supseteq E$.
On dira alors que

- E est un **sous-ensemble** de F.
- E est une **partie** de F.
- F est un **sur-ensemble** de E.
- F **contient** E.

Dans le cas contraire, on notera $E \nsubseteq F$.

Remarque :

Certains auteurs, notamment francophones, notent cela $E \subset F$. Cela ne sera pas le cas dans cet ouvrage.

Proposition 3 (Décomposition de l'égalité en inclusions)

Soient E et F deux ensembles.

Si $E = F$, alors $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

Démonstration

Supposons que $E = F$.

On a donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)$ par définition de l'égalité.

Donc $\forall x, \Big(\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ et } \big(x \in E \impliedby x \in F\big)\Big)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in E \impliedby x \in F\big)$.

Donc $\boxed{E \subseteq F \text{ et } F \supseteq E}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 4 (Propriétés de l'inclusion)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. $E \subseteq E$: l'inclusion est **réflexive**.
2. Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, alors $E = F$: l'inclusion est **antisymétrique**.
3. Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$, alors $E \subseteq G$: l'inclusion est **transitive**.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

On a alors $x \in E \implies x \in E$ par réflexivité de l'implication.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in E\big)$.

Donc $\boxed{E \subseteq E}$ par définition de l'inclusion.

2. Supposons que $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

On a donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$ et $\forall x, \big(x \in F \implies x \in E\big)$ par définition de l'inclusion.
Donc $\forall x, \Big(\big(x \in E \implies x \in F\big) \text{ et } \big(x \in F \implies x \in E\big)\Big)$.
Donc $\forall x, \big(x \in E \iff x \in F\big)$.
Donc $\boxed{E = F}$ par définition de l'égalité.

(3) Supposons que $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$.
On a donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$ par définition de l'inclusion. Notons $(\star)$ cette assertion.
On a aussi $\forall x, \big(x \in F \implies x \in G\big)$ par définition de l'inclusion. Notons $(\star\star)$ cette asertion.

Soit x un ensemble.
On a alors $x \in E \implies x \in F$ d'après $(\star)$.
On a aussi $x \in F \implies x \in G$ d'après $(\star\star)$.
Donc on a $x \in E \implies x \in G$ par transitivité de l'implication.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in G\big)$.
Donc $\boxed{E \subseteq G}$.
CQFD.

Remarque :
On verra au **chapitre ??** que cela fait de l'inclusion une **relation d'ordre**.

Proposition 5 (Caractérisation par les parties et les sur-ensembles)

Soient E et F deux ensembles.
Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(1) $E = F$
(2) $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$
(3) $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$

Autrement dit, un ensemble est entièrement caractérisé par ses sous-ensembles, et un ensemble est entièrement caractérisé par ses sur-ensembles.

Démonstration

Démontrons dans un premier temps l'équivalence (1) $\iff$ (2).
Raisonnons par double implication.
$\boxed{(1) \implies (2)}$

Supposons que $E = F$.

Soit X un ensemble.

On a alors $X \subseteq E \iff X \subseteq F$ d'après le principe de Leibniz puisque $E = F$.

Donc $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$.

Donc si $E = F$, alors $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$.

$\boxed{① \Longleftarrow ②}$

Supposons que $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$.

En particulier, on a l'équivalence $E \subseteq E \iff E \subseteq F$.

En particulier, on a l'implication $E \subseteq E \implies E \subseteq F$.

Or, $E \subseteq E$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $E \subseteq F$ par modus ponens.

On a aussi l'équivalence $F \subseteq E \iff F \subseteq F$.

En particulier, on a l'implication $F \subseteq F \implies F \subseteq E$.

Or, $F \subseteq F$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $F \subseteq E$ par modus ponens.

Ainsi, on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.

Donc $E = F$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$, alors $E = F$.

Finalement, $E = F \iff \forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$, ce qui prouve $\boxed{① \iff ②}$.

Démontrons dans un second temps l'équivalence ① $\iff$ ③.

Raisonnons par double implication.

$\boxed{① \Longrightarrow ③}$

Supposons que $E = F$.

Soit X un ensemble.

On a alors $E \subseteq X \iff F \subseteq X$ d'après le principe de Leibniz puisque $E = F$.

Donc $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$.

Donc si $E = F$, alors $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$.

$\boxed{① \Longleftarrow ③}$

Supposons que $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$.

En particulier, on a l'équivalence $E \subseteq E \iff F \subseteq E$.

En particulier, on a l'implication $E \subseteq E \implies F \subseteq E$.

Or, $E \subseteq E$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $F \subseteq E$ par modus ponens.

On a aussi l'équivalence $E \subseteq F \iff F \subseteq F$.
En particulier, on a l'implication $F \subseteq F \implies E \subseteq F$.
Or, $F \subseteq F$ par réflexivité de l'inclusion.
Donc $E \subseteq F$ par modus ponens.

Ainsi, on a $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.
Donc $E = F$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$, alors $E = F$.

Finalement, $E = F \iff \forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$, ce qui prouve $\boxed{① \iff ③}$.

Enfin, on a bien $\boxed{② \iff ③}$ par transitivité de l'équivalence.
CQFD.

Définition 4 (Inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus strictement** dans F si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.

On notera alors $E \subsetneq F$.
On dira alors que :

- E est un **sous-ensemble propre** de F.
- E est une **partie propre** de F.
- F est un **sur-ensemble propre** de E.
- F **contient strictement** E.

Attention !

Il ne faut pas confondre l'assertion « *E est inclus strictement dans F* », qui se note $E \subsetneq F$, avec l'assertion « *E n'est pas inclus dans F* », qui se note $E \not\subseteq F$.

Remarque :
Par définition de l'inclusion stricte, on a $E \subsetneq F \iff \big(E \subseteq F \text{ et } E \neq F\big)$.
Voyons une équivalence similaire.

Proposition 6 (Inclusion et inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On a l'équivalence $E \subseteq F \iff \big(E \subsetneq F \text{ ou } E = F\big)$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
E \subseteq F &\iff E \subseteq F \text{ et } \big(E \neq F \text{ ou } E = F\big) \text{ d'après le tiers exclu} \\
&\iff \big(E \subseteq F \text{ et } E \neq F\big) \text{ ou } \big(E \subseteq F \text{ ou } E = F\big) \text{ par distributivité de « et » sur « ou »} \\
&\iff E \subsetneq F \text{ ou } \big(E \subseteq F \text{ et } E = F\big) \text{ par définition de l'inclusion stricte} \\
&\iff E \subsetneq F \text{ ou } \big(E \subseteq F \text{ et } E \subseteq F \text{ et } E \supseteq F\big) \text{ d'après la prop. 3 p. 6} \\
&\iff E \subsetneq F \text{ ou } \big(E \subseteq F \text{ et } E \supseteq F\big) \text{ par idempotence de la conjonction} \\
&\iff E \subsetneq F \text{ ou } E = F \text{ d'après la prop. 3 p. 6}
\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{E \subseteq F \iff E \subsetneq F \text{ ou } E = F}$ par transitivité de l'équivalence.
CQFD.

Proposition 7 (Transitivité de l'inclusion stricte)

Soient E, F et G trois ensembles.

Si $E \subsetneq F$ et $F \subsetneq G$, alors $E \subsetneq G$.
On dit que l'inclusion stricte est **transitive**.

Démonstration

Supposons que $E \subsetneq F$ et $F \subsetneq G$.
On a donc $E \subseteq F$ et $E \neq F$ et $F \subseteq G$ et $F \neq G$ par définition de l'inclusion stricte.
Alors en particulier $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$.
Donc par transitivité de l'inclusion, on a $E \subseteq G$.

Montrons que $E \neq G$.

Supposons que $E = G$.

On a alors $E \subseteq G$ et $G \subseteq E$ d'après la prop. 3 p. 6.

En particulier, on a $G \subseteq E$.

Or, on a $F \subseteq G$.

On a donc $F \subseteq E$ par transitivité de l'inclusion.

Or, on a $E \subseteq F$.

On a donc $E = F$ d'après la prop. 3 p. 6.

Donc si $E = G$, alors $E = F$.

Donc par contraposition, si $E \neq F$, alors $E \neq G$.

Or, on a $E \neq F$.

Donc $E \neq G$ par modus ponens.

Ainsi donc, on a $E \subseteq G$ et $E \neq G$.

On a donc $\boxed{E \subsetneq G}$ par définition de l'inclusion stricte.

CQFD.

1.3 Compréhension et vide

Axiome 3 (Axiome de compréhension)

Soient E un ensemble, et P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

Alors il existe une partie de E dont les éléments sont exactement ceux de E qui vérifient P.
On le note $\{x \in E \mid P(x)\}$.

Autrement dit, $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff (y \in E \text{ et } P(y))\Big)$.

Notation

Dans la notation $\{x \in E \mid P(x)\}$, la variable x est dite « *muette* ».
Cela veut dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit.

Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire des contre-sens.

Ainsi, $\{x \in E \mid P(x)\} = \{y \in E \mid P(y)\} = \{z \in E \mid P(z)\}$.

Proposition 8 (Compréhension, implications et équivalences)

Soient E un ensembles, et P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.

On a alors

1. $\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big)$ si et seulement si $\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \subseteq \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.
2. $\forall x \in E, \big(P(x) \iff Q(x)\big)$ si et seulement si $\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} = \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big)$. Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\}$.

On a donc $y \in E$ et $P(y)$ par définition.

Or, $P(y) \implies Q(y)$ d'après $(\star)$.

Donc $Q(y)$ par modus ponens.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$.

Donc $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

Donc si $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\}$, alors $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

Donc $\forall y, \left(y \in \left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \implies y \in \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}\right)$.

Donc $\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \subseteq \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

Donc si $\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big)$, alors $\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \subseteq \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \subseteq \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$.

On a donc $\forall y, \left(y \in \left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\} \implies y \in \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}\right)$. Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

Supposons que $P(y)$.

On a donc $y \in E$ et $P(y)$.

Donc $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; P(x)\right\}$ par définition.

Donc $y \in \left\{x \in E \;\middle|\; Q(x)\right\}$ d'après $(\star\star)$.

Donc $y \in E$ et $Q(y)$ par définition.

En particulier, on a $Q(y)$.

Donc si $P(y)$, alors $Q(y)$.

Donc si $y \in E$, alors $P(y) \implies Q(y)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in E \implies \big(P(y) \implies Q(y)\big)\Big)$.

Donc $\forall y \in E, \big(P(y) \implies Q(y)\big)\Big)$.

Donc si $\Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} \subseteq \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\}$, alors $\forall y \in E, \big(P(y) \implies Q(y)\big)\Big)$.

Finalement, $\boxed{\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big) \text{ si et seulement si } \Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} \subseteq \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\}}$.

(2) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\forall x \in E, \big(P(x) \iff Q(x)\big) &\iff \forall x \in E, \Big(\big(P(x) \implies Q(x)\big) \text{ et } \big(P(x) \impliedby Q(x)\big)\Big) \\
&\iff \Big(\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big)\Big) \text{ et } \Big(\forall x \in E, \big(P(x) \impliedby Q(x)\big)\Big) \\
&\iff \begin{cases} \Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} \subseteq \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\} \\ \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après (1)} \\ \Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} \supseteq \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\} \end{cases} \\
&\iff \Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} = \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\}
\end{aligned}$$

Ainsi donc, $\boxed{\forall x \in E, \big(P(x) \iff Q(x)\big) \text{ si et seulement si } \Big\{x \in E \;\Big|\; P(x)\Big\} = \Big\{x \in E \;\Big|\; Q(x)\Big\}}$.

CQFD.

Proposition 9 (Compréhension et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

Si $E \subseteq F$, alors $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}$.

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$.

On a donc $y \in E$ et $P(y)$ par définition d'un ensemble par compréhension.

Or, $E \subseteq F$ par hypothèse.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, $y \in E \implies y \in F$.

Donc $y \in F$ par modus ponens.

Ainsi, $y \in F$ et $P(y)$.

Donc $y \in \{x \in F \mid P(x)\}$ par définition d'un ensemble par compréhension.

Donc si $y \in \{x \in E \mid P(x)\}$, alors $y \in \{x \in F \mid P(x)\}$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \implies y \in \{x \in F \mid P(x)\}\Big)$.

Donc $\boxed{\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 10 (Justification de l'ensemble vide)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $\forall y, y \notin \{x \in E \mid x \neq x\}$.
2. $\{x \in F \mid x \neq x\} = \{x \in G \mid x \neq x\}$.

Démonstration

1

Par réflexivité de l'égalité, on a $\forall y, y = y$.

Donc on a $\forall y, \big(y \notin E$ ou $y = y\big)$.

Donc on a $\forall y, \text{non}(y \in E$ et $y \neq y)$, d'après les lois de De Morgan.

Donc on a $\forall y, \text{non}\Big(y \in \{x \in E \mid x \neq x\}\Big)$.

Donc on a $\boxed{\forall y, y \notin \{x \in E \mid x \neq x\}}$.

2

D'après (1), les assertions $\forall y, y \in \{x \in F \mid x \neq x\}$ et $\forall y, y \in \{x \in G \mid x \neq x\}$ sont fausses.

Donc l'assertion $\forall y, \Big(y \in \{x \in F \mid x \neq x\} \iff y \in \{x \in G \mid x \neq x\}\Big)$ est vraie.

Donc $\boxed{\{x \in F \mid x \neq x\} = \{x \in G \mid x \neq x\}}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Définition 5 (Ensemble vide)

Soit E un ensemble.

La proposition précédente nous assure que l'ensemble $\{x \in E \mid x \neq x\}$ ne dépend pas de E.

Nous le noterons $\varnothing$, et l'appellerons **ensemble vide**.

Ainsi, toujours d'après la proposition précédente, on a $\forall x, x \notin \varnothing$.

Proposition 11 (Propriétés de l'ensemble vide)

Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $\varnothing \subseteq E$.
2. $E \subseteq \varnothing \iff E = \varnothing$.
3. $\big(\forall x, x \notin E\big) \iff E = \varnothing$.

Démonstration

1

On a $\varnothing = \{x \in E \mid x \neq x\}$ par définition de l'ensemble vide.

Or, $\{x \in E \mid x \neq x\}$ est une partie de E par définition.

Donc $\varnothing$ est une partie de E.

Donc $\boxed{\varnothing \subseteq E}$.

2

On a les équivalences $E \subseteq \varnothing \underset{1}{\iff} \big(E \subseteq \varnothing \text{ et } \varnothing \subseteq E\big) \iff E = \varnothing$.

Donc $\boxed{E \subseteq \varnothing \iff E = \varnothing}$.

3 Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall x, x \notin E$. Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

On sait que $x \notin E$ d'après $(\star)$.

Donc $\text{non}(x \in E)$.

Donc $x \in E \implies x \in \varnothing$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in \varnothing\big)$.

Donc $E \subseteq \varnothing$ par définition de l'implication.

Donc si $\forall x, x \notin E$, alors $E \subseteq \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \subseteq \varnothing$.

On a donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in \varnothing\big)$. Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

On sait que $x \in E \implies x \in \varnothing$ d'après $(\star\star)$.

On a donc $x \notin \varnothing \implies x \notin E$ par contraposition.

Or, $x \notin \varnothing$ par définition de l'ensemble vide.

Donc $x \notin E$ par modus ponens.

Donc $\forall x, x \notin E$.

Donc si $E \subseteq \varnothing$, alors $\forall x, x \notin E$.

Finalement, $\boxed{\big(\forall x, x \notin E\big) \iff E = \varnothing}$.

CQFD.

Définition 6 (Parties triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble.

D'après la réflexivité de l'inclusion, on a $E \subseteq E$, donc E est une partie de E.

D'après la proposition 11 page 15, on a $\varnothing \subseteq E$, donc $\varnothing$ est une partie de E.

On dira que $\varnothing$ et E sont les **parties triviales** de E.

Proposition 12 (Ensemble vide et quantificateurs)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

On a alors :

1. L'assertion $\forall x \in \varnothing, P(x)$ est vraie.
2. L'assertion $\exists x \in \varnothing, P(x)$ est fausse.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

L'assertion $x \in \varnothing$ est fausse par définition de l'ensemble vide.

On a donc $x \in \varnothing \implies P(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \varnothing \implies P(x)\big)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \varnothing, P(x)}$.

2

D'après 1, on a $\forall x \in \varnothing, \text{non}\big(P(x)\big)$.
On a donc $\text{non}\big(\exists x \in \varnothing, P(x)\big)$.
Donc $\boxed{\text{l'assertion } \exists x \in \varnothing, P(x) \text{ est fausse}}$.
CQFD.

1.4 Paires et singletons

Axiome 4 (Axiome de la paire)

Soient x et y deux ensembles.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement x et y.
On le note $\{x; y\}$, et on dit que c'est une **paire**.

Ainsi, on a $\forall z, \big(z \in \{x; y\} \iff (z = x \text{ ou } z = y)\big)$.
En particulier, on a $x \in \{x; y\}$ et $y \in \{x; y\}$ par définition.

Proposition 13 (Paire et ordre de ses éléments)

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $\{x; y\} = \{y; x\}$.
Ainsi, l'ordre ne compte pas dans une paire.

Démonstration

Soit z un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :
$z \in \{x; y\} \iff (z = x \text{ ou } z = y) \iff (z = y \text{ ou } z = x) \iff z \in \{y; x\}$.
Donc $z \in \{x; y\} \iff z \in \{y; x\}$.
Donc $\forall z, \big(z \in \{x; y\} \iff z \in \{y; x\}\big)$.
Donc $\boxed{\{x; y\} = \{y; x\}}$ par définition de l'égalité.
CQFD.

Définition 7 (Singleton)

Soit x un ensemble.

On notera parfois $\{x\}$ l'ensemble $\{x; x\}$.
On dira que c'est un **singleton**.

On a donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \iff z = x\big)$.

Proposition 14 (Égalité entre deux singletons)

Soient x et y deux ensembles.
Alors $\{x\} = \{y\} \iff x = y$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\{x\} = \{y\}$.
On sait que $x \in \{x\}$ par définition de $\{x\}$.
Donc $x \in \{y\}$.
Donc $x = y$ par définition de $\{y\}$.

Donc si $\{x\} = \{y\}$, alors $x = y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Si $x = y$, alors $\{x\} = \{y\}$ d'après le principe de Leibniz.
Finalement, $\boxed{\{x\} = \{y\} \iff x = y}$.
CQFD.

Proposition 15 (Singleton inclus dans paire)

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $\{x\} \subseteq \{x; y\}$.

Démonstration

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \{x\}$.

On a donc $z = x$ par définition de $\{x\}$.

Donc $z = x$ ou $z = y$.

Donc $z \in \{x; y\}$ par définition de $\{x; y\}$.

Donc si $z \in \{x\}$, alors $z \in \{x; y\}$.

Donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \implies z \in \{x; y\}\big)$.

Donc $\boxed{\{x\} \subseteq \{x; y\}}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 16 (Singleton, paire et minimum)

Soient x, y et A trois ensembles.

On a alors :

1. $x \in A \iff \{x\} \subseteq A$.
   On dit que $\{x\}$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les ensembles dont x est un élément du fait de $\Rightarrow$.

2. $\big(x \in A \text{ et } y \in A\big) \iff \{x; y\} \subseteq A$.
   On dit que $\{x; y\}$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les ensembles dont x et y sont éléments du fait de $\Rightarrow$.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A$.

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \{x\}$.

On a donc $z = x$ par définition de $\{x\}$.

Or, $x \in A$ par hypothèse.

Donc $z \in A$ d'après le principe de Leibniz.

Donc si $z \in \{x\}$, alors $z \in A$.

Donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \implies z \in A\big)$.

Donc $\{x\} \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

Donc si $x \in A$, alors $\{x\} \subseteq A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\{x\} \subseteq A$.

Donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \implies z \in A\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, on a $x \in \{x\} \implies x \in A$.

Or, $x \in \{x\}$ par définition de $\{x\}$.

Donc $x \in A$ par modus ponens.

Donc si $\{x\} \subseteq A$, alors $x \in A$.

Finalement, $\boxed{x \in A \iff \{x\} \subseteq A}$.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A$ et que $y \in A$.

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \{x; y\}$.

On a donc $z = x$ ou $z = y$ par définition de $\{x; y\}$.

Si $z = x$, comme $x \in A$ par hypothèse, on a $z \in A$.

Si $z = y$, comme $y \in A$ par hypothèse, on a $z \in A$.

Ainsi dans les deux cas, on a $z \in A$.

Donc si $z \in \{x; y\}$, alors $z \in A$.

Donc $\forall z, \big(z \in \{x; y\} \implies z \in A\big)$.

Donc $\{x; y\} \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

Donc si $x \in A$ et $y \in A$, alors $\{x; y\} \subseteq A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\{x; y\} \subseteq A$. On a donc $\forall z, \big(z \in \{x; y\} \implies z \in A\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, on a $x \in \{x; y\} \implies x \in A$ et $y \in \{x; y\} \implies y \in A$.

Or, $x \in \{x; y\}$ et $y \in \{x; y\}$ par définition de $\{x; y\}$.

Donc $x \in A$ et $y \in A$ par modus ponens.

Donc si $\{x; y\} \subseteq A$, alors $x \in A$ et $y \in A$.

Finalement, $\boxed{\big(x \in A \text{ et } y \in A\big) \iff \{x; y\} \subseteq A}$.

CQFD.

1.5 Ensemble des parties

Axiome 5 (Axiome des parties)

Soit E un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E.
On le notera $\mathscr{P}(E)$.

Autrement dit, on a $\forall F, \big(F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subseteq E\big)$.

Notation

Certains auteur notent cet ensemble $\mathcal{P}(E)$, ou bien $\mathfrak{P}(E)$, ou parfois $\wp(E)$, ou encore 2^E.

Pour toute assertion Q pouvant dépendre de paramètres, l'assertion $\forall F \in \mathscr{P}(E), Q(F)$ sera parfois notée $\forall F \subseteq E, Q(F)$.

Proposition 17 (Parties triviales et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
On a alors :

1. $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$
2. $E \in \mathscr{P}(E)$

Autrement dit, les parties de triviales de E sont dans l'ensemble des parties de E.

Démonstration

1. D'après la proposition 11 page 15, on a $\varnothing \subseteq E$.
Donc $\boxed{\varnothing \in \mathscr{P}(E)}$ par définition de l'ensemble des parties de E.

2. Par réflexivité de l'inclusion, on a $E \subseteq E$.
Donc $\boxed{E \in \mathscr{P}(E)}$ par définition de l'ensemble des parties de E.
CQFD.

Proposition 18 (Croissance de l'ensemble des parties)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a $E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Rightarrow$ s'appelle la **croissance** pour l'inclusion du passage à l'ensemble des parties.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle la **rétrocroissance** pour l'inclusion du passage à l'ensemble des parties.
   On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme fort** pour l'inclusion du fait de l'équivalence.

2. On a $E \subsetneq F \iff \mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Rightarrow$ s'appelle la **stricte croissance** du passage à l'ensemble des parties pour l'inclusion.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle la **stricte rétrocroissance** du passage à l'ensemble des parties pour l'inclusion.
   On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme fort** pour l'inclusion stricte du fait de l'équivalence.

3. On a $E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle **l'injectivité** du passage à l'ensemble des parties.
   L'implication $\Rightarrow$ est tout simplement le principe de Leibniz, il n'y a pas de propriété particulière.
   On dit que le passage à l'ensemble des partis est un **morphisme fort** pour l'égalité du fait de l'équivalence.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in \mathscr{P}(E)$.

On a donc $A \subseteq E$ par définition de $\mathscr{P}(E)$.

Or, $E \subseteq F$ par hypothèse.

Donc $A \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $A \in \mathscr{P}(F)$ par définition de $\mathscr{P}(F)$.

Donc si $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $A \in \mathscr{P}(F)$.

Donc $\forall A, \big(A \in \mathscr{P}(E) \implies A \in \mathscr{P}(F)\big)$.

Donc $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

Donc si $E \subseteq F$, alors $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.

On a donc $\forall A, \big(A \in \mathscr{P}(E) \implies A \in \mathscr{P}(F)\big)$. Notons $(\star)$ cette assertion.

On sait que $E \in \mathscr{P}(E)$ d'après la prop. 17 p. 21.

Donc $E \in \mathscr{P}(F)$ d'après $(\star)$.

Donc $E \subseteq F$ par définition de $\mathscr{P}(F)$.

Donc si $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$, alors $E \subseteq F$.

Finalement, $\boxed{E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)}$.

2 Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E \subsetneq F$.

On a donc $E \subseteq F$ et $E \neq F$ par définition de l'inclusion stricte.

Alors en particulier $E \subseteq F$.

Donc $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$ d'après 1.

De plus, on a $E \neq F$.

On a donc $\text{non}(E = F)$.

Donc $\text{non}(E \subseteq F \text{ et } F \subseteq E)$ d'après la prop. 3 p. 6.

Donc $\text{non}(E \subseteq F) \text{ ou } \text{non}(F \subseteq E)$ d'après les lois de De Morgan.

Or, on a dit que $E \subseteq F$.

Donc on a $\text{non}(F \subseteq E)$.

Donc $F \notin \mathscr{P}(E)$ par définition de $\mathscr{P}(E)$.

Mais $F \in \mathscr{P}(F)$ d'après la prop. 17 p. 21.

Ainsi, $F \in \mathscr{P}(F)$ et $F \notin \mathscr{P}(E)$.

Il existe donc $A \in \mathscr{P}(F)$ tel que $A \notin \mathscr{P}(E)$.

Donc $\exists A \in \mathscr{P}(F), A \notin \mathscr{P}(E)$.

Donc $\big(\exists A \in \mathscr{P}(E), A \notin \mathscr{P}(F)\big) \text{ ou } \big(\exists A \in \mathscr{P}(F), A \notin \mathscr{P}(E)\big)$.

Donc $\mathscr{P}(E) \neq \mathscr{P}(F)$ d'après la prop. 2 p. 4.

Donc $\mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$.

Donc si $E \subsetneq F$, alors $\mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$.
En particulier, on a $\mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.
Donc $E \subseteq F$ d'après 1.

De plus, on a $\mathscr{P}(E) \neq \mathscr{P}(F)$.
D'après le principe de Leibniz, on a $E = F \implies \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
Donc par contraposition, on a $\mathscr{P}(E) \neq \mathscr{P}(E) \implies E \neq F$.
Donc par modus ponens, on a $E \neq F$.

Donc $E \subsetneq F$.

Donc si $\mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$, alors $E \subsetneq F$.

Finalement, $\boxed{E \subsetneq F \iff \mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)}$.

3

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} E = F &\iff E \subseteq F \text{ et } F \subseteq E \text{ par antisymétrie (pour } \Leftarrow\text{) et réflexivité (pour } \Rightarrow\text{) de l'inclusion} \\ &\iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F) \text{ et } \mathscr{P}(F) \subseteq \mathscr{P}(E) \text{ d'après } 1 \\ &\iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F) \text{ par antisymétrie (pour } \Rightarrow\text{) et réflexivité (pour } \Leftarrow\text{) et réflde l'inclusion} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)}$ par transitivité de l'équivalence.
CQFD.

1.6 Ensemble des sur-ensembles

Définition 8 (Ensemble des sur-ensembles)

Soient E et F deux ensembles.

Alors on appellera **ensemble des sur-ensembles de F sous E** l'ensemble $\{A \in E \mid F \subseteq A\}$.
On le note parfois $\mathscr{S}_E(F)$.

Proposition 19 (Ensembles des sur-ensembles du vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\mathscr{S}_E(\varnothing) = E$.

Démonstration

Raisonnons par double inclusion.

$\boxed{\subseteq}$

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in \mathscr{S}_E(\varnothing)$.

On a donc $A \in E$ et $\varnothing \subseteq A$ par définition de $\mathscr{S}_E(\varnothing)$.

En particulier, on a $A \in E$.

Donc si $A \in \mathscr{S}_E(\varnothing)$, alors $A \in E$.

Donc $\forall A, \big(A \in \mathscr{S}_E(\varnothing) \implies A \in E\big)$.

Donc $\mathscr{S}_E(\varnothing) \subseteq E$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E$.

On a alors $A \in E$ et $\varnothing \subseteq A$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $A \in \mathscr{S}_E(\varnothing)$ par définition de $\mathscr{S}_E(\varnothing)$.

Donc si $A \in E$, alors $A \in \mathscr{S}_E(\varnothing)$.

Donc $\forall A, \big(A \in E \implies A \in \mathscr{S}_E(\varnothing)\big)$.

Donc $E \subseteq \mathscr{S}_E(\varnothing)$.

Finalement, $\boxed{E = \mathscr{S}_E(\varnothing)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 20 (Décroissance de l'ensemble des sur-ensembles)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a $F \subseteq G \implies \mathscr{S}_E(F) \supseteq \mathscr{S}_E(G)$.

On dit que le passage à l'ensemble des sur-ensembles sous E est **décroissant** pour l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $F \subseteq G$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in \mathscr{S}_E(G)$.

On a donc $A \in E$ et $G \subseteq A$ par définition de l'ensemble des sur-ensembles sous E.

En particulier, on a $G \subseteq A$.

Or, $F \subseteq G$ par hypothèse.

Donc $F \subseteq A$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $A \in E$ et $F \subseteq A$.

Donc $A \in \mathscr{S}_E(F)$ par définition de l'ensemble des sur-ensembles sous E.

Donc si $A \in \mathscr{S}_E(G)$, alors $A \in \mathscr{S}_E(F)$.

Donc $\forall A, \big(A \in \mathscr{S}_E(G) \implies A \in \mathscr{S}_E(F)\big)$.

Donc $\boxed{\mathscr{S}_E(G) \subseteq \mathscr{S}_E(F)}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Réunion

Axiome 6 (Axiome de la réunion)

Soit E un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de E.
On le notera $\bigcup E$ et on dira que c'est la **réunion** de E.

Autrement dit, $\forall x, \left(x \in \bigcup E \iff \exists A \in E, x \in A\right)$.

Proposition 21 (Réunion de l'ensemble vide)

On a $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

Démonstration

Soit x un ensemble.
On a l'équivalence $x \in \bigcup \varnothing \iff \exists A \in \varnothing, x \in A$ par définition de la réunion.
Mais on sait que l'assertion $\exists A \in \varnothing, x \in A$ est fausse d'après la prop. 12 p. 16.
Donc l'assertion $x \in \bigcup \varnothing$ est fausse.
Donc $x \notin \bigcup \varnothing$.
Donc $\forall x, x \notin \bigcup \varnothing$.
Donc $\boxed{\bigcup \varnothing = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.
CQFD.

Proposition 22 (Réunion et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
On a alors :

1. $\bigcup \mathscr{P}(E) = E$
2. $E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$

Démonstration

(1) Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$.

Il existe donc $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $x \in A$ par définition de la réunion.

Or, $A \in \mathscr{P}(E)$ donc $A \subseteq E$ par définition de $\mathscr{P}(E)$.

Donc $\forall y, \big(y \in A \implies y \in E\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, $x \in A \implies x \in E$.

Or, $x \in A$.

Donc $x \in E$ par modus ponens.

Donc si $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$, alors $x \in E$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \bigcup \mathscr{P}(E) \Rightarrow x \in E\Big)$.

Donc $\bigcup \mathscr{P}(E) \subseteq E$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On sait que $E \in \mathscr{P}(E)$ d'après la prop. 17 p. 21.

Donc il existe $A \in \mathscr{P}(E)$ tel que $x \in A$.

Donc $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$ par définition de la réunion.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \bigcup \mathscr{P}(E)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \Rightarrow x \in \bigcup \mathscr{P}(E)\Big)$.

Donc $E \subseteq \bigcup \mathscr{P}(E)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\bigcup \mathscr{P}(E) = E}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2)

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a donc $x \in A$ et $A \in E$. Il existe donc $B \in E$ tel que $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc si $x \in A$, alors $x \in \bigcup E$.

Donc $\forall x, \Big(x \in A \implies x \in \bigcup E\Big)$.

Donc $A \subseteq \bigcup E$ par définition de l'inclusion.

Donc $A \in \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$ par définition de l'ensemble des parties.

Donc si $A \in E$, alors $A \in \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$.

Donc $\forall A, \left(A \in E \implies A \in \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)\right)$.

Donc $\boxed{E \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Remarque :

L'inclusion réciproque $E \supseteq \mathscr{P}\left(\bigcup E\right)$ n'est pas vraie en toute généralité.

Par exemple, si l'on prend $E = \{\{1;2\}\}$, alors $\bigcup E = \{1;2\}$ donc $\mathscr{P}\left(\bigcup E\right) = \mathscr{P}\left(\{1;2\}\right) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}$.

Proposition 23 (Croissance de la réunion)

Soient E et F deux ensembles.

Si $E \subseteq F$, alors $\bigcup E \subseteq \bigcup F$.

On dit que la réunion est **croissante** pour l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup E$.

Il existe donc $A \in E$ tel que $x \in A$ par définition de la réunion.

Or, $E \subseteq F$ par hypothèse.

On a donc $\forall B, \left(B \in E \implies B \in F\right)$ par définition de l'inclusion.

Donc en particulier on a $A \in E \implies A \in F$.

Donc comme $A \in E$, on a $A \in F$ par modus ponens.

Or, $x \in A$.

Il existe donc $B \in F$ tel que $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup F$ par définition de la réunion.

Donc si $x \in \bigcup E$, alors $x \in \bigcup F$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup E \implies x \in \bigcup F\right)$.

Donc $\bigcup E \subseteq \bigcup F$ par définition de l'inclusion.

Donc $\boxed{\text{si } E \subseteq F, \text{ alors } \bigcup E \subseteq \bigcup F}$.

CQFD.

Remarque :

$\boxed{\text{a)}}$ On a en général pas l'implication $\bigcup E \subseteq \bigcup F \implies E \subseteq F$.

En effet, en prenant par exemple $E = \big\{\{1;2\}\big\}$ et $F = \big\{\{1\};\{2\}\big\}$, alors $\bigcup E = \{1;2\} = \bigcup F$ mais aucun des deux n'est inclus dans l'autre.

$\boxed{\text{b)}}$ On a en général pas l'implication $E \subsetneq F \implies \bigcup E \subsetneq \bigcup F$ (le passage l'ensemble des parties n'est donc pas strictement croissant). En effet, en prenant par exemple $E = \big\{\{1;2\}\big\}$ et $F = \big\{\{1;2\};\{1\}\big\}$, on a $E \subsetneq F$ mais $\bigcup E = \{1;2\} = \bigcup F$.

Proposition 24 (Réunion et inclusion)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $A \in E$.

On a alors $A \subseteq \bigcup E$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

Or, $A \in E$ par définition de A.

Il existe donc $B \in E$ tel que $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de la réunion.

Donc si $x \in A$, alors $x \in \bigcup E$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \implies x \in \bigcup E\big)$.

Donc $\boxed{A \subseteq \bigcup E}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Définition 9 (Union de deux ensemble)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **union** de A et de B l'ensemble $\bigcup\{A;B\}$.

On le note souvent $A \cup B$.

Proposition 25 (Union et disjonction)

Soient A et B deux ensembles.

Soit x un ensemble.

On a alors $x \in A \cup B \iff \big(x \in A \text{ ou } x \in B\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cup B$.

On a donc $x \in \bigcup\{A; B\}$ par définition de $A \cup B$.

Il existe donc $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$ par définition de la réunion.

Comme $C \in \{A; B\}$, on a $C = A$ ou $C = B$.

Comme $x \in C$, on a $x \in A$ ou $x \in B$.

Donc si $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ ou $x \in B$.

Plaçons-nous pour commencer dans le cas où $x \in A$.

Comme $A \in \{A; B\}$, il existe $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \in B$.

Comme $B \in \{A; B\}$, il existe $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$.

Dans les deux cas, il existe $C \in \{A; B\}$ tel que $x \in C$.

On a donc $x \in \bigcup\{A; B\}$ par définition de la réunion.

Donc $x \in A \cup B$ par définition de $A \cup B$.

Donc si $x \in A$ ou $x \in B$, alors $x \in A \cup B$.

Finalement, $\boxed{x \in A \cup B \iff \big(x \in A \text{ ou } x \in B\big)}$.

CQFD.

Proposition 26 (Union, sur-ensembles et minimum)

Soient A, B et X trois ensembles.

1. On a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$.
   Autrement dit, $A \cup B$ est un sur-ensemble commun à A et à B.

2. $(A \subseteq X \text{ et } B \subseteq X) \iff A \cup B \subseteq X$.
   L'implication $\Rightarrow$ traduit le fait que $A \cup B$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à B.

Démonstration

(1) Par définition d'une paire, on a $A \in \{A; B\}$ et $B \in \{A; B\}$.
Donc $A \subseteq \bigcup\{A; B\}$ et $B \subseteq \bigcup\{A; B\}$ d'après la prop. 24 p. 30.
Donc $\boxed{A \subseteq A \cup B \text{ et } B \subseteq A \cup B}$ puisque par définition, on a $A \cup B = \bigcup\{A; B\}$.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in A \cup B$.
On a donc $x \in A$ ou $x \in B$ d'après la prop. 25 p. 30.
Plaçons-nous d'abord dans le cas où $x \in A$.
Or, $A \subseteq X$ par hypothèse.
Donc $\forall y, \big(y \in A \implies y \in X\big)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, $x \in A \implies x \in X$.
Donc $x \in X$ par modus ponens.

Plaçons-nous maintenant dans le cas où $x \in B$.
Or, $B \subseteq X$ par hypothèse.
Donc $\forall y, \big(y \in B \implies y \in X\big)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, $x \in B \implies x \in X$.
Donc $x \in X$ par modus ponens.
Dans les deux cas, on a $x \in X$.
Donc si $x \in A \cup B$, alors $x \in X$.
Donc $\forall x, \big(x \in A \cup B \implies x \in X\big)$.
Donc $A \cup B \subseteq X$ par définition de l'inclusion.
Donc si $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$, alors $A \cup B \subseteq X$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $A \cup B \subseteq X$.
Or, on a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$ d'après (1).
Donc $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$ par transitivité de l'inclusion.
Donc si $A \cup B \subseteq X$, alors $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$.

Finalement, $\boxed{\big(A \subseteq X \text{ et } B \subseteq X\big) \iff A \cup B \subseteq X}$.
CQFD.

Proposition 27 (Propriétés de l'union)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $A \cup A = A$: on dit que l'union est **idempotente**.
2. $A \cup B = B \cup A$: on dit que l'union est **commutative**.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: on dit que l'union est **associative**.

Démonstration

Deux types de démonstrations sont possibles.

♦ Commençons par le plus simple : celles qui utilisent le lien entre l'union et la disjonction établi lors de la proposition 25 page 30.

1.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$x \in A \cup A \underset{25\text{ p. }30}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in A) \iff x \in A$ par idempotence de la disjonction.

Donc $x \in A \cup A \iff x \in A$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A \cup A \iff x \in A\big)$.

Donc $\boxed{A \cup A = A}$ par définition de l'égalité.

2.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$x \in A \cup B \underset{25\text{ p. }30}{\iff} (x \in A \text{ ou } x \in B) \iff (x \in B \text{ ou } x \in A) \underset{25\text{ p. }30}{\iff} x \in B \cup A$ par commutativité de la disjonction.

Donc $x \in A \cup B \iff x \in B \cup A$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A \cup B \iff x \in B \cup A\big)$.

Donc $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ par définition de l'égalité.

3.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup B \text{ ou } x \in C$ d'après la prop. 25 p. 30

$\iff (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C$ d'après la prop. 25 p. 30

$\iff x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C)$ par associativité de la disjonction

$\iff x \in A \text{ ou } x \in B \cup C$ d'après la prop. 25 p. 30

$\iff x \in A \cup (B \cup C)$ d'après la prop. 25 p. 30

Donc $x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup (B \cup C)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \big(x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in A \cup (B \cup C)\big)$.
Donc $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$.

♦ A présent, utilisons le fait que l'union est un sur-ensemble commun, et qu'il en est minimum pour l'inclusion, comme l'indique la proposition 26 page 31.

(1) On a $A \subseteq A$ par réflexivité de l'inclusion.
Donc $A \subseteq A$ et $A \subseteq A$.
Donc A est un sur-ensemble commun à A et à A.
Donc $A \cup A \subseteq A$ car $A \cup A$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à A.
Or, $A \subseteq A \cup A$ car $A \cup A$ est un sur-ensemble de A.
Donc $\boxed{A \cup A = A}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) On sait que $B \cup A$ est un sur-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \cup B \subseteq B \cup A$ car $A \cup B$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à B.

On sait que $A \cup B$ est un sur-ensemble commun à B et à A.
Donc $B \cup A \subseteq A \cup B$ car $B \cup A$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à B et à A.

Finalement, $\boxed{A \cup B = B \cup A}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(3)
$\boxed{\subseteq}$ Résumons d'abord la démonstration à l'aide d'un schéma afin de mieux la comprendre.
On veut montrer que $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\boxed{A \subseteq A \cup (B \cup C)} \\ \boxed{B \subseteq B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)}\end{array}\right\} \boxed{A \cup B \subseteq A \cup (B \cup C)} \\ \\ \boxed{C \subseteq B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)}\end{array}\right\} \boxed{(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)}\end{array}$$

On a $B \subseteq B \cup C$ car $B \cup C$ est une union de B.
Or, on a $B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ car $A \cup (B \cup C)$ est une union de $B \cup C$.
Donc $B \subseteq A \cup (B \cup C)$ par transitivité de l'inclusion.
On a $A \subseteq A \cup (B \cup C)$ car $A \cup (B \cup C)$ est une union de $A \cup (B \cup C)$.
Donc $A \cup (B \cup C)$ est un sur-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \cup B \subseteq A \cup (B \cup C)$ car $A \cup B$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à B.

On a $C \subseteq B \cup C$ car $B \cup C$ est une union de C.
Or, $B \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ car $A \cup (B \cup C)$ est une union de $B \cup C$.
Donc $C \subseteq A \cup (B \cup C)$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $A \cup (B \cup C)$ est un sur-ensemble commun à $A \cup B$ et à C.
Donc $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ car $(A \cup B) \cup C$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à $A \cup B$ et à C.

$\boxed{\supseteq}$ Résumons ici aussi la démonstration par un schéma pour mieux la comprendre.
On veut montrer que $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B)$.

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{A \subseteq A \cup B \subseteq (A \cup B) \cup C} \\ \\ \left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{c}\boxed{B \subseteq A \cup B \subseteq (A \cup B) \cup C} \\ \boxed{C \subseteq (A \cup B) \cup C}\end{array}\right\} \boxed{B \cup C \subseteq (A \cup B) \cup C}\end{array}\right\} \boxed{A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C}\end{array}$$

On a $B \subseteq A \cup B$ car $A \cup B$ est une union de B.
Or, $A \cup B \subseteq (A \cup B) \cup C$ car $(A \cup B) \cup C$ est une union de $A \cup B$.
Donc $B \subseteq (A \cup B) \cup C$ par transitivité de l'inclusion.
On a $C \subseteq (A \cup B) \cup C$ car $(A \cup B) \cup C$ est une union de C.
Donc $(A \cup B) \cup C$ est un sur-ensemble commun à B et à C.

Donc $B \cup C \subseteq (A \cup B) \cup C$ car $B \cup C$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à B et à C.

On a $A \subseteq A \cup B$ car $A \cup B$ est une union de A.
Or, $A \cup B \subseteq (A \cup B) \cup C$ car $(A \cup B) \cup C$ est une union de $A \cup B$.
Donc $A \subseteq (A \cup B) \cup C$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi, $(A \cup B) \cup C$ est un sur-ensemble commun à A et à $B \cup C$.
Donc $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ car $A \cup (B \cup C)$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à $B \cup C$.

Ainsi, on a $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ et $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$.
Donc $\boxed{(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)}$ par antisymétrie de l'inclusion.
CQFD.

Remarque :
On aurait aussi pu démontrer la commutativité de l'union en utilisant la propriété 13 page 17 qui nous dit que $\{A; B\} = \{B; A\}$.
Alors $A \cup B = \bigcup\{A; B\} = \bigcup\{B; A\} = B \cup A$.

Notation

Du fait de l'associativité de l'union, on notera parfois $A \cup B \cup C$ à la place de $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$. Dans une expression ne comportant que des unions, les parenthèses pourront ainsi être retirées.

Proposition 28 (Réunion d'un singleton)

Soit A un ensemble.
On a alors $\bigcup\{A\} = A$.

Démonstration

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \bigcup\{A\} &= \bigcup\{A; A\} \text{ car par définition, } \{A\} = \{A; A\} \\ &= A \cup A \text{ par définition de } A \cup A \end{aligned}$$

$$= A \text{ par idempotence de l'union}$$

Donc $\boxed{\bigcup\{A\} = A}$.
CQFD.

Proposition 29 (Réunion de deux singletons)

Soient x et y deux ensembles.
On a alors $\{x\} \cup \{y\} = \{x; y\}$.

Démonstration

Soit z un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z \in \{x\} \cup \{y\} &\iff z \in \{x\} \text{ ou } z \in \{y\} \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\ &\iff z = x \text{ ou } z = y \text{ par définition d'un singleton} \\ &\iff z \in \{x; y\} \text{ par définition de } \{x; y\} \end{aligned}$$

Donc $z \in \{x\} \cup \{y\} \iff z \in \{x; y\}$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \cup \{y\} \iff z \in \{x; y\}\big)$.
Donc $\boxed{\{x\} \cup \{y\} = \{x; y\}}$.
CQFD.

Proposition 30 (Union et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles.

Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \cup B \subseteq A' \cup B'$.
On dit que l'union est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A \subseteq A'$ et que $B \subseteq B'$.

On a $A' \subseteq A' \cup B'$ car $A' \cup B'$ est un sur-ensemble de A'.
Donc par transitivité de l'inclusion, on a $A \subseteq A' \cup B'$.

De même même, on a $B' \subseteq A' \cup B'$ car $A' \cup B'$ est un sur-ensemble de B'.
Donc par transitivité de l'inclusion, on a $B \subseteq A' \cup B'$.

Ainsi, on a $A \subseteq A' \cup B'$ et $B \subseteq A' \cup B'$.
Donc $A' \cup B'$ est sur-ensemble commun à A et à B.
Donc $\boxed{A \cup B \subseteq A' \cup B'}$ car $A \cup B$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à B.
CQFD.

Proposition 31 (Union, absorbant et neutre)

Soient E et F deux ensembles.

1. $E \subseteq F \iff E \cup F = F$
   On dit que F est **absorbant** pour l'union avec ses sous-ensembles du fait de l'implication $\Rightarrow$.
   On dit que E est **neutre** pour l'union avec ses sur-ensembles du fait de cette même implication.

2. $E \cup \varnothing = E$
   Ainsi, $\varnothing$ est **neutre** pour l'union.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E \subseteq F$.
On a $F \subseteq F$ par réflexivité de l'inclusion.
Donc F est sur-ensemble commun à E et à F.
Donc $E \cup F \subseteq F$ car $E \cup F$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles commun à E et à F.
Or, $F \subseteq E \cup F$ car $E \cup F$ est un sur-ensemble de F.
Donc $E \cup F = F$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $E \subseteq F$, alors $E \cup F = F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \cup F = F$.
On sait que $E \subseteq E \cup F$ car $E \cup F$ est un sur-ensemble de E.
Donc $E \subseteq F$.

Donc si $E \cup F = F$, alors $E \subseteq F$.

Finalement, $\boxed{E \subseteq F \iff E \cup F = F}$.

(2) On sait que $\varnothing \subseteq E$ d'après la prop. 11 p. 15.
Donc E est un sur-ensemble de $\varnothing$.
Donc $\boxed{E \cup \varnothing = E}$ car $\varnothing$ est neutre pour l'union avec ses sur-ensembles.
CQFD.

Notation

Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i, j dix ensembles.

- On notera $\{a; b; c\}$ l'ensemble $\{a; b\} \cup \{c\}$.
- On notera $\{a; b; c; d\}$ l'ensemble $\{a; b; c\} \cup \{d\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d\} \cup \{e\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e\} \cup \{f\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f\} \cup \{g\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g\} \cup \{h\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g; h\} \cup \{i\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i\} \cup \{j\}$.

2.2 Intersection

Définition 10 (Intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

On appelle **intersection** de E l'ensemble $\{x \in \bigcup E \mid \forall A \in E, x \in A\}$.
On le note alors $\bigcap E$.

Proposition 32 (Caractérisation de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit x un ensemble.
On a alors $x \in \bigcap E \iff \forall A \in E, x \in A$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap E$.

Or, on a $\bigcap E = \{y \in \bigcup E \mid \forall A \in E, y \in A\}$ par définition de $\bigcap E$.

Donc $x \in \{y \in \bigcup E \mid \forall A \in E, y \in A\}$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$.

Donc si $x \in \bigcap E$, alors $\forall A \in E, x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall A \in E, x \in A$.

On sait que E est non vide par définition.

Il existe donc au moins un $B \in E$.

Soit un tel B.

Alors $x \in B$ par hypothèse.

Il existe donc au moins un $A \in E$ tel que $x \in A$.

Donc $x \in \bigcup E$ par définition de $\bigcup E$.

Ainsi, on a $x \in \bigcup E$ et $\forall A \in E, x \in A$.

Donc $x \in \{y \in \bigcup E \mid \forall A \in E, y \in A\}$.

Or, on a $\bigcap E = \{y \in \bigcup E \mid \forall A \in E, y \in A\}$ par définition de $\bigcap E$.

Donc $x \in \bigcap E$.

Donc si $\forall A \in E, x \in A$, alors $x \in \bigcap E$.

Finalement, on a bien $\boxed{x \in \bigcap E \iff \forall A \in E, x \in A}$.

CQFD.

Proposition 33 (Décroissance de l'intersection)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.

Si $E \subseteq F$, alors $\bigcap E \supseteq \bigcap F$.

On dit que l'intersection est **décroissante** pour l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $E \subseteq F$.

On a donc $\forall A, \big(A \in E \implies A \in F\big)$. Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap F$.

Donc $\forall A \in F, x \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit $A \in E$.

On a $A \in E \implies A \in F$ d'après $(\star)$.

Donc $A \in F$ par modus ponens.

Donc $x \in A$ d'après $(\star\star)$.

Donc $\forall A \in E, x \in A$.

Donc $x \in \bigcap E$ d'après la prop. 32 p. 39.

Donc si $x \in \bigcap F$, alors $x \in \bigcap E$.

Donc $\forall x, \big(x \in \bigcap F \implies x \in \bigcap E\big)$.

Donc $\boxed{\bigcap E \supseteq \bigcap F}$.

CQFD.

Proposition 34 (Intersection et inclusion)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $A \in E$.

On a alors $\bigcap E \subseteq A$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap E$.

Alors $\forall B \in E, x \in B$ par définition de l'intersection.

Donc $\forall B, \big(B \in E \implies x \in B\big)$.

En particulier, $A \in E \implies x \in A$.

Donc $x \in A$ par modus ponens.

Donc si $x \in \bigcap E$, alors $x \in A$.

Donc $\forall x, \big(x \in \bigcap E \implies x \in A\big)$.

Donc $\boxed{\bigcap E \subseteq A}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Définition 11 (Intersection de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble $\bigcap\{A; B\}$.
On le note souvent $A \cap B$.

Illustration :
Illustrons l'intersection par un **diagramme de Venn**.
Ici, on a colorié en **rouge** l'ensemble $A \cap B$.

Pour la petite histoire

John Venn (1834-1923) est un mathématicien et logicien britannique, renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn qu'il a présenté en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

Proposition 35 (Intersection et conjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Soit x un ensemble.

On a alors $x \in A \cap B \iff \big(x \in A \text{ et } x \in B\big)$.
En particulier, on a $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A \cap B$.
On a donc $x \in \bigcap\{A; B\}$ par définition de l'intersection de deux ensembles.
Donc $\forall C \in \{A; B\}, x \in C$ par définition de l'intersection d'un ensemble.
Donc $\forall C, \big(C \in \{A; B\} \implies x \in C\big)$. Notons $(\star)$ cette assertion.

On a $A \in \{A; B\} \implies x \in A$ d'après $(\star)$.
Donc $x \in A$ par modus ponens.

De même, on a $B \in \{A; B\} \implies x \in B$ d'après $(\star)$.
Donc $x \in B$ par modus ponens.

Ainsi, $x \in A$ et $x \in B$.
Donc si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$ et $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in A$ et $x \in B$.
Soit C un ensemble.
Supposons que $C \in \{A; B\}$.
On a alors $C = A$ ou $C = B$ par définition d'une paire.
Plaçons-nous dans le cas où $C = A$.
Par hypothèse, on a $x \in A$.
Donc $x \in C$.

Plaçons-nous dans le cas où $C = B$.
Par hypothèse, on a $x \in B$.
Donc $x \in C$.
Donc dans les deux cas, on a $x \in C$.
Donc si $C \in \{A; B\}$, alors $x \in C$.
Donc $\forall C, \big(C \in \{A; B\} \implies x \in C\big)$.
Donc $\forall C \in \{A; B\}, x \in C$.
Donc $x \in \bigcap\{A; B\}$ par définition de l'intersection d'un ensemble.
Donc $x \in A \cap B$ par définition de l'intersection de deux ensembles.
Donc si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cap B$.

Finalement, $\boxed{x \in A \cap B \iff \big(x \in A \text{ et } x \in B\big)}$.
CQFD.

Proposition 36 (Intersection, sous-ensembles et maximum)

Soient A, B et X trois ensembles.

1. On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$.
   $A \cap B$ est donc un sous-ensemble **commun** à A et à B.

2. $\big(X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B\big) \iff X \subseteq A \cap B$.
   L'implication $\implies$ traduit le fait que $A \cap B$ est **maximum** pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

Démonstration

1. Par définition d'une paire, on a $A \in \{A; B\}$ et $B \in \{A; B\}$.
Donc $\bigcap\{A; B\} \subseteq A$ et $\bigcap\{A; B\} \subseteq B$ d'après la prop. 34 p. 41.
Donc $\boxed{A \cap B \subseteq A \text{ et } A \cap B \subseteq B}$ par définition de $A \cap B$.

2. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in X$.

On a $X \subseteq A$ par hypothèse.
Donc $\forall y, \big(y \in X \implies y \in A\big)$ par définition de l'inclusion.
Donc en particulier, $x \in X \implies x \in A$.
Or, $x \in X$ par hypothèse.
Donc $x \in A$ par modus ponens.

De même, on $X \subseteq B$ par hypothèse.
Donc $\forall y, \big(y \in X \implies y \in B\big)$ par définition de l'inclusion.
Donc en particulier, $x \in X \implies x \in B$.
Or, $x \in X$ par hypothèse.
Donc $x \in B$ par modus ponens.

On a donc $x \in A$ et $x \in B$.

Donc $x \in A \cap B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc si $x \in X$, alors $x \in A \cap B$.

Donc $\forall x, \big(x \in X \implies x \in A \cap B\big)$.

Donc $X \subseteq A \cap B$ par définition de l'inclusion.

Donc si $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$, alors $X \subseteq A \cap B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $X \subseteq A \cap B$.

On a $A \cap B \subseteq A$ d'après (1).

Donc $X \subseteq A$ par transitivité de l'inclusion.

De même, on a $A \cap B \subseteq B$ d'après (1).

Donc $X \subseteq B$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$.

Donc si $X \subseteq A \cap B$, alors $X \subseteq A$ et $X \subseteq B$.

Finalement $\boxed{\big(X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B\big) \iff X \subseteq A \cap B}$.

CQFD.

Proposition 37 (Propriétés de l'intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

(1) $A \cap A = A$: on dit que l'intersection est **idempotente**.

(2) $A \cap B = B \cap A$: on dit que l'intersection est **commutative**.

(3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: on dit que l'intersection est **associative**.

Démonstration

Nous allons faire deux types de démonstrations pour chacune de ces propriétés.

♦ Commençons tout d'abord par exploiter le lien entre l'intersection et la conjonction établit lors de la propriété 35 page 42.

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$x \in A \cap A \underset{35\text{ p. }42}{\iff} \big(x \in A \text{ et } x \in A\big) \iff x \in A$ par idempotence de la conjonction.

Donc $x \in A \cap A \iff x \in A$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A \cap A \iff x \in A\big)$.

Donc $\boxed{A \cap A = A}$ par définition de l'égalité.

2

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$x \in A \cap B \underset{35\text{ p. }42}{\iff} \big(x \in A \text{ et } x \in B\big) \iff \big(x \in B \text{ et } x \in A\big) \underset{35\text{ p. }42}{\iff} x \in B \cap A$ par commutativité de la conjonction.

Donc $x \in A \cap B \iff x \in B \cap A$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A \cap B \iff x \in B \cap A\big)$.

Donc $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ par définition de l'égalité.

3

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in (A \cap B) \cap C &\underset{35\text{ p. }42}{\iff} \Big(x \in (A \cap B) \text{ et } x \in C\Big) \\
&\underset{35\text{ p. }42}{\iff} \Big(\big(x \in A \text{ et } x \in B\big) \text{ et } x \in C\Big) \\
&\iff \Big(x \in A \text{ et } \big(x \in B \text{ et } x \in C\big)\Big) \text{ par associativité de la conjonction} \\
&\underset{35\text{ p. }42}{\iff} \Big(x \in A \text{ et } x \in B \cap C\Big) \\
&\underset{35\text{ p. }42}{\iff} x \in A \cap (B \cap C)
\end{aligned}$$

Donc $x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in A \cap (B \cap C)$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in (A \cap B) \cap C \iff x \in A \cap (B \cap C)\big)$.

Donc $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$ par définition de l'égalité.

♦ Exploitons à présent le fait que l'intersection de deux ensembles en est un sous-ensemble commun, et qu'il est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs, comme établit lors de la proposition 36 page 44 .

1 On a $A \subseteq A$ par réflexivité de l'inclusion.
Donc $A \subseteq A$ et $A \subseteq A$.
Donc A est un sous-ensemble commun à A et à A.
Donc $A \subseteq A \cap A$ car $A \cap A$ est maximum parmi les sous-ensembles communs à A et à A.
Mais on a $A \cap A \subseteq A$ car $A \cap A$ est un sous-ensemble de A.
Donc $\boxed{A \cap A}$ par antisymétrie de l'inclusion.

2 On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$ car $A \cap B$ est un sous-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \cap B \subseteq B \cap A$ car $B \cap A$ est maximum parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

De même, $B \cap A \subseteq A$ et $B \cap A \subseteq B$ car $B \cap A$ est un sous-ensemble commun à A et à B.
Donc $B \cap A \subseteq A \cap B$ car $A \cap B$ est maximum parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

Finalement, $\boxed{A \cap B = B \cap A}$ par antisymétrie de l'inclusion.

3
$\boxed{\subseteq}$ Résumons tout d'abord la démonstration par un schéma pour mieux la comprendre.
On veut montrer que $\boxed{(A \cap B) \cap C} \subseteq \boxed{A \cap (B \cap C)}$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{(A \cap B) \cap C \ \subseteq \ A \cap B \ \subseteq \ A} \\ \left.\begin{array}{l} \boxed{(A \cap B) \cap C \ \subseteq \ A \cap B \ \subseteq \ B} \\ \boxed{(A \cap B) \cap C \ \subseteq \ C} \end{array}\right\} (A \cap B) \cap C \ \subseteq \ B \cap C \end{array}\right\} (A \cap B) \cap C \ \subseteq \ A \cap (B \cap C)$$

On sait que $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap B$ car $(A \cap B) \cap C$ est une intersection de $A \cap B$.
De même, on sait que $A \cap B \subseteq B$ car $A \cap B$ est une intersection de B.
Donc $(A \cap B) \cap C \subseteq B$ par transitivité de l'inclusion.
De même, $(A \cap B) \cap C \subseteq C$ car $(A \cap B) \cap C$ est une intersection de C.
Ainsi, $(A \cap B) \cap C$ est un sous-ensemble commun à B et à C.
Donc $(A \cap B) \cap C \subseteq B \cap C$ car $B \cap C$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à B et à C.

On a déjà vu que $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap B$ car $(A \cap B) \cap C$ est une intersection de $A \cap B$.
De même, on sait que $A \cap B \subseteq A$ car $A \cap B$ est une intersection de A.
Donc $(A \cap B) \cap C \subseteq A$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi, $(A \cap B) \cap C$ est un sous-ensemble commun à A et à $B \cap C$.
Donc $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ car $A \cap (B \cap C)$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A et à $B \cap C$.

$\boxed{\supseteq}$ Résumons à nouveau la situation par un schéma pour mieux la comprendre.
On veut démontrer que $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\boxed{A \cap (B \cap C) \subseteq A} \\ \boxed{A \cap (B \cap C) \subseteq (B \cap C) \subseteq B}\end{array}\right\} \boxed{A \cap (B \cap C) \subseteq A \cap B} \\ \\ \boxed{A \cap (B \cap C) \subseteq B \cap C \subseteq C}\end{array}\right\} \boxed{A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C}$$

On sait que $A \cap (B \cap C) \subseteq B \cap C$ car $A \cap (B \cap C)$ est une intersection de $B \cap C$.
De même, on sait que $B \cap C \subseteq B$ car $B \cap C$ est une intersection de B.
Donc $A \cap (B \cap C) \subseteq B$ par transitivité de l'inclusion.
De plus, on sait que $A \cap (B \cap C) \subseteq A$ car $A \cap (B \cap C)$ est une intersection de A.
Ainsi, $A \cap (B \cap C)$ est un sous-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \cap (B \cap C) \subseteq A \cap B$ car $A \cap B$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

On vient de voir que $A \cap (B \cap C) \subseteq B \cap C$ car $A \cap (B \cap C)$ est une intersection de $B \cap C$.
Or, $B \cap C \subseteq C$ car $B \cap C$ est une intersection de C.
Donc $A \cap (B \cap C) \subseteq C$ par transitivité de l'intersection.

Ainsi, $A \cap (B \cap C)$ est un sous-ensemble commun à $A \cap B$ et à C.
Donc $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$ car $(A \cap B) \cap C$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à $A \cap B$ et à C.

On a donc montré que $(A \cap B) \cap C \subseteq A \cap (B \cap C)$ et que $A \cap (B \cap C) \subseteq (A \cap B) \cap C$.
Donc $\boxed{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$ par antisymétrie de l'inclusion.
CQFD.

Remarque :
On aurait aussi pu démontrer la commutativité de l'intersection en utilisant la propriété 13 page 17 qui nous dit que $\{A; B\} = \{B; A\}$.
Alors $A \cap B = \bigcap\{A; B\} = \bigcap\{B; A\} = B \cap A$.

Notation

Du fait de l'associativité de l'intersection, on notera parfois $A \cap B \cap C$ à la place de $(A \cap B) \cap C$ ou $A \cap (B \cap C)$. Dans une expression ne comportant que des intersections, les parenthèses pourront ainsi être retirées.

Proposition 38 (Intersection et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles.

Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \cap B \subseteq A' \cap B'$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec l'inclusion.

Démonstration

Supposons que $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$.
On sait que $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$ car $A \cap B$ est un sous-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \cap B \subseteq A'$ et $A \cap B \subseteq B'$ par transitivité de l'inclusion.
Donc $A \cap B$ est un sous-ensemble commun à A' et B'.
Donc $\boxed{A \cap B \subseteq A' \cap B'}$ car $A' \cap B'$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A' et à B'.
CQFD.

Proposition 39 (Intersection, absorbant et neutre)

Soient A et B deux ensembles.
On a alors :

1. $A \subseteq B \iff A \cap B = A$
   On dit que A est **absorbant** pour l'intersection avec ses sur-ensembles du fait de l'implication $\Rightarrow$. On dit que B est **neutre** pour l'intersection avec ses sous-ensembles du fait de cette même implication.

2. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
   Ainsi, $\varnothing$ est **absorbant** pour l'intersection.

Démonstration

(1) Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \subseteq B$.

On sait aussi que $A \subseteq A$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc A est un sous-ensemble commun à A et à B.

Donc $A \subseteq A \cap B$ car $A \cap B$ est maximum parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

Mais $A \cap B \subseteq A$ car $A \cap B$ est une intersection de A.

Donc $A \cap B = A$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $A \subseteq B$, alors $A \cap B = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $A \cap B = A$.

On sait que $A \cap B \subseteq B$ car $A \cap B$ est une intersection de B.

Donc $A \subseteq B$.

Donc si $A \cap B = A$, alors $A \subseteq B$.

Finalement, $\boxed{A \subseteq B \iff A \cap B = A}$.

(2) On sait que $\varnothing \subseteq A$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $\varnothing$ est un sous-ensemble de A.

Donc $\boxed{A \cap \varnothing = \varnothing}$ car $\varnothing$ est absorbant pour l'intersection avec ses sur-ensembles.

CQFD.

Définition 12 (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 40 (Ensemble disjoints et sous-ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

Soient A' une partie de A, et B' une partie de B.

On a alors :

(1) Si A et B sont disjoints, alors A' et B' sont disjoints.

(2) En particulier, si A et B sont disjoints, alors A et B' sont disjoints.

Démonstration

(1) Supposons que A et B sont disjoints.
On a donc $A \cap B = \varnothing$.
Or, $A' \subseteq A$ et $B' \subseteq B$ par définition de A' et B'.
Donc $A' \cap B' \subseteq A \cap B$ par compatibilité de l'intersection avec l'inclusion.
Donc $A' \cap B' \subseteq \varnothing$.
Donc $A' \cap B' = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.
Donc $\boxed{A' \text{ et } B' \text{ sont disjoints}}$.

(2) Il suffit de prendre $A' := A$ dans (1) pour avoir le résultat.
CQFD.

2.3 Réunion et intersection

Proposition 41 (Union et intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.
On a alors :

(1) $A \cap B \subseteq A \cup B$.

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
On dit que l'union est **distributive** sur l'intersection.

(3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
On dit que l'intersection est **distributive** sur l'union.

Démonstration

(1) On sait que $A \cap B \subseteq A$ car $A \cap B$ est une intersection de A.
On sait aussi que $A \subseteq A \cup B$ car $A \cup B$ est une réunion de A.
Donc $\boxed{A \cap B \subseteq A \cup B}$ par transitivité de l'inclusion.

(2)

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ ou } x \in B \cap C \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\
&\iff x \in A \text{ ou } \big(x \in B \text{ et } x \in C\big) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff \big(x \in A \text{ ou } x \in B\big) \text{ et } \big(x \in A \text{ ou } x \in C\big) \text{ par distributivité} \\
&\qquad \text{de la disjonction sur la conjonction} \\
&\iff x \in A \cup B \text{ et } x \in A \cup C \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\
&\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \text{ d'après la prop. 35 p. 42}
\end{aligned}$$

Donc $x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \big(\in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)\big)$.
Donc $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$.

3

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \in B \cup C \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \in A \text{ et } \big(x \in B \text{ ou } x \in C\big) \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\
&\iff \big(x \in A \text{ et } x \in B\big) \text{ ou } \big(x \in A \text{ et } x \in C\big) \text{ par distributivité} \\
&\qquad \text{de la conjonction sur la disjonction} \\
&\iff x \in A \cap B \text{ ou } x \in A \cap C \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ d'après la prop. 25 p. 30}
\end{aligned}$$

Donc $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \big(x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)\big)$.
Donc $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$ par définition de l'égalité.
CQFD.

Proposition 42 (Union, intersection, sur-ensembles et parties)

Soient E, A et B trois ensembles.
On a alors :

1. $\mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) = \mathscr{S}_E(A \cup B)$

2. $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$
   On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme** pour l'intersection.

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) &\iff x \in \mathscr{S}_E(A) \text{ et } x \in \mathscr{S}_E(B) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff \big(x \in E \text{ et } A \subseteq x\big) \text{ et } \big(x \in E \text{ et } B \subseteq x\big) \\
&\qquad \text{par définition de l'ensemble des sur-ensembles sous } E \\
&\iff \big(x \in E \text{ et } x \in E\big) \text{ et } \big(A \subseteq x \text{ et } B \subseteq x\big) \\
&\qquad \text{par associativité et commutativité de la conjonction} \\
&\iff x \in E \text{ et } \big(A \subseteq x \text{ et } B \subseteq x\big) \\
&\qquad \text{par idempotence de la conjonction} \\
&\iff x \in E \text{ et } \big(A \cup B \subseteq x\big) \\
&\qquad \text{car } A \cup B \text{ est minimum pour l'inclusion} \\
&\qquad \text{parmi les sur-ensembles communs à } A \text{ et à } B \text{ pour } \Rightarrow ; \\
&\qquad \text{et car } A \cup B \text{ est un sur-ensemble commun à } A \text{ et à } B \text{ pour } \Leftarrow \\
&\iff x \in \mathscr{S}_E(A \cup B) \\
&\qquad \text{par définition de l'ensemble des sur-ensembles sous } E
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \in \mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) \iff x \in \mathscr{S}_E(A \cup B)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \big(x \in \mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) \iff x \in \mathscr{S}_E(A \cup B)\big)$.
Donc $\boxed{\mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) = \mathscr{S}_E(A \cup B)}$ par définition de l'égalité.

2

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) &\iff x \in \mathscr{P}(A) \text{ et } x \in \mathscr{P}(B) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \subseteq A \text{ et } x \subseteq B \text{ par définition de l'ensemble des parties} \\
&\iff x \subseteq A \cap B \text{ car } A \cap B \text{ est maximum pour l'inclusion} \\
&\qquad \text{parmi les sous-ensembles communs à } A \text{ et à } B \text{ pour } \Rightarrow ; \\
&\qquad \text{et car } A \cap B \text{ est un sous-ensemble commun à } A \text{ et à } B \text{ pour } \Leftarrow \\
&\iff x \in \mathscr{P}(A \cap B)
\end{aligned}$$

Donc $x \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \iff x \in \mathscr{P}(A \cap B)$ par transitivité de l'équivalence

Donc $\forall x, \big(x \in \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) \iff x \in \mathscr{P}(A \cap B)\big)$.

Donc $\boxed{\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 43 (Compréhension, union et intersection)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

On a alors :

1. $\{x \in E \cup F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\}$
2. $\{x \in E \cap F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\}$

Démonstration

1

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \in \{x \in E \cup F \mid P(x)\} &\iff y \in E \cup F \text{ et } P(y) \\
&\quad \text{par définition d'un ensemble par compréhension} \\
&\iff \big(y \in E \text{ ou } y \in F\big) \text{ et } P(y) \\
&\quad \text{d'après la prop. 25 p. 30} \\
&\iff \big(y \in E \text{ et } P(y)\big) \text{ ou } \big(y \in F \text{ et } P(y)\big) \\
&\quad \text{par distributivité de la conjonction sur la disjonction} \\
&\iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \text{ ou } y \in \{x \in F \mid P(x)\} \\
&\quad \text{par définition d'un ensemble par compréhension} \\
&\iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\} \\
&\quad \text{d'après la prop. 25 p. 30}
\end{aligned}$$

Donc $y \in \{x \in E \cup F \mid P(x)\} \iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\}$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \cup F \mid P(x)\} \iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\}\Big)$.

Donc $\boxed{\{x \in E \cup F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\}}$.

2

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \in \{x \in E \cap F \mid P(x)\} &\iff y \in E \cap F \text{ et } P(y) \\
&\quad \text{par définition d'un ensemble par compréhension} \\
&\iff \big(y \in E \text{ et } y \in F\big) \text{ et } P(y) \\
&\quad \text{d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff y \in E \text{ et } y \in F \text{ et } \big(P(y) \text{ et } P(y)\big) \\
&\quad \text{par idempotence de la conjonction} \\
&\iff \big(y \in E \text{ et } P(y)\big) \text{ et } \big(y \in F \text{ et } P(y)\big) \\
&\quad \text{par associativité et commutativité de la conjonction} \\
&\iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \text{ et } y \in \{x \in F \mid P(x)\} \\
&\quad \text{par définition d'un ensemble par compréhension} \\
&\iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\} \\
&\quad \text{d'après la prop. 35 p. 42}
\end{aligned}$$

Donc $y \in \{x \in E \cap F \mid P(x)\} \iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\}$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \cap F \mid P(x)\} \iff y \in \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\}\Big)$.

Donc $\boxed{\{x \in E \cap F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\}}$.

CQFD.

2.4 Différence ensembliste

Définition 13 (Différence ensembliste)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **différence de A par B** l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$.

On le note alors $A \backslash B$.

Notation

Certains auteurs le notent aussi $A - B$.

Illustration :

Illustrons la différence ensembliste par un **diagramme de Venn**.

Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \backslash B$.

Proposition 44 (Différence ensembliste et parties triviales)

Soit A un ensemble. On a alors :

1. $A \backslash A = \varnothing$
2. $A \backslash \varnothing = A$
3. $\varnothing \backslash A = \varnothing$

Démonstration

1. On a $\forall x, \text{non}\big(x \in A \ \text{ et } \ x \notin A\big)$ d'après le principe de non-contradiction.

Donc $\forall x, \text{non}\big(x \in \{y \in A \mid y \notin A\}\big)$ par définition d'un ensemble par compréhension.

Donc $\forall x, \text{non}\big(x \in A \backslash A\big)$ par définition de $A \backslash A$.

Donc $\forall x, x \notin A \backslash A$.

Donc $\boxed{A \backslash A = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.

2.

Soit x un ensemble.

On a alors :

$$\begin{aligned} x \in A \backslash \varnothing &\iff x \in A \ \text{ et } \ x \notin \varnothing \text{ par définition de } A \backslash \varnothing \\ &\iff x \in A \text{ car l'assertion } x \in \varnothing \text{ est fausse} \end{aligned}$$

Donc $x \in A \backslash \varnothing \iff x \in A$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A\backslash\varnothing \iff x \in A\big)$.
Donc $\boxed{A\backslash\varnothing = A}$ par définition de l'égalité.

(3)
On a $\varnothing\backslash A \subseteq \varnothing$ par définition de $\varnothing\backslash A$.
Donc $\boxed{\varnothing\backslash A = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.
CQFD.

Proposition 45 (Différence ensembliste, partie disjointe et maximum)

Soient A, B et X trois ensembles.
On a alors :

(1) $(A\backslash B) \cap B = \varnothing$
Ainsi, $A\backslash B$ est une partie de A **disjointe** de B.

(2) Si X est une partie de A disjointe de B, alors $X \subseteq A\backslash B$.
Autrement dit, $A\backslash B$ est maximum pour l'inclusion parmi les parties de A disjointes de B.

Démonstration

(1)
Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in (A\backslash B) \cap B &\iff x \in A\backslash B \text{ et } x \in B \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\ &\iff (x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ et } x \in B \text{ par définition de } A\backslash B \\ &\iff x \in A \text{ et } (x \notin B \text{ et } x \in B) \text{ par associativité de la conjonction} \end{aligned}$$

Donc $x \in (A\backslash B) \cap B \iff x \in A$ et $(x \notin B$ et $x \in B)$ par transitivité de l'équivalence.
Or, $x \notin B$ et $x \in B$ est faux d'après le principe de non-contradiction.
Donc $x \in A$ et $(x \notin B$ et $x \in B)$ est faux.
Donc $x \in (A\backslash B) \cap B$ est faux.
Donc $x \notin (A\backslash B) \cap B$.
Donc $\forall x, \big(x \notin (A\backslash B) \cap B\big)$.
Donc $\boxed{(A\backslash B) \cap B = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.
$A\backslash B$ est bien une partie de A puisque $A\backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

(2) Supposons que X est une partie de A disjointe de B.

On a donc $X \subseteq A$ et $X \cap B = \varnothing$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in X$.

Or, on a $X \subseteq A$ par hypothèse.

Donc $\forall y, \big(y \in X \implies y \in A\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, $x \in X \implies x \in A$.

Donc $x \in A$ par modus ponens.

De plus, on a $X \cap B = \varnothing$ par hypothèse.

Or, $\forall y, y \notin \varnothing$ par définition de l'ensemble vide.

En particulier $x \notin \varnothing$.

Donc $x \notin X \cap B$.

Donc $\text{non}\big(x \in X \cap B\big)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $\text{non}\big(x \in X \ \text{ et } \ x \in B\big)$.

Donc $\text{non}\big(x \in X\big) \ \text{ ou } \ \text{non}\big(x \in B\big)$ d'après les lois de De Morgan.

Donc $x \notin X \ \text{ ou } \ x \notin B$.

Or, $x \in X$ par hypothèse.

Donc $x \notin B$.

Ainsi, on a $x \in A$ et $x \notin B$.

Donc $x \in A \backslash B$ par définition de $A \backslash B$.

Donc si $x \in X$, alors $x \in A \backslash B$.

Donc $\forall x, \big(x \in X \implies x \in A \backslash B\big)$.

Donc $\boxed{X \subseteq A \backslash B}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 46 (Différence ensembliste et inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles. On a alors :

(1) $\forall x, \Big(x \notin A \backslash B \iff \big(x \in A \implies x \in B\big)\Big)$

(2) $A \backslash B = \varnothing \iff A \subseteq B$

(3) $A \backslash B = B \backslash A \iff A = B$

(4) Si $A \subseteq A'$, alors $A \backslash B \subseteq A' \backslash B$.

On dit que la différence ensembliste selon la première variable est **croissante** pour l'inclusion.

(5) Si $B \subseteq B'$, alors $A \backslash B \supseteq A \backslash B$.
On dit que la différence ensembliste selon la deuxième variable est **décroissante** pour l'inclusion.

Démonstration

(1)

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \notin A\backslash B &\iff \text{non}(x \in A\backslash B) \\ &\iff \text{non}(x \in A \ \text{ et } \ x \notin B) \text{ par définition de } A\backslash B \\ &\iff \text{non}(x \in A) \ \text{ ou } \ \text{non}(x \notin B) \text{ d'après les lois de De Morgan} \\ &\iff \text{non}(x \in A) \ \text{ ou } \ x \in B \\ &\iff x \in A \implies x \in B \end{aligned}$$

Donc $x \notin A\backslash B \iff x \in A \implies x \in B$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\boxed{\forall x, \big(x \notin A\backslash B \iff x \in A \implies x \in B\big)}$.

(2) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} A\backslash B = \varnothing &\iff \forall x, \big(x \notin A\backslash B\big) \text{ d'après la prop. 11 p. 15} \\ &\iff \forall x, \big(x \in A \implies x \in B\big) \text{ d'après (1)} \\ &\iff A \subseteq B \text{ par définition de l'inclusion} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A\backslash B = \varnothing \iff A \subseteq B}$ par transitivité de l'équivalence.

(3) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A\backslash B = B\backslash A$.
On sait que $B\backslash A \subseteq B$ par définition de $B\backslash A$.
Donc $A\backslash B \subseteq B$.
Donc $(A\backslash B) \cap B = A\backslash B$ car $A\backslash B$ est absorbant pour l'intersection avec ses sur-ensembles.
Or, $(A\backslash B) \cap B = \varnothing$ d'après la prop. 45 p. 57.
Donc $A\backslash B = \varnothing$.
Donc $A \subseteq B$ d'après (2).

Or, on a $A \backslash B = B \backslash A$ par hypothèse.
Donc $B \backslash A = \varnothing$.
Donc $B \subseteq A$ d'après (2).

Finalement, $A = B$ par antisymétrie de l'inclusion.
Donc si $A \backslash B = B \backslash A$, alors $A = B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $A = B$.
Alors $A \backslash B = A \backslash A = B \backslash A$ d'après le principe de Leibniz.
Donc $A \backslash B = B \backslash A$.
Donc si $A = B$, alors $A \backslash B = B \backslash A$.

Finalement, $\boxed{A \backslash B = B \backslash A \iff A = B}$.

(4)
Supposons que $A \subseteq A'$.
Alors $\{x \in A \mid x \notin B\} \subseteq \{x \in A' \mid x \notin B\}$ d'après la prop. 9 p. 13.
Donc $\boxed{A \backslash B \subseteq A' \backslash B}$ par définition de la différence ensembliste.

(5)
Supposons que $B \subseteq B'$.
On a donc $\forall x, \big(x \in B \implies x \in B'\big)$ par définition de l'inclusion.
Donc $\forall x, \big(x \notin B \impliedby x \notin B'\big)$ par contraposition.
Donc $\{x \in A \mid x \notin B\} \supseteq \{x \in A \mid x \notin B'\}$ d'après la prop. 8 p. 12.
Donc $\boxed{A \backslash B \supseteq A \backslash B'}$ par définition de la différence ensembliste.
CQFD.

Proposition 47 (Différence ensembliste et décomposition d'ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
On a alors :

(1) $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$, et ces deux ensembles sont disjoints.

(2) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.

(3) $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$

(4) $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.

(5) $A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$ et ces trois ensembles sont disjoints deux à deux.

Démonstration

1 Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a alors deux cas possible d'après le principe du tiers exclu :

ou bien $x \in B$, ou bien $x \notin B$.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $x \in B$.

On a donc $x \in A$ et $x \in B$.

Donc $x \in A \cap B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Plaçons-nous ensuite dans le cas où $x \notin B$.

On a donc $x \in A$ et $x \notin B$.

Donc $x \in A \backslash B$ par définition de $A \backslash B$.

Donc $x \in A \cap B$ ou $x \in A \backslash B$.

Donc $x \in (A \cap B) \cup (A \backslash B)$ d'après la prop. 25 p. 30.

Donc si $x \in A$, alors $x \in (A \cap B) \cup (A \backslash B)$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \implies x \in (A \cap B) \cup (A \backslash B)\big)$.

Donc $A \subseteq (A \cap B) \cup (A \backslash B)$.

$\boxed{\supseteq}$

On a $A \cap B \subseteq A$ car $A \cap B$ intersecte A.

On a $A \backslash B \subseteq A$ car $A \backslash B$ est par définition une partie de A.

Donc $(A \cap B) \cup (A \backslash B) \subseteq A \cup A$ par compatibilité de l'union avec l'inclusion.

Or, $A \cup A = A$ par idempotence de l'union.

Donc $(A \cap B) \cup (A \backslash B) \subseteq A$.

Finalement, $\boxed{A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)}$.

On sait que $A \backslash B$ et B sont disjoints d'après la prop. 45 p. 57.

Or, $A \cap B$ est une partie de B car $A \cap B$ est une intersection de B.

Donc $\boxed{A \backslash B \text{ et } A \cap B \text{ sont disjoints}}$.

2 Raisonnons par double implication :

$\boxed{\subseteq}$

On sait que $A \backslash (A \backslash B)$ est maximum pour l'inclusion parmi les parties de A qui sont disjoints avec $A \backslash B$ d'après la prop. 45 p. 57.

Or, $A \cap B$ est une partie de A, et est disjointe de $A \backslash B$ d'après 1.
Donc $A \cap B \subseteq A \backslash (A \backslash B)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A \backslash (A \backslash B)$.

On a donc $x \in A$ et $x \notin A \backslash B$ par définition de la différence ensembliste.

Donc $x \in A$ et $x \in A \implies x \in B$ d'après la prop. 46 p. 58.

Donc $x \in B$ par modus ponens.

Donc si $x \in A \backslash (A \backslash B)$, alors $x \in B$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \backslash (A \backslash B) \implies x \in B\big)$.
Donc $A \backslash (A \backslash B) \subseteq B$ par définition de l'inclusion.
De plus, $A \backslash (A \backslash B) \subseteq A$ par définition de la différence ensembliste.
Ainsi, $A \backslash (A \backslash B)$ est un sous-ensemble commun à A et à B.
Donc $A \backslash (A \backslash B) \subseteq A \cap B$ car $A \cap B$ est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

Finalement, $\boxed{A \backslash (A \backslash B) = A \cap B}$ par antisymétrie de l'inclusion.

3 On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A \backslash (A \cap B) &= A \backslash \Big(A \backslash (A \backslash B)\Big) \text{ d'après 2, puisque } A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \\ &= A \cap (A \backslash B) \text{ d'après 2} \\ &= A \backslash B \text{ car } A \backslash B \text{ est absorbant pour l'intersection avec ses sur-ensembles} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \backslash (A \cap B) = A \backslash B}$ par transitivité de l'égalité.

4

On sait que $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ d'après 1.
On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A \cup B &= \Big((A \backslash B) \cup (A \cap B)\Big) \cup B \\ &= (A \backslash B) \cup \Big((A \cap B) \cup B\Big) \text{ par associativité de l'union} \\ &= (A \backslash B) \cup \Big((A \cup B) \cap (B \cup B)\Big) \text{ par distributivité de l'union sur l'intersection} \\ &= (A \backslash B) \cup \Big((A \cup B) \cap B\Big) \text{ car } B \cup B = B \text{ par idempotence de l'union} \\ &= (A \backslash B) \cup B \text{ car } (A \cup B) \cap B = B \text{ car } B \subseteq A \cup B \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \cup B = (A \backslash B) \cup B}$ par transitivité de l'égalité.

5

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} A \cup B &= (A \backslash B) \cup B \text{ d'après } 4 \\ &= (A \backslash B) \cup \Big((A \cap B) \cup (B \backslash A)\Big) \text{ d'après } 1 \\ &= (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)}$.
CQFD.

Proposition 48 (Lois de De Morgan - Version différence ensembliste)

Soient A, B et C trois ensembles.
On a alors :

1. $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Démonstration

1

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in A \backslash (B \cup C) &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \cup C \text{ par définition de la différence ensembliste} \\ &\iff x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B \cup C) \\ &\iff x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B \text{ ou } x \in C) \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\ &\iff x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B) \text{ et } \text{non}(x \in C) \text{ d'après les lois de De Morgan} \\ &\iff x \in A \text{ et } x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B) \text{ et } \text{non}(x \in C) \text{ par idempotence de la conjonc} \\ &\iff \big(x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B)\big) \text{ et } \big(x \in A \text{ et } \text{non}(x \in C)\big) \\ &\iff \big(x \in A \text{ et } x \notin B\big) \text{ et } \big(x \in A \text{ et } x \notin C\big) \\ &\iff x \in A \backslash B \text{ et } x \in A \backslash C \text{ par définition de la différence ensembliste} \\ &\iff x \in (A \backslash B) \cap (A \backslash C) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \end{aligned}$$

Donc $x \in A\backslash(B \cup C) \iff x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A\backslash(B \cup C) \iff x \in (A\backslash B) \cap (A\backslash C)\big)$.

Donc $\boxed{A\backslash(B \cup C) = (A\backslash B) \cap (A\backslash C)}$ par définition de l'égalité.

2

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in A\backslash(B \cap C) &\iff x \in A \text{ et } x \notin B \cap C \text{ par définition de la différence ensembliste} \\
&\iff x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B \cap C) \\
&\iff x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B \text{ et } x \in C) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \in A \text{ et } \big(\text{non}(x \in B) \text{ ou } \text{non}(x \in C)\big) \text{ d'après les lois de De Morgan} \\
&\iff \big(x \in A \text{ et } \text{non}(x \in B)\big) \text{ ou } \big(x \in A \text{ et } \text{non}(x \in C)\big) \text{ par distributivité} \\
&\qquad \text{de la conjonction sur la disjonction} \\
&\iff \big(x \in A \text{ et } x \notin B\big) \text{ ou } \big(x \in A \text{ et } x \notin C\big) \\
&\iff x \in A\backslash B \text{ ou } x \in A\backslash C \text{ par définition de la différence ensembliste} \\
&\iff x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C) \text{ d'après la prop. 25 p. 30}
\end{aligned}$$

Donc $x \in A\backslash(B \cap C) \iff x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in A\backslash(B \cap C) \iff x \in (A\backslash B) \cup (A\backslash C)\big)$.

Donc $\boxed{A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Pour la petite histoire

Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

Proposition 49 (Différence ensembliste, union et intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$

② $(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$

Démonstration

① On a les égalités suivantes :
$(A \cup B)\backslash C = \{x \in A \cup B \mid x \notin C\} \underset{\text{43 p. 54}}{=} \{x \in A \mid x \notin C\} \cup \{x \in B \mid x \notin C\} = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)$.
Donc $\boxed{(A \cup B)\backslash C = (A\backslash C) \cup (B\backslash C)}$ par transitivité de l'égalité.

② On a les égalités suivantes :
$(A \cap B)\backslash C = \{x \in A \cap B \mid x \notin C\} \underset{\text{43 p. 54}}{=} \{x \in A \mid x \notin C\} \cap \{x \in B \mid x \notin C\} = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)$.
Donc $\boxed{(A \cap B)\backslash C = (A\backslash C) \cap (B\backslash C)}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

Proposition 50 (Différence ensembliste, singleton et paire)

Soient x et y deux ensembles.
Si $x \neq y$, alors $\{x\} = \{x; y\}\backslash\{y\}$.

Démonstration

Supposons que $x \neq y$.
Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \{x\}$.
Or, on a $\{x\} \subseteq \{x; y\}$ d'après la prop. 15 p. 18.
Donc $\forall t, \big(t \in \{x\} \implies t \in \{x; y\}\big)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, $z \in \{x\} \implies z \in \{x; y\}$.
Donc $z \in \{x; y\}$ par modus ponens.

De plus, comme $z \in \{x\}$, on a $z = x$ par définition de $\{x\}$.
Or, $x \neq y$ par hypothèse.
Donc $z \neq y$ d'après le principe de Leibniz.
Donc $z \notin \{y\}$ par définition de $\{y\}$.

Ainsi, on a $z \in \{x;y\}$ et $z \notin \{y\}$.

Donc $z \in \{x;y\}\backslash\{y\}$ par définition de la différence ensembliste.

Donc si $z \in \{x\}$, alors $z \in \{x;y\}\backslash\{y\}$

Donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \implies z \in \{x;y\}\backslash\{y\}\big)$.

Donc $\{x\} \subseteq \{x;y\}\backslash\{y\}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \{x;y\}\backslash\{y\}$.

Or, on a $\{x;y\}\backslash\{y\} \subseteq \{x;y\}$ par définition de la différence ensembliste.

Donc $\forall t, \big(t \in \{x;y\}\backslash\{y\} \implies t \in \{x;y\}\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, $z \in \{x;y\}\backslash\{y\} \implies z \in \{x;y\}$.

Donc $z \in \{x;y\}$ par modus ponens.

Donc $z = x$ ou $z = y$.

Mais $z \in \{x;y\}\backslash\{y\}$.

Donc $z \notin \{y\}$ par définition de la différence ensembliste.

Donc $z \neq y$ par définition de $\{y\}$.

Ainsi, on a $z = x$ ou $z = y$ et on a $z \neq y$.

Donc $z = x$.

Donc $z \in \{x\}$ par définition de $\{x\}$.

Donc si $z \in \{x;y\}\backslash\{y\}$, alors $z \in \{x\}$.

Donc $\forall z, \big(z \in \{x;y\}\backslash\{y\} \implies z \in \{x\}\big)$.

Donc $diff\{x;y\}\{y\} \subseteq \{x\}$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\{x\} = \{x;y\}\backslash\{y\}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Définition 14 (Complémentaire d'une partie d'un ensemble)

Soit E un ensemble. Soit F une partie de E.

On appelle **complémentaire** de F dans E l'ensemble $E\backslash F$.

On le note souvent $\complement_E(F)$.

Notation

Certains auteurs le notent $F^{\complement}$ ou $\overline{F}$, mais cela n'indique alors plus le sur-ensemble dans lequel on prend le complémentaire.

Proposition 51 (Involution du complémentaire)

Soit E un ensemble. Soit F un sous-ensemble de E.

On a alors $\complement_E\left(\complement_E(F)\right) = F$.
On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

Démonstration

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \complement_E\left(\complement_E(F)\right) &\iff x \in E \text{ et } x \notin \complement_E(F) \text{ par définition du complémentaire}\\
&\iff x \in E \text{ et non } \left(x \in \complement_E(F)\right)\\
&\iff x \in E \text{ et non } (x \in E \text{ et } x \notin F) \text{ par définition du complémentaire}\\
&\iff x \in E \text{ et } \left(\text{non}(x \in E) \text{ ou non}(x \notin F)\right) \text{ d'après les lois de De Morgan}\\
&\iff x \in E \text{ et } \left(x \notin E \text{ ou } x \in F\right)\\
&\iff \left(x \in E \text{ et } x \notin E\right) \text{ ou } \left(x \in E \text{ et } x \in F\right)\\
&\qquad \text{par distributivité de la conjonction sur la disjonction}\\
&\iff x \in E \text{ et } x \in F\\
&\qquad \text{car } x \in E \text{ et } x \notin E \text{ est forcément faux d'après le principe de non-contradiction}\\
&\iff x \in E \cap F \text{ d'après la prop. 35 p. 42}\\
&\iff x \in F \text{ car } E \cap F = F \text{ d'après la prop. 39 p. 49, car } F \subseteq E
\end{aligned}$$

Donc $x \in \complement_E\left(\complement_E(F)\right) \iff x \in F$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \left(x \in \complement_E\left(\complement_E(F)\right) \iff x \in F\right)$.
Donc $\boxed{\complement_E\left(\complement_E(F)\right) = F}$.
CQFD.

Proposition 52 (Différence ensembliste et complémentaire)

Soit E un ensemble. Soient F et G deux parties de E.

On a alors :

1. $F \backslash G = F \cap \complement_E(G)$
2. $F \backslash G = \big(\complement_E(G)\big) \setminus \big(\complement_E(F)\big)$

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F \backslash G$.

On a donc $x \in F$ et $x \notin G$ par définition de la différence ensembliste.

Or, F est une partie de E par définition de F.

Donc $F \subseteq E$.

Donc $\forall y, \big(y \in F \implies y \in E\big)$ par définition de l'inclusion.

En particulier, $x \in F \implies x \in E$.

Or, $x \in F$.

Donc $x \in E$ par modus ponens.

Ainsi, $x \in E$ et $x \notin G$.

Donc $x \in E \backslash G$ par définition de la différence ensembliste.

Donc $x \in \complement_E(G)$ par définition du complémentaire et car G est une partie de E par définition de G.

Ainsi $x \in F$ et $x \in \complement_E(G)$.

Donc $x \in F \cap \complement_E(G)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc si $x \in F \backslash G$, alors $x \in F \cap \complement_E(G)$.

Donc $\forall x, \big(x \in F \backslash G \implies x \in F \cap \complement_E(G)\big)$.

Donc $F \backslash G \subseteq F \cap \complement_E(G)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F \cap \complement_E(G)$.

On a donc $x \in F$ et $x \in \complement_E(G)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $x \in F$ et $x \in E \backslash G$ par définition du complémentaire.

Donc $x \in F$ et $x \in E$ et $x \notin G$ par définition de la différence ensembliste.

En particulier, $x \in F$ et $x \notin G$.

Donc $x \in F \backslash G$ par définition de la différence ensembliste.

Donc si $x \in F \cap \complement_E(G)$, alors $x \in F \backslash G$.

Donc $\forall x, \big(x \in F \cap \complement_E(G) \implies x \in F \backslash G\big)$.

Donc $F \cap \complement_E(G) \subseteq F \backslash G$.

Finalement, $\boxed{F \backslash G = F \cap \complement_E(G)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} F \backslash G &= F \cap \complement E(G) \text{ d'après } (1) \\ &= \complement_E\left(\complement_E(F)\right) \cap \complement_E(G) \quad \text{car } \complement_E\left(\complement_E(F)\right) = F \text{ car le passage au complémentaire est involutif} \\ &= \complement_E(G) \cap \complement_E\left(\complement_E(F)\right) \quad \text{car l'intersection est commutative} \\ &= \left(\complement_E(G)\right) \setminus \left(\complement_E(F)\right) \text{ d'après } (1) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{F \backslash G = \left(\complement_E(G)\right) \setminus \left(\complement_E(F)\right)}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

2.5 Propriétés stables par intersection et ensembles engendrés

Définition 15 (Propriété stable par intersection)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

On dit que P est **stable par intersection** si et seulement si pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide**, si $\forall A \in \mathcal{E}, P(A)$, alors $P\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Proposition 53 (Propriétés stables et intersection de deux ensembles)

Soit P une assertion **stable par intersection**. Soient A et B deux ensembles.

Si $P(A)$ et si $P(B)$, alors $P(A \cap B)$.

Démonstration

Supposons que $P(A)$ et $P(B)$.

Posons $\mathcal{E} := \{A; B\}$.

Soit $C \in \mathcal{E}$.

On a donc $C \in \{A; B\}$.

Donc $C = A$ ou $C = B$.

Si $C = A$, alors comme on a $P(A)$, on a $P(C)$.

Si $C = B$, alors comme on a $P(B)$, on a $P(C)$.

Dans les deux cas, on a bien $P(C)$.

Donc $\forall C \in \mathcal{E}, P(C)$.

Or, P est stable par intersection par hypothèse.

Donc $P\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Or, $\mathcal{E} = \{A; B\}$ par définition.

Donc $\bigcap \mathcal{E} = \bigcap \{A; B\} = A \cap B$ par définition.

Donc $\boxed{P(A \cap B)}$.

CQFD.

Proposition 54 (« *Est un sur-ensemble de* » est stable par intersection)

Soit A un ensemble.

Alors la propriété « *est un sur-ensemble de* A » est stable par intersection.

Autrement dit, pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide** tel que $\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B$, on a $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$.

Démonstration

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble **non vide**.

Supposons que $\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B$.

Montrons que $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

Montrons que $x \in \bigcap \mathcal{E}$.

Soit $B \in \mathcal{E}$.

On a alors $A \subseteq B$ par hypothèse.

Donc $x \in B$.

Donc $\forall B \in \mathcal{E}, x \in B$.

Donc $x \in \bigcap \mathcal{E}$ d'après la prop. 32 p. 39.

Donc si $x \in A$, alors, $x \in \bigcap \mathcal{E}$.

Donc $\forall x, (x \in A \implies x \in \bigcap \mathcal{E})$.

Donc $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$.

Donc $\boxed{\forall \mathcal{E} \neq \varnothing, \Big(\big(\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B\big) \implies A \subseteq \bigcap \mathcal{E}\Big)}$.

CQFD.

Proposition 55 (Conjonction de deux propriétés stables)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.

Si P et Q est sont stables par intersection, alors leur conjonction aussi.

Démonstration

Supposons que P et Q sont stables par intersection.

Soit R leur conjonction.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, R(A)$.

Ainsi, par définition de R, on a $\forall A \in \mathcal{E}, \big(P(A) \text{ et } Q(A)\big)$.

En particulier, on a $\forall A \in \mathcal{E}, P(A)$ et $\forall A \in \mathcal{E}, Q(A)$.

Or, P et Q sont stables par intersection.

Donc $P\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ et $Q\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $R\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ par définition de R.

Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, R(A)$, alors $R\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing \left(\big(\forall A \in \mathcal{E}, R(A)\big) \implies R\left(\bigcap \mathcal{E}\right)\right)$.

Donc R est stable par intersection.

Donc $\boxed{\text{la conjonction de } P \text{ et de } Q \text{ est stable par intersection}}$.

CQFD.

Proposition 56 (Futures propriétés de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.

Soit A un ensemble.

Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.

Soit un tel E.

Posons $\mathcal{E}_E = \left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$, qui est non vide puisque $E \in \mathcal{E}_E$, puis $\mathcal{V}_E := \bigcap \mathcal{E}_E$.

On a alors :

1. $\mathcal{V}_E \in \mathcal{E}_E$.

Autrement dit, $A \subseteq \mathcal{V}_E \subseteq E$ et $P(\mathcal{V}_E)$.

(2) Pour tout $B \in \mathcal{E}_E$, on a $\mathcal{V}_E \subseteq B$.
Autrement dit, $\mathcal{V}_E$ est minimum pour l'inclusion parmi les éléments de $\mathcal{E}_E$.
Dit encore autrement, $\mathcal{V}_E$ est minimum pour l'inclusion parmi les parties de E qui sont des sur-ensembles de A et qui vérifient P.

Démonstration

(1) Pour tout ensemble C, posons $Q(C)$ l'assertion « $A \subseteq C$ ».
On obtient alors Q une assertion dépendant de paramètres, qui est stable par intersection d'après la prop. 54 p. 70.
Soit R la conjonction de P et de Q.
Par hypothèse P est stable par intersection donc R l'est aussi d'après la prop. 55 p. 71.
Or $\forall B \in \mathcal{E}_E, \big(P(B) \text{ et } A \subseteq B\big)$ par définition de $\mathcal{E}_E$.
Donc $\forall B \in \mathcal{E}_E, \big(P(B) \text{ et } Q(B)\big)$ par définition de Q.
Donc $\forall B \in \mathcal{E}_E, R(B)$ par définition de R.
Or, on a dit que R est stable par intersection.
Donc $R\left(\bigcap \mathcal{E}_E\right)$, et donc $R(\mathcal{V}_E)$ par définition de $\mathcal{V}_E$.
Donc $P(\mathcal{V}_E)$ et $Q(\mathcal{V}_E)$ par définition de R.
Donc $P(\mathcal{V}_E)$ et $A \subseteq \mathcal{V}_E$ par définition de Q.
Or, $\mathcal{V}_E = \bigcap \mathcal{E}_E$ et $E \in \mathcal{E}_E$, donc $\mathcal{V}_E \subseteq E$ d'après la prop. 34 p. 41.

Ainsi, on a $\mathcal{V}_E \subseteq E$, ainsi que $P(\mathcal{V}_E)$ et $A \subseteq \mathcal{V}_E$.
Donc $\mathcal{V}_E \in \left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$.
Donc $\boxed{\mathcal{V}_E \in \mathcal{E}_E}$ par définition de $\mathcal{E}_E$.

(2)

Soit $B \in \mathcal{E}_E$.
Alors $\bigcap \mathcal{E}_E \subseteq B$ d'après la prop. 34 p. 41.
Donc $\mathcal{V}_E \subseteq B$ par définition de $\mathcal{V}_E$.

Donc $\boxed{\forall B \in \mathcal{E}_E, \mathcal{V}_E \subseteq B}$.
CQFD.

Proposition 57 (L'engendré ne dépend pas d'un sur-ensemble)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.
Soit A un ensemble.
Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.
Soit un tel E.

Alors pour tout sur-ensemble F de A tel que $P(F)$, on a

$$\bigcap\left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\} = \bigcap\left\{B \subseteq F \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$$

Autrement dit, l'ensemble $\bigcap\left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$ ne dépend pas de E.

Démonstration

Pour tout sur-ensemble G de A tel que $P(G)$, posons $\mathcal{E}_G := \left\{B \subseteq G \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$.
Cet ensemble est alors non vide puisque $G \in \mathcal{E}_G$, donc on peut considérer son intersection.
Alors pour tout sur-ensemble G de A tel que $P(G)$, posons $\mathcal{V}_G := \bigcap \mathcal{E}_G$.
Montrons le petit lemme suivant :

Pour tout sur-ensembles G et H de A tels que $P(G)$ et $P(H)$, on a $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H = \mathcal{V}_G$.

On a $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \subseteq \mathcal{V}_G$ d'après la prop. 36 p. 44.
Or, $\mathcal{V}_G \in \mathcal{E}_G$ d'après la prop. 56 p. 71, donc $\mathcal{V}_G \subseteq G$ par définition de $\mathcal{E}_G$.
Donc comme $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \subseteq \mathcal{V}_G$ et $\mathcal{V}_G \subseteq G$, on a $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \subseteq G$ par transitivité de l'inclusion.

On a $\mathcal{V}_G \in \mathcal{E}_G$ d'après la prop. 56 p. 71, donc $A \subseteq \mathcal{V}_G$ par définition de $\mathcal{E}_G$.
On a $\mathcal{V}_H \in \mathcal{E}_H$ d'après la prop. 56 p. 71, donc $A \subseteq \mathcal{V}_H$ par définition de $\mathcal{E}_H$.
Ainsi, on a $A \subseteq \mathcal{V}_G$ et $A \subseteq \mathcal{V}_H$.
Donc $A \subseteq \mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H$ d'après la prop. 36 p. 44.

On a $\mathcal{V}_G \in \mathcal{E}_G$ d'après la prop. 56 p. 71, donc $P(\mathcal{V}_G)$ par définition de $\mathcal{E}_G$.
On a $\mathcal{V}_H \in \mathcal{E}_H$ d'après la prop. 56 p. 71, donc $P(\mathcal{V}_H)$ par définition de $\mathcal{E}_H$.
Ainsi, on a $P(\mathcal{V}_G)$ et $P(\mathcal{V}_H)$.
Donc $P(\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H)$ d'après la prop. 53 p. 69 puisque P est stable par intersection par définition.

Ainsi, on a $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \subseteq G$, ainsi que $A \subseteq \mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H$ et $P(\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H)$.

Donc $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \in \mathcal{E}_G$ par définition de $\mathcal{E}_G$.

Or, $\forall B \in \mathcal{E}_G, \mathcal{V}_G \subseteq B$.
En particulier, $\mathcal{V}_G \subseteq \mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H$.
Mais on a dit que $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H \subseteq \mathcal{V}_G$.
Donc $\mathcal{V}_G \cap \mathcal{V}_H = \mathcal{V}_G$ par antisymétrie de l'inclusion.

Soit F un sur-ensemble de A tel que $P(F)$.
On a alors $\mathcal{V}_E \cap \mathcal{V}_F = \mathcal{V}_E$ d'après le lemme.
On a aussi $\mathcal{V}_F \cap \mathcal{V}_E = \mathcal{V}_F$ toujours d'après le lemme.
Or, $\mathcal{V}_E \cap \mathcal{V}_F = \mathcal{V}_F \cap \mathcal{V}_E$ par commutativité de $\cap$.
Donc $\boxed{\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_F}$.
CQFD.

Définition 16 (Ensemble engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.
Soit A un ensemble.
Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.
Soit un tel E.

La proposition 57 page 73 nous indique que $\bigcap \left\{ B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B) \right\}$ ne dépend pas de E.
On appelle alors P-**engendré par** A cet ensemble. On le note $\langle A \rangle_P$.

Proposition 58 (Propriétés de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, qui est **stable par intersection**.
Soit A un ensemble tel qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A vérifiant $P(E)$.

On a alors :

1. $A \subseteq \langle A \rangle_P$ et $P\big(\langle A \rangle_P\big)$

2. Pour tout ensemble B, si $A \subseteq B$ et $P(B)$, alors $\langle A \rangle_P \subseteq B$.
   Autrement dit, $\langle A \rangle_P$ est le plus petit ensemble pour l'inclusion parmi les sur-ensembles de A qui vérifient P.

3. En particulier, si $P(A)$ alors $\langle A \rangle_P = A$.

Démonstration

1

Soit E un sur-ensemble de A tel que $P(E)$.

Alors par définition, on a $\langle A \rangle_P = \bigcap \{B \subseteq E \mid A \subseteq B \text{ et } P(B)\}$.

De plus, on a $\langle A \rangle_P \in \{B \subseteq E \mid A \subseteq B \text{ et } P(B)\}$ d'après la prop. 56 p. 71.

En particulier, on a $\boxed{A \subseteq \langle A \rangle_P \text{ et } P\big(\langle A \rangle_P\big)}$.

2

Soit B un ensemble.

Supposons que $A \subseteq B$ et $P(B)$.

Alors par définition, on a $\langle A \rangle_P = \bigcap \{C \subseteq B \mid A \subseteq C \text{ et } P(C)\}$.

On a $B \subseteq B$, ainsi que $A \subseteq B$ et $P(B)$ par définition de B.

Donc $B \in \{C \subseteq B \mid A \subseteq C \text{ et } P(C)\}$.

Donc $\bigcap \{C \subseteq B \mid A \subseteq C \text{ et } P(C)\} \subseteq B$ d'après la prop. 34 p. 41.

Donc $\langle A \rangle_P \subseteq B$ par définition de $\langle A \rangle_P$.

Donc si $A \subseteq B$ et $P(B)$, alors $\langle A \rangle_P \subseteq B$.

Donc $\boxed{\forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \langle A \rangle_P \subseteq B\Big)}$.

3 Supposons que $P(A)$.

On a $A \subseteq A$ par réflexivité de l'inclusion.

Ainsi $A \subseteq A$ et $P(A)$.

Donc $\langle A \rangle_P \subseteq A$ d'après 2.

Mais $A \subseteq \langle A \rangle_P$ d'après 1.

Donc $\boxed{\langle A \rangle_P = A}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 59 (Caractérisation de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, qui est **stable par intersection**.

Soit A un ensemble tel qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A vérifiant $P(E)$.

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble.

On a alors l'équivalence suivante qui caractérise $\langle A \rangle_P$:

$$\mathcal{V} = \langle A \rangle_P \iff \begin{cases} 1\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } \ 2\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big) \end{cases}$$

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{V} = \langle A \rangle_P$.
On a $A \subseteq \langle A \rangle_P$ et $P\big(\langle A \rangle_P\big)$ d'après la prop. 58 p. 74.
Donc $A \subseteq \mathcal{V}$ et $P(\mathcal{V})$.

On a $\forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \langle A \rangle_P \subseteq B\Big)$ d'après la prop. 58 p. 74.
Donc $\forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big)$.

Ainsi, si $\mathcal{V} = \langle A \rangle_P$, alors $\begin{cases} 1\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } 2\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big) \end{cases}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\begin{cases} 1\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } 2\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big) \end{cases}$.

On a $A \subseteq \mathcal{V}$ et $P(\mathcal{V})$ d'après 1.
Donc $\langle A \rangle_P \subseteq \mathcal{V}$ d'après la prop. 58 p. 74.
On a $A \subseteq \langle A \rangle_P$ et $P\big(\langle A \rangle_P\big)$ d'après la prop. 58 p. 74.
Donc $\mathcal{V} \subseteq \langle A \rangle_P$ d'après 2.

Ainsi, on a $\mathcal{V} = \langle A \rangle_P$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $\begin{cases} 1\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } 2\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big) \end{cases}$, alors $\mathcal{V} = \langle A \rangle_P$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{V} = \langle A \rangle_P \iff \begin{cases} 1\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } 2\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B\Big) \end{cases}}$.

CQFD.

Proposition 60 (Engendré et inclusion)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres, qui sont **stables par intersection**.
Soient A et B deux ensembles.
Supposons qu'il existe au moins deux sur-ensembles E et F de A tels que $P(A)$ et $Q(A)$.
Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble G de B tel que $P(G)$.

On a alors :

1. Si $\forall C, \big(P(C) \implies Q(C)\big)$, alors $\langle A\rangle_P \supseteq \langle A\rangle_Q$.
2. Si $A \subseteq B$, alors $\langle A\rangle_P \subseteq \langle B\rangle_P$.

Démonstration

1. Supposons que $\forall C, \big(P(C) \implies Q(C)\big)$.
En particulier, $P\big(\langle A\rangle_P\big) \implies Q\big(\langle A\rangle_P\big)$.
On sait que $P\big(\langle A\rangle_P\big)$ d'après la prop. 59 p. 75.
Donc $Q\big(\langle A\rangle_P\big)$ par modus ponens.
Or, $A \subseteq \langle A\rangle_P$ d'après la prop. 59 p. 75.
Donc $A \subseteq \langle A\rangle_P$ et $Q\big(\langle A\rangle_P\big)$.
Donc $\boxed{\langle A\rangle_Q \subseteq \langle A\rangle_P}$ par minimalité d'après la prop. 59 p. 75.

2. Supposons que $A \subseteq B$.
On a $B \subseteq \langle B\rangle_P$ d'après la prop. 59 p. 75.
Donc $A \subseteq \langle B\rangle_P$.
De plus, on a $P\big(\langle B\rangle_P\big)$ d'après la prop. 59 p. 75.
Ainsi, on a $A \subseteq \langle B\rangle_P$ et $P\big(\langle B\rangle_P\big)$.
Donc $\boxed{\langle A\rangle_P \subseteq \langle B\rangle_P}$ par minimalité d'après la prop. 59 p. 75.
CQFD.

Chapitre 2

Relations binaires

Note de l'auteur

Ce chapitre a pour but de poser les bases pour les relations d'équivalences et d'ordre, mais surtout celles des applications. Beaucoup de ce qui est traité dans ce chapitre aurait pu directement être mis en place pour les applications, mais l'auteur a préféré le faire dans le cadre plus général des relations binaires, afin de mieux comprendre ce qui fait que telle ou telle proposition est vraie ou non.

Sommaire

1 Couples et produits cartésiens 80

1.1 Couples 80

1.2 Produits cartésiens 84

2 Relations binaires 98

2.1 Généralités 98

2.2 Domaine et image d'une relation binaire 108

2.3 Composition de relations binaires 115

2.4 Transposée d'une relation binaire 122

2.5 Image directe par une relation binaire 129

2.6 Image réciproque par une relation binaire 138

2.7 Union de relations binaires 144

2.8 Intersection de relations binaires 149

2.9 Restrictions et prolongements de relations binaires 153

1 Couples et produits cartésiens

1.1 Couples

Définition 17 (Couple)

• Pour tout ensemble x et y, on notera $(x;y)$ l'ensemble $\big\{\{x\};\{x;y\}\big\}$.

• Soit c un ensemble. On dit que c est un **couple** si et seulement s'il existe au moins deux ensembles x et y tels que $c=(x;y)$.

Pour la petite histoire

• **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980) est un mathématicien polonais.

• Les recherches de Kuratowski portaient principalement sur la topologie abstraite et les structures d'espace métrique. Avec Alfred Tarski et Wacław Sierpiński, il a développé la théorie des espaces polonais (nommés ainsi en hommage au groupe de mathématiciens polonais à l'origine de cette théorie).

• C'est à lui que l'on doit cette définition des couples.

Proposition 61 (Réunion d'un couple)

Soient x et y deux ensembles.
On a alors $\bigcup(x;y)=\{x;y\}$.

Démonstration

On a par définition $(x;y)=\big\{\{x\};\{x;y\}\big\}$.
Donc $\bigcup(x;y)=\bigcup\big\{\{x\};\{x;y\}\big\}=\{x\}\cup\{x;y\}$ par définition de l'union.
Donc $\bigcup(x;y)=\{x\}\cup\{x;y\}$ par transitivité de l'égalité.
Mais $\{x\}\subseteq\{x;y\}$ d'après la prop. 15 p. 18.
Donc $\{x\}\cup\{x;y\}=\{x;y\}$ car $\{x\}$ est neutre pour l'union avec ses sur-ensembles.

Donc $\boxed{\bigcup(x;y) = \{x;y\}}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

Proposition 62 (Couples et égalité)

Soient x, y, a et b quatre ensembles.
On a l'équivalence suivante :
$(x;y) = (a;b) \iff (x = a \text{ et } y = b)$

Démonstration

La démonstration usuelle est pénible et fastidieuse. Nous allons donc appliquer une autre méthode, dite « *méthode de Lyra* » qui permet de gagner du temps.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(x;y) = (a;b)$.
On a donc $\bigcup(x;y) = \bigcup(a;b)$.
Donc $\{x;y\} \underset{\text{61 p. 80}}{=} \bigcup(x;y) = \bigcup(a;b) \underset{\text{61 p. 80}}{=} \{a;b\}$.
Donc $\{x;y\} = \{a;b\}$.
Notons $(\star)$ cette dernière assertion.

Commençons par démontrer le lemme suivant :

> Pour tout ensembles c, d, z et t, on a la propriété $P(c;d;z;t)$ définie par $\big[\{c;d\} = \{z;t\} \text{ et } c = d\big] \implies c = d = z = t$

Supposons donc que $\{c;d\} = \{z;t\}$ et $c = d$.
On a alors $\{c;d\} = \{c;c\} = \{c\}$ d'après le principe de Leibniz et la définition de $\{c\}$.
Donc $\{c;d\} = \{c\}$ par transitivité de l'égalité.
Or, $\{c;d\} = \{z;t\}$ par hypothèse.
Donc $\{z;t\} = \{c\}$ par transitivité de l'égalité.
Or, $z \in \{z;t\}$ et $t \in \{z;t\}$ par définition de $\{z;t\}$.
Donc $z \in \{c\}$ et $t \in \{c\}$.
Donc $z = c$ et $t = c$ par définition de $\{c\}$.
Ainsi, on a $c = d$ et $z = c$ et $t = c$.
Donc $\boxed{c = d = z = t}$ par transitivité de l'égalité.

On a donc bien démontré le lemme : pour tout ensemble c, d, z et t, on a $P(c;d;z;t)$.

Deux cas se présentent à nous : ou bien $x = y$, ou bien $x \neq y$, d'après le principe du tiers-exclu.

• Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $x = y$.

On a donc $\{x; y\} = \{a; b\}$ d'après $(\star)$, et $x = y$.

Or, on a $P(x; y; a; b)$ d'après le lemme.

Donc $x = y = a = b$ par modus ponens.

En particulier, on $x = a$ et $y = b$ par transitivité de l'égalité.

• Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \neq y$.

Supposons que $a = b$.

On a donc $\{x; y\} = \{a; b\}$ d'après $(\star)$ et $a = b$.

Or, on a $P(a; b; x; y)$ d'après le lemme.

Donc $a = b = x = y$ par modus ponens.

En particulier, on a $x = y$.

Donc $a = b \implies x = y$.

Donc $x \neq y \implies a \neq b$ par contraposition.

Or, $x \neq y$ par hypothèse.

Donc $a \neq b$ par modus ponens.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\big\{\{x\}\big\} &= \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\} \setminus \big\{\{x; y\}\big\} \text{ d'après la prop. 50 p. 65.} \\
&= (x; y) \setminus \big\{\{x; y\}\big\} \text{ par définition de } (x; y) \\
&= (a; b) \setminus \big\{\{x; y\}\big\} \text{ car par hypothèse, on a } (x; y) = (a; b) \\
&= (a; b) \setminus \big\{\{a; b\}\big\} \text{ car on a } \{x; y\} = \{a; b\} \text{ d'après } (\star) \\
&= \big\{\{a\}; \{a; b\}\big\} \setminus \big\{\{a; b\}\big\} \text{ par définition de } (a; b) \\
&= \big\{\{a\}\big\} \text{ d'après la prop. 50 p. 65}
\end{aligned}$$

Donc $\big\{\{x\}\big\} = \big\{\{a\}\big\}$.

Donc $\{x\} \underset{28 \text{ p. } 36}{=} \bigcup \big\{\{x\}\big\} = \bigcup \big\{\{a\}\big\} \underset{28 \text{ p. } 36}{=} \{a\}$.

Donc $\{x\} = \{a\}$ par transitivité de l'égalité.

Donc $x \underset{28 \text{ p. } 36}{=} \bigcup \{x\} = \bigcup \{a\} \underset{28 \text{ p. } 36}{=} a$.

Donc $x = a$ par transitivité de l'égalité.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\{y\} &= \{x; y\} \setminus \{x\} \text{ d'après la prop. 50 p. 65} \\
&= \{a; b\} \setminus \{x\} \text{ car on a } \{x; y\} = \{a; b\} \text{ d'après } (\star)
\end{aligned}$$

$= \{a;b\}\backslash\{a\}$ car $x = a$

$= \{b\}$ d'après la prop. 50 p. 65

Donc $\{y\} = \{b\}$ par transitivité de l'égalité.

Donc $y \underset{28\text{ p. }36}{=} \bigcup\{y\} = \bigcup\{b\} \underset{28\text{ p. }36}{=} b$.

Donc $y = b$ par transitivité de l'égalité.

Finalement, $x = a$ et $y = b$.

Dans les deux cas, on a bien $x = a$ et $y = b$.

Donc si $(x;y) = (a;b)$, alors $x = a$ et $y = b$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x = a$ et $y = b$.

On a alors $(x;y) = (a;y) = (a;b)$ d'après le principe de Leibniz.

Donc $(x;y) = (a;b)$ par transitivité de l'égalité.

Donc si $x = a$ et $y = b$, alors $(x;y) = (a;b)$.

Finalement, $\boxed{(x;y) = (a;b) \iff \big(x = a \text{ et } y = b\big)}$.

CQFD.

Proposition 63 (Existence d'au moins un couple)

Il existe au moins un couple.

Démonstration

Il suffit de considérer $(\varnothing;\varnothing)$ ou bien $\big(\varnothing;\{\varnothing\}\big)$.

CQFD.

Définition 18 (Composantes d'un couple)

Soit c un couple.

Il existe donc par définition au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x;y)$.

D'après la proposition 62 page 81, de tels x et y sont uniques.

On dira alors que x est la **première composante** de c, et l'on notera $x = \pi_g(c)$.

On dira que y est la **deuxième composante** de c, et l'on notera $y = \pi_d(c)$.

1.2 Produits cartésiens

Proposition 64 (Sur-ensemble des couples)

Soient x, y, A et B quatre ensembles.

Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $(x;y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$.

Démonstration

Supposons que $x \in A$ et $y \in B$.

On a donc $\{x\} \subseteq A$ d'après la prop. 16 p. 19.
Or, $A \subseteq A \cup B$ car $A \cup B$ est une union de A.
Donc $\{x\} \subseteq A \cup B$ par transitivité de l'inclusion.
Donc $\{x\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$ par définition de $\mathscr{P}(A \cup B)$.
Donc $\big\{\{x\}\big\} \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ d'après la prop. 16 p. 19.

De même, on a $\{x\} \subseteq A$ et $\{y\} \subseteq B$ d'après la prop. 16 p. 19.
En particulier, on a $\{x\} \cup \{y\} \subseteq A \cup B$ par compatibilité de l'union avec l'inclusion.
Or, $\{x\} \cup \{y\} = \{x;y\}$ d'après la prop. 29 p. 37.
Donc $\{x;y\} \subseteq A \cup B$.
Donc $\{x;y\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$ par définition de $\mathscr{P}(A \cup B)$.
Donc $\big\{\{x;y\}\big\} \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Ainsi, on a $\{x\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$ et $\{x;y\} \in \mathscr{P}(A \cup B)$.
Donc $\big\{\{x\};\{x;y\}\big\} \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$ d'après la prop. 16 p. 19.
Or, $(x;y) = \big\{\{x\};\{x;y\}\big\}$ par définition.
Donc $(x;y) \subseteq \mathscr{P}(A \cup B)$.
Donc $\boxed{(x;y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))}$ par définition de l'ensemble des parties.

Définition 19 (Produit cartésien de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble
$\{c \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = (a;b)\}$.
On le note $A \times B$.

Le produit $A \times A$ sera parfois noté A^2.

Pour la petite histoire

• **René Descartes** (1596-1650) est un mathématicien, physicien et philosophe français.

• Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne. Il reste célèbre pour avoir exprimé dans son Discours de la méthode, le « *Je pense, donc je suis* » fondant ainsi le système des sciences sur le sujet connaissant face au monde qu'il se représente. En physique, il a apporté une contribution à l'optique et est considéré comme l'un des fondateurs du mécanisme. En mathématiques, il est à l'origine de la géométrie analytique.

• L'adjectif « *cartésien* » dans le nom « *produit cartésien* » provient de son propre nom, car il est l'un des premiers a avoir formulé la notion de coordonnées, que l'on formalise aujourd'hui à l'aide du produit cartésien de deux ensembles.

Proposition 65 (Caractérisation du produit cartésien)

Soient E, F, x et y quatre ensembles.
On a alors $(x;y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

supposons que $(x;y) \in E \times F$.
On a donc $(x;y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$ et il existe au moins deux ensembles $e \in E$ et $f \in F$ tels que $(x;y) = (e;f)$ par définition du produit cartésien.
En particulier, on a $(x;y) = (e;f)$.
Donc $x = e$ et $y = f$ d'après la prop. 62 p. 81.
Donc $x \in E$ et $y \in F$.

Donc si $(x;y) \in E \times F$, alors $x \in E$ et $y \in F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in E$ et $y \in F$.

On a alors $(x;y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E \cup F))$ d'après la prop. 64 p. 84.

En prenant $e := x$ et $f := y$, il existe $e \in E$ et $f \in F$ tels que $(x;y) = (e;f)$.

Donc $(x;y) \in E \times F$ par définition du produit cartésien.

Donc si $x \in E$ et $y \in F$, alors $(x;y) \in E \times F$.

Finalement, $\boxed{(x;y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F)}$.

CQFD.

Proposition 66 (Produit cartésien et vide)

Soient A et B deux ensembles.

$A \times B \neq \varnothing \iff (A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing)$.

Ou $A \times B = \varnothing \iff (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$ de manière équivalente.

En particulier, on a $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$, que l'on peut aussi écrire $\varnothing^2 = \varnothing$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \times B \neq \varnothing$.

Il existe donc $c \in A \times B$.

Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $c = (a;b)$ par définition du produit cartésien.

En particulier, il existe $a \in A$ et $b \in B$.

Donc $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$.

Donc si $A \times B \neq \varnothing$, alors $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$.

Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$.

Alors $(a;b) \in A \times B$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $A \times B \neq \varnothing$.

Donc si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, alors $A \times B \neq \varnothing$.

Finalement, $\boxed{A \times B \neq \varnothing \iff (A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing)}$.
CQFD.

Proposition 67 (Produit cartésien et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, B, A' et B' quatre ensembles.
On a alors :

1. Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \times B \subseteq A' \times B'$.
   On dit que le produit cartésien est **compatible** avec l'inclusion.

2. Si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, alors $\big(A \times B \subseteq A' \times B' \implies (A \subseteq A' \text{ et } B \subseteq B')\big)$.

Démonstration

1. Supposons que $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$.

Soit z un ensemble.
Supposons que $z \in A \times B$.
Il existe donc $a \in A$ et $b \in B$ tels que $z = (a; b)$ par définition du produit cartésien.

On sait que $A \subseteq A'$ par hypothèse.
Donc $\forall x, \big(x \in A \implies x \in A'\big)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, $a \in A \implies a \in A'$.
Donc $a \in A'$ par modus ponens.

De même, on sait que $B \subseteq B'$ par hypothèse.
Donc $\forall x, \big(x \in B \implies x \in B'\big)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, $b \in B \implies b \in B'$.
Donc $b \in B'$ par modus ponens.

Ainsi, $z = (a; b)$ et $a \in A'$ et $b \in B'$.
Donc $z \in A' \times B'$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc si $z \in A \times B$, alors $z \in A' \times B'$.
Donc $\forall z, \big(z \in A \times B \implies z \in A' \times B'\big)$.

Donc $\boxed{A \times B \subseteq A' \times B'}$ par définition de l'inclusion.

2

Supposons que $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$.
Supposons que $A \times B \subseteq A' \times B'$.
Montrons tout d'abord que $A \subseteq A'$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.
On sait que B est non vide par hypothèse.
Il existe donc au moins un ensemble $b \in B$.
Soit un tel b.
On a donc $x \in A$ et $b \in B$.
Donc $(x; b) \in A \times B$ d'après la prop. 65 p. 85.
Or, $A \times B \subseteq A' \times B'$ par hypothèse.
Donc $(x; b) \in A' \times B'$.
Donc $x \in A'$ et $b \in B'$ d'après la prop. 65 p. 85.
En particulier, $x \in A'$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in A'$.

Donc $\forall x, (x \in A \implies x \in A')$.
Donc $\boxed{A \subseteq A'}$ par définition de l'inclusion.

Montrons à présent que $B \subseteq B'$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in B$.
On sait que A est non vide par hypothèse.
Il existe donc au moins un ensemble $a \in A$.
Soit un tel a.
On a donc $a \in A$ et $y \in B$.
Donc $(a; y) \in A \times B$ d'après la prop. 65 p. 85.
Or, $A \times B \subseteq A' \times B'$ par hypothèse.
Donc $(a; y) \in A' \times B'$.
Donc $a \in A'$ et $y \in B'$ d'après la prop. 65 p. 85.
En particulier, $y \in B'$.

Donc si $y \in B$, alors $y \in B'$.

Donc $\forall y, (y \in B \implies y \in B')$.
Donc $\boxed{B \subseteq B'}$ par définition de l'inclusion.
CQFD.

Proposition 68 (Egalité entre deux produits cartésiens)

Soient A, B, C et D quatre ensembles **non vides**.
Alors $A \times B = C \times D \iff \big(A = C \text{ et } B = D\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \times B = C \times D$.
En particulier, on a donc $A \times B \subseteq C \times D$.
Donc $A \subseteq C$ et $B \subseteq D$ d'après la prop. 67 p. 87.
De même, on a $A \times B \supseteq C \times D$.
Donc $A \supseteq C$ et $B \supseteq D$ d'après la prop. 67 p. 87.
Donc $A = C$ et $B = D$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $A \times B = C \times D$, alors $A = C$ et $B = D$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Réciproque, si $A = C$ et $B = D$, alors $A \times B = C \times D$ d'après le principe de Leibniz.
Donc $\boxed{A \times B = C \times D \iff \big(A = C \text{ et } B = D\big)}$.
CQFD.

Proposition 69 (Distributivité du produit cartésien sur l'union)

Soient E, F, E' et F' quatre ensembles.
On a alors :

1. $(E \times F) \cup (E' \times F) = (E \cup E') \times F$
   On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur l'union.

2. $(E \times F) \cup (E \times F') = E \times (F \cup F')$
   On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur l'union.

Démonstration

1. Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

On sait que $E \subseteq E \cup E'$ car $E \cup E'$ est une union de E.
On sait que $F \subseteq F$ car l'inclusion est réflexive.
On a donc $E \times F \subseteq (E \cup E') \times F$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.

De même, on sait que $E' \subseteq E \cup E'$ car $E \cup E'$ est une union de E'.
On sait que $F \subseteq F$ car l'inclusion est réflexive.
On a donc $E' \times F \subseteq (E \cup E') \times F$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.

Ainsi, on a $E \times F \subseteq (E \cup E') \times F$ et $E' \times F \subseteq (E \cup E') \times F$.
Donc $(E \cup E') \times F$ est un sur-ensemble commun à $E \times F$ et à $E' \times F$.
Donc $(E \times F) \cup (E' \times F) \subseteq (E \cup E') \times F$ car $(E \times F) \cup (E' \times F)$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à $E \times F$ et à $E' \times F$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in (E \cup E') \times F$.
Il existe donc au moins deux ensembles $x \in E \cup E'$ et $y \in F$ tels que $c = (x; y)$.
Soient de tels x et y.
On a donc $x \in E \cup E'$.
Donc $x \in E$ ou $x \in E'$ d'après la prop. 25 p. 30.

Plaçons-nous dans le cas où $x \in E$.
On a donc $x \in E$ et $y \in F$.
Donc $(x; y) \in E \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in E \times F$ puisque $c = (x; y)$.
Or, $E \times F \subseteq (E \times F) \cup (E' \times F)$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $c \in (E \times F) \cup (E' \times F)$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \in E'$.
On a donc $x \in E'$ et $y \in F$.
Donc $(x; y) \in E' \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in E' \times F$ puisque $c = (x; y)$.
Or, $E' \times F \subseteq (E \times F) \cup (E' \times F)$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $c \in (E \times F) \cup (E' \times F)$.

Dans les deux cas, $c \in (E \times F) \cup (E' \times F)$.

Donc si $c \in (E \cup E') \times F$, alors $c \in (E \times F) \cup (E' \times F)$.

Donc $\forall c, \big(c \in (E \cup E') \times F \implies c \in (E \times F) \cup (E' \times F)\big)$.
Donc $(E \cup E') \times F \subseteq (E \times F) \cup (E' \times F)$.

Finalement, on a $\boxed{(E \times F) \cup (E' \times F) = (E \cup E') \times F}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

On sait que $E \subseteq E$ car l'inclusion est réflexive.
On sait que $F \subseteq F \cup F'$ car $F \cup F'$ est une union de F.
On a donc $E \times F \subseteq E \times (F \cup F')$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.

De même, on sait que $E \subseteq E$ car l'inclusion est réflexive.
On sait que $F' \subseteq F \cup F'$ car $F \cup F'$ est une union de F'.
On a donc $E \times F' \subseteq E \times (F \cup F')$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.

Ainsi, on a $E \times F \subseteq E \times (F \cup F')$ et $E \times F' \subseteq E \times (F \cup F')$.
Donc $E \times (F \cup F')$ est un sur-ensemble commun à $E \times F$ et à $E \times F'$.
Donc $(E \times F) \cup (E \times F') \subseteq E \times (F \cup F')$ car $(E \times F) \cup (E \times F')$ est minimum pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à $E \times F$ et à $E \times F'$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in E \times (F \cup F')$.
Il existe donc au moins deux ensembles $x \in E$ et $y \in F \cup F'$ tels que $c = (x; y)$.
Soient de tels x et y.
On a donc $y \in F \cup F'$.
Donc $y \in F$ ou $y \in F'$ d'après la prop. 25 p. 30.

Plaçons-nous dans le cas où $y \in F$.
On a donc $x \in E$ et $y \in F$.
Donc $(x; y) \in E \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in E \times F$ puisque $c = (x; y)$.
Or, $E \times F \subseteq (E \times F) \cup (E \times F')$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $c \in (E \times F) \cup (E \times F')$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $y \in F'$.
On a donc $x \in E$ et $y \in F'$.
Donc $(x; y) \in E \times F'$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in E \times F'$ puisque $c = (x; y)$.
Or, $E \times F' \subseteq (E \times F) \cup (E \times F')$ d'après la prop. 26 p. 31.

Donc $c \in (E \times F) \cup (E \times F')$.

Dans les deux cas, $c \in (E \times F) \cup (E \times F')$.

Donc si $c \in E \times (F \cup F')$, alors $c \in (E \times F) \cup (E \times F')$.

Donc $\forall c, \big(c \in E \times (F \cup F') \implies c \in (E \times F) \cup (E \times F')\big)$.

Donc $E \times (F \cup F') \subseteq (E \times F) \cup (E \times F')$.

Finalement, on a $\boxed{(E \times F) \cup (E \times F') = E \times (F \cup F')}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 70 (Distributivité du produit cartésien sur l'intersection)

Soient E, F, E' et F' quatre ensembles.

On a alors :

1. $(E \times F) \cap (E' \times F') = (E \cap E') \times (F \cap F')$

2. En particulier, $(E \times F) \cap (E' \times F) = (E \cap E') \times F$.
   On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur l'intersection.

3. En particulier, $(E \times F) \cap (E \times F') = E \times (F \cap F')$.
   On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur l'intersection.

Démonstration

1

Commençons par démontrer un petit lemme :

Soient x et y deux ensembles.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(x;y) \in (E \times F) \cap (E' \times F') &\iff (x;y) \in E \times F \text{ et } (x;y) \in E' \times F' \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff \big(x \in E \text{ et } y \in F\big) \text{ et } \big(x \in E' \text{ et } y \in F'\big) \text{ d'après la prop. 65 p. 8} \\
&\iff \big(x \in E \text{ et } x \in E'\big) \text{ et } \big(y \in F \text{ et } y \in F'\big) \\
&\qquad \text{par associativité et commutativité de la conjonction} \\
&\iff x \in E \cap E' \text{ et } y \in F \cap F' \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff (x;y) \in (E \cap E') \times (F \cap F') \text{ d'après la prop. 65 p. 85}
\end{aligned}$$

Donc $(x;y) \in (E \times F) \cap (E' \times F') \iff (x;y) \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.

Donc $\forall x, \forall y, \Big((x;y) \in (E \times F) \cap (E' \times F') \iff (x;y) \in (E \cap E') \times (F \cap F')\Big)$.
Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit c un ensemble.
Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$.
Or, $(E \times F) \cap (E' \times F') \subseteq E \times F$ d'après la prop. 36 p. 44.
Donc $c \in E \times F$.
Donc il existe au moins deux ensembles $x \in E$ et $y \in F$ tels que $c = (x;y)$ par définition du produit cartésien.
Soient de tels x et y.
On a donc $c = (x;y)$ et $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$.
Donc $(x;y) \in (E \times F) \cap (E' \times F')$.
Donc $(x;y) \in (E \cap E') \times (F \cap F')$ d'après $(\star)$.
Donc $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.

Donc si $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$, alors $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.
Il existe donc au moins deux ensembles $x \in E \cap E'$ et $y \in F \cap F'$ tels que $c = (x;y)$.
Soient de tels x et y.
On a donc $c = (x;y)$ et $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.
Donc $(x;y) \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.
Donc $(x;y) \in (E \times F) \cap (E' \times F')$ d'après $(\star)$.
Donc $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$.

Donc si $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$, alors $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$.

Ainsi, on a $c \in (E \times F) \cap (E' \times F')$ si et seulement si $c \in (E \cap E') \times (F \cap F')$.

Donc $\forall c, \big(c \in (E \times F) \cap (E' \times F') \iff c \in (E \cap E') \times (F \cap F')\big)$.
Donc $\boxed{(E \times F) \cap (E' \times F') = (E \cap E') \times (F \cap F')}$.

2 On a les égalités suivantes :
$(E \times F) \cap (E' \times F) \underset{1}{=} (E \cap E') \times (F \cap F) = (E \cap E') \times F$ car $F \cap F = F$ par idempotence de l'intersection.
Donc $\boxed{(E \times F) \cap (E' \times F) = (E \cap E') \times F}$ par transitivité de l'égalité.

(3) On a les égalités suivantes :
$(E \times F) \cap (E \times F') \underset{(1)}{=} (E \cap E) \times (F \cap F') = E \times (F \cap F')$ car $E \cap E = E$ par idempotence de l'intersection.
Donc $\boxed{(E \times F) \cap (E \times F') = E \times (F \cap F')}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

Proposition 71 (Distributivité du produit cartésien sur la différence)

Soient A, B et C trois ensembles.
On a alors :

(1) $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$
On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur la différence ensembliste.

(2) $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur la différence ensembliste.

Démonstration

(1) Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in (A \backslash B) \times C$.
Il existe donc au moins deux ensembles $x \in A \backslash B$ et $y \in C$ tels que $c = (x; y)$ par définition du produit cartésien.
Soient de tels x et y.
Comme $x \in A \backslash B$, on a $x \in A$ et $x \notin B$ par définition de la différence ensembliste.

En particulier, on a $x \in A$.
On a donc $x \in A$ et $y \in C$.
Donc $(x; y) \in A \times C$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in A \times C$ puisque $c = (x; y)$.

De plus, on a $x \notin B$.
On a donc $x \notin B$ ou $y \notin C$.
On a donc $\text{non}(x \in B \text{ et } y \in C)$ d'après les lois de De Morgan.
On a donc $\text{non}\big((x; y) \in B \times C\big)$ d'après la prop. 65 p. 85.

On a donc $(x;y) \notin B \times C$.
On a donc $c \notin B \times C$ puisque $c = (x;y)$.

Ainsi, on a $c \in A \times C$ et $c \notin B \times C$.
On a donc $c \in (A \times C)\backslash(B \times C)$ par définition de la différence ensembliste.
Donc si $c \in (A\backslash B) \times C$, alors $c \in (A \times C)\backslash(B \times C)$.
Donc $\forall c, \big(c \in (A\backslash B) \times C \implies c \in (A \times C)\backslash(B \times C)$.
Donc $(A\backslash B) \times C \subseteq (A \times C)\backslash(B \times C)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit c un ensemble.
Supposons que $c \in (A \times C)\backslash(B \times C)$.
On a donc $c \in A \times C$ et $c \notin B \times C$.
En particulier, on a $c \in A \times C$.
Il existe donc au moins deux ensembles $x \in A$ et $y \in C$ tels que $c = (x;y)$ par définition du produit cartésien.
Soient de tels x et y.

On sait de plus que $c \notin B \times C$.
Donc $(x;y) \notin B \times C$.
Donc $\text{non}\big((x;y) \in B \times C\big)$.
Donc $\text{non}(x \in B \text{ et } y \in C\big)$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $x \notin B$ ou $y \notin C$ d'après les lois de De Morgan.
Or, on sait que $y \in C$ par définition de y.
Donc $x \notin B$.

Ainsi, on a $x \in A$ par définition de x, et $x \notin B$.
Donc $x \in A\backslash B$ par définition de la différence ensembliste.

Ainsi, on a $x \in A\backslash B$ et $y \in C$.
Donc $(x;y) \in (A\backslash B) \times C$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in (A\backslash B) \times C$ puisque $c = (x;y)$.
Donc si $c \in (A \times C)\backslash(B \times C)$, alors $c \in (A\backslash B) \times C$.
Donc $\forall c, \big(c \in (A \times C)\backslash(B \times C) \implies c \in (A\backslash B) \times C\big)$.
Donc $(A \times C)\backslash(B \times C) \subseteq (A\backslash B) \times C$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{(A\backslash B) \times C = (A \times C)\backslash(B \times C)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

2 Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in A \times (B \backslash C)$.

Il existe donc au moins deux ensembles $x \in A$ et $y \in B \backslash C$ tels que $c = (x; y)$ par définition du produit cartésien.

Soient de tels x et y.

On a donc $y \in B \backslash C$.

Donc $y \in B$ et $y \notin C$ par définition de la différence ensembliste.

Ainsi, on a $x \in A$ et $y \in B$.

Donc $(x; y) \in A \times B$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $c \in A \times B$ puisque $c = (x; y)$.

De plus, on a $y \notin C$.

Donc $x \notin A$ ou $y \notin C$.

Donc $\text{non}(x \in A \text{ et } y \in C)$ d'après les lois de De Morgan.

Donc $\text{non}\big((x; y) \in A \times C\big)$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $(x; y) \notin A \times C$.

Donc $c \notin A \times C$ puisque $c = (x; y)$.

Ainsi, on a $c \in A \times B$ et $c \notin A \times C$.

On a donc $c \in (A \times B) \backslash (A \times C)$ par définition de la différence ensembliste.

Donc si $c \in A \times (B \backslash C)$, alors $c \in (A \times B) \backslash (A \times C)$.

Donc $\forall c, \big(c \in A \times (B \backslash C) \implies c \in (A \times B) \backslash (A \times C)\big)$.

Donc $A \times (B \backslash C) \subseteq (A \times B) \backslash (A \times C)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in (A \times B) \backslash (A \times C)$.

On a donc $c \in A \times B$ et $c \notin A \times C$ par définition de la différence ensembliste.

En particulier, on a $c \in A \times B$.

Il existe donc au moins deux ensembles $x \in A$ et $y \in B$ tels que $c = (x; y)$ par définition du produit cartésien.

Soient de tels x et y.

On a de plus $c \notin A \times C$.
Donc $(x;y) \notin A \times C$ puisque $c = (x;y)$.
Donc $\text{non}\big((x;y) \in A \times C\big)$.
Donc $\text{non}(x \in A \ \text{ et } \ y \in C)$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $x \notin A$ ou $y \notin C$ d'après les lois de De Morgan.
Or, $x \in A$ par définition de x.
Donc $y \notin C$.

Ainsi, $y \in B$ et $y \notin C$.
Donc $y \in B \backslash C$ par définition de la différence ensembliste.

Ainsi, $x \in A$ et $y \in B \backslash C$.
Donc $(x;y) \in A \times (B \backslash C)$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $c \in A \times (B \backslash C)$ puisque $c = (x;y)$.

Donc si $c \in (A \times B) \backslash (A \times C)$, alors $c \in A \times (B \backslash C)$.
Donc $\forall c, \big(c \in (A \times B) \backslash (A \times C) \implies c \in A \times (B \backslash C)\big)$.
Donc $(A \times B) \backslash (A \times C) \subseteq A \times (B \backslash C)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)}$.
CQFD.

2 Relations binaires

2.1 Généralités

Définition 20 (Relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation binaire** si et seulement si tout élément de $\mathcal{R}$ est un couple.

Proposition 72 (Existence d'au moins une relation binaire)

Il existe au moins une relation binaire.

Démonstration

Il suffit de prendre $\{(\varnothing;\varnothing)\}$ puisque son seul élément est $(\varnothing;\varnothing)$ qui est un couple.

CQFD.

Notation

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient x et y deux ensembles.

Alors on notera $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $(x;y) \in \mathcal{R}$.

Définition 21 (Images et antécédents d'un élément par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient a et b deux ensembles.

- On dit que b est une **image** de a par $\mathcal{R}$ si et seulement si $a\mathcal{R}y$.
- On dit que b est un **antécédent** de a par $\mathcal{R}$ si et seulement si $b\mathcal{R}a$.

Proposition 73 (Caractérisation des relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

On a alors :

1. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire, alors $\mathcal{R} \subseteq (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})$.
2. $\mathcal{R}$ est une relation binaire si et seulement s'il existe au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Démonstration

1

Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \implies c \text{ est un couple}\big)$.

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \mathcal{R}$.

On a $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \implies c \text{ est un couple}\big)$ par hypothèse.

En particulier, on a $z \in \mathcal{R} \implies z$ est un couple.

Donc z est un couple par modus ponens.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $z = (x; y)$.

On a $\{x\} \in \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\}$ et $\{x; y\} \in \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\}$ par définition d'une paire.

Or, $(x; y) = \big\{\{x\}; \{x; y\}\big\}$ par définition d'un couple.

Donc $\{x\} \in (x; y)$ et $\{x; y\} \in (x; y)$.

Or, $z = (x; y)$.

Donc $\{x\} \in z$ et $\{x; y\} \in z$.

On a $z \in \mathcal{R}$ par hypothèse.

Il existe donc $A \in \mathcal{R}$ tels que $\{x\} \in A$ et $\{x; y\} \in A$.

Donc $\{x\} \in \bigcup \mathcal{R}$ et $\{x; y\} \in \bigcup \mathcal{R}$ par définition de la réunion.

Or, $x \in \{x\}$ par définition d'un singleton, et $y \in \{x; y\}$ par définition d'une paire.

Il existe donc $B \in \bigcup \mathcal{R}$ et $C \in \bigcup \mathcal{R}$ tels que $x \in B$ et $y \in C$.

Donc $x \in \bigcup (\bigcup \mathcal{R})$ et $y \in \bigcup (\bigcup \mathcal{R})$ par définition de la réunion.

Ainsi donc, on a $z = (x; y)$ et $x \in \bigcup (\bigcup \mathcal{R})$ et $y \in \bigcup (\bigcup \mathcal{R})$.

Donc $z \in (\bigcup \bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup \bigcup \mathcal{R})$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc si $z \in \mathcal{R}$, alors $z \in (\bigcup \bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup \bigcup \mathcal{R})$.

Donc $\forall z, \Big(z \in \mathcal{R} \implies z \in (\bigcup \bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup \bigcup \mathcal{R})\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \subseteq (\bigcup \bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup \bigcup \mathcal{R})}$.

2

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Alors d'après 1, on a $\mathcal{R} \subseteq (\bigcup \bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup \bigcup \mathcal{R})$.

Posons $E := \bigcup \bigcup \mathcal{R}$ et $F := \bigcup \bigcup \mathcal{R}$.

Donc $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Donc si $\mathcal{R}$ est une relation binaire, alors il existe au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \mathcal{R}$.

On sait que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathcal{R} \implies x \in E \times F\big)$.

En particulier, $c \in \mathcal{R} \implies c \in E \times F$.

Donc $c \in E \times F$ par modus ponens.

Il existe donc $e \in E$ et $f \in F$ tels que $c = (e; f)$.

Donc c est un couple.

Donc si $c \in \mathcal{R}$, alors c est un couple.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \implies c \text{ est un couple}\big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Donc s'il existe au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, alors $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation binaire} \iff \exists E, \exists F, \mathcal{R} \subseteq E \times F}$.

CQFD.

Proposition 74 (Égalité entre deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

1. $\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \Big(\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)\Big)$.

2. Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $\mathcal{S} \subseteq E \times F$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

On a $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}y)$ par réflexivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)$ par le principe de Leibniz.

Donc si $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, alors $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \mathcal{R}$.

Donc c est un couple puisque $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

Soient de tels x et y.

On a donc $(x; y) \in \mathcal{R}$ puisque $c \in \mathcal{R}$.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Donc $(x; y) \in \mathcal{S}$.

Donc $c \in \mathcal{S}$ puisque $c = (x; y)$.

Donc si $c \in \mathcal{R}$ alors $c \in \mathcal{S}$.

Supposons que $c \in \mathcal{S}$.

Donc c est un couple puisque $\mathcal{S}$ est une relation binaire.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

Soient de tels x et y.

On a donc $(x; y) \in \mathcal{S}$ puisque $c \in \mathcal{S}$.

On a donc $x\mathcal{S}y$.

Donc $x\mathcal{R}y$ d'après $(\star)$.

Donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Donc $c \in \mathcal{R}$ puisque $c = (x; y)$.

Donc si $c \in \mathcal{S}$ alors $c \in \mathcal{R}$.

Ainsi, $c \in \mathcal{R}$ si et seulement si $c \in \mathcal{S}$.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \iff c \in \mathcal{S}\big)$.

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ par définition de l'égalité.

Donc si $\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \Big(\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)\Big)}$.

2 Supposons que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $\mathcal{S} \subseteq E \times F$.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

On a $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$ d'après le principe de Leibniz.

Donc si $\mathcal{R} = \mathcal{S}$, alors $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x\mathcal{R}y$.

On a donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ par hypothèse.

Donc $(x; y) \in E \times F$.

Donc $x \in E$ et $y \in F$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x \in E$ et $y \in F$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $x\mathcal{S}y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x\mathcal{S}y$.

On a donc $(x; y) \in \mathcal{S}$.

Or, $\mathcal{S} \subseteq E \times F$ par hypothèse.

Donc $(x; y) \in E \times F$.

Donc $x \in E$ et $y \in F$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x \in E$ et $y \in F$ et $x\mathcal{S}y$.

Donc $x\mathcal{R}y$ d'après $(\star)$.

Donc si $x\mathcal{S}y$, alors $x\mathcal{R}y$.

Ainsi, $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x\mathcal{S}y$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ d'après 1.

Donc si $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)}$.

CQFD.

Proposition 75 (Définition d'une relation binaire par compréhension)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
Alors il existe une unique relation binaire $\mathcal{R} \subseteq E \times F$
telle que $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.

On dit que l'on a défini $\mathcal{R}$ **par compréhension**.

Démonstration

Existence :
Posons $\mathcal{R} := \Big\{c \in E \times F \;\Big|\; P\big(\pi_g(c);\pi_d(c)\big)\Big\}$.
Par définition, on a bien $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in E$.
Soit y un ensemble.
Supposons que $y \in F$.
On a donc $x \in E$ et $y \in F$.
Donc $(x;y) \in E \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.
De plus, on a $\pi_g(x;y) = x$ et $\pi_d(x;y) = y$.
On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x\mathcal{R}y &\iff (x;y) \in \mathcal{R} \\
&\iff (x;y) \in \Big\{c \in E \times F \;\Big|\; P\big(\pi_g(c);\pi_d(c)\big)\Big\} \\
&\iff (x;y) \in E \times F \text{ et } P\big(\pi_g(x;y);\pi_d(x;y)\big) \\
&\iff P\big(\pi_g(x;y);\pi_d(x;y)\big) \text{ puisque } (x;y) \in E \times F \\
&\iff P(x;y) \text{ puisque } \pi_g(x;y) = x \text{ et } \pi_d(x;y) = y
\end{aligned}$$

Donc $x\mathcal{R}y \iff P(x;y)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc si $y \in F$ alors $x\mathcal{R}y \iff P(x;y)$.
Donc $\forall y, \Big(y \in F \implies \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)\Big)$.
Donc $\forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.
Donc si $x \in E$, alors $\forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.
Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)\Big)$.
Donc $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.

Unicité :

Soit $\mathcal{S}$ une relation binaire telle que $\mathcal{S} \subseteq E \times F$
et telle que $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{S}y \iff P(x;y)\big)$.
On a montré que $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.
Donc on a $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$ par transitivité de l'équivalence.
On a aussi montré que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.
Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ d'après la prop. 74 p. 100.

Ainsi donc $\mathcal{R}$ est l'unique relation binaire telle que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$
et $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.
D'où l'unicité.
CQFD.

Remarque :
Quand on dispose d'une relation binaire $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ où E et F sont deux ensembles **finis** (on donnera une définition rigoureuse de cela dans le prochain ouvrage), on donne généralement deux représentations visuelles de celle-ci : la représentation **cartésienne**, et la représentation **matricielle**. Il s'agit de représentations utiles pour mieux comprendre la relation.

• Prenons l'exemple de $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b;c;d\}$, puis $\mathcal{R} = \big\{(1;a);(1;d);(3;a);(3;b);(3;d)\big\}$.

• La représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & & \times \\ c & & & \\ b & & & \times \\ a & \times & & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & & \times \\ & & \\ & & \times \\ \times & & \times \end{pmatrix}$.

On met une croix à la ligne j et à la colonne i si et seulement si $i\mathcal{R}j$.

• La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On met un 1 à la ligne j et à la colonne i si et seulement si $i\mathcal{R}j$, et un 0 sinon.

Proposition 76 (Inclusion et relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit S un ensemble.

Si $S \subseteq \mathcal{R}$, alors S est une relation binaire.

Démonstration

Supposons que $S \subseteq \mathcal{R}$. On sait que $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Il existe donc au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ d'après la prop. 73 p. 98.

Soient de tels E et F.

On a donc $S \subseteq E \times F$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $\boxed{S \text{ est une relation binaire}}$ d'après la prop. 73 p. 98.

CQFD.

Proposition 77 (L'ensemble vide est une relation binaire)

L'ensemble vide est une relation binaire.

Démonstration

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a $\varnothing \subseteq \mathcal{R}$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $\boxed{\varnothing \text{ est une relation binaire}}$ d'après la prop. 76 p. 105.

CQFD.

Définition 22 (Identité d'un ensemble)

Soit E un ensemble.

On appelle **identité** de E l'ensemble $\left\{c \in E^2 \;\middle|\; \pi_g(c) = \pi_d(c)\right\}$.

On le note id_E.

Remarque :

Comme $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$, c'est une relation d'après la prop. 73 p. 98.

Proposition 78 (Relation identité et égalité)

Soit E un ensemble.

Alors $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \mathrm{id}_E y \iff x = y\big)$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

On a donc $x \in E$ et $y \in E$.

Donc $(x; y) \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \mathrm{id}_E y &\iff (x; y) \in \mathrm{id}_E \\ &\iff (x; y) \in E^2 \text{ et } \pi_g(x; y) = \pi_d(x; y) \text{ par définition de } \mathrm{id}_E \\ &\iff \pi_g(x; y) = \pi_d(x; y) \text{ puisque } (x; y) \in E^2 \\ &\iff x = y \text{ puisque } \pi_g(x; y) = x \text{ et } \pi_d(x; y) = y \end{aligned}$$

Donc $x \mathrm{id}_E y \iff x = y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc si $y \in E$, alors $x \mathrm{id}_E y \iff x = y$.

Donc $\forall y, \big(y \in E \implies (x \mathrm{id}_E y \iff x = y)\big)$.

Donc $\forall y \in E, (x \mathrm{id}_E y \iff x = y)$.

Donc si $x \in E$, alors $\forall y \in E, (x \mathrm{id}_E y \iff x = y)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies \forall y \in E, (x \mathrm{id}_E y \iff x = y)\big)$.

Donc $\boxed{\forall x \in E, \forall y \in E, (x \mathrm{id}_E y \iff x = y)}$.

CQFD.

Remarque :

Prenons $E = \{1; 2; 3\}$.

- La représentation cartésienne de id_E est $\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & & & \times \\ 2 & & \times & \\ 1 & \times & & \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} & & \times \\ & \times & \\ \times & & \end{pmatrix}$.

• La représentation matricielle de id_E est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 79 (Un produit cartésien est une relation binaire)

Soient E et F deux ensembles.

Alors $E \times F$ est une relation binaire.

En particulier, E^2 est une relation binaire.

Démonstration

On a $E \times F \subseteq E \times F$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $\boxed{E \times F \text{ est une relation binaire}}$ d'après la prop. 73 p. 98.

CQFD.

Remarque :

Prenons $E = \{1; 2; 3\}$ et $F = \{a; b; c; d\}$.

• La représentation cartésienne de $E \times F$ est $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & \times & \times \\ c & \times & \times & \times \\ b & \times & \times & \times \\ a & \times & \times & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$.

• La représentation matricielle de $E \times F$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Domaine et image d'une relation binaire

Définition 23 (Domaine et image d'une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

• On appelle **domaine** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{x \in \bigcup\bigcup\mathcal{R} \;\middle|\; \exists y, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

• On appelle **image** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{y \in \bigcup\bigcup\mathcal{R} \;\middle|\; \exists x, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Proposition 80 (Domaine et image d'une relation et minimum)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.
On a alors :

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$
2. $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ si et seulement si $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$.

Démonstration

1.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \mathcal{R}$.

Or $\mathcal{R}$ est une relation binaire par définition.
Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.
Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.
Or, $c \in \mathcal{R}$ par hypothèse.
Donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.
Donc $x\mathcal{R}y$.

De plus $\mathcal{R} \subseteq (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})$ d'après la prop. 73 p. 98.
Donc $\forall z, \left(z \in \mathcal{R} \implies z \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})\right)$ par définition de l'inclusion.
En particulier, on a $c \in \mathcal{R} \implies c \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})$.
Donc $c \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})$ par modus ponens.

Or, $c = (x; y)$.
Donc $(x; y) \in (\bigcup\bigcup \mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup \mathcal{R})$.
Donc $x \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ et $y \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ d'après la prop. 65 p. 85.

Ainsi, on a $x \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ et $y \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ et $x\mathcal{R}y$.
Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Donc $(x; y) \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 65 p. 85.
Or $c = (x; y)$.
Donc $c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Donc si $c \in \mathcal{R}$, alors $c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \implies c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})}$ par définition de l'inclusion.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Commençons par montrer que $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ par définition de $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$.
Donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.
Or $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ par hypothèse.
Donc $\forall z \in \mathcal{R}, z \in E \times F$.
Donc $(x; y) \in E \times F$.
Donc $x \in E$ et $y \in F$ d'après la prop. 65 p. 85.
En particulier, on a $x \in E$.
Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$, alors $x \in E$.
Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \implies x \in E\big)$.
Donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ par définition de l'inclusion.

Montrons à présent que $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$.
Soit y un ensemble.
Supposons que $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$. Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x\mathcal{R}y$ par définition de $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$.
Donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.
Or $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ par hypothèse.

Donc $\forall z \in \mathcal{R}, z \in E \times F$.

Donc $(x; y) \in E \times F$.

Donc $x \in E$ et $y \in F$ d'après la prop. 65 p. 85.

En particulier, on a $y \in F$.

Donc si $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$, alors $y \in F$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \implies y \in F\big)$.

Donc $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$ par définition de l'inclusion.

Donc si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$, alors $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$.

Alors $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq E \times F$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après 1.

Donc $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ par transitivité de l'inclusion.

Donc si $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$, alors $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \subseteq E \times F \text{ si et seulement si } \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E \text{ et } \mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq F}$.

CQFD.

Proposition 81 (Caractérisation du domaine et de l'image d'une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit a un ensemble.

On a alors :

1. $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \iff \exists y, a\mathcal{R}y$
2. $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \iff \exists x, x\mathcal{R}a$

Démonstration

1 Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Alors $a \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ et $\exists y, a\mathcal{R}y$ par définition du domaine.

En particulier, $\exists y, a\mathcal{R}y$.

Donc si $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$, alors $\exists y, a\mathcal{R}y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\exists y, a\mathcal{R}y$.

Soit un tel y.

On a donc $(a; y) \in \mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 80 p. 108.

Donc $\forall c \in \mathcal{R}, c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par définition de l'inclusion.

Donc $(a; y) \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Donc $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par définition du produit cartésien.

En particulier, $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Donc si $\exists y, a\mathcal{R}y$, alors $a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Finalement, $\boxed{a \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \iff \exists y, a\mathcal{R}y}$.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

On a donc $a \in \bigcup\bigcup \mathcal{R}$ et $\exists x, x\mathcal{R}a$.

En particulier, $\exists x, x\mathcal{R}a$.

Donc si $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$, alors $\exists x, x\mathcal{R}a$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un ensemble x tel que $x\mathcal{R}a$.

Soit un tel x.

On a donc $(x; a) \in \mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 80 p. 108.

Donc $\forall c \in \mathcal{R}, c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par définition de l'inclusion.

Donc $(x; a) \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par définition du produit cartésien.

En particulier, $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Donc si $\exists x, x\mathcal{R}a$, alors $a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Finalement, $\boxed{a \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \iff \exists x, x\mathcal{R}a}$.

CQFD.

Proposition 82 (Domaine et image de l'ensemble vide)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathcal{R} = \varnothing$

(2) $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \varnothing$

(3) $\mathrm{im}(\mathcal{R}) = \varnothing$

Démonstration

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supposons que $\mathcal{R} = \varnothing$.

Par définition on a $\mathrm{dom}(\varnothing) = \left\{ x \in \bigcup\bigcup \varnothing \;\middle|\; \exists y, x\mathcal{R}y \right\}$.

On a donc $\mathrm{dom}(\varnothing) \subseteq \bigcup\bigcup \varnothing$.

Or, $\bigcup\bigcup \varnothing = \bigcup \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 21 p. 27.

Donc $\mathrm{dom}(\varnothing) \subseteq \varnothing$.

Donc $\mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \varnothing$.

$\boxed{(1) \Longleftarrow (2)}$

Supposons que $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \varnothing$.

Alors $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) = \varnothing \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) \underset{66\text{ p. }86}{=} \varnothing$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Donc $\mathcal{R} \subseteq \varnothing$.

Donc $\mathcal{R} = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

$\boxed{(1) \Longrightarrow (3)}$

Supposons que $\mathcal{R} = \varnothing$.

Par définition on a $\mathrm{im}(\varnothing) = \left\{ y \in \bigcup\bigcup \varnothing \;\middle|\; \exists x, x\varnothing y \right\}$.

On a donc $\mathrm{im}(\varnothing) \subseteq \bigcup\bigcup \varnothing$.

Or, $\bigcup\bigcup \varnothing = \bigcup \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 21 p. 27.

Donc $\mathrm{im}(\varnothing) \subseteq \varnothing$.

Donc $\mathrm{im}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $\mathrm{im}(\mathcal{R}) = \varnothing$.

$\boxed{(1) \Longleftarrow (3)}$

Supposons que $\mathrm{im}(\mathcal{R}) = \varnothing$.

Alors $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \varnothing \underset{66\text{ p. }86}{=} \varnothing$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Donc $\mathcal{R} \subseteq \varnothing$.

Donc $\mathcal{R} = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

Finalement, on a bien les équivalences recherchées.
CQFD.

Proposition 83 (Domaine et image de l'identité)

Soit E un ensemble.
On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$
2. $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E$

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.
Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel y.
On a donc $x\mathrm{id}_E y$.
Donc $(x; y) \in \mathrm{id}_E$.
Or, $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$ par définition.
Donc $(x; y) \in E^2$.
Donc $x \in E$ et $y \in E$ d'après la prop. 65 p. 85.
En particulier, on a $x \in E$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$, alors $x \in E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in E$.
Posons alors $c = (x; x)$.
Comme $x \in E$ et $x \in E$, on a $c \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.
De plus, on a $\pi_g(c) = \pi_g(x; x) = x = \pi_d(x; x) = \pi_d(c)$.
Donc $\pi_g(c) = \pi_d(c)$ par transitivité de l'égalité.
Ainsi, on a $c \in E^2$ et $\pi_g(c) = \pi_d(c)$.
Donc $c \in \mathrm{id}_E$ par définition de id_E.

Ainsi, on a $(x;x) \in \mathrm{id}_E$.

Donc $x\mathrm{id}_E x$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$.

Ainsi, $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) \iff x \in E$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) \iff x \in E\big)$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E}$ par définition de l'égalité.

2

Soit y un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$.

Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

On a donc $x\mathrm{id}_E y$.

Donc $(x;y) \in \mathrm{id}_E$.

Or, $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$ par définition.

Donc $(x;y) \in E^2$.

Donc $x \in E$ et $y \in E$ d'après la prop. 65 p. 85.

En particulier, on a $y \in E$.

Donc si $y \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$, alors $y \in E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in E$.

Posons alors $c = (y;y)$.

Comme $y \in E$ et $y \in E$, on a $c \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.

De plus, on a $\pi_g(c) = \pi_g(y;y) = y = \pi_d(y;y) = \pi_d(c)$.

Donc $\pi_g(c) = \pi_d(c)$ par transitivité de l'égalité.

Ainsi, on a $c \in E^2$ et $\pi_g(c) = \pi_d(c)$.

Donc $c \in \mathrm{id}_E$ par définition de id_E.

Ainsi, on a $(y;y) \in \mathrm{id}_E$.

Donc $y\mathrm{id}_E y$.

Donc $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $u \in E$, alors $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$.

Ainsi, $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E) \iff y \in E$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E) \iff y \in E\big)$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 84 (Domaine et image d'un produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.

On a alors $\mathrm{dom}(E \times F) = E$ et $\mathrm{im}(E \times F) = F$.

En particulier, on a $\mathrm{dom}(E^2) = E = \mathrm{im}(E^2)$.

Démonstration

On a $E \times F \subseteq \mathrm{dom}(E \times F) \times \mathrm{im}(E \times F)$ d'après la prop. 80 p. 108.

Donc $E \subseteq \mathrm{dom}(E \times F)$ et $F \subseteq \mathrm{im}(E \times F)$ d'après la prop. 67 p. 87, car $E \neq \varnothing$ et $F \neq \varnothing$ par hypothèse.

Mais $E \times F \subseteq E \times F$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $\mathrm{dom}(E \times F) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(E \times F) \subseteq F$ d'après la prop. 80 p. 108.

Finalement, $\boxed{\mathrm{dom}(E \times F) = E}$ et $\boxed{\mathrm{im}(E \times F) = F}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

2.3 Composition de relations binaires

Définition 24 (Composition de deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On appelle relation composée de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{R}$ l'ensemble

$\{c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S}) \mid \exists y, \pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)\}$.

On le note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

On notera parfois $\mathcal{R}^2$ à la place de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

Attention !

Il ne faut pas confondre $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, qui peuvent parfois se noter tous les deux $\mathcal{R}^2$.

En cas de doute, il sera rappelé de quel ensemble il s'agit.

Proposition 85 (La composition de relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation binaire.

Démonstration

Par définition, on a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \{c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S}) \mid \exists y, \pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)\}$.

En particulier, on a $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S})$ par définition d'un ensemble par compréhension.

Donc $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une partie d'un produit cartésien.

Donc $\boxed{\mathcal{S} \circ \mathcal{R} \text{ est une relation binaire}}$ d'après la prop. 73 p. 98.

CQFD.

Proposition 86 (Caractérisation de la composition de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et z deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff \exists y, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$.

On a donc $(x; z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Posons $c := (x; z)$.

On a donc $c \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Donc $c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S})$ et $\exists y, \big(\pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)\big)$ par définition de la composition.

En particulier, $\exists y, \big(\pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)\big)$.

Or, $c = (x; z)$ donc $\pi_g(c) = x$ et $\pi_d(c) = z$ par définition des composantes.

Donc $\exists y, \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\big)$.

Donc si $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$, alors $\exists y, \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z$.

Soit un tel y.

On a donc $x\mathcal{R}y$ donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

De même, on a $y\mathcal{S}z$ donc $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Ainsi, on a $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$.
Donc $(x; z) \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 65 p. 85.
Posons $c := (x; z)$.
On a donc $c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S})$.
De plus, on a $x = \pi_g(c)$ et $z = \pi_d(c)$.
Or, $x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z$ par hypothèse.
Donc $\pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)$.

Ainsi, on a $c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S})$ et $\pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}\pi_d(c)$.
Donc $c \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ par définition de la composition.
Donc $(x; z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ puisque $c = (x; z)$.
Donc $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$.

Donc si $\exists y, \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\big)$, alors $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$.

Finalement, $\boxed{x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff \exists y, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z)}$.
CQFD.

Proposition 87 (Associativité de la composition de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.

On a alors $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
On dit que la composition de relations binaires est **associative**.

Démonstration

Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.
On sait que $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ est une relation d'après la prop. 85 p. 116.
Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.
Il existe donc au moins deux ensembles x et t tels que $c = (x; t)$.
Soient de tels x et t.
On a donc $(x; t) \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

Donc $x\Big((\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\Big)t$.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ et $y(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})t$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel y.
Comme $y(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})t$, il existe au moins un ensemble z tel que $y\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{T}t$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel z.
On a donc $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{T}t$.

En particulier, on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$.
Donc $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Ainsi, on a $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ et $z\mathcal{T}t$.
Donc $x\Big(\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\Big)t$ d'après la prop. 86 p. 116.
Donc $(x; t) \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
Donc $c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Donc si $c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$, alors $c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
Donc $\forall c, \big(c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} \implies c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\big)$.
Donc $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\big)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit c un ensemble.
Supposons que $c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
On sait que $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ est une relation binaire d'après la prop. 85 p. 116.
Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.
Il existe donc au moins deux ensembles x et t tels que $c = (x; t)$ par définition d'un couple.

Soient de tels x et t.
On a donc $(x; t) \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
Donc $x\Big(\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\Big)t$.
Il existe donc au moins un ensemble z tel que $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ et $z\mathcal{T}t$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel z.
Comme $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$, il existe au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel y.

Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{T}t$.
En particulier, on a $y\mathcal{S}z$ et $z\mathcal{T}t$.

Donc $y(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})t$ d'après la prop. 86 p. 116.

Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ et $y(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})t$.
Donc $x\Big((\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\Big)t$ d'après la prop. 86 p. 116.
Donc $(x;t) \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.
Donc $c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ puisque $c = (x;t)$.

Donc si $c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$, alors $c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \implies c \in (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\big)$.

Donc $\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq (\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 88 (Domaine et image d'une composition de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R})$
2. Si $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$, alors $\mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.
3. $\mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})$
4. Si $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \supseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$, alors $\mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \mathrm{im}(\mathcal{S})$.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
Il existe donc au moins un ensemble z tel que $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel z.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel y.
En particulier, on a $x\mathcal{R}y$.
Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$, alors $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \implies x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$.
Donc $\boxed{\mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ par définition de l'inclusion.

(2) Supposons que $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel y.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ par hypothèse.

Donc $y \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$.

Il existe donc au moins un ensemble z tel que $y\mathcal{S}z$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel z.

Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$.

Donc $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$, alors $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \implies x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\big)$.
Donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
Or, on a $\mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après (1).
Donc $\boxed{\mathrm{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(3)

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Soit un tel y.

En particulier, on a $y\mathcal{S}z$.

Donc $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$, alors $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$.

Donc $\forall z, \big(z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \implies z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})\big)$.
Donc $\boxed{\mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})}$ par définition de l'inclusion.

(4) Supposons que $\mathrm{dom}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$.

Il existe donc au moins un ensemble y tel que $y\mathcal{S}z$ d'après la prop. 80 p. 108.

Soit un tel y.

Alors $y \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 80 p. 108.

Or, $\mathrm{dom}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par hypothèse.

Donc $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 80 p. 108.

Soit un tel x.

On a donc $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{S}z$.

Donc $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Donc $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ d'après la prop. 80 p. 108.

Donc si $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$, alors $z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.

Donc $\forall z, \big(z \in \mathrm{im}(\mathcal{S}) \implies z \in \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\big)$.

Donc $\mathrm{im}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$ par définition de l'inclusion.

Or, $\mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})$ d'après 3.

Donc $\boxed{\mathrm{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \mathrm{im}(\mathcal{S})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Définition 25 (Relations binaires qui commutent)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.

On dit que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ **commutent** (pour la composition) si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Exemple :

Une relation binaire $\mathcal{R}$ commute avec elle-même.

Proposition 89 (L'ensemble vide commute avec toute relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Alors $\mathcal{R} \circ \varnothing = \varnothing = \varnothing \circ \mathcal{R}$.

Ainsi, $\varnothing$ est **absorbant** pour la composition de relations binaires.

Démonstration

Par définition, on a $\mathcal{R} \circ \varnothing = \{c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\varnothing) \mid \exists y, \pi_g(c)\mathcal{R}y \text{ et } y\varnothing\pi_d(c)\}$.
En particulier, on a $\mathcal{R} \circ \varnothing \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\varnothing)$.
Or, on a $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\varnothing) \underset{82 \text{ p. } 111}{=} \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \varnothing \underset{66 \text{ p. } 86}{=} \varnothing$.
Donc $\mathcal{R} \circ \varnothing \subseteq \varnothing$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \circ \varnothing = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.

Par définition, on a $\varnothing \circ \mathcal{R} = \{c \in \mathrm{dom}(\varnothing) \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) \mid \exists y, \pi_g(c)\varnothing y \text{ et } y\mathcal{R}\pi_d(c)\}$.
En particulier, on a $\varnothing \circ \mathcal{R} \subseteq \mathrm{dom}(\varnothing) \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Or, on a $\mathrm{dom}(\varnothing) \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) \underset{82 \text{ p. } 111}{=} \varnothing \times \mathrm{im}(\mathcal{R}) \underset{66 \text{ p. } 86}{=} \varnothing$.
Donc $\varnothing \circ \mathcal{R} \subseteq \varnothing$.
Donc $\boxed{\varnothing \circ \mathcal{R} = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.
CQFD.

2.4 Transposée d'une relation binaire

Définition 26 (Transposé d'un couple)

Soit c un couple.

On appelle **transposé** de c le couple $\big(\pi_d(c); \pi_g(c)\big)$.
On le note ${}^t c$.

Proposition 90 (Autre écriture du transposé d'un couple)

Soient x et y deux ensembles.

Alors ${}^t(x; y) = (y; x)$.

Démonstration

Posons $c := (x; y)$.
Alors par définition on a ${}^t c = \big(\pi_d(c); \pi_g(c)\big)$.
Or, $\pi_d(c) = y$ et $\pi_g(c) = x$.
Donc ${}^t c = (y; x)$.
Donc $\boxed{{}^t(x; y) = (y; x)}$.

. **CQFD**.

Proposition 91 (Transposé d'un couple et produit cartésien)

Soient E, F, x et y quatre ensembles. Soit c un couple.
On a alors :

1. $(x;y) \in E \times F \iff (y;x) \in F \times E$
2. En particulier, $(x;y) \in E^2 \iff (y;x) \in E^2$

3. $c \in E \times F \iff {}^t c \in F \times E$
4. En particulier, $c \in E^2 \iff {}^t c \in E^2$.

Démonstration

1. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(x;y) \in E \times F &\iff x \in E \text{ et } y \in F \text{ d'après la prop. 65 p. 85}\\ &\iff y \in F \text{ et } x \in E \text{ par commutativité de la conjonction}\\ &\iff (y;x) \in F \times E \text{ d'après la prop. 65 p. 85}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(x;y) \in E \times F \iff (y;x) \in F \times E}$ par transitivité de l'équivalence.

2. C'est immédiat en posant $F := E$ dans 1.

3. Par définition des composantes d'un couple, on a $c = \big(\pi_g(c);\pi_d(c)\big)$.
Par définition du transposé d'un couple, on a ${}^t c = \big(\pi_d(c);\pi_g(c)\big)$.
Alors $c \in E \times F \iff \big(\pi_g(c);\pi_d(c)\big) \in E \times F \underset{1}{\iff} \big(\pi_d(c);\pi_g(c)\big) \in F \times E \iff {}^t c \in F \times E$.
Donc $\boxed{c \in E \times F \iff {}^t c \in F \times E}$ par transitivité de l'équivalence.

4. C'est immédiat en posant $F := E$ dans 3.

CQFD.

Définition 27 (Transposée d'une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On appelle **transposée** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{c \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2 \;\middle|\; {}^t c \in \mathcal{R}\right\}$.
On le note ${}^t\mathcal{R}$.

Proposition 92 (La transposée d'une relation est une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Alors ${}^t\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Démonstration

Par définition, on a ${}^t\mathcal{R} = \left\{c \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2 \;\middle|\; {}^t c \in \mathcal{R}\right\}$.
On a donc ${}^t\mathcal{R} \subseteq (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$ par définition d'un ensemble par compréhension.
Donc $\boxed{{}^t\mathcal{R} \text{ est une relation binaire}}$ d'après la prop. 73 p. 98.
CQFD.

Proposition 93 (Caractérisation de la relation transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x\,{}^t\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x\,{}^t\mathcal{R}y$.
On a donc $(x;y) \in {}^t\mathcal{R}$.
Donc $(x;y) \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$ et ${}^t(x;y) \in \mathcal{R}$ par définition de ${}^t\mathcal{R}$.
En particulier, on a ${}^t(x;y) \in \mathcal{R}$.
Or, ${}^t(x;y) = (y;x)$ d'après la prop. 90 p. 122.
Donc $(y;x) \in \mathcal{R}$.
Donc $y\mathcal{R}x$.

Donc si $x\,{}^t\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y\mathcal{R}x$.
On a donc $(y;x) \in \mathcal{R}$.
Or, ${}^t(x;y) = (y;x)$ d'après la prop. 90 p. 122.
Donc ${}^t(x;y) \in \mathcal{R}$.

De plus,$\mathcal{R} \subseteq (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$ d'après la prop. 73 p. 98.
Donc ${}^t(x;y) \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$.
Donc $(x;y) \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$ d'après la prop. 91 p. 123.

Ainsi, on a $(x;y) \in (\bigcup\bigcup\mathcal{R})^2$ et ${}^t(x;y) \in \mathcal{R}$.
Donc $(x;y) \in^t \mathcal{R}$ par définition de la transposée d'une relation binaire.
Donc $x\,{}^t\mathcal{R}y$.
Donc si $y\mathcal{R}x$, alors $x\,{}^t\mathcal{R}y$.

Finalement, $\boxed{x\,{}^t\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x}$.
CQFD.

Remarque :
• Prenons à nouveau l'exemple de $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b;c;d\}$, puis $\mathcal{R} = \big\{(1;a);(1;d);(3;a);(3;b);(3;d)\big\}$.
On a donc ${}^t\mathcal{R} = \big\{(a;1);(d;1);(a;3);(b;3);(d;3)\big\}$.

• On avait dit que la représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & & \times \\ c & & & \\ b & & & \times \\ a & \times & & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & & \times \\ & & \\ & & \times \\ \times & & \times \end{pmatrix}$.

La représentation cartésienne de ${}^t\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{c|cccc} 3 & \times & \times & & \times \\ 2 & & & & \\ 1 & \times & & & \times \\ \hline / & a & b & c & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & \times & & \times \\ & & & \\ \times & & & \times \end{pmatrix}$.

On a donc effectué une espèce de symétrie par rapport à la diagonale $\diagup$.

• On avait dit que la représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La représentation matricielle de ${}^t\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & / \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc effectué une espèce de symétrie par rapport à la diagonale $\diagdown$.

Proposition 94 (Involution de la transposition)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

On dit que le passage à la transposée est **involutif**.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

On a alors $x\,{}^t({}^t\mathcal{R})\,y \underset{\text{93 p. 124}}{\iff} y\,{}^t\mathcal{R}x \underset{\text{93 p. 124}}{\iff} x\mathcal{R}y$.

Donc $x\,{}^t({}^t\mathcal{R})\,y \iff x\mathcal{R}y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(x\,{}^t({}^t\mathcal{R})\,y \iff x\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\,{}^t({}^t\mathcal{R})\,y \iff x\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\boxed{{}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 95 (Domaine et image de la relation transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}\big({}^t\mathcal{R}\big) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$

(2) $\mathrm{im}\left({}^t\mathcal{R}\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$

Démonstration

(1)

Soit a un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{dom}\left({}^t\mathcal{R}\right) &\iff \exists y, a\,{}^t\mathcal{R}y \text{ par définition du domaine} \\ &\iff \exists y, y\mathcal{R}a \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff a \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \text{ par définition de l'image} \end{aligned}$$

Donc $a \in \mathrm{dom}\left({}^t\mathcal{R}\right) \iff a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall a, \left(a \in \mathrm{dom}\left({}^t\mathcal{R}\right) \iff a \in \mathrm{im}(\mathcal{R})\right)$.

Donc $\boxed{\mathrm{dom}\left({}^t\mathcal{R}\right) = \mathrm{im}(\mathcal{R})}$ par définition de l'égalité.

(2) On a $\mathcal{R} = {}^t({}^t\mathcal{R})$ par involution du passage à la transposée.

Donc $\mathrm{im}({}^t\mathcal{R}) \underset{(1)}{=} \mathrm{dom}\left({}^t({}^t\mathcal{R})\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Donc $\boxed{\mathrm{im}({}^t\mathcal{R}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

Proposition 96 (Transposée d'une composition de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors ${}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = {}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit z un ensemble.

On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned} x\,{}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z &\iff z(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff \exists y, (z\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ d'après la prop. 86 p. 116} \end{aligned}$$

$\iff \exists y, \left(y\,{}^t\mathcal{S}z \text{ et } x\,{}^t\mathcal{R}y\right)$ d'après la prop. 93 p. 124

$\iff \exists y, \left(x\,{}^t\mathcal{R}y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{S}z\right)$ par commutativité de la conjonction

$\iff x\left({}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}\right) z$ d'après la prop. 86 p. 116

Donc $x\,{}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff x\left({}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}\right) z$.

Donc $\forall z, \left(x\,{}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff x\left({}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}\right) z\right)$.

Donc $\forall x, \forall z, \left(x\,{}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff x\left({}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}\right) z\right)$.

Donc $\boxed{{}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = {}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 97 (Transposée de relations particulières)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

1. ${}^t\varnothing = \varnothing$
2. ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$
3. ${}^t(E \times F) = F \times E$

Démonstration

1.

Par définition, on a ${}^t\varnothing = \left\{c \in (\bigcup\bigcup\varnothing) \times (\bigcup\bigcup\varnothing) \;\middle|\; {}^tc \in \varnothing\right\}$.

En particulier, on a ${}^t\varnothing \subseteq (\bigcup\bigcup\varnothing) \times (\bigcup\bigcup\varnothing)$.

Or, $\bigcup\bigcup\varnothing = \bigcup\varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 21 p. 27.

Donc $(\bigcup\bigcup\varnothing) \times (\bigcup\bigcup\varnothing) = \varnothing \times \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 66 p. 86.

Donc ${}^t\varnothing \subseteq \varnothing$.

Donc $\boxed{{}^t\varnothing = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.

2.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

On a alors les équivalences suivantes :

$x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff y\mathrm{id}_E x$ d'après la prop. 93 p. 124

$\iff y = x$ d'après la prop. 78 p. 106

$\iff x = y$ par symétrie de l'égalité

$\iff x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 78 p. 106

Donc $x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc si $y \in E$, alors $x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y$.

Donc $\forall y, \big(y \in E \implies (x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y)\big)$.

Donc $\forall y \in E, (x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y)$.

Donc si $x \in E$, alors $\forall y \in E, (x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies \forall y \in E, (x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y)\big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, (x\,{}^t\mathrm{id}_E y \iff x\mathrm{id}_E y)$.

Donc $\boxed{{}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E}$ d'après la prop. 74 p. 100.

3

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x\,{}^t(E \times F)y &\iff y(E \times F)x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff (y; x) \in E \times F \\ &\iff (x; y) \in F \times E \text{ d'après la prop. 91 p. 123} \\ &\iff x(F \times E)y \end{aligned}$$

Donc $x\,{}^t(E \times F)y \iff x(F \times E)y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(x\,{}^t(E \times F)y \iff x(F \times E)y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\,{}^t(E \times F)y \iff x(F \times E)y\big)$.

Donc $\boxed{{}^t(E \times F) = F \times E}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

2.5 Image directe par une relation binaire

Définition 28 (Image directe d'un ensemble par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **image directe** de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\mathcal{R}^{\to}(E)$.

Remarque :

Pour x un ensemble, l'image directe $\mathcal{R}^{\to}\big(\{x\}\big)$ est l'ensemble des images de x par $\mathcal{R}$.

Proposition 98 (Caractérisation de l'image directe par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et y deux ensembles.

On a alors $y \in \mathcal{R}^{\to}(E) \iff \exists x \in E, x\mathcal{R}y$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$.

On a donc $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ et $\exists x \in E, x\mathcal{R}y$.

En particulier, $\exists x \in E, x\mathcal{R}y$.

Donc si $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$, alors $\exists x \in E, x\mathcal{R}y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un ensemble $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$.

Soit un tel x.

On a donc $x\mathcal{R}y$ donc $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Ainsi, on a $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ et $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$ par définition de l'image directe.

Donc si $\exists x \in E, x\mathcal{R}y$, alors $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$.

Finalement, $\boxed{y \in \mathcal{R}^{\to}(E) \iff \exists x \in E, x\mathcal{R}y}$.

CQFD.

Proposition 99 (Images directes particulières)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $\mathcal{R}^{\to}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$
2. $\mathcal{R}^{\to}(E) = \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$
3. $\mathcal{R}^{\to}(\varnothing) = \varnothing$
4. $\mathcal{R}^{\to}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$

Démonstration

1

Par définition, pour tout ensemble E on a $\mathcal{R}^{\to}(E) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
En particulier, on a $\mathcal{R}^{\to}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Ainsi, on a $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\to}\Big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\Big)$.

Donc si $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$, alors $y \in \mathcal{R}^{\to}\Big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\Big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \implies y \in \mathcal{R}^{\to}\Big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\Big)\Big)$.

Donc $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}^{\to}\Big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\Big)$.

Finalement, on a $\boxed{\mathcal{R}^{\to}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{im}(\mathcal{R})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

2

Soit y un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$.

Il existe donc au moins $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$.

Soit un tel x.

Comme $x\mathcal{R}y$, on a $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Ainsi, on a $x \in E$ et $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Donc $x \in E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 35 p. 42.

Ainsi, on a $x \in E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$ par définition de l'image directe.

Donc si $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$, alors $y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$.

Il existe donc au moins un ensemble $x \in E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ tel que $x\mathcal{R}y$ par définition de

l'image directe.

Soit un tel x.

Or, $E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ d'après la prop. 36 p. 44.

Donc $x \in E$.

Ainsi, on a $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$ par définition de l'image directe.

Donc si $y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$, alors $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$.

Ainsi, $y \in \mathcal{R}^{\to}(E)$ si et seulement si $y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \mathcal{R}^{\to}(E) \iff y \in \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\to}(E) = \mathcal{R}^{\to}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)}$ par définition de l'égalité.

3

Par définition, on a $\mathcal{R}^{\to}(\varnothing) = \Big\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\Big|\; \exists x \in \varnothing, x\mathcal{R}y\Big\}$.

Or, pour tout ensemble y, l'assertion $\exists x \in \varnothing, x\mathcal{R}y$ est fausse d'après la prop. 12 p. 16.

On a donc $\forall y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}), \Big(\big(\exists x \in \varnothing, x\mathcal{R}y\big) \iff y \neq y\Big)$ puisque $\forall y, y = y$ par réflexivité de l'égalité.

Donc $\Big\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\Big|\; \exists x \in \varnothing, x\mathcal{R}y\Big\} = \Big\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\Big|\; y \neq y\Big\}$ d'après la prop. 8 p. 12.

Or, $\Big\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\Big|\; y \neq y\Big\} = \varnothing$ par définition de l'ensemble vide.

Donc $\Big\{y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\Big|\; \exists x \in \varnothing, x\mathcal{R}y\Big\} = \varnothing$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\to}(\varnothing) = \varnothing}$.

4 On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^{\to}(E) \neq \varnothing &\iff \exists y \in \mathcal{R}^{\to}(E) \\
&\iff \exists y, \exists x \in E, x\mathcal{R}y \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff \exists x \in E, \exists y, x\mathcal{R}y \\
&\iff \exists x \in E, x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \text{ d'après la prop. 81 p. 110} \\
&\iff \exists x, \big(x \in E \text{ et } x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) \\
&\iff \exists x \in E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \neq \varnothing
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\to}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \varnothing}$ par transitivité de l'équivalence.

CQFD.

Proposition 100 (Croissance de l'image directe par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

1. Si $E \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)$.
   On dit que l'image directe par une relation binaire est **croissante** pour l'inclusion.

2. En particulier, si $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(F) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Démonstration

1. Supposons que $E \subseteq F$.
   Soit y un ensemble.
   Supposons que $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.
   Il existe donc au moins un ensemble $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 98 p. 130.
   Soit un tel x.
   On a donc $x \in E$.
   Or, $E \subseteq F$ par hypothèse.
   Donc $x \in F$.
   Ainsi, on a $x \in F$ et $x\mathcal{R}y$.
   Donc $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)$ d'après la prop. 98 p. 130.
   Donc si $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$, alors $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \implies y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)}$ par définition de l'inclusion.

2. Supposons que $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$.

Alors d'après 2, on a $\mathcal{R}^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.

Or, $\mathcal{R}^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 99 p. 130.

Donc $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.

Or, $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R})$ puisque $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) = \left\{ y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, x\mathcal{R}y \right\}$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) = \mathrm{im}(\mathcal{R})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 101 (Image directe par une relation, union et intersection)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

1. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$

   On dit que le passage à l'image directe par une relation est un **morphisme** pour l'union.

2. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$

   On dit que le passage à l'image directe par une relation est un **sous-morphisme** pour l'intersection.

Démonstration

1.

Soit y un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) &\iff \exists x \in A \cup B, x\mathcal{R}y \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff \exists x, \big(x \in A \cup B \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y\big) \\
&\iff \exists x, \big((x \in A \ \text{ ou } \ x \in B) \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y\big) \text{ d'après la prop. 25 p. 30} \\
&\iff \exists x, \big((x \in A \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y) \ \text{ ou } \ (x \in B \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y)\big) \\
&\qquad \text{par distributivité de la conjonction sur la disjonction} \\
&\iff \big(\exists x, (x \in A \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y)\big) \ \text{ ou } \ \big(\exists x, (x \in B \ \text{ et } \ x\mathcal{R}y)\big) \\
&\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \ \text{ ou } \ y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(B) \text{d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B) \text{ d'après la prop. 25 p. 30}
\end{aligned}$$

Donc $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)}$ par définition de l'égalité.

2. On sait que $A \cap B \subseteq A$ d'après la prop. 36 p. 44.

Donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(A)$ par croissance du passage à l'image directe.

De même, on sait que $A \cap B \subseteq B$ d'après la prop. 36 p. 44.

Donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$ par croissance du passage à l'image directe.

Ainsi, on a $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(A)$ et $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$.

Donc $\mathcal{R}^{\to}(A \cap B)$ est un sous-ensemble commun à $\mathcal{R}^{\to}(A)$ et à $\mathcal{R}^{\to}(B)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\to}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\to}(A) \cap \mathcal{R}^{\to}(B)}$ car l'intersection de deux ensembles est maximum pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à ces deux ensembles.

CQFD.

Remarque :

L'inclusion réciproque de (2) est fausse en toute généralité.

En effet, prenons $\mathcal{R} := \big\{(0;2);(1;2)\big\}$. On a donc uniquement $0\mathcal{R}2$ et $1\mathcal{R}2$.

Posons alors $A := \{0\}$ et $B := \{1\}$. On a bien $2 \in \mathcal{R}^{\to}(A)$ puisque $0\mathcal{R}2$.

On a aussi $2 \in \mathcal{R}^{\to}(B)$ puisque $1\mathcal{R}2$. On a donc $2 \in \mathcal{R}^{\to}(A) \cap \mathcal{R}^{\to}(B)$.

Cependant, on a pas $2 \in \mathcal{R}^{\to}(A \cap B)$ puisque $A \cap B = \varnothing$ donc $\mathcal{R}^{\to}(A \cap B) = \varnothing$ d'après la prop. 99 p. 130.

Proposition 102 (Image directe par une relation et composition)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

Alors $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\to}(E) = \mathcal{S}^{\to}\big(\mathcal{R}^{\to}(E)\big)$.

Démonstration

Soit z un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
z \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\to}(E) &\iff \exists x \in E, x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff \exists x \in E, \exists y, \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\big) \text{ d'après la prop. 86 p. 116} \\
&\iff \exists y, \exists x \in E, \big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z\big) \\
&\iff \exists y, \Big(\big(\exists x \in E, x\mathcal{R}y\big) \text{ et } y\mathcal{S}z\Big) \\
&\iff \exists y, \Big(y \in \mathcal{R}^{\to}(E) \text{ et } y\mathcal{S}z\Big) \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff \exists y \in \mathcal{R}^{\to}(E), y\mathcal{S}z \\
&\iff z \in \mathcal{S}^{\to}\big(\mathcal{R}^{\to}(E)\big) \text{ d'après la prop. 98 p. 130}
\end{aligned}$$

Donc $z \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\to}(E) \iff z \in \mathcal{S}^{\to}\big(\mathcal{R}^{\to}(E)\big)$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall z, \Big(z \in (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\to}(E) \iff z \in \mathcal{S}^{\to}\big(\mathcal{R}^{\to}(E)\big)\Big)$.

Donc $\boxed{(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\to}(E) = \mathcal{S}^{\to}\big(\mathcal{R}^{\to}(E)\big)}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 103 (Image directe par la relation vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\varnothing^{\rightarrow}(E) = \varnothing$.

Démonstration

Par définition, on a $\varnothing^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathrm{im}(\varnothing)$.

Or, $\mathrm{im}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

Donc $\varnothing^{\rightarrow}(E) \subseteq \varnothing$.

Donc $\boxed{\varnothing^{\rightarrow}(E) = \varnothing}$ d'après la prop. 11 p. 15.

CQFD.

Proposition 104 (Image directe par l'identité)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F) = E \cap F$.

Démonstration

Soit y un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F)$.

Il existe donc au moins un ensemble $x \in F$ tel que $x\mathrm{id}_E y$.

Soit un tel x.

On a donc $(x; y) \in \mathrm{id}_E$.

Or, $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$ par définition de id_E.

Donc $(x; y) \in E^2$.

Donc $x \in E$ et $y \in E$.

En particulier, on a $y \in E$.

Or, $x\mathrm{id}_E y$.

Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Or, $x \in F$ par définition.

Donc $y \in F$.

Ainsi, on a $y \in E$ et $y \in F$.

Donc $y \in E \cap F$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc si $y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F)$, alors $y \in E \cap F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in E \cap F$.

On a donc $y \in E$ et $y \in F$ d'après la prop. 35 p. 42.

Comme $y \in E$, et $y = y$, on a $y\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Or, $y \in F$.

Donc $y \in F$ et $y\mathrm{id}_E y$.

Donc $y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F)$ d'après la prop. 98 p. 130.

Donc si $y \in E \cap F$, alors $y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F)$.

Ainsi, $y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F)$ si et seulement si $y \in E \cap F$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F) \iff y \in E \cap F\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F) = E \cap F}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 105 (Image directe par un produit cartésien)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. si $E \cap G \neq \varnothing$, alors $(E \times F)^{\rightarrow}(G) = F$.
2. si $E \cap G = \varnothing$, alors $(E \times F)^{\rightarrow}(G) = \varnothing$.

Démonstration

1. Supposons que $E \cap G \neq \varnothing$.

$\boxed{\subseteq}$

Par définition de l'image directe, on a $(E \times F)^{\rightarrow}(G) \subseteq \mathrm{im}(E \times F)$.

Or, $\mathrm{im}(E \times F) = F$ d'après la prop. 84 p. 115.

Donc $(E \times F)^{\rightarrow}(G) \subseteq F$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in F$.

Or, $E \cap G \neq \varnothing$ par hypothèse.
Il existe donc au moins un ensemble $x \in E \cap G$.
Soit un tel x.
On a donc $x \in E$ et $x \in G$ d'après la prop. 35 p. 42.

On a donc $x \in E$ et $y \in F$.
Donc $(x; y) \in E \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $x(E \times F)y$.
De plus, on sait que $x \in G$.
Donc $y \in (E \times F)^{\rightarrow}(G)$ d'après la prop. 98 p. 130.

Donc si $y \in F$, alors $y \in (E \times F)^{\rightarrow}(G)$.
Donc $\forall y, \big(y \in F \implies y \in (E \times F)^{\rightarrow}(G)\big)$.
Donc $F \subseteq (E \times F)^{\rightarrow}(G)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{(E \times F)^{\rightarrow}(G) = F}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) Supposons que $E \cap G = \varnothing$.
On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(E \times F)^{\rightarrow}(G) &= (E \times F)^{\rightarrow}\big(G \cap \mathrm{dom}(E \times F)\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 130} \\
&= (E \times F)^{\rightarrow}(G \cap E) \quad \text{car } \mathrm{dom}(E \times F) = E \text{ d'après la prop. 84 p. 115} \\
&= (E \times F)^{\rightarrow}(E \cap G) \text{ par commutativité de la conjonction} \\
&= (E \times F)^{\rightarrow}(\varnothing) \text{ car par hypothèse } E \cap G = \varnothing \\
&= \varnothing \text{ d'après la prop. 99 p. 130}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(E \times F)^{\rightarrow}(G) = \varnothing}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

2.6 Image réciproque par une relation binaire

Définition 29 (Image réciproque d'un ensemble par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **image réciproque** de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists y \in E, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$.

Remarque :

Pour y un ensemble, l'image réciproque $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ est l'ensemble des antécédents de y par $\mathcal{R}$.

Proposition 106 (Image directe et réciproque par une relation et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$
2. $({}^t\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$

Démonstration

1

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) &= \left\{y \in \mathrm{im}({}^t\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, x\,{}^t\mathcal{R}y\right\} \text{ par définition de } ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \\
&= \left\{y \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, x\,{}^t\mathcal{R}y\right\} \text{ car } \mathrm{im}({}^t\mathcal{R}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \text{ d'après la prop. 95 p. 126} \\
&= \left\{y \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, y\mathcal{R}x\right\} \text{ car } x\,{}^t\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\
&= \left\{x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists y \in E, x\mathcal{R}y\right\} \text{ puisque } x \text{ et } y \text{ sont des variables « \textit{muettes} »} \\
&= \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)}$ par transitivité de l'égalité.

2

On a les égalités suivantes :

$({}^t\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) \underset{1}{=} \big({}^t({}^t\mathcal{R})\big)^{\rightarrow}(E) \underset{\text{94 p. 126}}{=} \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.

Donc $\boxed{({}^t\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

Proposition 107 (Caractérisation de l'image réciproque par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et x deux ensembles.

On a alors $x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \iff \exists y \in E, x\mathcal{R}y$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) &\iff x \in ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \text{ car } \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \\ &\iff \exists y \in E, y\,{}^t\mathcal{R}x \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\ &\iff \exists y \in E, x\mathcal{R}y \text{ car } y\,{}^t\mathcal{R}x \Leftrightarrow x\mathcal{R}y \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \iff \exists y \in E, x\mathcal{R}y}$ par transitivité de l'équivalence.

CQFD.

Proposition 108 (Images réciproques particulières par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$
2. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$
3. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing$
4. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$

Démonstration

1. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) &= \big({}^t\mathcal{R}\big)^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \\ &= \big({}^t\mathcal{R}\big)^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}\,\big({}^t\mathcal{R}\big)\big) \text{ d'après la prop. 95 p. 126} \\ &= \mathrm{im}\,\big({}^t\mathcal{R}\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 130} \\ &= \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \text{ d'après la prop. 95 p. 126} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ par transitivité de l'égalité.

2. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} R^{\leftarrow}(E) &= \big({}^t\mathcal{R}\big)^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \\ &= \big({}^t\mathcal{R}\big)^{\rightarrow}\big(E \cap \mathrm{dom}({}^t\mathcal{R})\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 130} \\ &= \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(E \cap \mathrm{dom}({}^t\mathcal{R})\big) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \end{aligned}$$

$$= \mathcal{R}^{\leftarrow}\left(E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R})\right) \text{ d'après la prop. 95 p. 126}$$

Donc $\boxed{R^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\left(E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R})\right)}$ par transitivité de l'égalité.

(3) On a les égalités suivantes :
$\mathcal{R}^{\leftarrow}(\varnothing) \underset{\text{106 p. 139}}{=} ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(\varnothing) \underset{\text{99 p. 130}}{=} \varnothing$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing}$ par transitivité de l'égalité.

(4) On a les équivalences suivantes :
$\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \neq \varnothing \underset{\text{106 p. 139}}{\iff} ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \neq \varnothing \underset{\text{99 p. 130}}{\iff} E \cap \mathrm{dom}({}^t\mathcal{R}) \neq \varnothing \underset{\text{95 p. 126}}{\iff} E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R}) \neq \varnothing}$ par transitivité de l'équivalence.
CQFD.

Proposition 109 (Croissance de l'image réciproque par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.
On a alors :

(1) Si $E \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(F)$.
On dit que l'image réciproque par une relation binaire est **croissante** pour l'inclusion.

(2) En particulier, si $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq E$, on a $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Démonstration

(1)
Supposons que $E \subseteq F$.
On a donc $({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \subseteq ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(F)$ par croissance de l'image directe.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(F)}$ d'après la prop. 106 p. 139.

(2)
Supposons que $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq E$.
On a donc $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$ d'après (1).
Or, $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 108 p. 140.
Donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$.
Mais $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ par définition de l'image réciproque.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})}$ par antisymétrie de l'inclusion.

. **CQFD**.

Proposition 110 (Image réciproque par une relation, union et intersection)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

1. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)$.
   On dit que l'image réciproque par une relation binaire est un **morphisme** pour l'union.

2. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)$.
   On dit que l'image réciproque par une relation binaire est un **sous-morphisme** pour l'intersection.

Démonstration

1. On a les égalités suivantes :
$\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cup B) \underset{106\text{ p. }139}{=} ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A \cup B) \underset{101\text{ p. }134}{=} ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A) \cup ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(B) \underset{106\text{ p. }139}{=} \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)}$ par transitivité de l'égalité.

2.
On sait que $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cap B) = ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A \cap B)$ d'après la prop. 106 p. 139.
Or, $({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A) \cap ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(B)$ puisque l'image directe est un sous-morphisme pour l'intersection.
Donc $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cap B) \subseteq ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(A) \cap ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(B)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)}$ d'après la prop. 106 p. 139.
CQFD.

Proposition 111 (Image réciproque par une relation et composition)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

On a alors $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)\big)$.

Démonstration

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) &= \big({}^t(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})\big)^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}\\
&= \big({}^t\mathcal{R}\circ{}^t\mathcal{S}\big)^{\rightarrow}(E) \quad \text{car } {}^t(\mathcal{S}\circ\mathcal{R}) = {}^t\mathcal{R}\circ{}^t\mathcal{S} \text{ d'après la prop. 96 p. 127}\\
&= ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}\big(({}^t\mathcal{S})^{\rightarrow}(E)\big) \text{ d'après la prop. 102 p. 135}\\
&= \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(({}^t\mathcal{S})(E)\big) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}\\
&= \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)\big) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\mathcal{S}\circ\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)\big)}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

Proposition 112 (Image réciproque par la relation vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\varnothing^{\leftarrow}(E) = \varnothing$.

Démonstration

On a les égalités suivantes :

$\varnothing^{\leftarrow}(E) \underset{\text{106 p. 139}}{=} ({}^t\varnothing)^{\rightarrow}(E) \underset{\text{97 p. 128}}{=} \varnothing^{\rightarrow}(E) \underset{\text{103 p. 136}}{=} \varnothing$.

Donc $\boxed{\varnothing^{\leftarrow}(E) = \varnothing}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

Proposition 113 (Image réciproque par l'identité)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors ${\mathrm{id}_E}^{\leftarrow}(F) = E\cap F$.

Démonstration

On a ${\mathrm{id}_E}^{\leftarrow}(F) \underset{\text{106 p. 139}}{=} ({}^t\mathrm{id}_E)^{\rightarrow}(F) \underset{\text{?? p. ??}}{=} {\mathrm{id}_E}^{\rightarrow}(F) \underset{\text{104 p. 136}}{=} E\cap F$.

Donc $\boxed{{\mathrm{id}_E}^{\leftarrow}(F) = E\cap F}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

Proposition 114 (Image réciproque par un produit cartésien)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. Si $F \cap G \neq \varnothing$, alors $(E \times F)^{\leftarrow}(G) = E$.
2. Si $F \cap G = \varnothing$, alors $(E \times F)^{\leftarrow}(G) = \varnothing$.

Démonstration

1. Supposons que $F \cap G \neq \varnothing$.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(E \times F)^{\leftarrow}(G) &= \left({}^t(E \times F)\right)^{\rightarrow}(G) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \\ &= (F \times E)^{\rightarrow}(G) \quad \text{car } {}^t(E \times F) = F \times E \text{ d'après la prop. ?? p. ??} \\ &= E \text{ d'après la prop. 105 p. 137 car } F \cap G \neq \varnothing \text{ par hypothèse}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(E \times F)^{\leftarrow}(G) = E}$ par transitivité de l'égalité.

2. Supposons que $F \cap G = \varnothing$.

On a alors $(E \times F)^{\leftarrow}(G) \underset{106\text{ p. }139}{=} \left({}^t(E \times F)\right)^{\rightarrow}(G) \underset{??\text{ p. }??}{=} (F \times E)^{\rightarrow}(G) \underset{105\text{ p. }137}{=} \varnothing$.

Donc $\boxed{(E \times F)^{\leftarrow}(G) = \varnothing}$ par transitivité de l'égalité.

CQFD.

2.7 Union de relations binaires

Proposition 115 (L'union de deux relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est une relation binaire.

Démonstration

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.

On a donc $c \in \mathcal{R}$ ou $c \in \mathcal{S}$.

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $c \in \mathcal{R}$.

On sait que $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $c \in \mathcal{S}$.

On sait que $\mathcal{S}$ est une relation binaire.

Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.

Dans les deux cas, c est un couple.

Donc si $c \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, alors c est un couple.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \implies c \text{ est un couple}\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \text{ est une relation binaire}}$ par définition.

CQFD.

Proposition 116 (Caractérisation de l'union de deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff \big(x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y\big)$.

Démonstration

$x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff (x;y) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{S} \iff \big((x;y) \in \mathcal{R} \text{ ou } (x;y) \in \mathcal{S}\big) \iff \big(x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\boxed{x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff \big(x\mathcal{R}y \text{ ou } x\mathcal{S}y\big)}$ par transitivité de l'équivalence.

Proposition 117 (Relation transposée d'une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors ${}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = {}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S}$.

On dit que le passage à la transposée est un **morphisme** pour l'union.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x\,{}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y &\iff y(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff y\mathcal{R}x \text{ ou } y\mathcal{S}x \text{ d'après la prop. 116 p. 145} \end{aligned}$$

$\iff x\,{}^t\mathcal{R}y$ ou $x\,{}^t\mathcal{S}y$ d'après la prop. 93 p. 124

$\iff x({}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S})y$ d'après la prop. 116 p. 145

Donc $x\,{}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S})y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(x\,{}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S})y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\,{}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S})y\big)$.

Donc $\boxed{{}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = {}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S}}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 118 (Domaine et image d'une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})$

   On dit que le passage au domaine d'une relation est un **morphisme** pour l'union.

2. $\mathrm{im}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{im}(\mathcal{S})$

   On dit que le passage à l'image d'une relation est un **morphisme** pour l'union.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff \exists y, x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y$ d'après la prop. 81 p. 110

$\iff \exists y, (x\mathcal{R}y$ ou $x\mathcal{S}y)$ d'après la prop. 116 p. 145

$\iff (\exists y, x\mathcal{R}y)$ ou $(\exists y, x\mathcal{S}y)$

$\iff x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ ou $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110

$\iff x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 25 p. 30

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \iff x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})}$ par définition de l'égalité.

2.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\mathcal{R}\cup\mathcal{S}) &= \mathrm{dom}\big({}^t(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\big) \text{ d'après la prop. 95 p. 126}\\
&= \mathrm{dom}\big(({}^t\mathcal{R})\cup({}^t\mathcal{S})\big) \text{ d'après la prop. 117 p. 145}\\
&= \mathrm{dom}({}^t\mathcal{R})\cup\mathrm{dom}({}^t\mathcal{S}) \text{ d'après } (1)\\
&= \mathrm{im}(\mathcal{R})\cup\mathrm{im}(\mathcal{S}) \text{ d'après la prop. 95 p. 126}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{im}(\mathcal{R}\cup\mathcal{S}) = \mathrm{im}(\mathcal{R})\cup\mathrm{im}(\mathcal{S})}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

Proposition 119 (Distributivité de la composition sur l'union)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.
On a alors :

(1) $\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T}) = (\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})$.
On dit que la composition est **distributive à gauche** sur l'union.

(2) $(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T} = (\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})$.
On dit que la composition est **distributive à droite** sur l'union.

D'une manière plus générale, du fait de la distributivité à gauche et à droite de la composition sur l'union, on dit que la composition est **distributive** sur l'union.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit z un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x\big(\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})\big)z &\iff \exists y, \big(x(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \text{ d'après la prop. 86 p. 116}\\
&\iff \exists y, \big((x\mathcal{S}y \text{ ou } x\mathcal{T}y) \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \text{ d'après la prop. 116 p. 145}\\
&\iff \exists y, \big((x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \text{ ou } (x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\big)\\
&\qquad \text{par distributivité de la conjonction sur la disjonction}\\
&\iff \big(\exists y, (x\mathcal{S}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\big) \text{ ou } \big(\exists y, (x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\big)\\
&\iff x(\mathcal{R}\circ\mathcal{S})z \text{ ou } x(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})z \text{ d'après la prop. 86 p. 116}\\
&\iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\big)z \text{ d'après la prop. 116 p. 145}
\end{aligned}$$

Donc $x\big(\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\big)z$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall z, \Big(x\big(\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\big)z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall z, \Big(x\big(\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T})\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\big)z\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}\circ(\mathcal{S}\cup\mathcal{T}) = (\mathcal{R}\circ\mathcal{S})\cup(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})}$ d'après la prop. 74 p. 100.

(2)

Soit x un ensemble.

Soit z un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x\big((\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T}\big)z &\iff \exists y, \big(x\mathcal{T}y \text{ et } y(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})z\big) \text{ d'après la prop. 86 p. 116}\\
&\iff \exists y, \big(x\mathcal{T}y \text{ et } (y\mathcal{R}z \text{ ou } y\mathcal{S}z)\big) \text{ d'après la prop. 116 p. 145}\\
&\iff \exists y, \big((x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \text{ ou } (x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{S}z)\big)\\
&\qquad \text{par distributivité de la conjonction sur la disjonction}\\
&\iff \big(\exists y, (x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\big) \text{ ou } \big(\exists y, (x\mathcal{T}y \text{ et } y\mathcal{R}z)\big)\\
&\iff x(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})z \text{ ou } x(\mathcal{R}\circ\mathcal{T})z \text{ d'après la prop. 86 p. 116}\\
&\iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})\big)z \text{ d'après la prop. 116 p. 145}
\end{aligned}$$

Donc $x\big((\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T}\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})\big)z$

Donc $\forall z, \Big(x\big((\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T}\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})\big)z\Big)$

Donc $\forall x, \forall z, \Big(x\big((\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T}\big)z \iff x\big((\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})\big)z\Big)$.

Donc $\boxed{(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})\circ\mathcal{T} = (\mathcal{R}\circ\mathcal{T})\cup(\mathcal{S}\circ\mathcal{T})}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 120 (Images directe et réciproque par une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

On a alors :

(1) $(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cup\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$

(2) $(\mathcal{R}\cup\mathcal{S})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)\cup\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

Démonstration

(1)

Soit y un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
y \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) &\iff \exists x \in E, x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff \exists x \in E, (x\mathcal{R}y \ \text{ ou } \ x\mathcal{S}y) \text{ d'après la prop. 116 p. 145} \\
&\iff (\exists x \in E, x\mathcal{R}y) \ \text{ ou } \ (\exists x \in E, x\mathcal{S}y) \\
&\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \ \text{ ou } \ y \in \mathcal{S}^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\
&\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 25 p. 30}
\end{aligned}$$

Donc $y \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall y, \big(y \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)\big)$.
Donc $\boxed{(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)}$ par définition de l'égalité.

2

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\leftarrow}(E) &= \big({}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})\big)^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139} \\
&= \big(({}^t\mathcal{R}) \cup ({}^t\mathcal{S})\big)^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 117 p. 145} \\
&= ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) \cup ({}^t\mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \text{ d'après } 1 \\
&= \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\leftarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)}$ par transitivité de l'égalité.
CQFD.

2.8 Intersection de relations binaires

Proposition 121 (L'intersection de deux relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
Alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une relation binaire.

Démonstration

On a $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ d'après la prop. 36 p. 44.
Or, $\mathcal{R}$ est une relation binaire par hypothèse.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$ est une relation binaire d'après la prop. 76 p. 105.
CQFD.

Proposition 122 (Caractérisation de l'intersection de deux relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :

$x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff (x;y) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{S} \underset{\text{35 p. 42}}{\iff} \big((x;y) \in \mathcal{R} \text{ et } (x;y) \in \mathcal{S}\big) \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$.

Donc $\boxed{x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)}$ par transitivité de l'équivalence.

CQFD.

Proposition 123 (Transposée d'une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors ${}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = ({}^t\mathcal{R}) \cap ({}^t\mathcal{S})$.

On dit que le passage à la relation transposée est un **morphisme** pour l'intersection.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x\,{}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y &\iff y(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff y\mathcal{R}x \text{ et } y\mathcal{S}x \text{ d'après la prop. 122 p. 150} \\ &\iff x\,{}^t\mathcal{R}y \text{ et } x\,{}^t\mathcal{S}y \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \\ &\iff x({}^t\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{S})y \text{ d'après la prop. 122 p. 150} \end{aligned}$$

Donc $x\,{}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{S})y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(x\,{}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{S})y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\,{}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff x({}^t\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{S})y\big)$.

Donc $\boxed{{}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = ({}^t\mathcal{R}) \cap ({}^t\mathcal{S})}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 124 (Domaine et image d'une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})$
2. $\mathrm{im}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{S})$

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$.

Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel y.

On a donc $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$ d'après la prop. 122 p. 150.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$ et $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$, alors $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \implies x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})}$ par définition de l'inclusion.

2 On a les égalités et les inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathrm{im}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) &= \mathrm{dom}\big({}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})\big) \text{ d'après la prop. 95 p. 126} \\
&= \mathrm{dom}\big(({}^t\mathcal{R}) \cap ({}^t\mathcal{S})\big) \text{ d'après la prop. 123 p. 150} \\
&\subseteq \mathrm{dom}({}^t\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}({}^t\mathcal{S}) \text{ d'après } 1 \\
&= \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{S}) \text{ d'après la prop. 95 p. 126}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathrm{im}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{S})}$ par transitivité de l'inclusion.

CQFD.

Remarque :

Les inclusions réciproques sont fausses : prenons $\mathcal{R} = \big\{(1;2)\big\}$ et $\mathcal{S} = \big\{(1;3)\big\}$.

On a donc $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \varnothing$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing$.

Mais $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1\} = \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S}) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

Or, $1 \in \{1\}$ donc $\{1\} \neq \varnothing \underset{11\text{ p. }15}{\text{donc}} \{1\} \not\subseteq \varnothing$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S}) \not\subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$.

Proposition 125 (Images directes et réciproques par une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$
2. $(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

Démonstration

1.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in (\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E)$.

Il existe donc au moins un ensemble $x \in E$ tel que $x(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})y$ d'après la prop. 98 p. 130.

Soit un tel x.

On a donc $x(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})y$.

Donc $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$ d'après la prop. 122 p. 150.

Donc $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$ et $x\mathcal{S}y$.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$ et $y \in \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ d'après la prop. 98 p. 130.

Donc $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc si $y \in (\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E)$, alors $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$.

Donc $\forall y, \big(y \in (\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E) \implies y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)\big)$.

Donc $\boxed{(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E)}$ par définition de l'inclusion.

2. On a les égalités et inclusions suivantes :

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E) &= \big({}^t(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})\big)^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}\\
&= \big({}^t(\mathcal{R})\cap{}^t(\mathcal{S})\big)^{\rightarrow}(E) \quad \text{car } {}^t(\mathcal{R}\cap\mathcal{S}) = {}^t(\mathcal{R})\cap{}^t(\mathcal{S}) \text{ d'après la prop. 123 p. 150}\\
&\subseteq ({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E)\cap({}^t\mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \text{ d'après } 1\\
&= \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\leftarrow}(E) \text{ d'après la prop. 106 p. 139}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\mathcal{R}\cap\mathcal{S})^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)}$ par transitivité de l'inclusion.

CQFD.

Remarque :

Les inclusions réciproques ne sont pas vraies en toute généralité.

Prenons l'exemple de $\mathcal{R} = \{(1;3)\}$, $\mathcal{S} = \{(2;3)\}$ et $E = \{1;2\}$.

On a alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) = \{3\} = \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\cap\mathcal{S}^{\rightarrow}(E) = \{3\}\cap\{3\} \underset{37\text{ p. }45}{=} \{3\}$.

Mais $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \varnothing$ donc $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) = \varnothing^{\rightarrow}(E) \underset{\text{112 p. 143}}{=} \varnothing$.
Comme $3 \in \{3\}$, on a $\{3\} \neq \varnothing \underset{\text{11 p. 15}}{\text{donc}} \{3\} \not\subseteq \varnothing$ donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cap \mathcal{S}^{\rightarrow}(E) \not\subseteq (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\rightarrow}(E)$.

2.9 Restrictions et prolongements de relations binaires

Définition 30 (Restriction et prolongement de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **restriction** de $\mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
On dit aussi que $\mathcal{S}$ est un **prolongement** de $\mathcal{R}$.

Proposition 126 (Union et prolongement de relations)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.
On a alors :

1. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est un prolongement commun à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

2. Si $\mathcal{T}$ est un prolongement commun à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}$ est un prolongement de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
   On dit que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est **minimum** pour l'inclusion,
   parmi les prolongements communs à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

Démonstration

1. On sait que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ et que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \text{ est un prolongement commun à } \mathcal{R} \text{ et à } \mathcal{S}}$.

2. Supposons que $\mathcal{T}$ est un prolongement commun à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.
Donc $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ par définition.
Donc $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $\boxed{\mathcal{T} \text{ est un prolongement de } \mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$ par définition.
CQFD.

Proposition 127 (Intersection et restriction de relations)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.
On a alors :

1. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une restriction commune à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

2. Si $\mathcal{T}$ est une restriction commune à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}$ est une restriction de $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.
   On dit que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est **maximum** pour l'inclusion,
   parmi les restrictions communes à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

Démonstration

1. On sait que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$ et que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ d'après la prop. 36 p. 44.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \cap \mathcal{S} \text{ est une restriction commune à } \mathcal{R} \text{ et à } \mathcal{S}}$.

2. Supposons que $\mathcal{T}$ est une restriction commune à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.
Donc $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$ et $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ par définition.
Donc $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ d'après la prop. 36 p. 44.
Donc $\boxed{\mathcal{T} \text{ est une restriction de } \mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$ par définition.
CQFD.

Proposition 128 (Caractérisation des restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
Alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ si et seulement $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.
Soit x un ensemble.
Soit y un ensemble.
Supposons que $x\mathcal{R}y$.
On a donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.
Or, $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ par hypothèse.

Donc $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ par définition.

Donc $(x; y) \in \mathcal{S}$.

Donc $x\mathcal{S}y$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $x\mathcal{S}y$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

Donc si $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$, alors $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \mathcal{R}$.

Alors c est un couple car $\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

Soient de tels x et y.

On a donc $c \in \mathcal{R}$ et $c = (x; y)$.

Donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Donc $(x; y) \in \mathcal{S}$.

Or, $c = (x; y)$.

Donc $c \in \mathcal{S}$.

Donc si $c \in \mathcal{R}$, alors $c \in \mathcal{S}$.

Donc $\forall c, \big(c \in \mathcal{R} \implies c \in \mathcal{S}\big)$.

Donc $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ par définition de l'inclusion.

Donc $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

Donc si $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$, alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une restriction de } \mathcal{S} \text{ si et seulement } \forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)}$.

CQFD.

Proposition 129 (Domaine, images et restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

Supposons que $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$
2. $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})$
3. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$
4. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

Démonstration

$\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ par hypothèse.

On a donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$ d'après la prop. 128 p. 154.

Notons $(\star)$ cette assertion.

1.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel y.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R})$, alors $x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \implies x \in \mathrm{dom}(\mathcal{S})\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})}$ par définition de l'inclusion.

2.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.

Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$, alors $y \in \mathrm{im}(\mathcal{S})$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \implies y \in \mathrm{im}(\mathcal{S})\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})}$ par définition de l'inclusion.

③

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.

Il existe donc au moins un ensemble $x \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 98 p. 130.

Soit un tel x.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Ainsi, $x \in E$ et $x\mathcal{S}y$.

Donc $y \in \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ d'après la prop. 98 p. 130.

Donc si $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$, alors $y \in \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \implies y \in \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)}$ par définition de l'inclusion.

④

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$.

Il existe donc au moins un ensemble $y \in E$ tel que $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 107 p. 139.

Soit un tel y.

On a donc $x\mathcal{R}y$.

Donc $x\mathcal{S}y$ d'après $(\star)$.

Ainsi, $y \in E$ et $x\mathcal{S}y$.

Donc $x \in \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$ d'après la prop. 107 p. 139.

Donc si $x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$, alors $x \in \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \implies x \in \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)}$ par définition de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 130 (Transposée et restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$.

Autrement dit, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \iff {}^t\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{S}$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

On a donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$ d'après la prop. 128 p. 154.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x{}^t\mathcal{R}y$.

On a donc $y\mathcal{R}x$ d'après la prop. 93 p. 124.

Donc $y\mathcal{S}x$ d'après $(\star)$.

Donc $x{}^t\mathcal{S}y$ d'après la prop. 93 p. 124.

Donc si $x{}^t\mathcal{R}y$, alors $x{}^t\mathcal{S}y$.

Donc $\forall y, \big(x{}^t\mathcal{R}y \implies x{}^t\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x{}^t\mathcal{R}y \implies x{}^t\mathcal{S}y\big)$.

Donc ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc si $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$, alors ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$.

Donc ${}^t({}^t\mathcal{R})$ est une restriction de ${}^t({}^t\mathcal{S})$ d'après $\boxed{\Rightarrow}$.

Or, ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ et ${}^t({}^t\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ par involution de la transposition.

Donc $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

Donc si ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$, alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une restriction de } \mathcal{S} \text{ si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est une restriction de } {}^t\mathcal{S}}$.

CQFD.

Définition 31 (Restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **restriction** de $\mathcal{R}$ à E la relation $\mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$.

On la note $\mathcal{R}_{|E}$.

Proposition 131 (La restriction d'une relation à un ensemble est une restriction)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.
Alors $\mathcal{R}_{|E}$ est une restriction de $\mathcal{R}$.

Démonstration

On sait que $\mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big) \subseteq \mathcal{R}$ d'après la prop. 36 p. 44.
Donc $\mathcal{R}_{|E} \subseteq \mathcal{R}$ par définition.
Donc $\boxed{\mathcal{R}_{|E} \text{ est une restriction de } \mathcal{R}}$ par définition.
CQFD.

Proposition 132 (Caractérisation de la restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E, x et y trois ensembles.
On a alors $x(\mathcal{R}_{|E})y \iff \big(x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x(\mathcal{R}_{|E})y$.
Or, $\mathcal{R}_{|E} = \mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$ par définition.
Donc $x\Big(\mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)\Big)y$.
Donc $x\mathcal{R}y$ et $x\big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)y$ d'après la prop. 122 p. 150.
En particulier, on a $x\big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)y$.
Donc $(x; y) \in E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Donc $x \in E$ et $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 65 p. 85.
En particulier, $x \in E$.

Ainsi, $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$.

Donc si $x(\mathcal{R}_{|E})y$, alors $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$.

Comme $x\mathcal{R}y$, on a $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Ainsi, on a $x \in E$ et $y \in \mathrm{im}(\mathcal{R})$.
Donc $(x;y) \in E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc $x\big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)y$.

Ainsi, $x\mathcal{R}y$ et $x\big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)y$.
Donc $x\Big(\mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)\Big)y$ d'après la prop. 122 p. 150.
Or, $\mathcal{R}_{|E} = \mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$ par définition.
Donc $x(\mathcal{R}_{|E})y$.

Donc si $x \in E$ et $x\mathcal{R}y$, alors $x(\mathcal{R}_{|E})y$.

Finalement, $\boxed{x(\mathcal{R}_{|E})y \iff \big(x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y\big)}$.
CQFD.

Proposition 133 (Identité et restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.
Alors $\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E = \mathcal{R}_{|E}$.

Démonstration

Soit x un ensemble.

Soit z un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z$.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que $x\mathrm{id}_E y$ et $y\mathcal{R}z$ d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel y.

En particulier, on a $x\mathrm{id}_E y$.
On a donc $(x;y) \in \mathrm{id}_E$.
Or, $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$ par définition de id_E.
Donc $(x;y) \in E^2$.
Donc $x \in E$ et $y \in E$ d'après la prop. 65 p. 85.
De plus, on a $x\mathrm{id}_E y$.
Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Ainsi, on a $x = y$ et $y\mathcal{R}z$.

Donc $x\mathcal{R}z$.

Ainsi, on a $x \in E$ et $x\mathcal{R}z$.

Donc $x(\mathcal{R}_{|E})z$ d'après la prop. 132 p. 159.

Donc si $x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z$, alors $x(\mathcal{R}_{|E})z$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x(\mathcal{R}_{|E})z$.

On a donc $x \in E$ et $x\mathcal{R}z$ d'après la prop. 132 p. 159.

Posons $y := x$.

On a donc $x \in E$ et $y \in E$ et $x = y$.

Donc $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 78 p. 106.

De plus, on a $x\mathcal{R}z$ donc $y\mathcal{R}z$.

Ainsi, on a $x\mathrm{id}_E y$ et $y\mathcal{R}z$.

Donc $x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Donc si $x(\mathcal{R}_{|E})z$, alors $x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z$.

Finalement, $x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z \iff x(\mathcal{R}_{|E})z$

Donc $\forall z, \big(x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z \iff x(\mathcal{R}_{|E})z\big)$.

Donc $\forall x, \forall z, \big(x(\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E)z \iff x(\mathcal{R}_{|E})z\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E = \mathcal{R}_{|E}}$ d'après la prop. 74 p. 100.

CQFD.

Proposition 134 (Domaine et images de la restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles. On a alors :

1. $\mathrm{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap E$
2. $\mathrm{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$
3. ${\mathcal{R}_{|E}}^{\rightarrow}(F) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F)$
4. ${\mathcal{R}_{|E}}^{\leftarrow}(F) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E$

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) &\iff \exists y, x\left(\mathcal{R}_{|E}\right) y \text{ d'après la prop. 81 p. 110} \\ &\iff \exists y, (x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y) \text{ d'après la prop. 128 p. 154} \\ &\iff x \in E \text{ et } \exists y, x\mathcal{R}y \\ &\iff x \in E \text{ et } x \in \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \text{ d'après la prop. 81 p. 110} \\ &\iff x \in \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \cap E \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \end{aligned}$$

Donc $x \in \operatorname{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) \iff x \in \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \cap E$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \left(x \in \operatorname{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) \iff x \in \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \cap E\right)$.
Donc $\boxed{\operatorname{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \cap E}$ par définition de l'égalité.

2

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) &\iff \exists x, x\left(\mathcal{R}_{|E}\right) y \text{ d'après la prop. 81 p. 110} \\ &\iff \exists x, (x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y) \text{ d'après la prop. 128 p. 154} \\ &\iff \exists x \in E, x\mathcal{R}y \\ &\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \end{aligned}$$

Donc $y \in \operatorname{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall y, \left(y \in \operatorname{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\right)$.
Donc $\boxed{\operatorname{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)}$ par définition de l'égalité.

3

Soit y un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y \in {\mathcal{R}_{|E}}^{\rightarrow}(F) &\iff \exists x \in F, x\left(\mathcal{R}_{|E}\right) y \text{ d'après la prop. 98 p. 130} \\ &\iff \exists x \in F, (x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y) \text{ d'après la prop. 128 p. 154} \\ &\iff \exists x, (x \in F \text{ et } x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y) \\ &\iff \exists x, (x \in E \cap F \text{ et } x\mathcal{R}y) \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \end{aligned}$$

$$\iff \exists x \in E \cap F, x\mathcal{R}y$$
$$\iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F) \text{ d'après la prop. 98 p. 130}$$

Donc $y \in \mathcal{R}_{|E}{}^{\rightarrow}(F) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F)$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall y, \big(y \in \mathcal{R}_{|E}{}^{\rightarrow}(F) \iff y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F)\big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}_{|E}{}^{\rightarrow}(F) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F)}$ par définition de l'égalité.

4

Soit x un ensemble.
On a alors les équivalences suivantes :

$$x \in \mathcal{R}_{|E}{}^{\leftarrow}(F) \iff \exists y \in F, x\left(\mathcal{R}_{|E}\right)y \text{ d'après la prop. 107 p. 139}$$
$$\iff \exists y \in F, (x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y) \text{ d'après la prop. 128 p. 154}$$
$$\iff x \in E \text{ et } \exists y \in F, x\mathcal{R}y$$
$$\iff x \in E, x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \text{ d'après la prop. 107 p. 139}$$
$$\iff x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E \text{ d'après la prop. 35 p. 42}$$

Donc $x \in \mathcal{R}_{|E}{}^{\leftarrow}(F) \iff x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E$ par transitivité de l'équivalence.
Donc $\forall x, \big(x \in \mathcal{R}_{|E}{}^{\leftarrow}(F) \iff x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E\big)$.
Donc $\boxed{\mathcal{R}_{|E}{}^{\leftarrow}(F) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E}$ par définition de l'égalité.
CQFD.

Chapitre 3

Applications

Note de l'auteur

Ce chapitre introduit la notion d'applications, qui sont des relations particulières. Elles permettent notamment de modéliser les notions de transformations (prenant un objet, et donnant un autre en retour), la dépendance de grandeurs en physique, ou bien encore les opérations comme l'addition ou la multiplication. Ainsi, comme tous les chapitres de ce polycopié, ce chapitre est fondamental et indispensable pour toute la suite.

Sommaire

1 Généralités . . . 166

1.1 Applications . . . 166

1.2 Applications particulières . . . 178

1.3 Axiome du choix . . . 185

2 Composition d'applications . . . 188

2.1 Composition . . . 188

2.2 Inverses pour la composition . . . 192

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité . . . 204

4 Images directes et images réciproques . . . 217

4.1 Images directes . . . 217

4.2 Image réciproque . . . 234

4.3 Image directe et image réciproque . . . 245

5 Restriction et prolongement d'applications . . . 250

1 Généralités

1.1 Applications

Définition 32 (Application)

Soit f une relation binaire.

• On dit que f est une **application** si et seulement $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.
Autrement dit, tout élément x admet au plus une image par f.
Pour $x \in \mathrm{dom}(f)$, on notera alors $f(x)$ l'unique y tel que xfy.

• Pour deux ensembles E et F, on dit que f est une application de E dans F si et seulement si :

1. f est une application
2. $\mathrm{dom}(f) = E$
3. $\mathrm{im}(f) \subseteq F$

On notera alors $f : E \to F$.
Ainsi, $\forall x \in E, f(x) \in F$.

Voyons tout de suite une version légèrement différente de la définition d'une application.

Proposition 135 (Caractérisation des applications parmi les relations)

Soit f une relation binaire.
Alors f est une application si et seulement si $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est une application.
On a donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.
Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

D'après $(\star)$, on a $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)\Big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc si f est une application, alors $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

On a donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)\Big)$.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que xfy et xfy'.

En particulier, on a xfy.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $(xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'$ d'après $(\star\star)$ par modus ponens.

Donc $y = y'$ par modus ponens.

Donc si xfy et xfy', alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc f est une application.

Donc si $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$, alors f est une application.

Finalement, $\boxed{\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)}$.

CQFD.

La proposition suivante va nous prouver qu'il existe au moins une application, et nous en donner un exemple par la même occasion.

Proposition 136 (La relation vide est une application)

$\varnothing$ est une application.

En particulier, il existe au moins une application. De plus, on a $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$.

Démonstration

On sait déjà que $\varnothing$ est une relation binaire d'après la prop. 77 p. 105.
L'assertion $\forall x \in \varnothing, \forall y, \forall y', \big((x\varnothing y \text{ et } x\varnothing y') \implies y = y'\big)$ est vraie d'après la prop. 12 p. 16.
Or, $\mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.
Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(\varnothing), \forall y, \forall y', \big((x\varnothing y \text{ et } x\varnothing y') \implies y = y'\big)$.
Donc $\boxed{\varnothing \text{ est une application}}$ d'après la prop. 135 p. 166.

De plus, comme $\mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing$ et $\mathrm{im}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111, on a bien $\boxed{\varnothing : \varnothing \to \varnothing}$.
CQFD.

Mieux encore, nous avons le droit à une application $f : E \to F$ pour tout ensembles E et F, pour peu qu'ils respectent une certaine condition.

Proposition 137 (Existence d'une application d'un ensemble vers un autre

Soient E et F deux ensembles.
$E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe au moins une application $f : E \to F$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$.
D'après le principe du tiers exclu, on a ou bien $E = \varnothing$, ou bien $E \neq \varnothing$.

♦ Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $E = \varnothing$.
Posons $f := \varnothing$.
On sait déjà que f est une application d'après la prop. 136 p. 167.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{\text{82 p. 111}}{=} \varnothing = E$.
Donc $\mathrm{dom}(f) = E$ par transitivité de l'égalité.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(\varnothing) \underset{\text{82 p. 111}}{=} \varnothing \underset{\text{11 p. 15}}{\subseteq} F$.
Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Donc $\boxed{f : E \to F}$.

♦ Plaçons-nous à présent dans le cas où $E \neq \varnothing$.

Or, on a $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$ par hypothèse.

Donc $F \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un ensemble $z \in F$.

Soit un tel z.

Posons $f := E \times \{z\}$.

• **Montrons que f est une relation binaire**.

On a $f \subseteq E \times \{z\}$ par réflexivité de l'inclusion.

Il existe donc au moins deux ensembles G et H tels que $f \subseteq G \times H$.

Donc f est une relation d'après la prop. 73 p. 98.

• **Montrons que f est une application**.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que xfy et xfy'.

On a donc $(x; y) \in f$ et $(x; y') \in f$.

Or $f = E \times \{z\}$.

Donc $(x; y) \in E \times \{z\}$ et $(x; y') \in E \times \{z\}$.

Donc $x \in E$ et $y \in \{z\}$ et $y' \in \{z\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

En particulier, $y = z$ et $y' = z$ par définition d'un singleton.

Donc $y = y'$ par transitivité de l'égalité.

Donc si xfy et xfy', alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc f est une application.

• **Montrons que $f : E \to F$**.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}\big(E \times \{z\}\big) \underset{\text{84 p. 115}}{=} E$.

Donc $\mathrm{dom}(f) = E$ par transitivité de l'égalité.

On a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}\big(E \times \{z\}\big) \underset{\text{84 p. 115}}{=} \{z\} \subseteq F$ puisque $z \in F$.

Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Donc $\boxed{f : E \to F}$.

Dans les deux cas, on a trouvé au moins une application $f : E \to F$.

Donc si $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$, alors il existe au moins une application $f : E \to F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins une application $f : E \to F$.

Soit une telle f.

Deux cas se présentent à nous : ou bien $F = \varnothing$, ou bien $F \neq \varnothing$.

- Supposons dans un premier temps que $F = \varnothing$.

  Comme $f : E \to F$, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

  En particulier, on a $\mathrm{dom}(f) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

  On a donc $f \subseteq E \times F$ d'après la prop. 80 p. 108.

  Mais $F = \varnothing$ donc $E \times F = E \times \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 66 p. 86.

  Donc $f \subseteq \varnothing$ et donc $f = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

  Donc $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

  Mais $f : E \to F$ donc $\mathrm{dom}(f) = E$ donc $E = \varnothing$.

  Dans ce cas-là, on a donc $E = \varnothing$, et donc $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$.

- Supposons dans un second temps que $F \neq \varnothing$.

  Dans ce cas-là, on a bien $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$.

Dans les deux cas, on a bien $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$.

Donc s'il existe au moins une application $f : E \to F$, alors $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$.

Finalement, $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe au moins une application $f : E \to F$.

CQFD.

Proposition 138 (Application d'un ensemble vers un autre)

Soit f une application. Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$
2. Si $f : E \to F$ et $F \subseteq G$, alors $f : E \to G$.

Démonstration

1

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(f)$ par réflexivité de l'égalité et $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{im}(f)$ par réflexivité de l'inclusion.

Donc $\boxed{f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)}$.

2

Supposons que $f : E \to F$ et que $F \subseteq G$.

On a donc $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ et $F \subseteq G$.

Donc $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq G$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $\boxed{f : E \to G}$.

CQFD.

Proposition 139 (Égalité entre deux applications)

Soit E un ensemble. Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{dom}(f) = E = \mathrm{dom}(g)$.

On a alors $f = g \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

On appelle cette équivalence **l'extensionnalité fonctionnelle**.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f = g$.

On a $\forall x \in E, f(x) = f(x)$ par réflexivité de l'égalité.

Donc $\forall x \in E, f(x) = g(x)$ d'après le principe de Leibniz.

Donc si $f = g$, alors $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit c un ensemble. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $c \in f$.

Or, f est une application.

Donc f est une relation binaire.

Donc c est un couple.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

Soient de tels x et y.

On a donc $(x; y) \in f$.

Donc xfy.

Donc $y = f(x)$ par définition de $f(x)$.

De plus $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\mathrm{dom}(f) = E$.

Donc $x \in E$.

Donc $f(x) = g(x)$ d'après $(\star)$.

Donc $y = g(x)$ par transitivité de l'égalité.

Donc xgy par définition de $g(x)$.

Donc $(x; y) \in g$.

Or, $c = (x; y)$.

Donc $c \in g$.

Donc si $c \in f$, alors $c \in g$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $c \in g$.

Or, g est une application.

Donc g est une relation binaire.

Donc c est un couple.

Il existe donc au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

Soient de tels x et y.

On a donc $(x; y) \in g$.

Donc xgy.

Donc $y = g(x)$ par définition de $g(x)$.

De plus $x \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\mathrm{dom}(g) = E$.

Donc $x \in E$.

Donc $f(x) = g(x)$ d'après $(\star)$.

Donc $y = f(x)$ par transitivité de l'égalité.

Donc xfy par définition de $f(x)$.

Donc $(x; y) \in f$.

Or, $c = (x; y)$.

Donc $c \in f$.

Donc si $c \in g$, alors $c \in f$.

Finalement, $c \in f \iff c \in g$.

Donc $\forall c, \big(c \in f \iff c \in g\big)$.

Donc $f = g$ par définition de l'égalité.

Donc si $\forall x \in E, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

Finalement, $\boxed{f = g \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)}$.

CQFD.

Proposition 140 (Unique application du vide dans les autres ensembles)

Soit F un ensemble. Soit f une application.

Alors $f : \varnothing \to F \iff f = \varnothing$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f : \varnothing \to F$.

En particulier, on a $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$.

Donc $\mathrm{dom}(f) \times \mathrm{im}(f) = \varnothing \times \mathrm{im}(f) \underset{66\text{ p. }86}{=} \varnothing$.

Or, $f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 80 p. 108.

Donc $f \subseteq \varnothing$.

Donc $f = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc si $f : \varnothing \to F$, alors $f = \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f = \varnothing$, alors .

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing$.

Donc $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$ par transitivité de l'égalité.

Et $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing \underset{11\text{ p. }15}{\subseteq} F$.

Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi, $\mathrm{dom}(f) = \varnothing$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Donc $f : \varnothing \to F$ puisque f est une application.

Donc si $f = \varnothing$, alors $f : \varnothing \to F$.

Finalement, $\boxed{f : \varnothing \to F \iff f = \varnothing}$.

. **CQFD**.

Proposition 141 (Définition d'une application par une expression)

Soient E et F deux ensembles.

Soit $A(x)$ une expression définie pour tout $x \in E$, et telle que $\forall x \in E, A(x) \in F$.

Alors il existe une unique application $f : E \to F$ telle que $\forall x \in E, f(x) = A(x)$.

On la note alors $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$

Démonstration

♦ **Existence**

Posons $f := \left\{ c \in E \times F \;\middle|\; \pi_d(c) = A\big(\pi_g(c)\big) \right\}$.

• **Montrons que f est une relation binaire**.

Par définition, on a $f \subseteq E \times F$.

Donc f est une relation binaire d'après la prop. 73 p. 98.

• **Montrons que f est une application**.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que xfy et xfy'.

On a donc $(x; y) \in f$ et $(x; y') \in f$.

Posons $c := (x; y)$ et $c' := (x; y')$.

On a donc $c \in f$.

Donc $\pi_d(c) = A\big(\pi_g(c)\big)$.

Or, $\pi_d(c) = \pi_d(x; y) = y$ et $\pi_g(c) = \pi_g(x; y) = x$.

Donc $y = A(x)$.

De même, on a $c' \in f$.

Donc $\pi_d(c') = A\big(\pi_g(c')\big)$.

Or, $\pi_d(c') = \pi_d(x; y') = y'$ et $\pi_g(c) = \pi_g(x; y) = x$.

Donc $y' = A(x)$.

On a donc $y = A(x) = y'$.

Donc $y = y'$ par transitivité de l'égalité.

Donc si xfy et xfy', alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc f est une application.

• **Montrons que** $f : E \to F$.

Par définition, on a $f \subseteq E \times F$.

Donc $\mathrm{dom}(f) \subseteq E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ d'après la prop. 80 p. 108.

Il nous reste donc à montrer que $E \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a donc $A(x) \in F$ par hypothèse.

Comme $x \in E$ et $A(x) \in F$, on a $\big(x; A(x)\big) \in E \times F$ d'après la prop. 65 p. 85.

Posons $c = \big(x; A(x)\big)$.

On a donc $c \in E \times F$.

On a aussi $\pi_d(c) = \pi_d\big(x; A(x)\big) = A(x) = A\Big(\pi_g\big(x; A(x)\big)\Big) = A\big(\pi_g(c)\big)$.

Donc $\pi_d(c) = A\big(\pi_g(c)\big)$ par transitivité de l'égalité.

Donc $c \in f$ par définition de f.

Donc $\big(x; A(x)\big) \in f$.

Donc $xfA(x)$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in \mathrm{dom}(f)\big)$.

Donc $E \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\mathrm{dom}(f) = E$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc comme $\mathrm{im}(f) \subseteq F$, on a $f : E \to F$.

• **Montrons que** $\forall x \in E, f(x) = A(x)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a vu juste au dessus que $xfA(x)$.

Or par définition, $f(x)$ est l'unique ensemble y tel que xfy.

Donc $f(x) = A(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $f(x) = A(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies f(x) = A(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, f(x) = A(x)$.

Finalement, on a bien $\boxed{f : E \to F \text{ telle que } \forall x \in E, f(x) = A(x)}$.

D'où l'existence.

♦ **Unicité**

Soit $g : E \to F$ telle que $\forall x \in E, g(x) = A(x)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a montré que $f(x) = A(x)$.

Or, $g(x) = A(x)$ par hypothèse.

Donc $f(x) = g(x)$ par transitivité de l'égalité.

Donc si $x \in E$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Or, $f : E \to F$ et $g : E \to F$.

Donc $\boxed{f = g}$ d'après la prop. 139 p. 171.

D'où l'unicité.

CQFD.

Notation

Dans la notation $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$, la variable x est dite « muette ».

Cela veut dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit.

Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire un contre-sens.

Ainsi, $\left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & A(y) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & A(z) \end{array}\right)$.

Définition 33 (Ensemble des applications d'un ensemble dans un autre)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle **ensemble des applications** de E dans F l'ensemble $\left\{ f \in \mathscr{P}(E \times F) \;\middle|\; f : E \to F \right\}$.

On le notera $\mathcal{A}(E \to F)$ ou encore F^E.

Proposition 142 (Caractérisation de l'ensemble des applications)

Soient E et F deux ensembles. Soit f un ensemble.
On a alors $f \in \mathcal{A}(E \to F) \iff f : E \to F$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f \in \mathcal{A}(E \to F)$.
On a donc $f \in \mathscr{P}(E \times F)$ et $f : E \to F$.
En particulier, on a $f : E \to F$.
Donc si $f \in \mathcal{A}(E \to F)$, alors $f : E \to F$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f : E \to F$.
En particulier, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ donc $\mathrm{dom}(f) \subseteq E$, et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.
Donc $\mathrm{dom}(f) \times \mathrm{im}(f) \subseteq E \times F$ par compatibilité du produit cartésien avec l'inclusion.
Or, $f \subseteq \mathrm{dom}(f) \times \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 80 p. 108.
Donc $f \subseteq E \times F$ par transitivité de l'inclusion.
Donc $f \in \mathscr{P}(E \times F)$.

Ainsi, on a $f \in \mathscr{P}(E \times F)$ et $f : E \to F$.
Donc $f \in \mathcal{A}(E \to F)$.
Donc si $f : E \to F$, alors $f \in \mathcal{A}(E \to F)$.

Finalement, $\boxed{f \in \mathcal{A}(E \to F) \iff f : E \to F}$.
CQFD.

Remarque :
D'après la proposition 137 page 168, si $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$, alors $\mathcal{A}(E \to F) \neq \varnothing$.
De plus, d'après la proposition 140 page 173, on a $\mathcal{A}(\varnothing \to F) = \{\varnothing\}$.

Définition 34 (Point fixe d'une application)

Soit f une application. Soit x un ensemble.

On dit que x est un **point fixe** de f si et seulement si $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $f(x) = x$.

On note alors $\mathrm{Fix}(f) := \left\{ x \in \mathrm{dom}(f) \;\middle|\; f(x) = x \right\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1.2 Applications particulières

Proposition 143 (L'identité est une application)

Soit E un ensemble.

On a alors $\mathrm{id}_E : E \to E$, et $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.

Démonstration

♦ **Montrons que id_E est une application.**

On sait déjà que id_E est une relation binaire.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que $x\mathrm{id}_E y$ et $x\mathrm{id}_E y'$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ et $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ et $y' \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $x \in E$ et $y \in E$ et $y' \in E$.

Or, $x\mathrm{id}_E y$ et $x\mathrm{id}_E y'$.

Donc $y = x = y'$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc $y = y'$ par transitivité de l'égalité.

Donc si $x\mathrm{id}_E y$ et $x\mathrm{id}_E y'$, alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big((x\mathrm{id}_E y \text{ et } x\mathrm{id}_E y') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big((x\mathrm{id}_E y \text{ et } x\mathrm{id}_E y') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((x\mathrm{id}_E y \text{ et } x\mathrm{id}_E y') \implies y = y'\big)$.

Donc id_E est une application.

♦ **Montrons que $\mathrm{id}_E : E \to E$.**

On a $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.

Et $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113, et donc $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) \subseteq E$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E : E \to E}$.

♦ **Montrons que** $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Posons $y = \mathrm{id}_E(x)$.

On a donc $x \mathrm{id}_E y$.

Donc $y \in \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$.

Or, $\mathrm{im}(\mathrm{id}E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $y \in E$.

Ainsi, on a $x \in E$, $y \in E$ et $x \mathrm{id}_E y$.

Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Or, $y = \mathrm{id}_E(x)$.

Donc $\mathrm{id}_E(x) = x$ par transitivité de l'égalité.

Donc si $x \in E$, alors $\mathrm{id}_E(x) = x$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies \mathrm{id}_E(x) = x\big)$.

Donc $\boxed{\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x}$.

CQFD.

Proposition 144 (Ensemble des points fixes de l'identité)

Soit E un ensemble.

Alors $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E) = E$.

Démonstration

Par définition, on a $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E) \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$.

Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E) \subseteq E$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a alors $\mathrm{id}_E(x) = x$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E)$.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x \in \mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E)\big)$.

Donc $E \subseteq \mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\boxed{\mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E) = E}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 145 (L'identité sur le vide est le vide)

On a $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$.

Démonstration

On a $\mathrm{id}_\varnothing : \varnothing \to \varnothing$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing}$ d'après la prop. 140 p. 173.

CQFD.

Définition 35 (Application constante)

Soit f une application.

On dit que f est **constante** si et seulement si $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$.

Proposition 146 (Caractérisation des applications constantes)

Soit f une application.

Alors f est constante si et seulement s'il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Dans ce cas-là, c est unique si et seulement si $f \neq \varnothing$.

On dit alors que c est la **valeur** de f.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est constante.

On a ou bien $f = \varnothing$, ou bien $f \neq \varnothing$ d'après le principe du tiers-exclu.

- Supposons dans un premier temps que $f = \varnothing$.

Alors $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing$.

Donc $\forall c, \forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$ d'après la prop. 12 p. 16.

En particulier, en prenant un ensemble c quelconque, cela fonctionne, d'où l'existence.

• Supposons dans un deuxième temps que $f \neq \varnothing$.

On a donc $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

Il existe donc au moins un ensemble $y \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit un tel y.

Posons alors $c := f(y)$.

Or, f est constante par hypothèse donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$ par définition.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Dans les deux cas, il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Donc si f est constante, alors il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a donc $f(x) = c$ d'après $(\star)$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{dom}(f)$.

On a donc $f(y) = c$ d'après $(\star)$.

Or, $f(x) = c$.

Donc $f(x) = f(y)$ par transitivité de l'égalité.

Donc si $y \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = f(y)$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{dom}(f) \implies f(x) = f(y)\big)$.

Donc $\forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies \forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$.

Donc f est constante.

Donc s'il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$, alors f est constante.

Ainsi, $\boxed{f \text{ est constante si et seulement s'il existe au moins un ensemble } c \text{ tel que } \forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c}$.

Montrons à présent que c est unique si et seulement si $f \neq \varnothing$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Raisonnons par contraposition.

Posons $c := \varnothing$ et $c' := \{\varnothing\}$.

Ainsi, $c' \neq \varnothing$ et donc $c' \neq c$.

Supposons que $f = \varnothing$.

Donc $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$ d'après la prop. 12 p. 16.

De même, $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c'$ d'après la prop. 12 p. 16.

Donc il n'y a pas unicité.

Donc si $f = \varnothing$, alors il n'y a pas unicité.

Par contraposition, s'il y a unicité, alors $f \neq \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f \neq \varnothing$.

Soit c et c' tels que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$ et $\forall x \in \mathrm{dom}(f'), f(x) = c'$.

On a $f \neq \varnothing$ par hypothèse.

Donc $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

Il existe donc au moins un ensemble $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit un tel x.

On a donc $f(x) = c$ et $f(x) = c'$.

Donc $c = c'$ par transitivité de l'égalité.

D'où l'unicité.

Finalement, $\boxed{c \text{ est unique si et seulement si } f \neq \varnothing}$.

CQFD.

Proposition 147 (Existence d'au moins une application constante)

1. Il existe au moins une application constante.

2. Soit c un ensemble.
   Il existe au moins une application constante de valeur c.

3. Soit E un ensemble. Soit F un ensemble non vide. Soit $y_0 \in F$.
   Il existe une unique application $E \to F$ de valeur y_0.

Démonstration

Démontrons ces trois propriétés dans le sens inverse.

3

♦ **Existence :**

Posons $f := E \times \{y_0\}$.

f est un produit cartésien donc est une relation binaire d'après la prop. 79 p. 107.

- **Montrons que f est une application**

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que xfy et xfy'.

On a donc $(x;y) \in f$ et $(x;y') \in f$.

Donc $(x;y) \in E \times \{y_0\}$ et $(x;y') \in E \times \{y_0\}$.

Donc $x \in E$ et $y \in \{y_0\}$ et $y' \in \{y_0\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

En particulier, $y = y_0$ et $y' = y_0$ par définition d'un singleton.

Donc $y = y'$ par transitivité de l'égalité.

Donc si xfy et xfy', alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

Donc f est une application.

- **Montrons que $f : E \to F$.**

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}\big(E \times \{y_0\}\big) \underset{84 \text{ p. } 115}{=} E$.

Donc $\mathrm{dom}(f) = E$ par transitivité de l'égalité.

De plus, on a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}\big(E \times \{y_0\}\big) \underset{84 \text{ p. } 115}{=} \{y_0\}$.

Donc $\mathrm{im}(f) = \{y_0\}$ par transitivité de l'égalité.

Or, $y_0 \in F$ par hypothèse.

Donc $\{y_0\} \subseteq F$.

Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Ainsi, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Donc $f : E \to F$.

- **Montrons que f est constante de valeur y_0.**

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Posons $y = f(x)$.

On a donc xfy.

Donc $(x;y) \in f$.
Donc $(x;y) \in E \times \{y_0\}$.
Donc $x \in E$ et $y \in \{y_0\}$.
En particulier, $y = y_0$.
Or, $f(x) = y$.
Donc $f(x) = y_0$ par transitivité de l'égalité.
Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = y_0$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies f(x) = y_0\big)$.
Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = y_0$.
Donc f est constante de valeur y_0 d'après la prop. 146 p. 180.

♦ **Unicité**

Soit $g : E \to F$ constante de valeur y_0.
On a donc $\forall x \in E, g(x) = y_0$.
Notons $(\star)$ cette assertion.
Or, $f : E \to F$ est constante de valeur y_0.
Donc $\forall x \in E, f(x) = y_0$.
Notons $(\star\star)$ cette assertion.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in E$.
On a alors $g(x) = y_0$ d'après $(\star)$ et $f(x) = y_0$ d'après $(\star\star)$.
Donc $f(x) = g(x)$ par transitivité de l'égalité.
Donc $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.
Donc $f = g$ d'après la prop. 139 p. 171.

D'où l'unicité.

(2) Prenons $E := c$ et $F = \{c\}$.
On a $c \in F$.
Alors d'après (3), il existe une application $f : E \to F$ telle que f soit constante de valeur c.

(1) Il suffit de prendre $c = \{\emptyset\}$ dans (2) pour obtenir une application constante de constante c : on a donc bien une application constante.

CQFD.

Définition 36 (Projections cartésiennes)

Soient E et F deux ensembles.

• On appelle **projection cartésienne gauche** de $E \times F$ l'application $\begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & E \\ c & \longmapsto & \pi_g(c) \end{pmatrix}$.

Autrement dit, il s'agit de l'application $\begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x;y) & \longmapsto & x \end{pmatrix}$.

• On appelle **projection cartésienne droite** de $E \times F$ l'application $\begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & F \\ c & \longmapsto & \pi_d(c) \end{pmatrix}$.

Autrement dit, il s'agit de l'application $\begin{pmatrix} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x;y) & \longmapsto & y \end{pmatrix}$.

1.3 Axiome du choix

Axiome 7 (du choix)

Soit E un ensemble. Soit $X := E \backslash \{\varnothing\}$.
Alors il existe au moins une application $f : X \to \bigcup X$ telle que $\forall A \in X, f(A) \in A$.
On dit que f est une **fonction de choix** sur E.

Pour la petite histoire

Ernst Zermelo (1871-1953) est un mathématicien allemand. Il s'est principalement intéressé aux fondations des mathématiques et à la philosophie. Il a donné des développements importants à la théorie des ensembles et fut un des précurseurs de la théorie des jeux.

L'axiome du choix a pour la première fois été formulé par Ernst Zermelo en 1904 pour la démonstration du théorème de Zermelo que nous verrons au chapitre **??**.

Théorème 1 (Axiome du choix version ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
Alors il existe au moins une application $f : \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\} \to E$
telle que $\forall A \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}, f(A) \in A$.

Démonstration

D'après **l'axiome du choix**, il existe au moins une application $f : \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\} \to \bigcup(\mathscr{P}(E)\setminus\varnothing)$ telle que $\forall A \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}, f(A) \in A$.
Mais $\mathscr{P}(E)\setminus\varnothing \subseteq \mathscr{P}(E)$ donc $\bigcup(\mathscr{P}(E)\setminus\varnothing) \subseteq \bigcup\mathscr{P}(E)$ donc $f : \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\} \to \bigcup\mathscr{P}(E)$.
23 p. 29 138 p. 170
Or, $\bigcup\mathscr{P}(E) = E$ d'après la prop. 22 p. 27.
On a donc $\boxed{f : \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\} \to E \text{ telle que } \forall A \in \mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}, f(A) \in A}$.
CQFD.

Remarque :
On aurait pu prendre ce théorème comme axiome et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version".
Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le système d'axiome considéré sans l'axiome du choix.

Idée de preuve

Supposons que pour tout ensemble F, il existe au moins une application $g : \mathscr{P}(F)\setminus\{\varnothing\} \to F$ telle que $\forall B \in \mathscr{P}(F)\setminus\{\varnothing\}, g(B) \in B$.

Soit E un ensemble. Posons $X := E\setminus\{\varnothing\}$ puis considérons $F := \bigcup X$.
Par hypothèse, il existe au moins une application $g : \mathscr{P}(F)\setminus\{\varnothing\} \to F$
telle que $\forall B \in \mathscr{P}(F)\setminus\{\varnothing\}, g(B) \in B$.
Soit une telle g.
On a donc $g : \mathscr{P}(\bigcup X)\setminus\{\varnothing\} \to \bigcup X$.
On a $X \subseteq \mathscr{P}(\bigcup X)$ d'après la prop. 22 p. 27.
Or, par définition on a $X = E\setminus\{\varnothing\}$ donc $\varnothing \notin X$.
On a donc $X \subseteq \mathscr{P}(\bigcup X)\setminus\{\varnothing\}$.
Donc $X \subseteq \mathrm{dom}(g)$.
On peut donc définir $\begin{array}{rccc} f : & X & \longrightarrow & \bigcup X \\ & A & \longmapsto & g(A) \end{array}$.
Alors pour tout $A \in X$, on a $f(A) = g(A) \in A$.
Donc f est une fonction de choix de E.

. **CQFD**.

Remarque :

Dans tout les polycopiés de cette collection, l'axiome du choix sera supposé.

2 Composition d'applications

2.1 Composition

Proposition 148 (La composition d'applications est une application)

Soient f et g deux applications. Alors $g \circ f$ est une application.

Démonstration

On sait déjà que $g \circ f$ est une relation binaire d'après la prop. 85 p. 116.

Soit x un ensemble.

Soit z un ensemble.

Soit z' un ensemble.

Supposons que $x(g \circ f)z$ et $x(g \circ f)z'$.

Il existe alors au moins deux ensembles y et y' tels que xfy et ygz, et xfy' et $y'gz'$ d'après la prop. 86 p. 116.

Soient de tels y et y'.

On a donc en particulier xfy et xfy'.

Or, f est une application.

Donc $y = y'$.

Or, on a ygz et $y'gz'$.

On a donc ygz et ygz'.

Or, g est une application.

Donc $z = z'$.

Donc si $x(g \circ f)z$ et $x(g \circ f)z'$, alors $z = z'$.

Donc $\forall z', \Big(\big(x(g \circ f)z \text{ et } x(g \circ f)z'\big) \implies z = z' \Big)$.

Donc $\forall z, \forall z', \Big(\big(x(g \circ f)z \text{ et } x(g \circ f)z'\big) \implies z = z' \Big)$.

Donc $\forall x, \forall z, \forall z', \Big(\big(x(g \circ f)z \text{ et } x(g \circ f)z'\big) \implies z = z' \Big)$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est une application}}$.

CQFD.

Proposition 149 (Composition d'applications, domaine et images)

Soient f et g deux applications telles que que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

Alors $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(g)$.

Plus précisément, on a $\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.
En particulier, si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g)$.

Remarque :
Ainsi, si on a $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors $g \circ f : E \to G$.
En particulier, si $f : E \to E$ et $g : E \to E$, alors $g \circ f : E \to E$.
Autrement dit, si $f \in \mathcal{A}(E \to E)$ et si $g \in \mathcal{A}(E \to E)$, alors $g \circ f \in \mathcal{A}(E \to E)$.

Démonstration

On sait que $g \circ f$ est une application d'après la prop. 148 p. 188.
On sait que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ donc $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 88 p. 119.
De plus, on sait que $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$ toujours d'après la même proposition.
Donc $\boxed{g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(g)}$.

Montrons à présent que $\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$.
Il existe donc au moins un ensemble x tel que $x(g \circ f)z$ d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel x.
Il existe donc au moins un ensemble y tel que xfy et ygz d'après la prop. 86 p. 116.
Soit un tel y.
Comme on a xfy, on a $y \in \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.
Ainsi, on a ygz et $y \in \mathrm{im}(f)$.
Donc $z \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$ d'après la prop. 98 p. 130.

Donc si $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$, alors $z \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.
Donc $\forall z, \Big(z \in \mathrm{im}(g \circ f) \implies z \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)\Big)$.
Donc $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in g^{\rightarrow}\big(\mathrm{im}(f)\big)$.
Il existe donc au moins un $y \in \mathrm{im}(f)$ tel que ygz d'après la prop. 98 p. 130.
Soit un tel y.

Comme $y \in \mathrm{im}(f)$, il existe au moins un x tel que xfy d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

On a donc xfy et ygz.

Donc $x(g \circ f)z$ d'après la prop. 86 p. 116.

Donc $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $z \in g^{\to}\big(\mathrm{im}(f)\big)$, alors $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

Donc $\forall z, \Big(z \in g^{\to}\big(\mathrm{im}(f)\big) \implies z \in \mathrm{im}(g \circ f)\Big)$.

Donc $g^{\to}\big(\mathrm{im}(f)\big) \subseteq \mathrm{im}(g \circ f)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\to}\big(\mathrm{im}(f)\big)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

Enfin, si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors $\mathrm{im}(g \circ f) = g^{\to}\big(\mathrm{im}(f)\big) = g^{\to}\big(\mathrm{dom}(g)\big) \underset{\text{99 p. 130}}{=} \mathrm{im}(g)$.

CQFD.

Proposition 150 (Autre écriture de l'image par une composition)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

Alors $\forall x \in \mathrm{dom}(f), (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Démonstration

Il est à noter que comme $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, alors pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$, comme $f(x) \in \mathrm{im}(f)$, on a $f(x) \in \mathrm{dom}(g)$ et donc $g\big(f(x)\big)$ a bien du sens.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g \circ f)$ d'après la prop. 149 p. 188, donc $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$.

Posons $z := (g \circ f)(x)$ et $y := f(x)$.

En particulier, on a $x(g \circ f)z$.

Il existe donc au moins un ensemble y' tel que xfy' et $y'gz$ d'après la prop. 86 p. 116.

Soit un tel y', on a donc xfy'.

Comme f est une application, on a $y' = f(x)$.

Mais $y = f(x)$ par définition, et donc $y = y'$.

Or, on a $y'gz$ donc ygz.

Donc comme g est une application, on a $z = g(y)$.

Or $y = f(x)$, donc $z = g\big(f(x)\big)$.

Or, $z = (g \circ f)(x)$.

Donc $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\Big)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathrm{dom}(f), (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)}$.

CQFD.

Remarque :

Ainsi, on a $g \circ f : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{dom}(f) & \longrightarrow & \mathrm{im}(g) \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}\right)$.

Proposition 151 (Neutralité de l'identité pour la composition)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

On a alors :

1. $f \circ \mathrm{id}_E = f$.
2. $\mathrm{id}_F \circ f = f$

Démonstration

1.

Remarquons tout d'abord que comme $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113, on a $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et donc $\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_E) \underset{149\text{ p. }188}{=} \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) \underset{83\text{ p. }113}{=} E = \mathrm{dom}(f)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a alors $(f \circ \mathrm{id}_E)(x) \underset{150\text{ p. }190}{=} f\big(\mathrm{id}_E(x)\big) \underset{143\text{ p. }178}{=} f(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $(f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies (f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, (f \circ \mathrm{id}_E)(x) = f(x)$.

Or on a dit que $\mathrm{dom}(f \circ \mathrm{id}_E) = E = \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\boxed{f \circ \mathrm{id}_E = f}$ d'après la prop. 139 p. 171.

2.

Remarquons tout d'abord que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_F) = F$ d'après la prop. 83 p. 113.

Or, $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ par définition.

Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(\mathrm{id}_F)$ et donc $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_F \circ f) = \mathrm{dom}(f) = E$ d'après la prop. 149 p. 188.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a alors $(\mathrm{id}_F \circ f)(x) \underset{150\text{ p. }190}{=} \mathrm{id}_F\big(f(x)\big) \underset{143\text{ p. }178}{=} f(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $(\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies (\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, (\mathrm{id}_F \circ f)(x) = f(x)$.

Or on a dit que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_F \circ f) = \mathrm{dom}(f) = E$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_F \circ f = f}$ d'après la prop. 139 p. 171.

CQFD.

2.2 Inverses pour la composition

Définition 37 (Inverses à gauche et à droite d'une application)

Soit f une application.

1. On dit que f est **inversible à gauche** si et seulement s'il existe au moins une application $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
   On dit alors que g est un **inverse à gauche** de f.

2. On dit que f est **inversible à droite** si et seulement s'il existe au moins une application $h : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
   On dit alors que h est un **inverse à droite** de f.

3. On dit que f est **inversible** si et seulement si f est inversible à gauche et f est inversible à droite.

Proposition 152 (L'application vide est inversible)

L'application $\varnothing$ est inversible.

Démonstration

On a $\varnothing \circ \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 89 p. 121.

Or, $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 145 p. 180.

Donc $\varnothing \circ \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

• On a $\mathrm{dom}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.
Donc $\varnothing \circ \varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(\varnothing)}$ d'après $(\star)$.
Donc $\varnothing$ est inversible à gauche.

• On a On a $\mathrm{im}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.
Donc $\varnothing \circ \varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(\varnothing)}$ d'après $(\star)$.
Donc $\varnothing$ est inversible à droite.

Finalement, $\boxed{\varnothing \text{ est inversible}}$.
CQFD.

Proposition 153 (Existence et unicité des inverses)

Soit f une application.

1. Les inverses à gauche de f sont uniques sous réserve d'existence.

2. Les inverses à droite de f existent toujours sans garanti d'unicité.

3. On a équivalence entre les trois assertions suivantes :
   a) f est inversible à gauche
   b) f possède un unique inverse à droite
   c) f est inversible

   Lorsque ces assertions sont vérifiées, alors l'unique inverse à droite de f est aussi l'unique inverse à gauche de f.

Démonstration

1

Supposons qu'il existe au moins un inverse à gauche de f.

Soient g et h deux inverses à gauche de f.

On a donc $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ et $h : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$, ainsi que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} = h \circ f$ par définition d'être une inverse à gauche de f.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un x tel que xfy d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel x.
On a $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110, et donc $x \in \mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(h \circ f)$.
Comme f est une application, on a $y = f(x)$.
On a alors

$$\begin{aligned} g(y) &= g\big(f(x)\big) \\ &= (g \circ f)(x) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\ &= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) \\ &= (h \circ f)(x) \\ &= h\big(f(x)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\ &= h(y) \end{aligned}$$

Donc $g(y) = h(y)$.
Donc si $y \in \mathrm{im}(f)$, alors $g(y) = h(y)$.
Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{im}(f) \implies g(y) = h(y)\big)$.
Donc $\forall y \in \mathrm{im}(f), g(y) = h(y)$.
Or on a dit que $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(h)$.
Donc $g = h$ d'après la prop. 139 p. 171.
$\boxed{\text{D'où l'unicité}}$.

2

Deux cas se présentent à nous d'après le principe du tiers exclu : ou bien $\mathrm{im}(f) = \varnothing$, ou bien $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$.

• Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $\mathrm{im}(f) = \varnothing$.
On a alors $f \circ \varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 89 p. 121.
Or, $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 145 p. 180.
Donc $f \circ \varnothing = \mathrm{id}_\varnothing$ et donc $f \circ \varnothing = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
Donc f est inversible à droite.

• Plaçons-nous à présent dans le cas où $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$.
Construisons une application $h : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $f \circ \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.
Posons $A_y := \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid y = f(x)\}$.
Comme $y \in \mathrm{im}(f)$, il existe au moins un x tel que xfy d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel x.

On a xfy donc $y = f(x)$ et $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

On a donc $x \in A_y$, donc $A_y \neq \varnothing$ et donc $A_y \notin \{\varnothing\}$.

De plus, $A_y \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par définition, donc $A_y \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ et donc $A_y \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \setminus \{\varnothing\}$.

Ainsi, $\forall y \in \mathrm{im}(f)$, on a $A_y \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \setminus \{\varnothing\}$.

D'après **l'axiome du choix**, il existe au moins une application $\varphi : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \setminus \{\varnothing\} \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $\forall A \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \setminus \{\varnothing\}$, on a $\varphi(A) \in A$.

Soit une telle φ.

En particulier, $\forall y \in \mathrm{im}(f), \varphi(A_y) \in A_y$.

Donc $\forall y \in \mathrm{im}(f), f\big(\varphi(A_y)\big) = y$ et $\forall y \in \mathrm{im}(f), \varphi(A_y) \in \mathrm{dom}(f)$ par définition des A_y.

Posons $h := \begin{pmatrix} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{dom}(f) \\ y & \longmapsto & \varphi(A_y) \end{pmatrix}$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

On a alors $(f \circ h)(y) \underset{\text{150 p. 190}}{=} f\big(h(y)\big) = f\big(\varphi(A_y)\big) = y \underset{\text{143 p. 178}}{=} \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc $(f \circ h)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc $\forall y \in \mathrm{im}(f), (f \circ h)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc $\boxed{f \text{ est inversible à droite}}$.

(3) Nous allons montrer les équivalences suivantes : $\boxed{\text{a)} \iff \text{b)}}$ puis $\boxed{\text{a)} \iff \text{c)}}$.

$\boxed{\text{a)} \implies \text{b)}}$

Supposons que f est inversible à gauche.

Soit g un inverse à gauche de f.

On a donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

On sait que f est inversible à droite d'après (2).

Soient h et h' deux inverses à droites de f.

On a donc $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} = f \circ h'$.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h \text{ d'après la prop. 151 p. 191} \\ &= (g \circ f) \circ h \\ &= g \circ (f \circ h) \text{ par associativité de la composition} \\ &= g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} \\ &= g \circ (f \circ h') \\ &= (g \circ f) \circ h' \text{ par associativité de la composition} \end{aligned}$$

$$= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h'$$
$$= h' \text{ d'après la prop. 151 p. 191}$$

Donc $h = h'$.

Donc il y a unicité des inverses à droites de f.

Donc $\boxed{\text{a)} \Longrightarrow \text{b)}}$.

$\boxed{\text{b)} \Longrightarrow \text{a)}}$

Supposons que f possède un unique inverse à droite.

Soit h cet inverse à droite.

Montrons qu'alors $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Pour cela, supposons par l'absurde que $h \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Or, $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(h)$ par définition, donc $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(h)$.

On a donc $\mathrm{dom}(h \circ f) \underset{\text{149 p. 188}}{=} \mathrm{dom}(f) \underset{\text{83 p. 113}}{=} \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)})$.

Donc comme $h \circ f \neq \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$, on a $\neg\Big(\forall x \in \mathrm{dom}(f), (h \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)\Big)$ d'après la prop. 139 p. 171.

Il existe donc au moins un x_0 tel que $(h \circ f)(x_0) \neq \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x_0)$.

Soit un tel x_0.

On a donc $(h \circ f)(x_0) \neq x_0$ puisque $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x_0) = x_0$ d'après la prop. 143 p. 178.

On a donc $h\big(f(x_0)\big) \neq x_0$ puisque $(h \circ f)(x_0) = h\big(f(x_0)\big)$ d'après la prop. 150 p. 190.

Posons $g := \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & \mathrm{dom}(f) \\ y & \longmapsto & \begin{cases} h(y) & \text{si } y \neq f(x_0) \\ x_0 & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \end{array} \right)$.

On a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(h)$ par définition, mais $g\big(f(x_0)\big) = x_0 \neq h\big(f(x_0)\big)$ donc $g\big(f(x_0)\big) \neq h\big(f(x_0)\big)$.

Donc $\neg\Big(\forall y \in \mathrm{im}(f), g(y) = h(y)\Big)$.

Donc $g \neq h$ d'après la prop. 139 p. 171.

Montrons que cependant, g est aussi une inverse à droite de h, ce qui contredira son unicité.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(f)$.

On a alors

$$(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190}$$

$$= \begin{cases} f\big(h(y)\big) & \text{si } y \neq f(x_0) \\ f\big(x_0\big) & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \quad \text{par définition de } g$$

$$= \begin{cases} (f \circ h)(y) & \text{si } y \neq f(x_0) \\ f\big(x_0\big) & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \quad \text{d'après la prop. 150 p. 190}$$

$$= \begin{cases} \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y) & \text{si } y \neq f(x_0) \\ f\big(x_0\big) & \text{si } y = f(x_0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y & \text{si } y \neq f(x_0) \\ f\big(x_0\big) & \text{si } y = f(x_0) \end{cases} \quad \text{d'après la prop. 143 p. 178}$$

$$= \begin{cases} y & \text{si } y \neq f(x_0) \\ y & \text{si } y = f(x_0) \end{cases}$$

$$= y$$

$$= \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y) \text{ d'après la prop. 143 p. 178}$$

Donc $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc si $y \in \mathrm{im}(f)$, alors $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc $\forall y, \big(y \in \mathrm{im}(f) \implies (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)\big)$.

Donc $\forall y \in \mathrm{im}(f), (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Or, $\mathrm{im}(g) = \mathrm{dom}(f)$ par définition, donc $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

On a donc $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 149 p. 188 et donc $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{im}(f)$.

Or, $\mathrm{dom}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)\big) = \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 83 p. 113.

Ainsi, $\mathrm{dom}(f \circ g) = \mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}\big(\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)\big)$ et $\forall y \in \mathrm{im}(f), (f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y)$.

Donc $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc g est un inverse à droite de f.

Ainsi, $g \neq h$ mais g est aussi un inverse à droite de f : cela contredit l'unicité de h.

Ainsi par l'absurde, on a montré que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Donc h est un inverse à gauche de f, et donc f est inversible à gauche.

Ceci montre que $\boxed{\text{b)} \implies \text{a)}}$.

$\boxed{\text{a)} \implies \text{c)}}$

Supposons que f est inversible à gauche.

D'après 2, f est aussi inversible à droite.

Donc f est inversible par définition.

$\boxed{\text{c)} \implies \text{a)}}$

Supposons que f est inversible.

Alors f est inversible à gauche et f est inversible à droite par définition.

En particulier, f est inversible à gauche.

Maintenant que nous avons prouvé l'équivalence entre ces trois assertions, démontrons que si elles sont vraies, alors l'unique inverse à gauche (unique d'après 1) est égal à l'unique inverse à droite (unique d'après b)).

Soit g l'unique inverse à gauche de f, et soit h l'unique inverse à droite de f.

On a alors $g \underset{\text{151 p. 191}}{=} g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} = g \circ (f \circ h) \underset{\text{87 p. 117}}{=} (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} \circ h \underset{\text{151 p. 191}}{=} h$.

Donc $g = h$.

CQFD.

Définition 38 (Inverse d'une application)

Soit f une application.

Supposons que f soit **inversible**.

Alors d'après la proposition précédente, il existe une application qui est à la fois l'unique inverse à gauche de f, et aussi l'unique inverse à droite de f.

On l'appellera **inverse** de f, et on la notera f^{-1}.

Ainsi, on a $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$, et c'est la seule application $\mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ qui vérifie au moins l'une de ces deux égalités (toujours à condition que f soit inversible bien entendu).

Proposition 154 (Caractérisation de l'inverse d'une application)

Soit f une application inversible.

On a alors :

1. $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.
2. $\forall y \in \mathrm{im}(f), f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

$f^{-1}\big(f(x)\big) \underset{\text{150 p. 190}}{=} (f^{-1} \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) \underset{\text{143 p. 178}}{=} x.$

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies f^{-1}\big(f(x)\big) = x\Big)$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathrm{dom}(f), f^{-1}\big(f(x)\big) = x}$.

2

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(f)$.

On a alors :

$f\big(f^{-1}(y)\big) \underset{\text{150 p. 190}}{=} (f \circ f^{-1})(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}(y) \underset{\text{143 p. 178}}{=} y.$

Donc si $y \in \mathrm{im}(f)$, alors $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \mathrm{im}(f) \implies f\big(f^{-1}(y)\big) = y\Big)$.

Donc $\boxed{\forall y \in \mathrm{im}(f), f\big(f^{-1}(y)\big) = y}$.

CQFD.

Proposition 155 (Inverse et transposée)

Soit f une application.

1. Si f est inversible, alors $\forall x, \forall y, \big(y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x\big)$.
2. Si f est inversible, alors $f^{-1} = {}^t f$.
3. f est inversible si et seulement si ${}^t f$ est une application.

Démonstration

1 Supposons que f est inversible.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Rappelons que si $y = f(x)$, alors par définition $y \in \mathrm{im}(f)$,

et donc comme $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(f^{-1})$ par définition de f^{-1}, on a $y \in \mathrm{dom}(f^{-1})$.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(x)\big) \\ &\iff f^{-1}(y) = \big(f^{-1} \circ f\big)(x) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\ &\iff f^{-1}(y) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) \\ &\iff f^{-1}(y) = x \text{ d'après la prop. 143 p. 178.} \end{aligned}$$

On a donc $y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x$.

Donc $\forall y, \big(y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x\big)$.

Donc $\boxed{\forall x, \forall y, \big(y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x\big)}$.

(2) Supposons que f est inversible.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y f^{-1} x &\iff f^{-1}(y) = x \text{ puisque } f^{-1} \text{ est une application} \\ &\iff y = f(x) \text{ d'après (1)} \\ &\iff x f y \\ &\iff y\, {}^t\!f x \text{ d'après la prop. 93 p. 124} \end{aligned}$$

Ainsi, $y f^{-1} x \iff y\, {}^t\!f x$.

Donc $\forall y, \big(y f^{-1} x \iff y\, {}^t\!f x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(y f^{-1} x \iff y\, {}^t\!f x\big)$.

Donc $\boxed{f^{-1} = {}^t\!f}$ d'après la prop. 74 p. 100.

(3) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est inversible.

Alors ${}^t\!f = f^{-1}$ d'après (2).

Or, f^{-1} est une application par définition.

Donc ${}^t\!f$ est une application.

Donc si f est inversible, alors ${}^t\!f$ est une application.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que ${}^t\!f$ est une application.

• **Commençons par montrer que** $\mathrm{dom}({}^t f \circ f) = \mathrm{dom}(f)$.

On sait que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}\,({}^t f)$ d'après la prop. 95 p. 126.

Donc $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}\,({}^t f)$.

Donc $\mathrm{dom}\,({}^t f \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 149 p. 188.

• **Montrons à présent que** ${}^t f \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Posons $y := f(x)$.

On a donc xfy, donc xfy et xfy, donc xfy et $y\,{}^t f x$ d'après la prop. 93 p. 124.

On a donc $x({}^t f \circ f)x$ d'après la prop. 86 p. 116.

Donc $({}^t f \circ f)(x) = x$ puisque ${}^t f \circ f$ est une application d'après la prop. 148 p. 188.

Or, $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) = x$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $({}^t f \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $({}^t f \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies ({}^t f \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), ({}^t f \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Or $\mathrm{dom}\,({}^t f \circ f) = \mathrm{dom}(f) \underset{\text{83 p. 113}}{=} \mathrm{dom}\,\big(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}\big)$.

Donc on a ${}^t f \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ d'après la prop. 139 p. 171.

• **Montrons que** $f \circ {}^t f = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

Posons $g := {}^t f$.

D'après le point précédent, on a ${}^t g \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}$.

On a donc ${}^t({}^t f) \circ {}^t f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}({}^t f)}$.

Mais ${}^t({}^t f) = f$ par involution de la transposition.

Donc $f \circ {}^t f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}({}^t f)}$.

Mais $\mathrm{dom}({}^t f) = \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 95 p. 126.

Donc $f \circ {}^t f = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.

En particulier, f est inversible à droite, et ${}^t f$ est une inverse à droite de f.

Ainsi, f est inversible à gauche et à droite, donc f est inversible.

Donc si ${}^t f$ est une application, alors f est inversible.

Finalement, on a $\boxed{f \text{ est inversible si et seulement si } {}^t f \text{ est une application}}$.

CQFD.

Proposition 156 (L'application identité est inversible)

Soit E un ensemble.

Alors id_E est inversible, et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.

Démonstration

On sait que ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 97 p. 128.

Or, id_E est une application d'après la prop. 143 p. 178.

Donc ${}^t\mathrm{id}_E$ est une application.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E \text{ est inversible}}$ d'après la prop. 155 p. 199.

D'après la même proposition, on a alors $\mathrm{id}_E^{-1} = {}^t\mathrm{id}_E$, et donc $\boxed{\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E}$.

CQFD.

Proposition 157 (Involution du passage à l'inverse)

Soit f une application inversible.

Alors f^{-1} est inversible, et on a alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

On dit que le passage à l'inverse est **involutif**.

Démonstration

On a ${}^t(f^{-1}) \underset{155 \text{ p. } 199}{=} {}^t({}^tf) \underset{94 \text{ p. } 126}{=} f$.

Or, f est une application, donc ${}^t(f^{-1})$ est une application donc $\boxed{f^{-1} \text{ est inversible}}$.

Dans ce cas, on a $(f^{-1})^{-1} = {}^t(f^{-1})$ d'après la prop. 155 p. 199.

On a donc $\boxed{(f^{-1})^{-1} = f}$.

CQFD.

Proposition 158 (Inversibilité et composition)

Soient f et g deux applications.

1. Si f et g sont inversibles, alors $g \circ f$ est inversible.
   Dans ce cas-là, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Réciproquement, si $g \circ f$ est inversible
   - a. et si $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, alors f est inversible.
   - b. et si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors f et g sont inversibles.

Démonstration

1

Supposons que f et g soient inversibles.

Alors ${}^t f$ et ${}^t g$ sont des applications d'après la prop. 155 p. 199.

Donc ${}^t f \circ {}^t g$ est une application d'après la prop. 148 p. 188.

Or, ${}^t f \circ {}^t g = {}^t(g \circ f)$ d'après la prop. 96 p. 127.

Donc ${}^t(g \circ f)$ est une application.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est inversible}}$ d'après la prop. 155 p. 199.

On a alors $(g \circ f)^{-1} \underset{155\text{ p. }199}{=} {}^t(g \circ f) \underset{96\text{ p. }127}{=} {}^t f \circ {}^t g \underset{155\text{ p. }199}{=} f^{-1} \circ g^{-1}$.

Donc $\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$.

2 a

Supposons que $g \circ f$ est inversible, et que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

D'après 1, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Or, par définition on a $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g \circ f)}$.

Donc $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g \circ f)}$ d'après la prop. 87 p. 117.

En particulier, on a $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ g) \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g \circ f)}$.

Mais comme $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, on a $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$.

Donc $(f^{-1} \circ g^{-1} \circ g) \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Donc f est inversible à gauche.

Donc $\boxed{f \text{ est inversible}}$ d'après la prop. 153 p. 193.

2 b

Supposons que $g \circ f$ est inversible, et que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

En particulier, on a $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, donc $\boxed{f \text{ est inversible}}$ d'après a.

Ainsi, comme f est inversible, f^{-1} l'est aussi d'après la prop. 157 p. 202.

Donc $(g \circ f) \circ f^{-1}$ est inversible d'après 1.

Mais $(g \circ f) \circ f^{-1} \underset{87\text{ p. }117}{=} g \circ (f \circ f^{-1}) = g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)} = g \circ \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)} \underset{151\text{ p. }191}{=} g$.

Donc $\boxed{g \text{ est inversible}}$.

CQFD.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définition 39 (Injectivité)

Soit f une application.

• On dit que f est **injective**, ou encore que f est une **injection**, si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$$

ou de manière équivalente

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\big)$$

• Ainsi, f est injective si intuitivement « *tout élément de* $\mathrm{im}(f)$ *est atteint au plus une fois* ».

• Pour deux ensembles E et F tels que $f : E \to F$, on note alors parfois $f : E \hookrightarrow F$.

Proposition 159 (Injectivité de l'identité et du vide)

1. Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective.
2. En particulier, $\varnothing$ est injective.

Démonstration

1.

Soit E un ensemble.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit x' un ensemble.

Supposons que $x' \in E$.

Comme $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) \underset{\text{83 p. 113}}{=} E$, on a $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ et $x' \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$.

Supposons que $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x')$.

On a alors $x \underset{\text{143 p. 178}}{=} \mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \underset{\text{143 p. 178}}{=} x'$.

Donc $x = x'$.

Donc si $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x')$, alors $x = x'$.

Donc si $x' \in E$, alors $\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'$.

Donc $\forall x', \Big(x' \in E \implies \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)\Big)$.

Donc $\forall x' \in E, \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)$.

Donc si $x \in E$, alors $\forall x' \in E, \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies \forall x' \in E, \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall x' \in E, \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)$.

Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E), \forall x' \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E), \big(\mathrm{id}_E(x) = \mathrm{id}_E(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E \text{ est injective}}$.

(2) Comme $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$ d'après la prop. 145 p. 180, on a $\boxed{\varnothing \text{ est injective}}$ d'après (1).

CQFD.

Proposition 160 (Equivalence entre injectivité et inversiblité à gauche)

Soit f une application.

Alors f est injective si et seulement si f est inversible à gauche.

Du fait de l'équivalence entre inversibilité à gauche et inversibilité (prop. 153 page 193), on peut aussi affirmer que f est injective si et seulement si f est inversible.

Démonstration

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est injective.

Deux cas se présentent à nous : ou bien $f = \varnothing$, ou bien $f \neq \varnothing$ d'après le principe du tiers exclu.

• Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $f = \varnothing$.

Alors f est inversible d'après la prop. 152 p. 192.

Donc f est inversible à gauche.

• Plaçons-nous à présent dans le cas où $f \neq \varnothing$.

On a alors $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ et $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

Construisons une application $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Soit $A_y := \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid y = f(x)\}$.
Comme $y \in \mathrm{im}(f)$, il existe au moins un $x_y \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $x_y f y$, donc $y = f(x_y)$.
Soit un tel x_y.
On a donc $x_y \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x_y)$.
Donc $x_y \in A_y$ par définition de A_y.
On a donc $\{x_y\} \subseteq A_y$ d'après la prop. 16 p. 19.
Montrons que $A_y \subseteq \{x_y\}$.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in A_y$.
On a donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x)$.
Or, $y = f(x_y)$ par définition de x_y.
Donc $f(x) = f(x_y)$.
Donc $x = x_y$ car f est injective par hypothèse.
Donc $x \in \{x_y\}$.
Donc si $x \in A_y$, alors $x \in \{x_y\}$.
Donc $\forall x, \big(x \in A_y \implies x \in \{x_y\}\big)$.
Donc $A_y \subseteq \{x_y\}$ par définition de l'inclusion.
Donc $A_y = \{x_y\}$ par antisymétrie de l'inclusion.

Rappelons de plus que par définition on a $A_y \subseteq \mathrm{dom}(f)$ donc $A_y \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.
Ainsi, $\forall y \in \mathrm{im}(f), \Big(\big(\exists x_y \in A_y, A_y = \{x_y\}\big) \text{ et } A_y \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))\Big)$.
Notons $(\star)$ cette assertion.

Montrons à présent que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), A_{f(x)} = \{x\}$.
Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.
Posons $y := f(x)$.
Il existe au moins un $x_y \in A_y$ tel que $A_y = \{x_y\}$ d'après $(\star)$.
Soit un tel x_y.
Comme $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y = f(x)$, on a $x \in A_y$.
Mais $A_y = \{x_y\}$ donc $x \in \{x_y\}$ donc $x = x_y$.
On a donc $A_y = \{x\}$.
Mais $y = f(x)$ par définition, donc $A_{f(x)} = \{x\}$.
Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), A_{f(x)} = \{x\}$.
Notons $(\star\star)$ cette dernière assertion.

Posons alors $\varphi := \begin{pmatrix} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \\ y & \longmapsto & A_y \end{pmatrix}$.

On a dit que $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ donc il existe au moins $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit un tel x_0.

Posons alors $\psi := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) & \longrightarrow & \mathrm{dom}(f) \\ A & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } A = \{x\} \\ x_0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right)$.

Il nous suffit alors de poser $g := \psi \circ \varphi$.

Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Remarquons tout d'abord que par définition, $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ et que $\mathrm{dom}(\psi) = \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ donc $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}(\psi)$, et donc $g = \psi \circ \varphi : \mathrm{dom}(\varphi) \to \mathrm{im}(\psi)$ d'après la prop. 149 p. 188.

Or par définition on a $\mathrm{dom}(\varphi) = \mathrm{im}(f)$ donc $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{im}(\psi)$.

Or par définition on a $\mathrm{im}(\psi) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ donc $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 138 p. 170.

Ainsi, $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$ donc $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 149 p. 188.

Mais on a dit que $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ donc $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 138 p. 170.

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a alors les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= (\psi \circ \varphi \circ f)(x) \\
&= (\psi \circ \varphi)\big(f(x)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= \psi\Big(\varphi\big(f(x)\big)\Big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= \psi\Big(A_{f(x)}\Big) \text{ par définition de } \varphi \\
&= \psi\Big(\{x\}\Big) \text{ d'après } (\star\star) \\
&= x \text{ par définition de } \psi \\
&= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) \text{ d'après la prop. 143 p. 178}
\end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Mais on a dit que $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ et on a $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc f est inversible à gauche.

Donc si f est injective, alors f est inversible à gauche.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est inversible à gauche.

Il existe donc au moins une application $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
Soit une telle g.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.
Soit x' un ensemble.
Supposons que $x' \in \mathrm{dom}(f)$.
Supposons que $f(x) = f(x')$.
On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.
Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ d'après la prop. 150 p. 190.
Donc $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x')$.
Donc $x = x'$ d'après la prop. 143 p. 178.
Donc si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.
Donc si $x' \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = f(x') \implies x = x'$.
Donc $\forall x', \Big(x' \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)\Big)$.
Donc $\forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.
Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.
Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)\Big)$.
Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.
Donc f est injective.
Donc si f est inversible à gauche, alors f est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f \text{ est inversible à gauche}}$.
CQFD.

Proposition 161 (Injectivité et composition)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Réciproquement, si $g \circ f$ est injective,
   a. alors f est injective.
   b. et si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors f et g sont injectives.

Démonstration

On pourrait utiliser l'équivalence entre injectivité et inversibilité établie à la proposition 160 page 205, puis utiliser la proposition 158 page 202.

Cependant, nous allons démontrer cette proposition en revenant directement à la définition d'injectivité, pour varier les plaisirs.

1 Supposons que f et g sont injectives.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$.

Soit x' un ensemble.

Supposons que $x' \in \mathrm{dom}(g \circ f)$.

Comme $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ par hypothèse, on a $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 149 p. 188.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x' \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$ d'après la prop. 150 p. 190.

Or, g est injective donc $f(x) = f(x')$.

Or, f est injective donc $x = x'$.

Donc si $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, alors $x = x'$.

Donc si $x' \in \mathrm{dom}(g \circ f)$, alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'$.

Donc $\forall x', \Big(x' \in \mathrm{dom}(g \circ f) \implies \big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'\big)\Big)$.

Donc $\forall x' \in \mathrm{dom}(g \circ f), \big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'\big)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(g \circ f)$, alors $\forall x' \in \mathrm{dom}(g \circ f), \big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(g \circ f) \implies \Big(\forall x' \in \mathrm{dom}(g \circ f), \big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'\big)\Big)\Big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(g \circ f), \forall x' \in \mathrm{dom}(g \circ f), \big((g \circ f)(x) = (g \circ f)(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\boxed{g \circ f \text{ est injective par définition}}$.

2 a

Supposons que $g \circ f$ est injective.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit x' un ensemble.

Supposons que $x' \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(x) = f(x')$.

On a alors $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x)\big)$.

Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ d'après la prop. 150 p. 190.

Or, $g \circ f$ est injective.

Donc $x = x'$.

Donc si $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$.

Donc si $x' \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = f(x') \implies x = x'$.

Donc $\forall x', \Big(x' \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)\Big)$.

Donc $\forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)\Big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$.

Donc $\boxed{f \text{ est injective}}$.

2 b Supposons que $g \circ f$ est injective et que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

D'après a, on sait que f est injective.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{dom}(g)$.

Soit y' un ensemble.

Supposons que $y' \in \mathrm{dom}(g)$.

Supposons que $g(y) = g(y')$.

Par hypothèse, on a $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{im}(f)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(f)$ et $y' \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins deux $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x' \in \mathrm{dom}(f)$ tels que xfy et $x'fy'$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soient de tels x et x'.

On a donc $y = f(x)$ et $y' = f(x')$ puisque f est une application.

Or, on a supposé que $g(y) = g(y')$.

On a donc $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$.

Donc $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ d'après la prop. 150 p. 190.

Or, $g \circ f$ est injective par hypothèse.

Donc $x = x'$, donc $f(x) = f(x')$ et donc $y = f(x) = f(x') = y'$.

Donc si $g(y) = g(y')$, alors $y = y'$.

Donc si $y' \in \mathrm{dom}(g)$, alors $g(y) = g(y') \implies y = y'$.

Donc $\forall y', \Big(y' \in \mathrm{dom}(g) \implies \big(g(y) = g(y') \implies y = y'\big)\Big)$.

Donc $\forall y' \in \mathrm{dom}(g), \big(g(y) = g(y') \implies y = y'\big)$.

Donc si $y \in \mathrm{dom}(g)$, alors $\forall y' \in \mathrm{dom}(g), \big(g(y) = g(y') \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \mathrm{dom}(g) \implies \big(\forall y' \in \mathrm{dom}(g), \big(g(y) = g(y') \implies y = y'\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall y \in \mathrm{dom}(g), \forall y' \in \mathrm{dom}(g), \big(g(y) = g(y') \implies y = y'\big)$.

Donc $\boxed{g \text{ est injective}}$ par définition.

CQFD.

Définition 40 (Surjectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble.

• On dit que f est **surjective** dans F si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$.
Autrement dit, dans le cas où tout élément de F est « atteint au moins une fois par f ».
Ainsi, $\forall y \in F, \exists x \in \mathrm{dom}(f), y = f(x)$.

• On dit aussi que f est une **surjection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.
On notera alors parfois $f : \mathrm{dom}(f) \twoheadrightarrow F$.

Proposition 162 (Surjectivité et composition)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.
Si f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$, alors $g \circ f$ est surjective dans $\mathrm{im}(g)$.

Démonstration

Supposons que f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$.
On a donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ par définition.
On sait déjà que $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 88 p. 119.
Montrons que $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(g \circ f)$.

Soit z un ensemble.

Supposons que $z \in \mathrm{im}(g)$.
Il existe donc au moins un y tel que ygz d'après la prop. 81 p. 110.
Soit un tel y.
On a donc $z = g(y)$ puisque g est une application.
On a donc aussi $y \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 81 p. 110.
Or, $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ par hypothèse.
Donc $y \in \mathrm{im}(f)$.
Il existe donc au moins un x tel que xfy Proposition : Caractérisation du domaine et de l'image d'une relation binaire.
Soit un tel x.
On a donc $y = f(x)$ puisque f est une application.
On a donc aussi $x \in \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 81 p. 110.
Ainsi, on a $y = f(x)$ et $z = g(y)$.

On a donc $z = g\big(f(x)\big)$.

Donc $z = (g \circ f)(x)$ d'après la prop. 150 p. 190.

On a donc $x(g \circ f)z$, et donc $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc si $z \in \mathrm{im}(g)$, alors $z \in \mathrm{im}(g \circ f)$.

Donc $\forall z, \big(z \in \mathrm{im}(g) \implies z \in \mathrm{im}(g \circ f)\big)$.

Donc $\mathrm{im}(g) \subseteq \mathrm{im}(g \circ f)$ par définition de l'inclusion.

On a donc $\mathrm{im}(g) = \mathrm{im}(g \circ f)$ par antisymétrie de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{g \circ f \text{ est surjective dans } \mathrm{im}(g)}$.

CQFD.

Définition 41 (Bijectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble.

• On dit que f est **bijective** dans F si et seulement si :

- f est injective
- et f est surjective dans F.

Autrement dit, dans le cas où tout élément de F « est atteint une et une seule fois par f ».

• On dit aussi que f est une **bijection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.
On notera alors parfois $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} F$.

• Pour tout ensemble E, une bijection de E dans E est aussi appelée **permutation** de E.

Remarque :
Dire que f est injective (donc inversible à gauche, et donc inversible), c'est la même chose que de dire que f est bijective de $\mathrm{dom}(f)$ dans $\mathrm{im}(f)$.

Notation

Soient E et F deux ensembles.

• On notera $\mathrm{Inj}\,(E \to F)$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \mid f : E \hookrightarrow F\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications injectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Surj}\,(E \to F)$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \mid f : E \twoheadrightarrow F\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications surjectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Bij}\,(E \to F)$, ou encore $\mathfrak{S}(E \to F)$, l'ensemble $\left\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \;\middle|\; f : E \xrightarrow{\sim} F\right\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications bijectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Bij}(E)$, ou encore $\mathfrak{S}(E)$, l'ensemble $\mathrm{Bij}\,(E \to E)$,
c'est-à-dire l'ensemble des permutations de E.

Proposition 163 (Bijectivité de l'identité)

Soit E un ensemble. Alors $\mathrm{id}_E : E \xrightarrow{\sim} E$.

Démonstration

On sait déjà que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 83 p. 113, donc $\mathrm{id}_E : E \twoheadrightarrow E$.
De plus, id_E est injective d'après la prop. 159 p. 204, donc $\mathrm{id}_E : E \hookrightarrow E$.
Donc $\boxed{\mathrm{id}_E : E \xrightarrow{\sim} E}$.
CQFD.

Proposition 164 (Bijectivité de l'inverse)

Soit f une application.
Si $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ alors $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{dom}(f)$.
Cela justifie l'autre nom de l'inverse de f : on l'appelle aussi **bijection réciproque**.

En particulier, pour E un ensemble, si $f : E \xrightarrow{\sim} E$, alors $f^{-1} : E \xrightarrow{\sim} E$.

Démonstration

Supposons que $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$.
Ainsi, f est une bijection de $\mathrm{dom}(f)$ dans $\mathrm{im}(f)$.
En particulier, f est injective.
Donc f est inversible d'après la prop. 160 p. 205.
Donc f^{-1} est bien définie.

On sait déjà que $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ par définition.
De plus, f^{-1} est inversible d'après la prop. 157 p. 202.
Donc f^{-1} est injective d'après la prop. 160 p. 205.
Mais $f^{-1} \underset{155\text{ p. }199}{=} {}^t f$ donc $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathrm{im}({}^t f) \underset{95\text{ p. }126}{=} \mathrm{dom}(f)$.
Donc f^{-1} est surjective dans $\mathrm{dom}(f)$.

Ainsi, $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ est injective, et est surjective dans $\mathrm{dom}(f)$.
Donc f^{-1} est bijective de $\mathrm{im}(f)$ dans $\mathrm{dom}(f)$.
Donc $\boxed{f^{-1} : \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{dom}(f)}$.
CQFD.

Proposition 165 (Bijectivité et composition)

Soient f et g deux applications. Soient E, F et G trois ensembles.
Si $f : E \xrightarrow{\sim} F$ et si $g : F \xrightarrow{\sim} G$, alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} G$.

En particulier, si $f : E \xrightarrow{\sim} E$ et si $g : E \xrightarrow{\sim} E$, alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} E$.
Autrement dit, si $f \in \mathrm{Bij}(E)$ et $g \in \mathrm{Bij}(E)$, alors $g \circ f \in \mathrm{Bij}(E)$.

Démonstration

Supposons que $f : E \xrightarrow{\sim} F$ et $g : F \xrightarrow{\sim} G$.
On peut donc en déduire que f et g sont injectives, que f est surjective dans $F = \mathrm{dom}(g)$ et que g est surjective dans G.

Comme f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$, on a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.
On a donc $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) = E$ d'après la prop. 149 p. 188.

Comme f et g sont injectives, on a $g \circ f$ injective d'après la prop. 161 p. 208.

Comme f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$, on a $g \circ f$ surjective dans $\mathrm{im}(g)$, c'est-à-dire $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 162 p. 211.
Or, g est surjective dans G donc $\mathrm{im}(g) = G$ et donc $\mathrm{im}(g \circ f) = G$.

Ainsi, $g \circ f$ est injective, on a $\mathrm{dom}(g \circ f) = E$ et $\mathrm{im}(g \circ f) = G$.
Donc $\boxed{g \circ f : E \xrightarrow{\sim} G}$.
CQFD.

Proposition 166 (Applications inversibles et bijections)

Soient E et F deux ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
Si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors :

1. f est bijective dans F.
2. g est bijective dans E.
3. f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration

Supposons que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

On a $g \circ f = \mathrm{id}_E$.
Or, $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 88 p. 119.
Donc $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) \subseteq \mathrm{im}(g)$.
Or, $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.
Donc $E \subseteq \mathrm{im}(g)$.
Or, $g : F \to E$ par définition.
Donc $\mathrm{im}(g) \subseteq E$.
Donc $\mathrm{im}(g) = E$ par antisymétrie de l'inclusion.
Donc g est surjective dans E.

Or, $f : E \to F$, donc $f : \mathrm{im}(g) \to F$.
Or, $g : F \to E$, donc $\mathrm{dom}(g) = F$.
Donc $f : \mathrm{im}(g) \to \mathrm{dom}(g)$.
Or, $f \circ g = \mathrm{id}_F$.
Donc comme $\mathrm{dom}(g) = F$, on a $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}$.
Ainsi, $f : \mathrm{im}(g) \to \mathrm{dom}(g)$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}$.

Donc g est inversible à gauche.

Donc g est injective d'après la prop. 160 p. 205.

Ainsi, g est injective, et g est surjective dans E.

Donc $\boxed{g \text{ est bijective dans } E}$.

On a dit que g est inversible à gauche.

Donc g est inversible d'après la prop. 153 p. 193.

On sait que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Or, on a dit que $E = \mathrm{im}(g)$ et $F = \mathrm{dom}(g)$.

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(g)}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(g)}$.

De plus, $f : E \to F$ donc $f : \mathrm{im}(g) \to \mathrm{dom}(g)$.

Donc comme g est inversible, on a $f = g^{-1}$ par définition de g^{-1}.

Donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ sont inverses l'une de l'autre}}$ d'après la prop. 157 p. 202.

Enfin, on a dit que g est bijective dans E.

Donc comme $g : F \to E$, on a $g : F \xrightarrow{\sim} E$.

Donc comme $f = g^{-1}$, on a $f : E \xrightarrow{\sim} F$ d'après la prop. 164 p. 213.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective dans } F}$.

CQFD.

4 Images directes et images réciproques

4.1 Images directes

Proposition 167 (Caractérisation de l'image directe par une application)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$. Soit y un ensemble.
On a alors l'équivalence $y \in f^{\to}(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$.
Ainsi, $\forall a \in A, f(a) \in f^{\to}(A)$.

En particulier, $y \in \mathrm{im}(f) \iff \exists x \in \mathrm{dom}(f), y = f(x)$.

Démonstration

On a les équivalences suivantes :
$y \in f^{\to}(A) \underset{\text{98 p. 130}}{\iff} \exists x \in A, xfy \iff \exists x \in A, y = f(x)$.
D'où le résultat.

Pour en conclure la deuxième équivalence, il suffit de rappeler que $\mathrm{im}(f) = f^{\to}\big(\mathrm{dom}(f)\big)$ d'après la prop. 99 p. 130, et d'utiliser l'équivalence que l'on vient de démontrer.
CQFD.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'image directe $\mathcal{R}^{\to}(E)$ pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ et tout ensemble E. Ici, nous allons regarder cela dans le cas où $\mathcal{R}$ est une application. Nous allons alors pouvoir définir une autre application qui à un ensemble E (partie de $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$) associe $\mathcal{R}^{\to}(E)$, et donc appeler $\mathcal{R}^{\to}$ cette nouvelle application.

Définition 42 (Application image directe)

Soit f une application.

On peut alors définir l'application suivante : $f^{\to} : \begin{pmatrix} \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \\ A & \longmapsto & f^{\to}(A) \end{pmatrix}$.

Proposition 168 (Application image directe et identité)

Soit E un ensemble.

On a alors $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

Démonstration

Par définition, on a $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(\mathrm{id}_E))$.

Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow} : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in \mathscr{P}(E)$.

On a donc $A \subseteq E$.

Or, $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = A \cap E$ d'après la prop. 104 p. 136.

Mais comme $A \subseteq E$, on a $A \cap E = A$ d'après la prop. 39 p. 49.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = A$.

Mais $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(A) = A$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(A)$.

Donc si $A \in \mathscr{P}(E)$, alors $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(A)$.

Donc $\forall A, \big(A \in \mathscr{P}(E) \implies \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(A)\big)$.

Donc $\forall A \in \mathscr{P}(E), \mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(A) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(A)$.

Or, on a dit que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}) = \mathscr{P}(E) = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)})$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}}$.

CQFD.

Proposition 169 (Image directe d'une paire et d'un singleton)

Soit f une application. Soient a et b deux ensembles.

1. Si $a \in \mathrm{dom}(f)$ et $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) = \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.
2. En particulier, si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) = \Big\{f(a)\Big\}$.

Démonstration

1. Supposons que $a \in \mathrm{dom}(f)$ et $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$.

Il existe donc au moins un $x \in \{a;b\}$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $x \in \{a;b\}$, on a $x = a$ ou $x = b$.

- si $x = a$, alors $y = f(x) = f(a)$ donc $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.
- si $x = b$, alors $y = f(x) = f(b)$ donc $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

Donc $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

Donc si $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$, alors $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

Donc $\forall y, \Big(y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big) \implies y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}\Big)$.

Donc $f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big) \subseteq \Big\{f(a); f(b)\Big\}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.

On a donc $y = f(a)$ ou $y = f(b)$.

- si $y = f(a)$, alors comme $a \in \{a;b\}$, on a $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$.
- si $y = f(b)$, alors comme $b \in \{a;b\}$, on a $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$.

Donc $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$.

Donc si $y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\}$, alors $y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in \Big\{f(a); f(b)\Big\} \implies y \in f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)\Big)$.

Donc $\Big\{f(a); f(b)\Big\} \subseteq f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{f^{\to}\Big(\{a;b\}\Big) = \Big\{f(a); f(b)\Big\}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) On a $f^{\to}\Big(\{a\}\Big) = f^{\to}\Big(\{a;a\}\Big) \underset{(1)}{=} \Big\{f(a); f(a)\Big\} = \Big\{f(a)\Big\}$.

Donc $\boxed{f^{\to}\Big(\{a\}\Big) = \Big\{f(a)\Big\}}$.

CQFD.

Proposition 170 (Image directe d'une application et vide)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$.

Alors $f^{\to}(A) = \varnothing \iff A = \varnothing$.

Démonstration

Comme $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, on a $A \cap \mathrm{dom}(f) = A$ d'après la prop. 39 p. 49.

On a alors $f^{\to}(A) = \varnothing \underset{99\text{ p. }130}{\iff} A \cap \mathrm{dom}(f) = \varnothing \iff A = \varnothing$.

Donc $\boxed{f^{\to}(A) = \varnothing \iff A = \varnothing}$.

CQFD.

On a déjà vu lors de la proposition 101 page 134 que $f^{\to}(A \cup B) = f^{\to}(A) \cup f^{\to}(B)$ et $f^{\to}(A \cap B) \subseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$. Il est temps de voir quand est-ce que l'on a $f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

Proposition 171 (Image directe par une application et intersection)

Soit f une application.

On a alors l'équivalence suivante :

$\Big(\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)\Big) \iff f$ est injective.

En particulier, du fait de la proposition 101 page 134, on a l'équivalence :

$\Big(\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A \cap B) = f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)\Big) \iff f$ est injective.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

Soit a un ensemble.

Supposons que $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit b un ensemble.

Supposons que $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

On a donc $\big\{f(a)\big\} = \big\{f(b)\big\}$.

Posons $A := \{a\}$ et $B := \{b\}$.

Comme $a \in \mathrm{dom}(f)$, on a $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Comme $b \in \mathrm{dom}(f)$, on a $B \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Or, on a $f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

On a donc $f^{\to}\Big(\{a\} \cap \{b\}\Big) \supseteq f^{\to}\Big(\{a\}\Big) \cap f^{\to}\Big(\{b\}\Big)$.

Donc $f^{\to}\Big(\{a\} \cap \{b\}\Big) \supseteq \Big\{f(a)\Big\} \cap \Big\{f(b)\Big\}$ d'après la prop. 169 p. 218.

Mais on a dit que $\big\{f(a)\big\} = \big\{f(b)\big\}$.

Donc $\Big\{f(a)\Big\} \cap \Big\{f(b)\Big\} = \Big\{f(a)\Big\}$ d'après la prop. 37 p. 45.

Donc $f^{\to}\Big(\{a\} \cap \{b\}\Big) \supseteq \Big\{f(a)\Big\}$.

Comme $f(a) \in \Big\{f(a)\Big\}$, on a $f(a) \in f^{\to}\Big(\{a\} \cap \{b\}\Big)$.

Donc $f^{\to}\Big(\{a\} \cap \{b\}\Big) \neq \varnothing$.

Donc $\{a\} \cap \{b\} \cap \mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ d'après la prop. 99 p. 130.

Mais $a \in \mathrm{dom}(f)$ et $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\{a\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et $\{b\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Donc $\{a\} \cap \{b\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 34 p. 41.

Donc $\{a\} \cap \{b\} \cap \mathrm{dom}(f) = \{a\} \cap \{b\}$.

Donc $\{a\} \cap \{b\} \neq \varnothing$.

Donc il existe au moins un $c \in \{a\} \cap \{b\}$.

Soit un tel c.

On a donc $c \in \{a\}$ et $c \in \{b\}$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $c = a$ et $c = b$ donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Donc si $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(a) = f(b) \implies a = b$.

Donc $\forall b, \Big(b \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)$.

Donc $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc $\forall a, \Big(a \in \mathrm{dom}(f) \implies \Big(\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)\Big)$.

Donc $\forall a \in \mathrm{dom}(f), \forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc f est injective.

Donc si $\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$, alors f est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est injective.

Soient A et B deux parties de $\mathrm{dom}(f)$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

On a donc $y \in f^{\to}(A)$ et $y \in f^{\to}(B)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Il existe donc au moins $a \in A$ et $b \in B$ tels que $f(a) = y = f(b)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soient de tels a et b.

On a donc $f(a) = f(b)$.

Or, f est injective.

Donc $a = b$.

Comme $b \in B$, on a $a \in B$.

Ainsi, on a $a \in A$ et $a \in B$ donc $a \in A \cap B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Ainsi, $y = f(a)$ et $a \in A \cap B$.

Donc $y \in f^{\to}(A \cap B)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$, alors $y \in f^{\to}(A \cap B)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B) \implies y \in f^{\to}(A \cap B)\Big)$.

Donc $f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B) \subseteq f^{\to}(A \cap B)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B) \subseteq f^{\to}(A \cap B)$.

Donc si f est injective, alors $\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B) \subseteq f^{\to}(A \cap B)$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\to}(A \cap B) \supseteq f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

CQFD.

Proposition 172 (Complémentaire et image directe)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

On a alors :

1. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f$ est injective
2. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f$ est surjective dans F
3. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) = F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f$ est bijective dans F

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

Soit a un ensemble.

Supposons que $a \in E$.

Soit b un ensemble.

Supposons que $b \in E$.

Supposons que $a \neq b$.

Posons $A := \{a\}$.

Comme $b \neq a$, on a $b \notin A$.

Donc comme $b \in E$, on a $b \in E \backslash A$.

Donc $f(b) \in f^{\to}(E \backslash A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, on a $f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$ par hypothèse.

Donc $f(b) \in F \backslash f^{\to}(A)$.

Donc $f(b) \in F$ et $f(b) \notin f^{\to}(A)$.

Or, $A = \{a\}$ donc $f^{\to}(A) = f^{\to}\Big(\{a\}\Big) \underset{\text{169 p. 218}}{=} \Big\{f(a)\Big\}$.

Donc $f(b) \notin \Big\{f(a)\Big\}$.

Donc $f(b) \neq f(a)$.

Donc si $a \neq b$, alors $f(a) \neq f(b)$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Donc si $b \in E$, alors $f(a) = f(b) \implies a = b$.

Donc $\forall b, \Big(b \in E \implies \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)$.

Donc $\forall b \in E, \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc si $a \in E$, alors $\forall b \in E, \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc $\forall a, \Big(a \in E \implies \Big(\forall b \in E, \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)\Big)$.

Donc $\forall a \in E, \forall b \in E, \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Or, $\mathrm{dom}(f) = E$ par définition, donc f est injective.

Donc si $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$, alors f est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est injective.

Soit A une partie de E.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\to}(E \backslash A)$.

Il existe donc au moins un $x \in E \backslash A$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Supposons par l'absurde que $y \in f^{\to}(A)$.

Il existe donc au moins un $a \in A$ tel que $y = f(a)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel a.

Or, $y = f(x)$ donc $f(x) = f(a)$.

Or, f est injective donc $x = a$.

En particulier, on a $x \in A$.

C'est absurde puisque $x \notin A$ puisque $x \in E \backslash A$.

Donc $y \notin f^{\to}(A)$.

Mais comme $y = f(x)$, on a $y \in \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, $f : E \to F$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ et donc $y \in F$.

Ainsi, on a $y \in F$ et $y \notin f^{\to}(A)$.

Donc $y \in F \backslash f^{\to}(A)$.

Donc si $y \in f^{\to}(E \backslash A)$, alors $y \in F \backslash f^{\to}(A)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in f^{\to}(E \backslash A) \implies y \in F \backslash f^{\to}(A)\Big)$.

Donc $f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

Donc si f est injective, alors $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

2

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

C'est vrai en particulier pour $A = E$, donc $f^{\to}(E \backslash E) \supseteq F \backslash f^{\to}(E)$.

Mais $E \backslash E = \varnothing$ d'après la prop. 44 p. 56.

Donc $f^{\to}(\varnothing) \supseteq F \backslash f^{\to}(E)$.

Mais $f^{\to}(\varnothing) = \varnothing$ d'après la prop. 99 p. 130.

Donc $\varnothing \supseteq F \backslash f^{\to}(E)$.

Donc $F \backslash f^{\to}(E) = \varnothing$ d'après la prop. 11 p. 15.

Donc $F \subseteq f^{\to}(E)$ d'après la prop. 46 p. 58.

Or, $f^{\to}(E) = \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 99 p. 130 puisque $\mathrm{dom}(f) = E$.

Donc $F \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Mais $f : E \to F$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

On a donc $F = \mathrm{im}(f)$.

Donc f est surjective dans F.

Donc si $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)$, alors f est surjective dans F.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est surjective dans F.

Soit A une partie de E.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in F \backslash f^{\to}(A)$.

On a donc $y \in F$ et $y \notin f^{\to}(A)$.

Or, f est surjective dans F donc $F = \mathrm{im}(f)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(f)$ et donc il existe au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $f : E \to F$, on a $\mathrm{dom}(f) = E$ et donc $x \in E$.

Supposons par l'absurde que $x \in A$.

Comme $y = f(x)$, on aurait alors $y \in f^{\to}(A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

C'est absurde puisqu'on a dit que $y \notin f^{\to}(A)$.

Donc $x \notin A$.

Ainsi, $x \in E$ et $x \notin A$.

Donc $x \in E \backslash A$.

Or, $y = f(x)$ donc $y \in f^{\to}(E \backslash A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in F \backslash f^{\to}(A)$, alors $y \in f^{\to}(E \backslash A)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in F \backslash f^{\to}(A) \implies y \in f^{\to}(E \backslash A)\Big)$.

Donc $f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

Donc si f est surjective dans F, alors $\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f \text{ est surjective dans } F}$.

(3) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) = F \backslash f^{\to}(A) \\
\iff & \Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \text{ et } \Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \\
\underset{(1)}{\iff} & f \text{ est injective et } \Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\to}(A)\Big) \\
\underset{(2)}{\iff} & f \text{ est injective et } f \text{ est surjective dans } F \\
\iff & f \text{ est bijective dans } F
\end{aligned}$$

On a donc bien $\boxed{\Big(\forall A \subseteq E, f^{\to}(E \backslash A) = F \backslash f^{\to}(A)\Big) \iff f \text{ est bijective dans } F}$.

CQFD.

Proposition 173 (Image de l'application image directe)

Soit f une application.

Alors $\operatorname{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(\operatorname{im}(f))$.

Autrement dit, $f^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \twoheadrightarrow \mathscr{P}(\operatorname{im}(f))$.

Démonstration

Par définition, on $f^{\rightarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ donc $\mathrm{im}(f^{\rightarrow}) \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Soit Y un ensemble.

Supposons que $Y \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Posons $X := f^{\leftarrow}(Y)$.

Montrons que $f^{\rightarrow}(X) = Y$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}(X)$.

Il existe donc au moins un $x \in X$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

On a donc $x \in X$, mais $X = f^{\leftarrow}(Y)$ donc $x \in f^{\leftarrow}(Y)$.

Il existe donc $z \in Y$ tel que xfz d'après la prop. 107 p. 139.

Soit un tel z.

Comme f est une application, on a $z = f(x)$.

Mais $y = f(x)$ par définition donc $y = z$ et donc $y \in Y$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}(X)$, alors $y \in Y$.

Donc $\forall y, \big(y \in f^{\rightarrow}(X) \implies y \in Y\big)$.

Donc $f^{\rightarrow}(X) \subseteq Y$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in Y$.

Or, par hypothèse on a $Y \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ donc $Y \subseteq \mathrm{im}(f)$.

On a donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Ainsi, on a $y = f(x)$ donc xfy, et $y \in Y$.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(Y)$ d'après la prop. 107 p. 139.

Or, $f^{\leftarrow}(Y) = X$ donc $x \in X$.

Ainsi, $y = f(x)$ et $x \in X$ donc $y \in f^{\rightarrow}(X)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in Y$, alors $y \in f^{\rightarrow}(X)$.

Donc $\forall y, \big(y \in Y \implies y \in f^{\rightarrow}(X)\big)$.

Donc $Y \subseteq f^{\rightarrow}(X)$ par définition de l'inclusion.

Ainsi, on a $f^{\rightarrow}(X) = Y$ par antisymétrie de l'inclusion.

On a donc $Y \in \operatorname{im}(f^{\to})$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $Y \in \mathscr{P}(\operatorname{im}(f))$, alors $Y \in \operatorname{im}(f^{\to})$.

Donc $\forall Y, \big(Y \in \mathscr{P}(\operatorname{im}(f)) \implies Y \in \operatorname{im}(f^{\to})\big)$.

Donc $\mathscr{P}(\operatorname{im}(f)) \subseteq \operatorname{im}(f^{\to})$ par définition de l'inclusion.

Finalement, on a $\boxed{\operatorname{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(\operatorname{im}(f))}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 174 (Image directe d'une composition d'applications)

Soient f et g deux applications telles que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$.

On a alors $(g \circ f)^{\to} = g^{\to} \circ f^{\to}$.

On dit que le passage à l'application image directe est un **morphisme** pour la composition.

Démonstration

On a $f^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(f))$ et $g^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(g)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(g))$ par définition.

Or, $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ par hypothèse, donc $\mathscr{P}(\operatorname{im}(f)) \subseteq \mathscr{P}(\operatorname{dom}(g))$ d'après la prop. 18 p. 22.

On a donc $g^{\to} \circ f^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(g))$ d'après la prop. 149 p. 188.

Or, $g \circ f : \operatorname{dom}(f) \to \operatorname{im}(g)$ d'après la prop. 149 p. 188, et donc $(g \circ f)^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(g))$ par définition.

Soit $A \in \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f))$.

On a alors $(g \circ f)^{\to}(A) \underset{\text{102 p. 135}}{=} g^{\to}\big(f^{\to}(A)\big) \underset{\text{150 p. 190}}{=} (g^{\to} \circ f^{\to})(A)$.

Donc $\forall A \in \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)), (g \circ f)^{\to}(A) = (g^{\to} \circ f^{\to})(A)$.

Or, $g^{\to} \circ f^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(g))$ et $(g \circ f)^{\to} : \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\operatorname{im}(g))$.

Donc $\boxed{(g \circ f)^{\to} = g^{\to} \circ f^{\to}}$ d'après la prop. 139 p. 171.

CQFD.

Proposition 175 (Application image directe et inversibilité)

Soit f une application.

Alors f est inversible si et seulement si $f^{\to}$ est inversible.

Dans ce cas-là, on a alors $\big(f^{\to}\big)^{-1} = \big(f^{-1}\big)^{\to}$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est inversible.

En particulier, f est inversible à gauche.

Il existe donc au moins une application $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Soit une telle g.

On a donc $g^{\to} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

On a alors $g^{\to} \circ f^{\to} \underset{\text{174 p. 227}}{=} (g \circ f)^{\to} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}{}^{\to} \underset{\text{168 p. 218}}{=} \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))}$.

Donc $f^{\to}$ est inversible à gauche.

Donc $f^{\to}$ est inversible d'après la prop. 153 p. 193.

Donc si f est inversible, alors $f^{\to}$ est inversible.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\to}$ est inversible.

En particuier, $f^{\to}$ est inversible à gauche.

Donc comme $f^{\to} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \twoheadrightarrow \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 173 p. 225, il existe au moins une application $h : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))}$.

Soit une telle h.

Si jamais $f = \varnothing$, alors $\boxed{f \text{ est inversible}}$ d'après la prop. 152 p. 192.

On peut désormais supposer que $f \neq \varnothing$.

On a alors $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$ et $\mathrm{im}(f) \neq \varnothing$ d'après la prop. 82 p. 111.

Comme $\mathrm{dom}(f) \neq \varnothing$, il existe au moins un $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit un tel x_0.

Définissons alors les applications suivantes :

$$\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{im}(f) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \\ y & \longmapsto & \{y\} \end{array} \right) \text{ et } \psi : \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) & \longrightarrow & \mathrm{dom}(f) \\ A & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } A = \{x\} \\ x_0 & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right).$$

La situation peut être illustrée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & f(x) \arrow[d, mapsto, "\varphi"] & & \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[uur, mapsto, bend left, "f"] & \{x\} \arrow[r, mapsto, "f^{\to}"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "h\circ f^{\to}=\mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))}"'] & \{f(x)\} \arrow[r, mapsto, "h"] & \{x\} \arrow[r, mapsto, "\psi"] & x
\end{tikzcd}$$

On peut alors construire g en isolant le chemin qui passe par f.

$$\begin{tikzcd}
 & f(x) \arrow[d, mapsto, "\varphi"] \arrow[drr, mapsto, bend left, "g"] & & \\
x \arrow[uur, mapsto, bend left, "f"] & \{f(x)\} \arrow[r, mapsto, "h"] & \{x\} \arrow[r, mapsto, "\psi"] & x
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on peut poser $g := \psi \circ h \circ \varphi$.

Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.

Premièrement, on a par définition $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$.

Or, $\varphi : \mathrm{im}(f) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$, $h : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ et $\psi : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathrm{dom}(f)$, donc $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 149 p. 188.

On a donc $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{dom}(f)$, et bien évidemment $\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)} : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 143 p. 178.

Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\big(f(x)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= (\psi \circ h \circ \varphi)\big(f(x)\big) \text{ par définition de } g \\
&= (\psi \circ h)\Big(\varphi\big(f(x)\big)\Big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= (\psi \circ h)\Big(\big\{f(x)\big\}\Big) \text{ par définition de } \varphi \\
&= (\psi \circ h)\Big(f^{\to}\big(\{x\}\big)\Big) \text{ d'après la prop. 169 p. 218} \\
&= (\psi \circ h \circ f^{\to})\big(\{x\}\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= \big(\psi \circ (h \circ f^{\to})\big)\big(\{x\}\big) \text{ par associativité de la composition} \\
&= (\psi \circ \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))})\big(\{x\}\big) \\
&= \psi\big(\{x\}\big) \text{ d'après la prop. 151 p. 191} \\
&= x \text{ par définition de } \psi \\
&= \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x) \text{ d'après la prop. 143 p. 178}
\end{aligned}$$

Donc $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), (g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Or, $\mathrm{dom}(g \circ f) = \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)})$.

Donc $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc f est inversible à gauche.

Donc f est inversible d'après la prop. 153 p. 193.

Donc si $f^{\to}$ est inversible, alors f est inversible.

Finalement, $\boxed{f \text{ est inversible si et seulement si } f^{\to} \text{ est inversible}}$.

De plus, on a $(f^{-1})^{\to} \circ f^{\to} \underset{\text{174 p. 227}}{=} (f^{-1} \circ f)^{\to} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}{}^{\to} \underset{\text{168 p. 218}}{=} \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))}$.

Or, $f^{\to} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$, donc $(f^{-1})^{\to}$ est une inverse à gauche de $f^{\to}$.

Donc comme $f^{\to}$ est inversible par hypothèse, on a $\boxed{(f^{-1})^{\to} = (f^{\to})^{-1}}$ par définition de l'inverse.

CQFD.

Proposition 176 (Image directe d'un ensemble et bijection réciproque)

Soit f une application inversible.

Soient A une partie de $\mathrm{dom}(f)$, et $y \in \mathrm{im}(f)$.

On a alors $f^{-1}(y) \in A \iff y \in f^{\to}(A)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{-1}(y) \in A$.

Alors $f\big(f^{-1}(y)\big) \in f^{\to}(A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, $f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ d'après la prop. 154 p. 198.

Donc $y \in f^{\to}(A)$.

Donc si $f^{-1}(y) \in A$, alors $y \in f^{\to}(A)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $y \in f^{\to}(A)$.

Il existe donc au moins un $a \in A$ tel que $y = f(a)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel a.

Comme $y = f(a)$, on a $a = f^{-1}(y)$ d'après la prop. 155 p. 199.

Donc comme $a \in A$, on a $f^{-1}(y) \in A$.

Donc si $y \in f^{\to}(A)$, alors $f^{-1}(y) \in A$.

Finalement, $\boxed{f^{-1}(y) \in A \iff y \in f^{\to}(A)}$.

. **CQFD**.

Proposition 177 (Application image directe et jectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble. On a alors :

1. f est injective si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est injective.
2. f est surjective dans F si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$.
3. f est bijective dans F si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est bijective dans $\mathscr{P}(F)$.

Démonstration

1. On pourrait utiliser l'équivalence entre l'injectivité et l'inversibilité établie à la proposition 160 page 205, puis la proposition 175 page 227 pour conclure.

Nous allons ici voir une autre méthode en revenant directement à la définition d'injectivité.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est injective.

Soient A et B dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Supposons que $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(B)$.

Montrons que $A = B$.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, $f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}(B)$ par hypothèse.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(B)$.

Il existe donc au moins un $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel b.

On a donc $f(x) = f(b)$.

Mais f est injective par hypothèse.

Donc $x = b$.

Or, $b \in B$ par définition, donc $x \in B$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in B$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(B)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, $f^{\to}(A) = f^{\to}(B)$ par hypothèse.

Donc $f(x) \in f^{\to}(A)$.

Il existe donc au moins un $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel a.

On a donc $f(x) = f(a)$.

Mais f est injective par hypothèse.

Donc $x = a$.

Or, $a \in A$ par définition, donc $x \in A$.

Donc si $x \in B$, alors $x \in A$.

Finalement, $x \in A \iff x \in B$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \iff x \in B\big)$.

Donc $A = B$.

Donc si $f^{\to}(A) = f^{\to}(B)$, alors $A = B$.

Donc $\forall A \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)), \forall B \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)), \big(f^{\to}(A) = f^{\to}(B) \implies A = B\big)$.

Donc $f^{\to}$ est injective puisque $\mathrm{dom}(f^{\to}) = \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition.

Donc si f est injective, alors $f^{\to}$ est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\to}$ est injective.

Soit a un ensemble.

Supposons que $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit b un ensemble.

Supposons que $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

On a donc $\{f(a)\} = \{f(b)\}$.

Donc $f^{\to}(\{a\}) = f^{\to}(\{b\})$ d'après la prop. 169 p. 218.

Or, $f^{\to}$ est injective par hypothèse.

Donc $\{a\} = \{b\}$.

Donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Donc si $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(a) = f(b) \implies a = b$.

Donc $\forall b, \Big(b \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)$.

Donc $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc $\forall a, \Big(a \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall a \in \mathrm{dom}(f), \forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc f est injective.

Donc si $f^{\to}$ est injective, alors f est injective.

Finalement, $\boxed{f \text{ est injective si et seulement si } f^{\to} \text{ est injective}}$.

2

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est surjective dans F.

Donc $\mathrm{im}(f) = F$.

Donc $\mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) = \mathscr{P}(F)$.

Or, $\mathrm{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 173 p. 225.

Donc $\mathrm{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(F)$.

Donc $f^{\to}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$.

Donc si f est surjective dans F, alors $f^{\to}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f^{\to}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$.

On a donc $\mathrm{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(F)$.

Or, $\mathrm{im}(f^{\to}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 173 p. 225.

Donc $\mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) = \mathscr{P}(F)$.

Donc $\mathrm{im}(f) = F$ d'après la prop. 18 p. 22.

Donc f est surjective dans F.

Donc si $f^{\to}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$, alors f est surjective dans F.

Finalement, $\boxed{f \text{ est surjective dans } F \text{ si et seulement si } f^{\to} \text{ est surjective dans } \mathscr{P}(F)}$.

3

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est bijective dans } F &\iff f \text{ est injective } \text{ et } f \text{ est surjective dans } F \\
&\underset{1}{\iff} f^{\to} \text{ est injective } \text{ et } f \text{ est surjective dans } F \\
&\underset{2}{\iff} f^{\to} \text{ est injective } \text{ et } f^{\to} \text{ est surjective dans } \mathscr{P}(F) \\
&\iff f^{\to} \text{ est bijective dans } \mathscr{P}(F)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{f \text{ est bijective dans } F \text{ si et seulement si } f^{\to} \text{ est bijective dans } \mathscr{P}(F)}$.

CQFD.

Une question enfin que l'on peut se poser est de savoir si une application image directe n'est issue que d'une seule application : la réponse est oui, comme le montre cette proposition.

Proposition 178 (Injectivité du passage à l'application image directe)

Soient f et g deux applications.

Si $f^{\to} = g^{\to}$, alors $f = g$.

Autrement dit, le passage à l'application image directe est injectif.

Démonstration

Supposons que $f^{\to} = g^{\to}$.

Posons $E := \mathrm{dom}(f)$.

On a donc $\mathrm{dom}(f^{\to}) = \mathscr{P}(E)$ par définition.

Donc comme $f^{\to} = g^{\to}$, on a $\mathrm{dom}(g^{\to}) = \mathscr{P}(E)$.

Or, $\mathrm{dom}(g^{\to}) = \mathscr{P}(\mathrm{dom}(g))$ par définition.

Donc $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(g)) = \mathscr{P}(E)$ et donc $\mathrm{dom}(g) = E$ d'après la prop. 18 p. 22.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a donc $\{x\} \subseteq E$ d'après la prop. 16 p. 19.

Donc $\{x\} \in \mathscr{P}(E)$ donc $\{x\} \in \mathrm{dom}(f^{\to}) = \mathrm{dom}(g^{\to})$.

Or, $f^{\to} = g^{\to}$.

Donc $f^{\to}\big(\{x\}\big) = g^{\to}\big(\{x\}\big)$.

Donc $\big\{f(x)\big\} = \big\{g(x)\big\}$ d'après la prop. 169 p. 218.

Donc $f(x) = g(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Donc $\boxed{f = g}$ d'après la prop. 139 p. 171.

CQFD.

4.2 Image réciproque

Donnons une nouvelle caractérisation de l'image réciproque d'un ensemble, cette fois dans le cas où on le fait par une application : la caractérisation est alors légèrement simplifiée.

Proposition 179 (Caractérisation de l'image réciproque par une application)

Soit f une application. Soit B une partie de $\mathrm{im}(f)$. Soit x un ensemble.

On a alors l'équivalence $x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Il existe donc au moins un $b \in B$ tel que xfb d'après la prop. 107 p. 139.

Soit un tel b.

On a xfb donc $b = f(x)$ puisque f est une application.

Or, $b \in B$ par hypothèse, donc $f(x) \in B$.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}(B)$, alors $f(x) \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $f(x) \in B$.

Posons $b := f(x)$.

On a donc xfb, et $b \in B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 107 p. 139.

Donc si $f(x) \in B$, alors $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Finalement, $\boxed{x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B}$.

CQFD.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'image directe $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$ pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ et tout ensemble E. Ici, nous allons regarder cela dans le cas où $\mathcal{R}$ est une application. Nous allons alors pouvoir définir une autre application qui à un ensemble E (partie de $\mathrm{im}(\mathcal{R})$) associe $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$, et donc appeler $\mathcal{R}^{\leftarrow}$ cette nouvelle application.

Définition 43 (Application image réciproque)

Soit f une application.

On peut alors définir l'application suivante $f^{\leftarrow}$: $\left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \\ B & \longmapsto & f^{\leftarrow}(B) \end{array}\right)$.

Donnons tout de suite un exemple d'application image réciproque, qui nous servira à plusieurs reprises par la suite, à savoir celui de l'identité sur un ensemble.

Proposition 180 (Application image réciproque et identité)

Soit E un ensemble.

On a alors ${\mathrm{id}_E}^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

Démonstration

Par définition, on a $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(\mathrm{id}_E)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E))$.

Or, $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 88 p. 119.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow} : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$.

Soit B un ensemble.

Supposons que $B \in \mathscr{P}(E)$.

On a donc $B \subseteq E$.

Or, $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = B \cap E$ d'après la prop. 113 p. 143.

Mais comme $B \subseteq E$, on a $B \cap E = B$ d'après la prop. 39 p. 49.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = B$.

Mais $\mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(B) = B$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(B)$.

Donc si $B \in \mathscr{P}(E)$, alors $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(B)$.

Donc $\forall B, \big(B \in \mathscr{P}(E) \implies \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(B)\big)$.

Donc $\forall B \in E, \mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}(B)$.

Or, on a dit que $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}) = E = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)})$.

Donc $\boxed{\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}}$ d'après la prop. 139 p. 171.

CQFD.

Proposition 181 (Image réciproque d'une application et vide)

Soit f une application. Soit B une partie de $\mathrm{im}(f)$.

Alors $f^{\leftarrow}(B) = \varnothing \iff B = \varnothing$.

Démonstration

Comme $B \subseteq \mathrm{im}(f)$, on a $B \cap \mathrm{im}(f) = B$ d'après la prop. 39 p. 49.

On a alors $f^{\leftarrow}(B) = \varnothing \underset{108\text{ p. }140}{\iff} B \cap \mathrm{im}(f) = \varnothing \iff B = \varnothing$.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}(B) = \varnothing \iff B = \varnothing}$.

CQFD.

En ce qui concerne l'application image directe, nous avions des résultats sur le passage au complémentaire si l'on se plaçait dans des cas où l'application est injective ou surjective. Ici nous allons voir que l'application image réciproque n'a besoin d'aucune hypothèse en particulier pour passer au complémentaire.

Proposition 182 (Complémentaire et image réciproque)

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.
Alors $\forall B \subseteq F, f^{\leftarrow}(F \backslash B) = E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.

Démonstration

Soit $B \in \mathscr{P}(F)$.

Soit x un ensemble.

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$.
On a donc $f(x) \in F \backslash B$ d'après la prop. 179 p. 234.
Donc $f(x) \in F$ et $f(x) \notin B$.
Or, $x \in f^{\leftarrow}(B) \implies f(x) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.
Donc $f(x) \notin B \implies x \notin f^{\leftarrow}(B)$.
Donc $x \notin f^{\leftarrow}(B)$ par modus ponens.
Or, $f^{\leftarrow}(F \backslash B) \subseteq E$ par définition, et $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$ par hypothèse, donc $x \in E$.
Ainsi, $x \in E$ et $x \notin f^{\leftarrow}(B)$.
Donc $x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$, alors $x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.
On a donc $x \in E$ et $x \notin f^{\leftarrow}(B)$.
On a $f(x) \in B \implies x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.
Donc $x \notin f^{\leftarrow}(B) \implies f(x) \notin B$.
Donc $f(x) \notin B$ par modus ponens.
Or, $f : E \to F$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$ et donc comme $f(x) \in \mathrm{im}(f)$, on a $f(x) \in F$.
Ainsi, $f(x) \in F$ et $f(x) \notin B$.
Donc $f(x) \in F \backslash B$.
Donc $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Donc si $x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)$, alors $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$.

Ainsi, $x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B)$ si et seulement si $x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)$

Donc $\forall x, \big(x \in f^{\leftarrow}(F \backslash B) \iff x \in E \backslash f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Donc $f^{\leftarrow}(F \backslash B) = E \backslash f^{\leftarrow}(B)$ par définition de l'égalité.

Donc $\forall B \in \mathscr{P}(F), f^{\leftarrow}(F \backslash B) = E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.
Donc $\boxed{\forall B \subseteq F, f^{\leftarrow}(F \backslash B) = E \backslash f^{\leftarrow}(B)}$.
CQFD.

Voyons à présent comment se comporte une composition d'application quand on passe à l'image réciproque.

Proposition 183 (Image réciproque d'une composition d'application)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$.
On a alors $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$.

Démonstration

On a $g^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(g)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(g))$ et $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition.
Or, on a $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$ par hypothèse.
Donc $g^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(g)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(g))$ et $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(g)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.
On a donc $f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(g)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ d'après la prop. 149 p. 188.
De plus, comme $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, on a $g \circ f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(g)$ avec $\mathrm{im}(g \circ f) = \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 149 p. 188.
Donc $(g \circ f)^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(g)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition.

Soit $C \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(g))$.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(C) &\iff (g \circ f)(x) \in C \text{ d'après la prop. 179 p. 234} \\
&\iff g\big(f(x)\big) \in C \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&\iff f(x) \in g^{\leftarrow}(C) \text{ d'après la prop. 179 p. 234} \\
&\iff x \in f^{\leftarrow}\big(g^{\leftarrow}(C)\big) \text{ d'après la prop. 179 p. 234} \\
&\iff x \in \big(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\big)(C) \text{ d'après la prop. 150 p. 190}
\end{aligned}$$

Donc $x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(C) \iff x \in \big(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\big)(C)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in (g \circ f)^{\leftarrow}(C) \iff x \in \big(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\big)(C)\Big)$.

Donc $(g \circ f)^{\leftarrow}(C) = \big(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\big)(C)$ par définition de l'égalité.

Donc $\forall C \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(g)), (g \circ f)^{\leftarrow}(C) = \big(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\big)(C)$.
Or, on a dit que $\mathrm{dom}\left(((g \circ f)^{\leftarrow})\right) = \mathrm{dom}\left(f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}\right)$.
Donc $\boxed{(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}}$ d'après la prop. 139 p. 171.
CQFD.

Fait intéressant à présent : peu importe f, il s'avère que $f^{\leftarrow}$ est toujours inversible. Nous avons de plus une idée de son inverse dans le cas où f est elle-même inversible.

Proposition 184 (Inversibilité de l'application image réciproque)

Soit f une application. Alors $f^{\leftarrow}$ est inversible.
De plus, si f est inversible, alors $(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}$.

Démonstration

Rappelons que par définition, $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Considérons alors $g := \begin{pmatrix} \mathrm{im}(f^{\leftarrow}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \\ A & \longmapsto & f^{\rightarrow}(A) \end{pmatrix}$, et montrons que $g \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}$.

Soit $B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Montrons que $(g \circ f^{\leftarrow})(B) = B$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B)$.

On a $(g \circ f^{\leftarrow})(B) = g\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ d'après la prop. 150 p. 190.

On a donc $y \in g\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Or, $g\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ par définition de g.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Il existe donc au moins un $x \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $x \in f^{\leftarrow}(B)$, on a $f(x) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, on a dit que $y = f(x)$, donc $y \in B$.

Donc si $y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B)$, alors $y \in B$.

Donc $\forall y, \big(y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B) \implies y \in B\big)$.

Donc $(g \circ f^{\leftarrow})(B) \subseteq B$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in B$.

Par définition, on a $B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

On a donc $B \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc comme $y \in B$, on a $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.
Soit un tel x.
Comme $y \in B$ et $y = f(x)$, on a $f(x) \in B$.
On a donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.
Comme $y = f(x)$ et $x \in f^{\leftarrow}(B)$, on a $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ d'après la prop. 167 p. 217.
Or, $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = g\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ par définition de g.
Donc $y \in g\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.
Or, $g\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = (g \circ f^{\leftarrow})(B)$ d'après la prop. 150 p. 190.
On a donc $y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B)$.
Donc si $y \in B$, alors $y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B)$.
Donc $\forall y, \big(y \in B \implies y \in (g \circ f^{\leftarrow})(B)\big)$.
Donc $B \subseteq (g \circ f^{\leftarrow})(B)$ par définition de l'inclusion.
Ainsi, on a $(g \circ f^{\leftarrow})(B) = B$ par antisymétrie de l'inclusion.
Or, $B = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$ d'après la prop. 143 p. 178.
Donc $(g \circ f^{\leftarrow})(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$.
Donc $\forall B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)), (g \circ f^{\leftarrow})(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$.
Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 83 p. 113, et comme $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathrm{im}(f^{\leftarrow})$ et $g : \mathrm{im}(f^{\leftarrow}) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$, on a $g \circ f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 149 p. 188, et donc $\mathrm{dom}(g \circ f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.
Donc $g \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}$ d'après la prop. 139 p. 171.
Or, on a $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition, donc $\mathrm{dom}(f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.
Donc $g \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f^{\leftarrow})}$.
Donc $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est inversible à gauche et donc inversible}}$ d'après la prop. 153 p. 193.

Supposons à présent que f est inversible.
On a donc $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ par définition, donc $(f^{-1})^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.
On a alors $f^{\leftarrow} \circ (f^{-1})^{\leftarrow} \underset{\text{183 p. 238}}{=} (f \circ f^{-1})^{\leftarrow} = (\mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)})^{\leftarrow} \underset{\text{180 p. 235}}{=} \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}$.
Donc par définition de $(f^{\leftarrow})^{-1}$, on a $\boxed{(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}}$.
CQFD.

Observons à présent ce que l'on peut dire de la jectivité de $f^{\leftarrow}$, et si elle dépend de celle de f comme c'est le cas de $f^{\rightarrow}$.

Proposition 185 (Application image réciproque et jectivité)

Soit f une application.
On a alors :

1. $f^{\leftarrow}$ est toujours injective.

(2) $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ si et seulement si f est injective.
En particulier, d'après (1), $f^{\leftarrow}$ est bijective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ si et seulement si f est injective.

Démonstration

(1)

Soient A et B dans $\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Supposons que $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B)$.

Montrons que $A = B$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in A$.

On sait que $A \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ donc $A \subseteq \mathrm{im}(f)$ et donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

On a donc $y \in A$ et $y = f(x)$ donc $f(x) \in A$.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(A)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B)$ par hypothèse.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$, et donc $f(x) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $y = f(x)$ donc $y \in B$.

Donc si $y \in A$, alors $y \in B$.

Donc $\forall y, \big(y \in A \implies y \in B\big)$.

Donc $A \subseteq B$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in B$.

On sait que $B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ donc $B \subseteq \mathrm{im}(f)$ et donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

On a donc $y \in B$ et $y = f(x)$ donc $f(x) \in B$.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B)$ par hypothèse.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(A)$, et donc $f(x) \in A$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $y = f(x)$ donc $y \in A$.

Donc si $y \in B$, alors $y \in A$.

Donc $\forall y, \big(y \in B \implies y \in A\big)$.

Donc $B \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

Ainsi, $A = B$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B)$, alors $A = B$.

Donc $\forall A \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)), \forall B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)), \big(f^{\leftarrow}(A) = f^{\leftarrow}(B) \implies A = B\big)$.

Or, $\mathrm{dom}(f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ par définition.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est injective}}$ par définition.

2

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Soit a un ensemble.

Supposons que $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit b un ensemble.

Supposons que $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

Comme $b \in \mathrm{dom}(f)$, on a $\{b\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 16 p. 19, et donc $\{b\} \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Or, $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par hypothèse.

Donc $\mathrm{im}(f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$, et donc $\{b\} \in \mathrm{im}(f^{\leftarrow})$.

Il existe donc au moins un $B \in \mathrm{dom}(f^{\leftarrow})$ tel que $f^{\leftarrow}(B) = \{b\}$.

Soit un tel B.

Donc comme $b \in \{b\}$, on a $b \in f^{\leftarrow}(B)$.

On a donc $f(b) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f(a) = f(b)$ par hypothèse.

Donc $f(a) \in B$, et donc $a \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f^{\leftarrow}(B) = \{b\}$ par définition de B, et donc $a \in \{b\}$.

On a donc $a = b$.

Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.

Donc si $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(a) = f(b) \implies a = b$.

Donc $\forall b, \Big(b \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)$.

Donc $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc $\forall a, \Big(a \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall a \in \mathrm{dom}(f), \forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.

Donc f est injective.

Donc si $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$, alors f est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est injective.

Soit $A \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Posons $B := f^{\rightarrow}(A)$.

Comme $f^{\rightarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$, on a $B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Montrons qu'alors $f^{\leftarrow}(B) = A$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

On a donc $f(x) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $B = f^{\rightarrow}(A)$ par définition.

Donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$.

Il existe donc au moins un $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel a.

On a donc $f(x) = f(a)$.

Or, f est injective par hypothèse, donc $x = a$.

On a donc $x \in A$.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}(B)$, alors $x \in A$.

Donc $\forall x, \big(x \in f^{\leftarrow}(B) \implies x \in A\big)$.

Donc $f^{\leftarrow}(B) \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a alors $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, on a défini B comme étant $f^{\rightarrow}(A)$.

Donc $f(x) \in B$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Donc si $x \in A$, alors $x \in f^{\leftarrow}(B)$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \implies x \in f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Donc $A \subseteq f^{\leftarrow}(B)$ par définition de l'inclusion.

Donc $f^{\leftarrow}(B) = A$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc $A \in \mathrm{im}(f^{\leftarrow})$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc $\forall A \in \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)), A \in \mathrm{im}(f^{\leftarrow})$.

Donc $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \subseteq \mathrm{im}(f^{\leftarrow})$ par définition de l'inclusion.

Or, $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition, donc $\mathrm{im} f^{\leftarrow} \subseteq \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

On a donc $\mathrm{im}(f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Donc si f est injective, alors $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow} \text{ est surjective dans } \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \text{ si et seulement si } f \text{ est injective}}$.

CQFD.

La question que l'on s'était posée pour les applications images directes se pose à nouveau : une application image réciproque donnée est-elle issue d'une seule application ? La réponse est à nouveau oui, comme le montre cette proposition.

Proposition 186 (Injectivité du passage à l'application image réciproque)

Soient f et g deux applications.

Si $f^{\leftarrow} = g^{\leftarrow}$, alors $f = g$.

Démonstration

Supposons que $f^{\leftarrow} = g^{\leftarrow}$.

Par définition, on a $\mathrm{dom}(f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ donc comme $f^{\leftarrow} = g^{\leftarrow}$, on a $\mathrm{dom}(g^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

Or, $\mathrm{dom}(g^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(g))$ par définition, donc $\mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(g))$ et donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 18 p. 22.

On sait que $f^{\leftarrow}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 108 p. 140, donc $g^{\leftarrow}(\mathrm{im}(f)) = \mathrm{dom}(f)$.

Or, on a dit que $\mathrm{im}(f) = \mathrm{im}(g)$, donc $g^{\leftarrow}(\mathrm{im}(g)) = \mathrm{dom}(f)$.

Or, on a $g^{\leftarrow}(\mathrm{im}(g)) = \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 108 p. 140.

Donc $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$.

Posons $y := f(x)$.

Comme $y \in \{y\}$, on a $f(x) \in \{y\}$.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f^{\leftarrow} = g^{\leftarrow}$ par hypothèse, donc $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) = g^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$.

On a donc $x \in g^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$.

Donc $g(x) \in \{y\}$ d'après la prop. 179 p. 234.

Donc $g(x) = y$, mais comme $y = f(x)$ par définition, on a $f(x) = g(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$.

Donc $\boxed{f = g}$.
CQFD.

4.3 Image directe et image réciproque

Voyons à présent comment se comportent entre elles les images réciproques et les images directes.

Proposition 187 (Image directe et l'image réciproque)

Soit f une application. Soient $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et $B \subseteq \mathrm{im}(f)$.
On a alors :

1. $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B$.
2. $A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.
3. $f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big) = \mathrm{dom}(f)$.
4. $\Big(\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C\Big) \iff f$ est injective.

Démonstration

1

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Il existe donc au moins un $x \in f^{\leftarrow}(B)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $x \in f^{\leftarrow}(B)$, on a $f(x) \in B$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $y = f(x)$ donc $y \in B$.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$, alors $y \in B$.

Donc $\forall y, \Big(y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \implies y \in B\Big)$.

Donc $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \subseteq B$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in B$.

Comme $B \subseteq \mathrm{im}(f)$ par définition, on a $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $y = f(x)$ et $y \in B$, on a $f(x) \in B$.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(B)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $y = f(x)$ donc $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in B$, alors $y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in B \implies y \in f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)\Big)$.

Donc $B \subseteq f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, on a $\boxed{f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2)

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(A)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Donc si $x \in A$, alors $x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in A \implies x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)\Big)$.

Donc $\boxed{A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)}$ par définition de l'inclusion.

(3)

On sait déjà que $\mathrm{dom}(f) \subseteq f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big)$ d'après (2).

Or, $\mathrm{im}(f^{\leftarrow}) \subseteq \mathscr{P}\big(\mathrm{dom}(f)\big)$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

Donc $f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big) \in \mathscr{P}\big(\mathrm{dom}(f)\big)$.

Donc $f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big) \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

Ainsi, $\boxed{f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big) = \mathrm{dom}(f)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(4)

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$.

Soit a un ensemble.

Supposons que $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Soit b un ensemble.

Supposons que $b \in \mathrm{dom}(f)$.

Supposons que $f(a) = f(b)$.

Posons $C := \{b\}$.

Comme $b \in \mathrm{dom}(f)$, on a $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$d'après la prop. 16 p. 19.

Or, on a $f^{\rightarrow}(C) = f^{\rightarrow}\big(\{b\}\big) = \big\{f(b)\big\}$ d'après la prop. 169 p. 218.
On a donc $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = f^{\leftarrow}\Big(\big\{f(b)\big\}\Big)$.
Or, $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$ par hypothèse.
Donc $f^{\leftarrow}\Big(\big\{f(b)\big\}\Big) = C = \{b\}$.

Or, $f(a) = f(b)$ par hypothèse.
Donc $f(a) \in \big\{f(b)\big\}$.
Donc $a \in f^{\leftarrow}\Big(\big\{f(b)\big\}\Big)$ d'après la prop. 179 p. 234.
Or, on a dit que $f^{\leftarrow}\Big(\big\{f(b)\big\}\Big) = \{b\}$.
Donc $a \in \{b\}$.
Donc $a = b$.
Donc si $f(a) = f(b)$, alors $a = b$.
Donc si $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(a) = f(b) \implies a = b$.
Donc $\forall b, \Big(b \in \mathrm{dom}(f) \implies \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)$.
Donc $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.
Donc si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.
Donc $\forall a, \Big(a \in \mathrm{dom}(f) \implies \Big(\forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)\Big)\Big)$.
Donc $\forall a \in \mathrm{dom}(f), \forall b \in \mathrm{dom}(f), \big(f(a) = f(b) \implies a = b\big)$.
Donc f est injective.
Donc si $\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$, alors f est injective.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est injective.
Soit $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$.
On sait déjà que $C \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big)$ d'après 2.
Montrons l'inclusion réciproque.
Soit x un ensemble.
Supposons que $x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big)$.
On a donc $f(x) \in f^{\rightarrow}(C)$ d'après la prop. 179 p. 234.
Il existe donc au moins un $c \in C$ tel que $f(x) = f(c)$.
Soit un tel c.
On a donc $f(x) = f(c)$.
Or, f est injective par hypothèse.
Donc $x = c$, et donc $x \in C$.
Donc si $x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big)$, alors $x \in C$.
Donc $\forall x, \Big(x \in f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) \implies x \in C\Big)$.

Donc $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) \subseteq C$ par définition de l'inclusion.

Donc $f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc $\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$.

Donc si f est injective, alors $\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C$.

Finalement, $\boxed{\Big(\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C\Big) \iff f \text{ est injective}}$.

CQFD.

Plaçons-nous à présent dans le cas où notre application f est inversible : l'image réciproque est alors l'inverse de l'image directe !

Proposition 188 (Image directe, image réciproque et inverse)

Soit f une application inversible.

Alors $f^{\rightarrow}$ est inversible d'après la prop. 175 p. 227, et $f^{\leftarrow}$ est inversible d'après la prop. 184 p. 239.

De plus, toujours d'après ces deux propositions, on a alors $(f^{\rightarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\rightarrow}$ et $(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}$.

En fait, on a aussi : $(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}$, et donc manière équivalente $(f^{\leftarrow})^{-1} = f^{\rightarrow}$.

Démonstration

On a $f^{\rightarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ et $f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f))$ par définition, donc $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} : \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \to \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 149 p. 188.

Montrons que $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}$.

Soit $B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$.

On a alors $(f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow})(B) \underset{\text{150 p. 190}}{=} f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) \underset{\text{187 p. 245}}{=} B \underset{\text{143 p. 178}}{=} \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$.

Donc $(f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow})(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$.

Donc $\forall B \in \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)), (f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow})(B) = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}(B)$.

Or, on a dit que $\mathrm{dom}(f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ et $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(\mathrm{im}(f))}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Or, $\mathrm{im}(f^{\rightarrow}) = \mathscr{P}(\mathrm{im}(f))$ d'après la prop. 173 p. 225.

Donc $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f^{\rightarrow})}$.

Donc $f^{\leftarrow}$ est un inverse à droite de $f^{\rightarrow}$.

Or, $f^{\rightarrow}$ est inversible, donc $\boxed{(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}}$ par définition de l'inverse.

CQFD.

La notation qui va suivre va nous permettre plus de confort dans la pratique.

Notation

Soit f une application. Soit $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
L'ensemble $f^{\rightarrow}\big(A \cap \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid P(x)\}\big)$ sera parfois noté $\{f(x) \mid x \in A \text{ et } P(x)\}$.

En particulier, on pourra considérer $\{f(x) \mid x \in A\}$ en prenant une assertion toujours vraie pour P.

5 Restriction et prolongement d'applications

Intéressons-nous pour terminer ce chapitre à la notion de restrictions et de prolongements dans le cas particulier des applications.

Proposition 189 (Restriction d'une application)

Soit f une application. Soit $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

1. $f_{|A}$ est une application.
2. Plus précisément, on a $f_{|A} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$.
3. $f_{|\mathrm{dom}(f)} = f$.
4. $\forall C \subseteq A, \left(f_{|A}\right)_{|C} = f_{|C}$.

Démonstration

1. On a $f_{|A} = f \circ \mathrm{id}_A$ d'après la prop. 133 p. 160.

Or, f est une application par définition, et id_A est une application d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $f \circ \mathrm{id}_A$ est une application d'après la prop. 148 p. 188.

Donc $\boxed{f_{|A} \text{ est une application}}$.

2.

On sait que $\mathrm{dom}(f_{|A}) = \mathrm{dom}(f) \cap A$ d'après la prop. 134 p. 161.

Or, $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par définition.

Donc $\mathrm{dom}(f) \cap A = A$ d'après la prop. 39 p. 49.

Donc $\mathrm{dom}(f_{|A}) = A$.

De plus, comme $f_{|A}$ est une restriction de f, on a $\mathrm{im}(f_{|A}) \subseteq \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Ainsi, on a $\mathrm{dom}(f_{|A}) = A$ et $\mathrm{im}(f_{|A}) \subseteq \mathrm{im}(f)$ donc $f_{|A} : A \to \mathrm{im}(f)$.

Il nous reste à montrer que $\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(f_{|A})$ puisqu'on a dit que $\mathrm{dom}(f_{|A}) = A$.

Posons $y := f_{|A}(x)$.

On a donc $x f_{|A} y$.

Donc $x f y$ et $x \in A$ d'après la prop. 132 p. 159.

En particulier, $x f y$.

Donc $y = f(x)$ puisque f est une application.

Or, $y = f_{|A}(x)$ par définition de y.

Donc $f_{|A}(x) = f(x)$.

Donc si $x \in A$, alors $f_{|A}(x) = f(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \implies f_{|A}(x) = f(x)\big)$.

Donc $\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$.

Or, $f_{|A} : A \to \mathrm{im}(f)$.

Donc $\boxed{f_{|A} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}}$.

3 On a $f_{|\mathrm{dom}(f)} \underset{2}{=} \begin{pmatrix} \mathrm{dom}(f) & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix} = f$.

Donc $\boxed{f_{|\mathrm{dom}(f)} = f}$.

4 Soit C une partie de A.

On a alors $(f_{|A})_{|C} = \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & \mathrm{im}(f_{|A}) \\ x & \longmapsto & f_{|A}(x) \end{pmatrix}$ d'après 2.

Or, $\forall x \in A, f_{|A}(x) = f(x)$ et comme $C \subseteq A$, alors $\forall x \in C, f_{|A}(x) = f(x)$.

Donc $(f_{|A})_{|C} = \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & \mathrm{im}(f_{|A}) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$.

Mais on a $\mathrm{im}(f_{|A}) \subseteq \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Donc $(f_{|A})_{|C} = \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$ d'après la prop. 138 p. 170.

Or, $C \subseteq A$ et $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, donc $C \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par transitivité de l'inclusion, et donc $f_{|C} = \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$ d'après 2.

Donc $\boxed{(f_{|A})_{|C} = f_{|C}}$.

CQFD.

La proposition précédente nous donne une belle caractérisations des restrictions d'applications à des ensembles. Mais est-ce que cela suffit pour parler de toutes les restrictions d'applications ? La répons est oui, puisque la proposition suivante montre que toute restriction d'application est en fait une restriction à un ensemble particulier.

Proposition 190 (Restriction et prolongement d'une application)

Soient f et g deux applications.

Si f est une restriction de g, alors $g_{|\mathrm{dom}(f)} = f$.

En particulier, $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g(x)$ d'après la prop. 189 p. 250.

Démonstration

Supposons que f est une restriction de g.

En particulier, $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Nous pouvons alors considérons $g_{|\mathrm{dom}(f)} : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 189 p. 250.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Posons $y := f(x)$.

On a donc xfy.

Or, f est une restriction de g par hypothèse.

Donc xgy d'après la prop. 128 p. 154.

Or, g est une application donc $y = g(x)$.

Mais $g_{\mathrm{dom}(f)}(x) = g(x)$ d'après la prop. 189 p. 250.

Donc $y = g_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Mais $y = f(x)$.

Donc $f(x) = g_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f(x) = g_{\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \implies f(x) = g_{\mathrm{dom}(f)}(x)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = g_{|\mathrm{dom}(f)}(x)$.

Mais on a dit que $\mathrm{dom}(g_{|\mathrm{dom}(f)} = \mathrm{dom}(f)$.

Donc $\boxed{f = g_{|\mathrm{dom}(f)}}$.

CQFD.

Fait intéressant : l'inversibilité est conservée quand on restreint une application. Cela nous servira de nombreuses fois par la suite. Il en va naturellement de même pour l'injectivité.

Proposition 191 (Restrictions d'applications, inversibilité et injectivité)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

1. Si f est inversible, alors $f_{|A}$ est inversible.

Dans ce cas-là, on a $(f_{|A})^{-1} = (f^{-1})_{|f^{\to}(A)} = \left(\begin{array}{ccc} f^{\to}(A) & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}\right)$.

(2) Si f est injective, alors $f_{|A}$ est injective.

Démonstration

(1)

Supposons que f est inversible.

• Rappelons pour commencer que $f^{\to}(A) \subseteq \mathrm{im}(f)$ par définition de l'image directe.
Or, $\mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f)$ par définition de f^{-1}.
Donc $f^{\to}(A) \subseteq \mathrm{dom}(f^{-1})$.
Nous pouvons donc considérer $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} = \left(\begin{array}{ccc} f^{\to}(A) & \longrightarrow & \mathrm{im}(f^{-1}) \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}\right)$ d'après la prop. 189 p. 250.

• Montrons à présent que $\mathrm{im}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big) \subseteq A$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{im}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big)$.

Il existe donc au moins un $y \in \mathrm{dom}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big)$ tel que $x = (f^{-1})_{|f^{\to}(A)}(y)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel y.

Comme $\mathrm{dom}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big) = f^{\to}(A)$ d'après la prop. 189 p. 250, on a $y \in f^{\to}(A)$.

Donc $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)}(y) = f^{-1}(y)$ toujours d'après la même proposition.

Donc $x = f^{-1}(y)$.

Comme $y \in f^{\to}(A)$, il existe donc au moins un $a \in A$ tel que $y = f(a)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel a.

On a donc $x = f^{-1}(y)$ et $y = f(a)$.

Donc $x = f^{-1}\big(f(a)\big) \underset{\text{150 p. 190}}{=} (f^{-1} \circ f)(a) = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}(a) \underset{\text{143 p. 178}}{=} a$.

Donc $x = a$.

Comme $a \in A$ par définition, on a donc $x \in A$.

Donc si $x \in \mathrm{im}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big)$, alors $x \in A$.

Donc $\forall x, \Big(x \in \operatorname{im}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big) \implies x \in A\Big)$.

Donc $\operatorname{im}\Big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)}\Big) \subseteq A$ par définition de l'inclusion.

Nous avons donc $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} : f^{\to}(A) \to A$ et donc $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} = \left(\begin{array}{ccc} f^{\to}(A) & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}\right)$.

• Montrons que $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A} = \mathrm{id}_A$.

On sait que $\mathrm{id}_A : A \to A$ d'après la prop. 143 p. 178.

De plus, comme $f_{|A} : A \to f^{\to}(A)$ d'après la prop. 134 p. 161 et $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} : f^{\to}(A) \to A$, on a $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A} : A \to A$ d'après la prop. 149 p. 188.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big)(x) &= f^{-1}_{|f^{\to}(A)}\big(f_{|A}(x)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\
&= f^{-1}\big(f_{|A}(x)\big) \text{ d'après la prop. 189 p. 250} \\
&= f^{-1}\big(f(x)\big) \text{ d'après la prop. 189 p. 250} \\
&= x \text{ d'après la prop. 154 p. 198} \\
&= \mathrm{id}_A(x) \text{ d'après la prop. 143 p. 178}
\end{aligned}$$

Donc $\big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big)(x) = \mathrm{id}_A(x)$.

Donc si $x \in A$, alors $\big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big)(x) = \mathrm{id}_A(x)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in A \implies \big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big)(x) = \mathrm{id}_A(x)\Big)$.

Donc $\forall x \in A, \big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big)(x) = \mathrm{id}_A(x)$.

Or, $\operatorname{dom}\big((f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A}\big) = A = \operatorname{dom}(\mathrm{id}_A)$.

Donc $(f^{-1})_{|f^{\to}(A)} \circ f_{|A} = \mathrm{id}_A$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc $f_{|A}$ est inversible à gauche, donc inversible d'après la prop. 153 p. 193, et $\boxed{(f_{|A})^{-1} = (f^{-1})_{|f^{\to}(A)}}$ par définition de l'inverse.

(2) Supposons que f est injective.

Donc f est inversible d'après la prop. 160 p. 205.

Donc $f_{|A}$ est inversible.

Donc $\boxed{f_{|A} \text{ est injective}}$ d'après la prop. 160 p. 205.

CQFD.

Proposition 192 (Intersection de deux applications)

Soient f et g deux applications.

On a alors :

1. $f \cap g$ est une application.
2. $f \cap g$ est la plus grande application, au sens de l'inclusion, qui soit à la fois une restriction de f et de g.

Démonstration

1.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que $x(f \cap g)y$ et $x(f \cap g)y'$.

Or, $f \cap g$ est une restriction de f d'après la prop. 127 p. 154.

Donc xfy et xfy' d'après la prop. 128 p. 154.

Or, f est une application.

Donc $y = y'$.

Donc si $x(f \cap g)y$ et $x(f \cap g)y'$, alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \Big(\big(x(f \cap g)y \text{ et } x(f \cap g)y'\big) \implies y = y' \Big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \Big(\big(x(f \cap g)y \text{ et } x(f \cap g)y'\big) \implies y = y' \Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \Big(\big(x(f \cap g)y \text{ et } x(f \cap g)y'\big) \implies y = y' \Big)$.

Donc $\boxed{f \cap g \text{ est une application}}$.

2.

Soit h une application qui est une restriction commune de f et de g.

En particulier, h est une relation qui est une restriction commune de f et de g.

Alors $\boxed{h \subseteq f \cap g}$ d'après la prop. 127 p. 154.

CQFD.

Terminons ce chapitre sur les applications par une définition et une propriété qui nous serviront à de multiples reprises dans de futurs ouvrages.

Définition 44 (Applications qui se recollent)

Soient f et g deux applications.

On dit que f et g **se recollent** si et seulement si $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(x) = g(x)$.

Voyons à présent une caractérisation du recollement de deux applications, qui nous servira dans de futurs ouvrages.

Proposition 193 (Caractérisation de deux applications qui se recollent)

Soient f et g deux applications.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f et g se recollent.
2. $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = f \cap g$
3. $\mathrm{dom}(f \cap g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$
4. $f \cup g$ est une application.
5. $f \cup g$ est la plus petite application, pour l'inclusion, qui prolonge à la fois f et g.
6. Il existe au moins une application qui prolonge à la fois f et g.

Démonstration

Nous allons montrer les implications suivantes :

$(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3) \Longrightarrow (4) \Longrightarrow (5) \Longrightarrow (6) \Longrightarrow (1)$.

$\boxed{(1) \Longrightarrow (2)}$

Supposons que f et g se recollent.

Ainsi, $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(x) = g(x)$.

Notons $(\star)$ cette dernière assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$.

On a alors $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x) \underset{\text{189 p. 250}}{=} f(x) \underset{(\star)}{=} g(x) \underset{\text{189 p. 250}}{=} g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x)$.

Donc $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x) = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, alors $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x) = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \implies f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x) = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x)\right)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x) = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}(x)$.

Mais $\mathrm{dom}\left(f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}\right) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}\left(g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}\right)$ d'après la prop. 189 p. 250.

Donc $\boxed{f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Ainsi, en notant $h := f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}$, h est une application qui est à la fois une restriction de f et de g.

Donc $h \subseteq f \cap g$ d'après la prop. 192 p. 255.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x(f \cap g)y$.

Comme $f \cap g$ est une restriction de f et de g, on a xfy et xgy d'après la prop. 128 p. 154.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Ainsi, on a $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ et xfy.

Donc $x(f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)})y$ d'après la prop. 132 p. 159.

Donc xhy

Donc si $x(f \cap g)y$, alors xhy.

Donc $\forall y, \big(x(f \cap g)y \implies xhy\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x(f \cap g)y \implies xhy\big)$.

Donc $f \cap g \subseteq h$ d'après la prop. 128 p. 154.

Ainsi, $h = f \cap g$ et donc $\boxed{f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = f \cap g}$.

$\boxed{② \implies ③}$

Supposons que $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = f \cap g$.

Alors $\mathrm{dom}(f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}) = \mathrm{dom}(f \cap g)$.

Mais $\mathrm{dom}(f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)}) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 189 p. 250.

Donc $\boxed{\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f \cap g)}$.

$\boxed{③ \implies ④}$

Supposons que $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \mathrm{dom}(f \cap g)$.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que $x(f \cup g)y$ et $x(f \cup g)y'$.

Donc $\Big(xfy \text{ ou } xgy\Big)$ et $\Big(xfy' \text{ ou } xgy'\Big)$ d'après la prop. 116 p. 145.

Donc $\Big(xfy \text{ et } xfy'\Big)$ ou $\Big(xfy \text{ et } xgy'\Big)$ ou $\Big(xgy \text{ et } xfy'\Big)$ ou $\Big(xgy \text{ et } xgy'\Big)$ par distributivité.

- Si xfy et xfy', alors $y = y'$ comme f est une application.
- Si xfy et xgy', alors $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f \cap g)$ d'après $(\star\star)$.

Posons $y'' := (f \cap g)(x)$.

On a donc $x(f \cap g)y''$.

Or, $f \cap g$ est une restriction de f et de g d'après la prop. 127 p. 154.

Donc xfy'' et xgy'' d'après la prop. 128 p. 154.

Ainsi, xfy et xfy'', ainsi que xgy' et xgy''.

Donc $y = y''$ et $y' = y''$ car f et g sont des applications.

Donc $y = y'$.

• Si xgy et xfy', alors $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f \cap g)$ d'après $(\star\star)$.

Posons $y'' := (f \cap g)(x)$.

On a donc $x(f \cap g)y''$.

Or, $f \cap g$ est une restriction de f et de g d'après la prop. 127 p. 154.

Donc xfy'' et xgy'' d'après la prop. 128 p. 154.

Ainsi, xfy' et xfy'', ainsi que xgy et xgy''.

Donc $y' = y''$ et $y = y''$ car f et g sont des applications.

Donc $y = y'$.

• Si xgy et xgy', alors $y = y'$ car g est une application.

Donc dans tous les cas, on a $y = y'$.

Donc si $x(f \cup g)y$ et $x(f \cup g)y'$, alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \big(x(f \cup g)y \text{ et } x(f \cup g)y' \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall y, \forall y', \big(x(f \cup g)y \text{ et } x(f \cup g)y' \implies y = y'\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \big(x(f \cup g)y \text{ et } x(f \cup g)y' \implies y = y'\big)$.

Donc $\boxed{f \cup g \text{ est une application}}$.

$\boxed{④ \implies ⑤}$

Supposons que $f \cup g$ est une application.

Soit h une application qui est un prolongement à la fois de f et de g.

En particulier, h est une relation qui est un prolongement à la fois de f et de g.

Donc $\boxed{f \cup g \subseteq h}$ d'après la prop. 126 p. 153.

$\boxed{⑤ \implies ⑥}$

Supposons que $f \cup g$ est la plus petite application, pour l'inclusion, qui prolonge à la fois f et g.

En particulier, $\boxed{\text{il existe au moins une application qui prolonge à la fois } f \text{ et } g}$.

$\boxed{⑥ \implies ①}$

Supposons qu'il existe au moins une application qui prolonge à la fois f et g.

Soit h une telle application.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $x \in \mathrm{dom}(g)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Posons $y := f(x)$ et $y' := g(x)$.

On a donc xfy et xgy'.

Or, h est un prolongement commun à f et à g.

Donc xhy et xhy' d'après la prop. 128 p. 154.

Mais h est une application.

Donc $y = y'$. Donc comme $y = f(x)$ et $y' = g(x)$, on a $f(x) = g(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(x) = g(x)$.

Donc $\boxed{f \text{ et } g \text{ se recollent}}$.

CQFD.

Chapitre 4

Familles

Note de l'auteur

En parcourant la première définition de ce chapitre, à savoir celle des familles, le lecteur pourrait être dérouté par le fait qu'il ne s'agit de rien de neuf : la notion de famille est la même que celle d'application. Cependant, l'usage en est différent, et les notations ne sont pas forcément les mêmes. Ainsi, la notion de famille, si elle est stricto sensu exactement la même que la notion d'applications, ne l'est pas dans la pratique, et donc on adoptera l'une ou l'autre en fonction des besoins.

Sommaire

1 **Familles et sous-familles** 262
2 **Réunion d'une famille** 268
3 **Intersection de familles** 292
4 **Produit cartésien de familles** 314
5 **Union disjointe d'une famille** 326

1 Familles et sous-familles

Définition 45 (Famille)

Soient E un ensemble non vide, et I un ensemble.

• On appellera **famille d'éléments de E indexée par I** toute application $x : I \to E$.
Pour tout $i \in I$, on notera souvent x_i plutôt que $x(i)$.
La famille x sera souvent notée $(x_i)_{i\in I}$ ou $\big(x(i)\big)_{i\in I}$.

• Pour tout $i_0 \in I$, on dira souvent que x_{i_0} est le $i_0^{\text{ème}}$ **terme** de $(x_i)_{i\in I}$, ou encore que c'est le **terme d'indice** i_0. On dira alors que I est **l'ensemble des indices** de $(x_i)_{i\in I}$.
On dira que les éléments de $\mathrm{im}\big(x\big)$ sont les **termes** de $(x_i)_{i\in I}$.

Par définition, si $x = (x_i)_{i\in I}$, alors $x = \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & \mathrm{im}(x) \\ i & \longmapsto & x_i \end{pmatrix}$.

Notation

Dans la notation $(x_i)_{i\in I}$, l'indice i est dit « *muet* » : on peut le remplacer par n'importe quel caractère différent de i, sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que le nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !
Ainsi, $(x_i)_{i\in I} = (x_j)_{j\in I} = (x_k)_{k\in I}$.

Remarque :
Pour f une application, on a introduit la notation au chapitre précédent $\{f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$ pour parler de $\mathrm{im}(f)$ (on a même introduit la notation pour toute image directe).
Ainsi, on a donc $f : \mathrm{dom}(f) \to \{f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$.

Dans le cas particulier des familles, on a donc $(x_i)_{i\in I} : I \to \{x_i \mid i \in I\}$.

Définition 46 (Famille associée à un ensemble)

Soit E un ensemble non vide.
L'identité sur E, vue comme une famille, est parfois appelée la **famille associée à E**.

On aura donc $\mathrm{id}_E = (x_i)_{i\in E}$ où $\forall i \in E, x_i = i$.
Nous pouvons donc écrire $\mathrm{id}_E = (\mathrm{id}_E(x))_{x\in E} = (x)_{x\in E}$.

Proposition 194 (Image de la famille associée à un ensemble)

Soit E un ensemble. Soit $(x_i)_{i\in I}$ la famille associée à E.
On a alors $E = \{x_i \mid i \in I\}$.
En particulier, on a $E = \{x \mid x \in E\}$.

Démonstration

Par définition, on a $(x_i)_{i\in I} = \mathrm{id}_E$ et $I = E$.
On a donc $E \underset{\text{83 p. 113}}{=} \mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{im}\big((x_i)_{i\in I}\big) = \{x_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in E\}$.
Donc $\boxed{E = \{x_i \mid i \in I\} = \{x \mid x \in E\}}$.
CQFD.

Définition 47 (Sous-familles et sur-familles)

Soit I un ensemble. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On appelle **sous-famille** de $(x_i)_{i\in I}$ toute restriction de $(x_i)_{i\in I}$ (à une partie de I donc).
2. On appelle **sur-famille** de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille dont $(x_i)_{i\in I}$ en est une sous-famille.

Proposition 195 (Autre écriture d'une sous-famille)

Soit I un ensemble. Soit J une partie de I. Soit $(x_i)_{i\in I}$.
Alors $\big((x_i)_{i\in I}\big)_{|J} = (x_i)_{i\in J}$.

Démonstration

Posons $x := (x_i)_{i\in I}$.

On a $\big((x_i)_{i\in I}\big)_{|J} \underset{\text{189 p. 250}}{=} \begin{pmatrix} J & \longrightarrow & \mathrm{im}\left((x_i)_{i\in I}\right) \\ i & \longmapsto & x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J & \longrightarrow & \mathrm{im}(x) \\ i & \longmapsto & x_i \end{pmatrix} = (x_i)_{i\in J}$.

Donc $\boxed{((x_i)_{i\in I})_{|J} = (x_i)_{i\in J}}$.
CQFD.

Définition 48 (Deux à deux distincts, disjoints)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux distincts** si et seulement si $(A_i)_{i\in I}$ est injective.
2. On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux disjoints** si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.

Proposition 196 (Deux à deux disjoints, distincts et sous-familles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts, alors c'est aussi le cas de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.
2. Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, alors c'est aussi le cas de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Démonstration

1. Supposons que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts.
Donc $(A_i)_{i\in I}$ est injective.
Donc toute restriction de $(A_i)_{i\in I}$ est injective d'après la prop. 191 p. 252.
Donc $\boxed{\text{toute sous-famille de } (A_i)_{i\in I} \text{ a ses termes deux à deux distincts}}$.

2. Supposons que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.
Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.
Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit J une partie de I.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in J$.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in J$.

Supposons que $i \neq j$.

Or, $J \subseteq I$ par définition.

Donc $i \in I$ et $j \in I$.

Ainsi, $i \in I$, $j \in I$ et $i \neq j$.

Donc $A_i \cap A_j = \varnothing$ d'après $(\star)$.

Donc si $i \neq j$, alors $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Donc si $j \in J$, alors $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.

Donc $\forall j, \Big(j \in J \implies \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)\Big)$.

Donc $\forall j \in J, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.

Donc si $i \in I$, alors $\forall j \in J, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.

Donc $\forall i, \Big(i \in I \implies \Big(\forall j \in J, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)\Big)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in J, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.

Donc les termes de $(A_i)_{i \in J}$ sont deux à deux disjoints.

Donc $\boxed{\text{les termes de toute sous-famille de } (A_i)_{i \in I} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

CQFD.

Proposition 197 (Image réciproque et famille deux à deux disjoints)

Soit f une application. Soit I un ensemble.

Soit $(Y_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$ indexée par I dont les termes sont deux à deux disjoints.

Alors les termes de $\big(f^{\leftarrow}(Y_i)\big)_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints.

Démonstration

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in I$.

Supposons que $f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $x \in f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j)$.

Soit un tel x.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(Y_i)$ et $x \in f^{\leftarrow}(Y_j)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Comme $x \in f^{\leftarrow}(Y_i)$, on a $f(x) \in Y_i$ d'après la prop. 179 p. 234.

De même, comme $x \in f^{\leftarrow}(Y_j)$, on a $f(x) \in Y_j$ d'après la prop. 179 p. 234.

Ainsi, $f(x) \in Y_i$ et $f(x) \in Y_j$.

Donc $f(x) \in Y_i \cap Y_j$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $Y_i \cap Y_j \neq \varnothing$.

Or, les termes de $(Y_k)_{k\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Donc $i \neq j \implies Y_i \cap Y_j = \varnothing$.

Donc $Y_i \cap Y_j \neq \varnothing \implies i = j$ par contraposition.

Donc $i = j$ par modus ponens.

Donc si $f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing$, alors $i = j$.

Donc si $i \neq j$, alors $f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing$ par contraposition.

Donc si $j \in I$, alors $\big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)$.

Donc $\forall j, \Big(j \in I \implies \big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)\Big)$.

Donc $\forall j \in I, \big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)$.

Donc si $i \in I$, alors $\forall j \in I, \big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)$.

Donc $\forall i, \Big(i \in I \implies \big(\forall j \in I, \big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in I, \big(i \neq j \implies f^{\leftarrow}(Y_i) \cap f^{\leftarrow}(Y_j) = \varnothing\big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } \big(f^{\leftarrow}(Y_i)\big)_{i\in I} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

CQFD.

Proposition 198 (Changement d'indice dans une famille)

Soient E un ensemble non vide, I et J deux ensembles.

Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $f : J \to I$.

1. $x \circ f$ est une famille d'éléments de E indexée par J.
   Plus précisément, on a $x \circ f = (x_{f(j)})_{j\in J}$.
2. On a $\{x_{f(j)} \mid j \in J\} \subseteq \{x_i \mid i \in I\}$.
3. Si f est surjective dans I, alors $\{x_{f(j)} \mid j \in J\} = \{x_i \mid i \in I\}$.

Démonstration

1. On a $f : J \to I$ et $x : I \to E$ par définition, donc $x \circ f : J \to E$ d'après la prop. 149 p. 188.

Donc $x \circ f$ est une famille d'éléments de E indexée par J.

On a alors $x \circ f = \big((x \circ f)(j)\big)_{j\in J} \underset{150\text{ p. }190}{=} \Big(x\big(f(j)\big)\Big)_{j\in J} = \big(x_{f(j)}\big)_{j\in J}$.

Donc $\boxed{x \circ f = \big(x_{f(j)}\big)_{j\in J}}$.

2. On a $\{x_{f(j)} \mid j \in J\} = \mathrm{im}\Big(\big(x_{f(j)}\big)_{j\in J}\Big) \underset{1}{=} \mathrm{im}(x\circ f) \underset{88\text{ p. }119}{\subseteq} \mathrm{im}(x) = \mathrm{im}\big((x_i)_{i\in I}\big) = \{x_i \mid i \in I\}$.

Donc $\boxed{\{x_{f(j)} \mid j \in J\} \subseteq \{x_i \mid i \in I\}}$.

3. Supposons que f est surjective dans I.

On a donc $\mathrm{im}(f) = I$, et comme $x : I \to E$, on a $\mathrm{dom}(x) = I$ et donc $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(x)$.

Donc $\mathrm{im}(x \circ f) = \mathrm{im}(x)$ d'après la prop. 149 p. 188.

Donc $\left\{x_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \mathrm{im}\Big(\big(x_{f(j)}\big)_{j\in J}\Big) \underset{1}{=} \mathrm{im}(x \circ f) = \mathrm{im}(x) = \mathrm{im}\big((x_i)_{i\in I}\big) = \{x_i \mid i \in I\}$.

Donc $\boxed{\left\{x_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \{x_i \mid i \in I\}}$.

CQFD.

2 Réunion d'une famille

Généralisons à présent la notion d'union de deux ensembles que l'on a vu au chapitre 1.

Définition 49 (Réunion d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
On appelle **réunion de** $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.
On le note $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{j\in I} A_j = \bigcup\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 199 (Autre notation de la réunion d'un ensemble)

Soit E un ensemble.
Alors $\bigcup E = \bigcup\limits_{A\in E} A$.

Démonstration

Il suffit de considérer la famille associée à E pour conclure.
Soit donc $(A)_{A\in E}$ la famille associée à E.
On a alors $E = \{A \mid A \in E\}$ d'après la prop. 194 p. 263.
Donc $\bigcup E = \bigcup\{A \mid A \in E\} = \bigcup\limits_{A\in E} A$.
Donc $\boxed{\bigcup E = \bigcup\limits_{A\in E} A}$.
CQFD.

Proposition 200 (Caractérisation de la réunion d'une famille)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.
On a alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \big(\exists i \in I, x \in A_i\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
On a donc $x \in \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$ par définition de la réunion d'une famille.
Il existe donc au moins un $B \in \{A_i \mid i \in I\}$ tel que $x \in B$ par définition de la réunion d'un ensemble.
Soit un tel B.
Or, $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$ par définition.
Donc $B \in \mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$.
Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $B = A_{i_0}$ d'après la prop. 167 p. 217.
Soit un tel i_0.
On a $x \in B$ et donc $x \in A_{i_0}$.

Donc si $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors il existe au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$.
Soit un tel i_0.
On a $A_{i_0} \in \mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$ d'après la prop. 167 p. 217.
Il existe donc au moins un $B\mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$ tel que $x \in B$.
Donc $x \in \bigcup \mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$ par définition de la réunion d'un ensemble.
Or, $\mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big) = \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.
Donc $x \in \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$.
Or, $\bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ par définition.
Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Donc s'il existe au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$, alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \big(\exists i \in I, x \in A_i\big)}$.

CQFD.

La proposition suivante va permettre de comprendre en quoi il s'agit d'une généralisation de l'union de deux ensembles que l'on avait vu au chapitre 1.

Proposition 201 (Réunions de familles simples)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. Si $I = \varnothing$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing$.
2. S'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}$.
3. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

Démonstration

1

Supposons que $I = \varnothing$.

Alors comme $(A_i)_{i\in I} : I \to \{A_i \mid i \in I\}$, on a $(A_i)_{i\in I} : \varnothing \to \{A_i \mid i \in I\}$ donc $(A_i)_{i\in I} = \varnothing$ d'après la prop. 140 p. 173.

On a donc $\{A_i \mid i \in I\} = \mathrm{im}\big((A_i)_{i\in I}\big) = \mathrm{im}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }111}{=} \varnothing$.

Donc $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup \varnothing \underset{21\text{ p. }27}{=} \varnothing$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \varnothing}$.

2 Supposons qu'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$.

Notons $A := (A_i)_{i\in I}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\{A_i \mid i \in I\} &= \mathrm{im}(A) \\
&= A^{\to}\big(\mathrm{dom}(A)\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 130} \\
&= A^{\to}(I) \\
&= A^{\to}\big(\{i_1; i_2\}\big) \\
&= \big\{A(i_1); A(i_2)\big\} \text{ d'après la prop. 169 p. 218} \\
&= \{A_{i_1}; A_{i_2}\}
\end{aligned}$$

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \{A_{i_1}; A_{i_2}\}$.

Donc $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup \{A_{i_1}; A_{i_2}\} = A_{i_1} \cup A_{i_2}$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}}$.

(3)

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$.

On a alors $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in\{i_0\}} A_i = \bigcup_{i\in\{i_0;i_0\}} A_i \underset{(2)}{=} A_{i_0} \cup A_{i_0} \underset{\text{27 p. 33}}{=} A_{i_0}$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = A_{i_0}}$.

CQFD.

Proposition 202 (Réunion de famille et minimalité)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

Soit F un ensemble.

(1) Pour tout $i_0 \in I$, on a $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

Autrement dit, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un sur-ensemble commun à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

(2) Si pour tout $i \in I$, on a $A_i \subseteq F$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq F$.

Autrement dit, $\bigcup_{i\in I} A_i$ est **minimum pour l'inclusion** parmi les sur-ensembles communs à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

(3) En particulier, s'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$, alors $\bigcup_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

(4) En particulier, si $\forall i \in I, A_i = F$, et si $I \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i\in I} A_i = F$.

On appelle cela **l'idempotence** de la réunion de familles.

Démonstration

(1)

Si $I = \varnothing$, la proposition est immédiate.

Supposons donc à partir de maintenant que $I \neq \varnothing$.

Soit donc un $i_0 \in I$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in A_{i_0}$, alors $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in A_{i_0} \implies x \in \bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\boxed{A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i}$.

(2)

Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq F$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a $A_{i_0} \subseteq F$ d'après $(\star)$.

Donc $x \in F$.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $x \in F$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \implies x \in F\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq F}$ par définition de l'implication.

(3)

Supposons qu'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$.

Soit un tel i_0.

Alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ d'après (2).

Mais $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après (1).

Donc $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(4)

Supposons que $\forall i \in I, A_i = F$ et $I \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.

On a donc $A_{i_0} = F$.

Donc $\forall i \in I, A_i = A_{i_0}$.

En particulier, $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$.

Donc $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0}$ d'après (3).

Donc $\boxed{\bigcup_{i \in I} A_i = F}$.

CQFD.

Proposition 203 (Réunion de famille et croissance)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

1. Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.
2. Pour toute partie J de I, on a $\bigcup\limits_{i\in J} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Démonstration

1. Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $x \in A_{i_0}$.

Or, $A_{i_0} \subseteq B_{i_0}$ d'après $(\star)$.

Donc $x \in B_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in B_i$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$, alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \implies x \in \bigcup\limits_{i\in I} B_i\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} B_i}$ par définition de l'inclusion.

2.

Soit J une partie de I.

Alors $(A_i)_{i\in J}$ est une sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$ d'après la prop. 195 p. 263.

Donc $(A_i)_{i\in J}$ est une restriction de $(A_i)_{i\in I}$.

Donc $\operatorname{im}\big((A_i)_{i\in J}\big) \subseteq \operatorname{im}\big((A_i)_{i\in I}\big)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Donc $\{A_i \mid i \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $\bigcup\{A_i \mid i \in J\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 23 p. 29.

Donc $\boxed{\bigcup\limits_{i\in J} A_i \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i}$ par définition.

CQFD.

Proposition 204 (Autre écriture d'un ensemble via réunion de singletons)

Soit E un ensemble. On a alors $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$.

Démonstration

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

On a alors $y \in \{y\}$ par définition de $\{y\}$.

Il existe donc au moins un $x \in E$ tel que $y \in \{x\}$.

Donc $y \in \bigcup_{x \in E} \{x\}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $y \in E$, alors $y \in \bigcup_{x \in E} \{x\}$.

Donc $\forall y, \left(y \in E \implies y \in \bigcup_{x \in E} \{x\}\right)$.

Donc $E \subseteq \bigcup_{x \in E} \{x\}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

On a $\forall x \in E, \{x\} \subseteq E$ d'après la prop. 16 p. 19.

Donc $\bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq E$ d'après la prop. 202 p. 271.

Ainsi, on a $E \subseteq \bigcup_{x \in E} \{x\}$ et $\bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq E$.

Donc $\boxed{E = \bigcup_{x \in E} \{x\}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 205 (Associativité de la réunion de famille)

Soient I et M deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Soit $(J_m)_{m \in M}$ une famille de parties de I indexée par M.

Si $I = \bigcup_{m \in M} J_m$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

On appelle cette propriété **l'associativité** de la réunion de familles.

Démonstration

Supposons que $I = \bigcup_{m \in M} J_m$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors .

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $i_0 \in I$.

Or, $I = \bigcup_{m \in M} J_m$ par hypothèse.

Donc $i_0 \in \bigcup_{m \in M} J_m$.

Il existe donc au moins un $m_0 \in M$ tel que $i_0 \in J_{m_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel m_0.

Ainsi $x \in A_{i_0}$ et $i_0 \in J_{m_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in J_{m_0}$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in J_{m_0}} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Il existe donc au moins un $m \in M$ tel que $x \in \bigcup_{i \in J_m} A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, alors $x \in \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i \in I} A_i \implies x \in \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right) \right)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{m \in M} \left(\bigcup_{i \in J_m} A_i \right)$.

Il existe donc au moins un $m_0 \in M$ tel que $x \in \bigcup_{i \in J_{m_0}} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel m_0.

On a donc $x \in \bigcup_{i \in J_{m_0}} A_i$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in J_{m_0}$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $i_0 \in J_{m_0}$.

Il existe donc au moins un $m \in M$ tel que $i_0 \in J_m$.

Donc $i_0 \in \bigcup_{m \in M} J_m$ d'après la prop. 200 p. 269.

Or, $\bigcup_{m\in M} J_m = I$ par hypothèse.

Donc $i_0 \in I$.

Ainsi, on a $i_0 \in I$ et $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in \bigcup_{m\in M}\left(\bigcup_{i\in J_m} A_i\right)$, alors $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{m\in M}\left(\bigcup_{i\in J_m} A_i\right) \implies x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $\bigcup_{m\in M}\left(\bigcup_{i\in J_m} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{m\in M}\left(\bigcup_{i\in J_m} A_i\right)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 206 (Changement d'indice dans une réunion de familles)

Soient I et J deux ensembles. Soit $f : J \to I$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On a $\bigcup_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.
2. Si f est surjective dans I, alors $\bigcup_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Démonstration

1

On a $\left\{A_{f(j)} \,\middle|\, j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 198 p. 266.

Donc $\bigcup\left\{A_{f(j)} \,\middle|\, j \in J\right\} \subseteq \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 23 p. 29.

Donc $\boxed{\bigcup_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i}$ par définition de la réunion d'une famille.

2

Supposons que f est surjective dans I.

On a alors $\left\{A_{f(j)} \,\middle|\, j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 198 p. 266.

Donc $\bigcup\left\{A_{f(j)} \,\middle|\, j \in J\right\} = \bigcup\{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $\boxed{\bigcup_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup_{i\in I} A_i}$ par définition de la réunion d'une famille.

CQFD.

Proposition 207 (Réunion de familles, images directes et réciproques)

Soit f une application. Soient I et J deux ensembles.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$, indexée par I.

Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$, indexée par J.

1. $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. $f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Démonstration

1

$\boxed{\subseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc au moins un $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Comme $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $x \in A_{i_0}$ et $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$ d'après la prop. 167 p. 217.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$, alors $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\forall y, \left(y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \implies y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)\right)$.

Donc $f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \bigcup_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $y \in f^{\rightarrow}(A_{i_0})$.

Il existe donc au moins un $x \in A_{i_0}$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

On a donc $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Ainsi, $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$, alors $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\forall y, \left(y \in \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i) \implies y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)\right)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i) \subseteq f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

2 $\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$.

On a donc $f(x) \in \bigcup_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 179 p. 234.

Il existe au moins un $j_0 \in J$ tel que $f(x) \in B_{j_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel j_0.

On a donc $f(x) \in B_{j_0}$.

Donc $x \in f^{\leftarrow}(B_{j_0})$ d'après la prop. 179 p. 234.

Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $x \in f^{\leftarrow}(B_j)$.

Donc $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$, alors $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \implies x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)\right)$.

Donc $f^{\leftarrow}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \subseteq \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Il existe donc au moins un $j_0 \in J$ tel que $x \in f^{\leftarrow}(B_{j_0})$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel j_0.

On a donc $x \in f^{\leftarrow}(B_{j_0})$.

Donc $f(x) \in B_{j_0}$ d'après la prop. 179 p. 234. Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $f(x) \in B_j$.

Donc $f(x) \in \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$

Donc si $x \in \bigcup\limits_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$, alors $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup\limits_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j) \implies x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)\right)$.

Donc $\bigcup\limits_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j) \subseteq f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right) = \bigcup\limits_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Notation

Soient I et J deux ensembles. Soit $\big(f(z)\big)_{z \in I \times J}$ une famille indexée par $I \times J$.

- On notera parfois $\big(f(i;j)\big)_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ ou $\big(f(i;j)\big)_{(i;j) \in I \times J}$ à la place de $\big(f(z)\big)_{z \in I \times J}$.

- On notera parfois $\bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j)$ ou $\bigcup\limits_{(i;j) \in I \times J} f(i;j)$ plutôt que $\bigcup\limits_{z \in I \times J} f(z)$.

Ici encore, les indices i et j sont dits « *muets* », c'est-à-dire que l'on peut les remplacer par n'importe quels autres caractères, sans que cela ne change quoi que ce soit. Bien évidemment, il faut prendre garde à ce que ces nouveaux caractères ne soient pas déjà utilisés, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, on a $\big(f(i;j)\big)_{\substack{i \in I \\ j \in J}} = \big(f(a;b)\big)_{\substack{a \in I \\ b \in J}} = \big(f(c;d)\big)_{\substack{c \in I \\ d \in J}}$.

De même, on a $\bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{a \in I \\ b \in J}} f(a;b) = \bigcup\limits_{\substack{c \in I \\ d \in J}} f(c;d)$.

Proposition 208 (Réunions doubles de familles)

Soient I et J deux ensembles. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille indexée par $I \times J$. Soit x un ensemble.

1. On a $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ si et seulement s'il existe au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$.
2. On a $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcup\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

On a donc $x \in \bigcup\limits_{z\in I\times J} A_z$ par définition.

Il existe donc au moins un $z \in I \times J$ tel que $x \in A_z$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel z.

Comme $z \in I \times J$, il existe au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $z = (i; j)$.

Soient de tels i et j.

On a $z = (i; j)$ et $x \in A_z$.

Donc $x \in A_{(i;j)}$.

Donc si $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$, alors il existe au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$.

Posons $z_0 := (i; j)$.

On a donc $x \in A_{z_0}$.

Or, $z_0 \in I \times J$ par définition.

Il existe donc au moins un $z \in I \times J$ tel que $x \in A_z$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{z\in I\times J} A_z$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Donc s'il existe au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$, alors $x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \text{ si et seulement s'il existe au moins un } i \in I \text{ et un } j \in J \text{ tels que } x \in A_{(i;j)}}$.

2.

Montrons tout d'abord que $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} A_{(i_0;j)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $x \in \bigcup_{j\in J} A_{(i_0;j)}$.

Il existe donc au moins un $j_0 \in J$ tel que $x \in A_{(i_0;j_0)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel j_0.

On a donc $x \in A_{(i_0;j_0)}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ d'après 1.

Donc si $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)} \implies x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)} \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ et un $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{(i_0;j_0)}$ d'après 1.

Soient de tels i_0 et j_0.

On a donc $x \in A_{(i_0;j_0)}$.

Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $x \in A_{(i_0;j)}$.

Donc $x \in \bigcup_{j\in J} A_{(i_0;j)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in \bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$, alors $x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \implies x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \subseteq \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)}$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

Montrons à présent que $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ et un $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{(i_0;j_0)}$ d'après 1.

Soient de tels i_0 et j_0.

On a donc $x \in A_{(i_0;j_0)}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_{(i;j_0)}$.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_{(i;j_0)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $x \in \bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Donc $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$, alors $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \implies x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \subseteq \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Il existe donc au moins un $j_0 \in J$ tel que $x \in \bigcup_{i\in I} A_{(i;j_0)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

On a donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_{(i;j_0)}$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{(i_0;j_0)}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Ainsi, $x \in A_{(i_0;j_0)}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_{(i;j)}$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ d'après 1.

Donc si $x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)} \implies x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)} \subseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

Finalement, $\boxed{\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{(i;j)}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 209 (Réunion de familles et opérations)

Soient I et J deux ensembles. Soit F un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Intersection

(1) **Distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur la réunion de familles**

$F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F \cap A_i)$.

(2) **Double distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur la réunion de familles**

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cap B_j)$.

Produit cartésien

(3) **Distributivité à gauche du produit cartésien sur la réunion de familles**

$F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F \times A_i)$.

(4) **Distributivité à droite du produit cartésien sur la réunion de familles**

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)$.

(5) **Double distributivité du produit cartésien sur la réunion de familles**

$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j)$.

Réunion

(6) **Double distributivité de la réunion (de deux ensembles) sur la réunion de familles**

On a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \supseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cup B_j)$.

Si de plus, I et J sont non vides, alors $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cup B_j)$.

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\iff x \in F \text{ et } x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \in F \text{ et } \exists i \in I, x \in A_i \text{ d'après la prop. 200 p. 269} \\
&\iff \exists i \in I, \big(x \in F \text{ et } x \in A_i\big) \\
&\iff \exists i \in I, x \in F \cap A_i \text{ d'après la prop. 35 p. 42} \\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I}(F \cap A_i) \text{ d'après la prop. 200 p. 269}
\end{aligned}$$

Donc $x \in F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcup_{i\in I}(F \cap A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcup_{i\in I}(F \cap A_i)\right)$.

Donc $\boxed{F \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F \cap A_i)}$ par définition de l'égalité.

2

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \bigcup_{j\in J}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B_j\right) \text{ d'après 1} \\
&= \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I}(A_i \cap B_j) \text{ d'après 1} \\
&= \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}}(A_i \cap B_j) \text{ d'après la prop. 208 p. 280}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}}(A_i \cap B_j)}$.

3

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc au moins un $y \in F$ et un $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$ tels que $x = (y; z)$ par définition.

Soient de tels y et z.

Comme $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$, il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $z \in A_{i_0}$.

Soit un tel i_0.

Ainsi, $y \in F$, $z \in A_{i_0}$ et $x = (y; z)$.

Donc $x \in F \times A_{i_0}$ par définition.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in F \times A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$, alors $x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \implies x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i) \right)$.

Donc $F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \subseteq \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in F \times A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On a donc $x \in F \times A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $y \in F$ et un $z \in A_{i_0}$ tels que $x = (y; z)$ par définition.

Soient de tels y et z.

On a donc $z \in A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $z \in A_i$.

Donc $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Ainsi, $y \in F$, $z \in \bigcup_{i \in I} A_i$ et $x = (y; z)$.

Donc $x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$ par définition.

Donc si $x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)$, alors $x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup_{i \in I} (F \times A_i) \implies x \in F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \right)$.

Donc $\bigcup_{i \in I} (F \times A_i) \subseteq F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{F \times \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (F \times A_i)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

4

Soit x un ensemble.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F &\iff x \text{ est un couple et } x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F \text{ par définition} \\
&\iff x \text{ est un couple et } {}^t x \in F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \text{ d'après la prop. 91 p. 123} \\
&\iff x \text{ est un couple et } {}^t x \in \bigcup_{i\in I}(F \times A_i) \text{ d'après } 3 \\
&\iff x \text{ est un couple et } \exists i \in I, {}^t x \in F \times A_i \text{ d'après la prop. 200 p. 269} \\
&\iff x \text{ est un couple et } \exists i \in I, x \in A_i \times F \text{ d'après la prop. 91 p. 123} \\
&\iff \exists i \in I, x \in A_i \times F \text{ par définition} \\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F) \text{ d'après la prop. 200 p. 269}
\end{aligned}$$

Donc $x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F \iff x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F \iff x \in \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I}(A_i \times F)}$ par définition de l'égalité.

5

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) &= \bigcup_{j\in J}\left(\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times B_j\right) \text{ d'après } 3 \\
&= \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I}(A_i \times B_j) \text{ d'après } 4 \\
&= \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}}(A_i \times B_j) \text{ d'après la prop. 208 p. 280}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}}(A_i \times B_j)}$.

6

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcup_{\substack{i\in I \\ j\in J}}(A_i \cup B_j)$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ et un $j_0 \in J$ tels que $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 208

p. 280.

Soient de tels i_0 et j_0.

On a donc $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

On a donc $x \in A_{i_0}$ ou $x \in B_{j_0}$ d'après la prop. 25 p. 30.

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $x \in A_{i_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Or, $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$ d'après la prop. 26 p. 31.

Donc $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \in B_{j_0}$.

Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $x \in B_j$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 200 p. 269.

Or, $\bigcup\limits_{j \in J} B_j \subseteq \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$ d'après la prop. 26 p. 31.

Donc $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Dans les deux cas, on a $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Donc si $x \in \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$, alors $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j) \implies x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right) \supseteq \bigcup\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\subseteq}$ Supposons ici que I et J sont non vides.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup\limits_{j \in J} B_j\right)$.

On a donc $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ ou $x \in \bigcup\limits_{j \in J} B_j$ d'après la prop. 25 p. 30.

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $x \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $x \in A_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

On sait que $J \neq \varnothing$ par hypothèse.

Il existe donc au moins un $j_0 \in J$.

Soit un tel j_0.

Or, $A_{i_0} \subseteq A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 26 p. 31.

Donc comme $x \in A_{i_0}$, on a $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_i \cup B_j$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \in \bigcup_{j \in J} B_j$.

Il existe donc au moins un $j_0 \in J$ tel que $x \in B_{j_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel j_0.

On sait que $I \neq \varnothing$ par hypothèse.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.

Soit un tel i_0.

Or, $B_{j_0} \subseteq A_{i_0} \cup B_{j_0}$ d'après la prop. 26 p. 31.

Donc comme $x \in B_{j_0}$, on a $x \in A_{i_0} \cup B_{j_0}$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_i \cup B_j$.

Dans les deux cas, il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tels que $x \in A_i \cup B_j$.

Donc $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$ d'après la prop. 208 p. 280.

Donc si $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$, alors $x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \implies x \in \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)\right)$.

Donc $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) \subseteq \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cup B_j)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Définition 50 (Famille d'applications qui se recollent)

Soit I un ensemble. Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications indexée par I.

On dit que les termes de $(f_i)_{i \in I}$ **se recollent deux à deux**

si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I$, f_i et f_j se recollent.

Proposition 210 (Famille d'applications qui se recollent : caractérisations)

Soit I un ensemble. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications indexée par I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.
2. $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est une application.
3. $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est la plus petite application, pour l'inclusion, qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.
4. Il existe au moins une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Démonstration

Nous allons montrer les implications suivantes : $1 \Longrightarrow 2 \Longrightarrow 3 \Longrightarrow 4 \Longrightarrow 1$.

$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$

Supposons que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

• Commençons par montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est une relation binaire.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$.

Il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $c \in f_{i_0}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i_0.

Par définition de $(f_i)_{i\in I}$, on sait que f_{i_0} est une application.

En particulier, f_{i_0} est une relation binaire.

Or, $c \in f_{i_0}$.

Donc c est un couple par définition d'une relation binaire.

Donc si $c \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$, alors c est un couple.

Donc tout élément de $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est un couple.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est une relation binaire par définition.

• Montrons à présent que $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est une application.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit y' un ensemble.

Supposons que $x \left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right) y$ et $x \left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right) y'$.

On a donc $(x;y) \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$ et $(x;y') \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$.

Il existe donc au moins un $i_1 \in I$ et un $i_2 \in I$ tels que $(x;y) \in f_{i_1}$ et $(x;y') \in f_{i_2}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soient de tels i_1 et i_2.

On a donc $x f_{i_1} y$ et $x f_{i_2} y'$ puisque par définition de $(f_i)_{i\in I}$, f_{i_1} et f_{i_2} sont des relations binaires.

Donc $y = f_{i_1}(x)$ et $y' = f_{i_2}(x)$ puisque par définition de $(f_i)_{i\in I}$, f_{i_1} et f_{i_2} sont des applications.

Or, les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux par hypothèse.

En particulier, f_{i_1} et f_{i_2} se recollent.

Donc $\forall z \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2}), f_{i_1}(z) = f_{i_2}(z)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Or, $y = f_{i_1}(x)$ et $y' = f_{i_2}(x)$.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f_{i_1})$ et $x \in \mathrm{dom}(f_{i_2})$ d'après la prop. 81 p. 110.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2})$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x)$ d'après $(\star)$.

Or, $y = f_{i_1}(x)$ et $y' = f_{i_2}(x)$.

Donc $y = y'$.

Donc si $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y$ et $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'$, alors $y = y'$.

Donc $\forall y', \left(\left(x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y \text{ et } x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'\right) \implies y = y'\right)$.

Donc $\forall y, \forall y', \left(\left(x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y \text{ et } x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'\right) \implies y = y'\right)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall y', \left(\left(x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y \text{ et } x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y'\right) \implies y = y'\right)$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i \text{ est une application}}$.

$\boxed{② \implies ③}$

Supposons que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application.

On sait que $\forall j \in I, f_j \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$ d'après la prop. 202 p. 271.

Donc pour tout $j \in I$, $\bigcup_{i\in I} f_i$ prolonge f_j.

$\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Montrons que c'est la plus petite pour l'inclusion.

Soit g une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Ainsi, $\forall j \in I, f_j \subseteq g$.

On a donc $\bigcup_{i\in I} f_i \subseteq g$ d'après la prop. 202 p. 271.

Ainsi, $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i \text{ est minimum pour l'inclusion parmi les applications qui prolongent tous les termes de } (f_i)_{i\in I}}$.

$\boxed{③ \Longrightarrow ④}$

Supposons que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est minimum pour l'inclusion parmi les applications qui prolongent tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

$\boxed{\text{Il existe donc au moins une application qui prolonge tous les termes de } (f_i)_{i\in I}}$.

$\boxed{④ \Longrightarrow ①}$

Supposons qu'il existe au moins une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Soit f une telle application.

Soit i_1 un ensemble.

Supposons que $i_1 \in I$.

Soit i_2 un ensemble.

Supposons que $i_2 \in I$.

Par définition, f prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

En particulier, f prolonge f_{i_1} et f_{i_2}.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2})$.

On a donc $x \in \mathrm{dom}(f_{i_1})$ et $x \in \mathrm{dom}(f_{i_2})$ d'après la prop. 35 p. 42.

On sait que f prolonge f_{i_1} et f_{i_2}.

Donc $f(x) = f_{i_1}(x)$ et $f(x) = f_{i_2}(x)$ d'après la prop. 190 p. 252.

Donc $f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2})$, alors $f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2}) \implies f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x)\big)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f_{i_1}) \cap \mathrm{dom}(f_{i_2}), f_{i_1}(x) = f_{i_2}(x)$.

Donc f_{i_1} et f_{i_2} se recollent.

Donc si $i_2 \in I$, alors f_{i_1} et f_{i_2} se recollent.

Donc $\forall i_2, \big(i_2 \in I \implies f_{i_1} \text{ et } f_{i_2} \text{ se recollent}\big)$.

Donc $\forall i_2 \in I, f_{i_1}$ et f_{i_2} se recollent.

Donc si $i_1 \in I$, alors $\forall i_2 \in I, f_{i_1}$ et f_{i_2} se recollent.

Donc $\forall i_1, \Big(i_1 \in I \implies \big(\forall i_2 \in I, f_{i_1} \text{ et } f_{i_2} \text{ se recollent}\big)\Big)$.

Donc $\forall i_1 \in I, \forall i_2 \in I, f_{i_1}$ et f_{i_2} se recollent.

Donc $\boxed{\text{les termes de } (f_i)_{i\in I} \text{ se recollent deux à deux}}$.

CQFD.

3 Intersection de familles

Proposition 211 (Image d'une famille indexée par un ensemble non vide)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Si I est non vide, alors $\{A_i \mid i \in I\}$ est non vide.

Démonstration

Supposons que I est non vide.
Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.
Soit un tel i_0.
Alors par définition, on a $A_{i_0} \in \{A_i \mid i \in I\}$.
Donc $\boxed{\{A_i \mid i \in I\} \text{ est non vide}}$.
CQFD.

La définition qui suit est rendue possible grâce à la proposition précédente, puisque rappelons-le, pour pouvoir parler de $\bigcap E$, il est nécessaire que E soit non vide.

Définition 51 (Intersection d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
On appelle **intersection** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.
On le note $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{j\in I} A_j = \bigcap\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 212 (Autre notation de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

Alors $\bigcap E = \bigcap\limits_{A \in E} A$.

Démonstration

Il suffit de considérer la famille associée à E pour conclure.

Soit donc $(A)_{A \in E}$ la famille associée à E.

On a alors $E = \{A \mid A \in E\}$ d'après la prop. 194 p. 263.

Donc $\bigcap E = \bigcap \{A \mid A \in E\} = \bigcap\limits_{A \in E} A$.

Donc $\boxed{\bigcap E = \bigcap\limits_{A \in E} A}$.

CQFD.

Proposition 213 (Caractérisation de l'intersection d'une famille)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.

On a alors $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \big(\forall i \in I, x \in A_i\big)$.

Démonstration

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

On a donc $x \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $\forall B \in \{A_i \mid i \in I\}, x \in B$ par définition.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in I$.

Alors par définition, $A_j \in \{A_i \mid i \in I\}$.

Donc $x \in A_j$ d'après $(\star)$.

Donc si $j \in I$, alors $x \in A_j$.

Donc $\forall j, \big(j \in I \implies x \in A_j\big)$.

Donc $\forall j \in I, x \in A_j$.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$, alors $\forall i \in I, x \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall i \in I, x \in A_i$.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit B un ensemble.

Supposons que $B \in \{A_i \mid i \in I\}$.

Par définition, il existe donc au moins un $i_0 \in I$ tel que $B = A_{i_0}$.

Or, $x \in A_{i_0}$ d'après $(\star\star)$.

Donc $x \in B$.

Donc si $B \in \{A_i \mid i \in I\}$, alors $x \in B$.

Donc $\forall B, \big(B \in \{A_i \mid i \in I\} \implies x \in B\big)$.

Donc $\forall B \in \{A_i \mid i \in I\}, x \in B$.

Donc $x \in \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ par définition.

Donc si $\forall i \in I, x \in A_i$, alors $x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i \iff \forall i \in I, x \in A_i}$.

CQFD.

Proposition 214 (Intersections de familles simples)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

1. S'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}$.
2. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = A_{i_0}$.

Démonstration

1

Supposons qu'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$.

Notons $A := (A_i)_{i \in I}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\{A_i \mid i \in I\} &= \mathrm{im}(A) \\
&= A^{\to}\big(\mathrm{dom}(A)\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 130} \\
&= A^{\to}(I) \\
&= A^{\to}\big(\{i_1; i_2\}\big)
\end{aligned}$$

$$= \{A(i_1); A(i_2)\} \text{ d'après la prop. 169 p. 218}$$
$$= \{A_{i_1}; A_{i_2}\}$$

Donc $\{A_i \mid i \in I\} = \{A_{i_1}; A_{i_2}\}$.
Donc $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap \{A_i \mid i \in I\} = \bigcap \{A_{i_1}; A_{i_2}\} = A_{i_1} \cap A_{i_2}$.
Donc $\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}}$.

2

Supposons qu'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$.
On a alors $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in\{i_0\}} A_i = \bigcap_{i\in\{i_0;i_0\}} A_i \underset{1}{=} A_{i_0} \cap A_{i_0} \underset{\text{37 p. 45}}{=} A_{i_0}$.
Donc $\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_0}}$.
CQFD.

Proposition 215 (Intersection de familles et maximalité)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Soit F un ensemble.

1. Pour tout $i_0 \in I$, on a $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.
   Autrement dit, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un sous-ensemble commun à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

2. Si pour tout $i \in I$, on a $F \subseteq A_i$, alors $F \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.
   Autrement dit, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est **maximum** pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.

3. En particulier, s'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_{i_0} \subseteq A_i$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

4. En particulier, si $\forall i \in I, A_i = F$ alors $\bigcap_{i\in I} A_i = F$.
   On appelle cela **l'idempotence** de l'intersection de familles.

Démonstration

1

Soit $i_0 \in I$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

On a alors $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

En particulier, $x \in A_{i_0}$.

Donc si $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, alors $x \in A_{i_0}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies x \in A_{i_0} \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}}$ par définition de l'inclusion.

2

Supposons que pour tout $i \in I$, on a $F \subseteq A_i$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F$.

Soit $i \in I$.

On a $F \subseteq A_i$ par hypothèse.

Donc comme $x \in F$, on a $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in F$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \implies x \in \bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

Donc $\boxed{F \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$ par définition de l'inclusion.

3

Supposons qu'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_{i_0} \subseteq A_i$.

Soit un tel i_0.

Alors $A_{i_0} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$ d'après 2.

Or, $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq A_{i_0}$ d'après 1.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_0}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

4

Supposons que $\forall i \in I, A_i = F$.

On sait que $I \neq \varnothing$ par hypothèse.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.

Soit un tel i_0.

On a alors $A_{i_0} = F$ par hypothèse.

Donc $\forall i \in I, A_i = A_{i_0}$.

En particulier, $\forall i \in I, A_{i_0} \subseteq A_i$.

Donc $\bigcap_{i \in I} A_i = A_{i_0}$ d'après (3).

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i = F}$.

CQFD.

Proposition 216 (Intersection de familles, croissance et décroissance)

Soit I un ensemble **non vide**. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles indexées par I.

(1) Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.

(2) Pour toute partie $J \neq \varnothing$ de I, on a $\bigcap_{j \in J} A_j \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i$.

Démonstration

(1)

Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

On a donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit $i \in I$.

D'après $(\star)$, on a $x \in A_i$.

Or, $A_i \subseteq B_i$ par hypothèse.

Donc $x \in B_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in B_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, alors $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies x \in \bigcap_{i \in I} B_i \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i}$ par définition de l'inclusion.

(2)

Soit J une partie de I non vide.

Alors $(A_i)_{i \in J}$ est une sous-famille de $(A_i)_{i \in I}$ d'après la prop. 195 p. 263.

Donc $(A_i)_{i \in J}$ est une restriction de $(A_i)_{i \in I}$.

Donc $\operatorname{im}\big((A_i)_{i \in J}\big) \subseteq \operatorname{im}\big((A_i)_{i \in I}\big)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Donc $\{A_i \mid i \in J\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ par définition.

Donc $\bigcap \{A_i \mid i \in J\} \supseteq \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 33 p. 40.

(ici on peut appliquer les intersections car les ensembles sont non vides d'après la prop. 211 p. 292.)

Donc $\boxed{\bigcap_{i \in J} A_i \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$ par définition.

CQFD.

Proposition 217 (Associativité de l'intersection de famille)

Soient I et M deux ensembles **non vides**. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Soit $(J_m)_{m \in M}$ une famille de parties **non vides** de I.

Si $I = \bigcup_{m \in M} J_m$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{m \in M} \left(\bigcap_{i \in J_m} A_i \right)$.

On appelle cette propriété **l'associativité** de l'intersection de familles.

Démonstration

Supposons que $I = \bigcup_{m \in M} J_m$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit $m \in M$.

Soit $i \in J_m$.

Par définition, on a $J_m \subseteq I$.

Donc $i \in I$.

Donc $x \in A_i$ d'après $(\star)$.

Donc $\forall i \in J_m, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i \in J_m} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc $\forall m \in M, x \in \bigcap_{i \in J_m} A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{m \in M} \left(\bigcap_{i \in J_m} A_i \right)$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, alors $x \in \bigcap_{m \in M} \left(\bigcap_{i \in J_m} A_i \right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{i \in I} A_i \implies x \in \bigcap_{m \in M} \left(\bigcap_{i \in J_m} A_i \right) \right)$.

Donc $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons $x \in \bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right)$.

Donc $\forall m \in M, x \in \bigcap_{i\in J_m} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit $i \in I$.

Par hypothèse, on sait que $I = \bigcup_{m\in M} J_m$.

Donc $i \in \bigcup_{m\in M} J_m$.

Il existe donc au moins un $m \in M$ tel que $i \in J_m$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel m.

On a $x \in \bigcap_{j\in J_m} A_j$ d'après $(\star\star)$.

Donc $\forall j \in J_m, x \in A_j$ d'après la prop. 213 p. 293.

En particulier comme $i \in J_m$, on a $x \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in \bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right)$, alors $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right) \implies x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $\bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{m\in M}\left(\bigcap_{i\in J_m} A_i\right)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Proposition 218 (Changement d'indice dans une intersection de familles)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $f : J \to I$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On a $\bigcap_{j\in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.
2. Si f est surjective dans I, alors $\bigcap_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Démonstration

Comme $J \neq \varnothing$ et $I \neq \varnothing$, on a $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \neq \varnothing$ et $\{A_i \mid i \in I\} \neq \varnothing$ d'après la prop. 211 p. 292.
Nous allons donc pouvoir prendre l'intersection de ces ensembles.

1

On a $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \subseteq \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 198 p. 266.
Donc $\bigcap \left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \supseteq \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 33 p. 40.
Donc $\boxed{\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i \in I} A_i}$ par définition.

2

Supposons que f est surjective dans I.
On a alors $\left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \{A_i \mid i \in I\}$ d'après la prop. 198 p. 266.
Donc $\bigcap \left\{A_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \bigcap \{A_i \mid i \in I\}$.
Donc $\boxed{\bigcap_{j \in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i \in I} A_i}$ par définition.
CQFD.

Proposition 219 (Intersection de familles, images directes et réciproques)

Soit f une application. Soient I et J deux ensembles **non vides**.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$, indexée par I.
Soit $(B_j)_{j \in J}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$, indexée par J.

1. On a $f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{j \in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.
2. On a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
3. f est injective si et seulement si pour tout ensemble K non vide et toute famille $(C_k)_{k \in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k \in K} C_k\right) = \bigcap_{k \in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &\iff f(x) \in \bigcap_{j\in J} B_j \text{ d'après la prop. 179 p. 234} \\ &\iff \forall j \in J, f(x) \in B_j \text{ d'après la prop. 213 p. 293} \\ &\iff \forall j \in J, x \in f^{\leftarrow}(B_j) \text{ d'après la prop. 179 p. 234} \\ &\iff x \in \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j) \text{ d'après la prop. 213 p. 293} \end{aligned}$$

Donc $x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)\right)$.

Donc $\boxed{f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)}$ par définition de l'égalité.

2

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc au moins un $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

On a donc $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Donc $\forall i \in I, x \in A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soit $i \in I$.

On a $x \in A_i$ d'après $(\star)$.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\rightarrow}(A_i)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc $\forall i \in I, y \in f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $y \in \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors $y \in \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.

Donc $\forall y, \left(y \in f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \implies y \in \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)\right)$.

Donc $\boxed{f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)}$ par définition de l'inclusion.

3

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est injective.

Soit K un ensemble non vide.

Soit $(C_k)_{k\in K}$ une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K.

On sait déjà que $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) \subseteq \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$ d'après 2.

Montrons que $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) \supseteq \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Donc $\forall k \in K, y \in f^{\to}(C_k)$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

On sait que K est non vide par définition.

Il existe donc au moins un $k_0 \in K$.

Soit un tel k_0.

On a donc $y \in f^{\to}(C_{k_0})$ d'après $(\star\star)$.

Il existe donc au moins un $x \in C_{k_0}$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Soit $k \in K$.

On a $y \in f^{\to}(C_k)$ d'après $(\star\star)$.

Il existe donc au moins un $x' \in C_k$ tel que $y = f(x')$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x'.

On a donc $y = f(x)$ et $y = f(x')$, donc $f(x) = f(x')$.

Or, f est injective.

Donc $x = x'$.

Or, $x' \in C_k$ par définition.

Donc $x \in C_k$.

Donc $\forall k \in K, x \in C_k$.

Donc $x \in \bigcap_{k\in K} C_k$ d'après la prop. 213 p. 293.

Or, $y = f(x)$.

Donc $y \in f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$, alors $y \in f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)$.

Donc $\forall y, \left(y \in \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k) \implies y \in f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right)\right)$.

Donc $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) \supseteq \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$ par définition de l'inclusion.

Donc $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc pour toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K,

on a $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Donc pour tout ensemble K non vide, et pour toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Donc si f est injective, alors pour tout ensemble K non vide, et pour toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que pour tout ensemble K non vide, et pour toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Soient A et B deux parties de $\mathrm{dom}(f)$.

Soit $K := \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

Soit $(C_k)_{k\in K}$ définie par $C_\varnothing := A$ et $C_{\{\varnothing\}} := B$.

Ainsi, $(C_k)_{k\in K}$ est une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$.

On a donc $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$ par hypothèse.

Or, $\bigcap_{k\in K} C_k = \bigcap_{k\in\{\varnothing;\{\varnothing\}\}} C_k \underset{\text{214 p. 294}}{=} C_\varnothing \cap C_{\{\varnothing\}} = A \cap B$.

Donc $f^{\to}(A \cap B) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$.

Or, $\bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k) = \bigcap_{k\in\{\varnothing;\{\varnothing\}\}} f^{\to}(C_k) \underset{\text{214 p. 294}}{=} f^{\to}(C_\varnothing) \cap f^{\to}(C_{\{\varnothing\}}) = f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

Donc $f^{\to}(A \cap B) = f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

Donc pour toutes parties A et B de $\mathrm{dom}(f)$, on a $f^{\to}(A \cap B) = f^{\to}(A) \cap f^{\to}(B)$.

Donc f est injective d'après la prop. 171 p. 220.

Donc si pour tout ensemble K non vide, et pour toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\to}\left(\bigcap_{k\in K} C_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{\to}(C_k)$, alors f est injective.

Finalement, on obtient l'équivalence voulue.

CQFD.

Notation

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $\big(f(z)\big)_{z\in I\times J}$ une famille indexée par $I\times J$.

On notera parfois $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ ou $\bigcap\limits_{(i;j)\in I\times J} f(i;j)$ plutôt que $\bigcap\limits_{z\in I\times J} f(z)$.

Ici encore, les indices i et j sont dits « *muets* », c'est-à-dire que l'on peut les remplacer par n'importe quels autres caractères, sans que cela ne change quoi que ce soit. Bien évidemment, il faut prendre garde à ce que ces nouveaux caractères ne soient pas déjà utilisés, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, on a $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcap\limits_{\substack{a\in I\\ b\in J}} f(a;b) = \bigcap\limits_{\substack{c\in I\\ d\in J}} f(c;d)$.

Proposition 220 (Intersections doubles de familles)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille indexée par $I\times J$.
Soit x un ensemble.

1. On a $x\in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ si et seulement si pour tout $i\in I$ et pour tout $j\in J$, on a $x\in A_{(i;j)}$.
2. On a $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcap\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Démonstration

1

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x\in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$.

On a donc $x\in \bigcap\limits_{z\in I\times J} A_z$ par définition.

Donc $\forall z\in I\times J, x\in A_z$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Soient $i\in I$ et $j\in J$.

On a alors $(i;j)\in I\times J$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x\in A_{(i;j)}$ d'après $(\star)$.

Donc $\forall i\in I, \forall j\in J, x\in A_{(i;j)}$.

Donc si $x\in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$, alors $\forall i\in I, \forall j\in J, x\in A_{(i;j)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in A_{(i;j)}$.

Soit $z \in I \times J$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ et un $j \in J$ tel que $z = (i;j)$ par définition de $I \times J$.

Soient de tels i et j.

On a alors $x \in A_{(i;j)}$ par hypothèse.

Donc $x \in A_z$ puisque $z = (i;j)$.

Donc $\forall z \in I \times J, x \in A_z$.

Donc $x \in \bigcap\limits_{z \in I \times J} A_z$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)}$ par définition.

Donc si $\forall i \in I, \forall j \in J, x \in A_{(i;j)}$ alors $x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)}$.

Finalement, $\boxed{x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)} \text{ si et seulement si pour tout } i \in I \text{ et pour tout } j \in J\text{, on a } x \in A_{(i;j)}}$.

2

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{(i;j)} &\iff \forall i \in I, x \in \bigcap_{j \in J} A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293} \\ &\iff \forall i \in I, \forall j \in J, x \in A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293} \\ &\iff x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)} \text{ d'après } 1 \end{aligned}$$

Donc $x \in \bigcap\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} A_{(i;j)} \iff x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} A_{(i;j)} \iff x \in \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap\limits_{i \in I} \bigcap\limits_{j \in J} A_{(i;j)} = \bigcap\limits_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)}}$ par définition de l'égalité.

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} A_{(i;j)} &\iff \forall i \in I, \forall j \in J, x \in A_{(i;j)} \text{ d'après } 1 \\ &\iff \forall j \in J, \forall i \in I, x \in A_{(i;j)} \end{aligned}$$

$$\iff \forall j \in J, x \in \bigcap_{i\in I} A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293}$$

$$\iff x \in \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293}$$

Donc $x \in \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \iff x \in \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} \iff x \in \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{(i;j)} \right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{(i;j)}}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 221 (Intersection de familles et opérations)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit F un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Réunion de deux ensembles

1 **Distributivité de l'union (de deux ensembles) sur l'intersection de familles**

$F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$.

2 **Double distributivité de l'union (de deux ensembles) sur l'intersecton de familles**

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cup B_j)$.

Produit cartésien

3 **Distributivité à gauche du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \times A_i)$.

4 **Distributivité à droite du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcap_{i\in I}(A_i \times F)$.

5 **Double distributivité du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j)$.

Intersection

6 **Double distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

Démonstration

1

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $x \in F$ ou $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 25 p. 30.

Donc $x \in F$ ou $\forall i \in I, x \in A_i$.

- Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où $x \in F$.

  Soit $i \in I$.

  On sait que $F \subseteq F \cup A_i$ d'après la prop. 26 p. 31.

  Donc comme $x \in F$, on a $x \in F \cup A_i$.

  Donc $\forall i \in I, x \in F \cup A_i$.

- Plaçons-nous à présent dans le cas où $\forall i \in I, x \in A_i$.

  Soit $i \in I$.

  On a donc $x \in A_i$ par hypothèse.

  Or, $A_i \subseteq F \cup A_i$ dapresProposition : Union, sur-ensembles et minimum.

  Donc $x \in F \cup A_i$.

  Donc $\forall i \in I, x \in F \cup A_i$.

Dans les deux cas, on a donc $\forall i \in I, x \in F \cup A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors $x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \implies x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)\right)$.

Donc $F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$.

Donc $\forall i \in I, x \in F \cup A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Deux cas se présentent alors à nous : ou bien $x \in F$, ou bien $x \notin F$ d'après le principe du tiers exclu.

- Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $x \in F$.

  On sait que $F \subseteq F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ d'après la prop. 26 p. 31.

  Donc $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

- Plaçons-nous à présent dans le cas où $x \notin F$.

  Soit $i \in I$.

  On a $x \in F \cup A_i$ d'après $(\star)$.

  Donc $x \in F$ ou $x \in A_i$ d'après la prop. 25 p. 30.

  Mais $x \notin F$ par hypothèse.

  Donc $x \in A_i$.

  Donc $\forall i \in I, x \in A_i$.

  Donc $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

  Or, $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ d'après la prop. 26 p. 31.

  Donc $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc dans les deux cas, $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc si $x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)$, alors $x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i) \implies x \in F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\right)$.

Donc $\bigcap_{i\in I}(F \cup A_i) \subseteq F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

2

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \bigcap_{j\in J}\left(\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B_j\right) \text{ d'après } 1 \\ &= \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I}(A_i \cup B_j) \text{ d'après } 1\end{aligned}$$

$$= \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j) \text{ d'après la prop. 220 p. 304}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)}$.

3

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

Il existe donc au moins un $y \in F$ et un $z \in \bigcap_{i\in I} A_i$ tels que $x = (y; z)$ par définition du produit cartésien.

Soient de tels y et z.

Comme $z \in \bigcap_{i\in I} A_i$, on a $\forall i \in I, z \in A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star\star)$ cette assertion.

Soit $i \in I$.

On a $z \in A_i$ d'après $(\star\star)$.

Ainsi, on a $y \in F$, $z \in A_i$ et $x = (y; z)$.

Donc $x \in F \times A_i$ par définition du produit scalaire.

Donc $\forall i \in I, x \in F \times A_i$.

Donc $x \in \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)$ d'après la prop. 213 p. 293.

Donc si $x \in F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, alors $x \in \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \implies x \in \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)\right)$.

Donc $F \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \bigcap_{i\in I} (F \times A_i)$.

Donc $\forall i \in I, x \in F \times A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Notons $(\star\star\star)$ cette assertion.

On sait que I est non vide par définition.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.

Soit un tel i_0.

On a alors $x \in F \times A_{i_0}$ d'après $(\star\star\star)$.

Il existe donc au moins un $y \in F$ et un $z \in A_{i_0}$ tels que $x = (y; z)$ par définition.

Soient de tels y et z.

Soit $i \in I$.

On a $x \in F \times A_i$ d'après $(\star\star\star)$.

Il existe donc au moins un $y' \in F$ et un $z' \in A_i$ tels que $x = (y; z)$ par définition.

Soient de tels y' et z'.

Ainsi, on a $x = (y; z)$ et $x = (y'; z')$.

Donc $(y; z) = (y'; z')$.

Donc $y = y'$ et $z = z'$ d'après la prop. 62 p. 81.

Or, $z' \in A_i$ par définition.

Donc $z \in A_i$.

Donc $\forall i \in I, z \in A_i$.

Donc $z \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ d'après la prop. 213 p. 293.

Ainsi, $y \in F$, $z \in \bigcap\limits_{i \in I} A_i$ et $x = (y; z)$.

Donc $x \in F \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)$ par définition.

Donc si $x \in \bigcap\limits_{i \in I}(F \times A_i)$, alors $x \in F \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \bigcap\limits_{i \in I}(F \times A_i) \implies x \in F \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)\right)$.

Donc $\bigcap\limits_{i \in I}(F \times A_i) \subseteq F \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{F \times \left(\bigcap\limits_{i \in I} A_i\right) = \bigcap\limits_{i \in I}(F \times A_i)}$ par antisymétrie de l'inclusion.

4

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F &\iff x \text{ est un couple et } x \in \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times F \text{ par définition} \\
&\iff x \text{ est un couple et } {}^t x \in F \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \text{ d'après la prop. 91 p. 123} \\
&\iff x \text{ est un couple et } {}^t x \in \bigcap_{i \in I}(F \times A_i) \text{ d'après } 3 \\
&\iff x \text{ est un couple et } \forall i \in I, {}^t x \in F \times A_i \text{ d'après la prop. 213 p. 293} \\
&\iff x \text{ est un couple et } \forall i \in I, x \in A_i \times F \text{ d'après la prop. 91 p. 123} \\
&\iff \forall i \in I, x \in A_i \times F \text{ par définition car } I \neq \varnothing \\
&\iff x \in \bigcap_{i \in I}(A_i \times F) \text{ d'après la prop. 213 p. 293}
\end{aligned}$$

Donc $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F \iff x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \times F)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F \iff x \in \bigcap_{i\in I}(A_i \times F)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcap_{i\in I}(A_i \times F)}$ par définition de l'égalité.

5

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &= \bigcap_{j\in J}\left(\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times B_j\right) \text{ d'après } 3\\ &= \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I}(A_i \times B_j) \text{ d'après } 4\\ &= \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j) \text{ d'après la prop. 220 p. 304}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \times B_j)}$.

6

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) &\iff x \in \bigcap_{i\in I} A_i \text{ et } x \in \bigcap_{j\in J} B_j \text{ d'après la prop. 35 p. 42}\\ &\iff \forall i \in I, x \in A_i \text{ et } \forall j \in J, x \in B_j \text{ d'après la prop. 213 p. 293}\\ &\iff \forall i \in I, \forall j \in J, (x \in A_i \text{ et } x \in B_j)\\ &\iff \forall i \in I, \forall j \in J, x \in A_i \cap B_j \text{ d'après la prop. 35 p. 42}\\ &\iff x \in \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cap B_j) \text{ d'après la prop. 220 p. 304}\end{aligned}$$

Donc $x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cap B_j)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) \iff x \in \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cap B_j)\right)$.

Donc $\boxed{\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Proposition 222 (Lois de De Morgan - Version famille d'ensembles)

Soit I un ensemble non vide. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i)$.
2. $E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i)$.

Démonstration

1

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) &\iff x \in E \text{ et } x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \text{ par définition}\\
&\iff x \in E \text{ et } \neg\left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i\right)\\
&\iff x \in E \text{ et } \neg(\exists i \in I, x \in A_i) \text{ d'après la prop. 200 p. 269}\\
&\iff x \in E \text{ et } \forall i \in I, x \notin A_i\\
&\iff \forall i \in I, (x \in E \text{ et } x \notin A_i)\\
&\iff \forall i \in I, x \in E\backslash A_i \text{ par définition}\\
&\iff x \in \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i) \text{ d'après la prop. 213 p. 293}
\end{aligned}$$

Donc $x \in E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i)\right)$.

Donc $\boxed{E\backslash\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(E\backslash A_i)}$ par définition de l'égalité.

2

Soit x un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
x \in E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) &\iff x \in E \text{ et } x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \text{ par définition}\\
&\iff x \in E \text{ et } \neg\left(x \in \bigcap_{i\in I} A_i\right)\\
&\iff x \in E \text{ et } \neg(\forall i \in I, x \in A_i) \text{ d'après la prop. 213 p. 293}\\
&\iff x \in E \text{ et } \exists i \in I, x \notin A_i\\
&\iff \exists i \in I, (x \in E \text{ et } x \notin A_i)\\
&\iff \exists i \in I, x \in E\backslash A_i \text{ par définition}\\
&\iff x \in \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i) \text{ d'après la prop. 200 p. 269}
\end{aligned}$$

Donc $x \in E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \iff x \in \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i)\right)$.

Donc $\boxed{E\backslash\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(E\backslash A_i)}$ par définition de l'égalité.

CQFD.

Des informations sur Auguste De Morgan se trouvent à la page 64.

Proposition 223 (L'intersection d'une famille est incluse dans la réunion)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

Alors $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$.

Démonstration

On sait que I est non vide par définition.

Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.

Soit un tel i_0.

On a alors $\bigcap_{i\in I} A_i \underset{\text{215 p. 295}}{\subseteq} A_{i_0} \underset{\text{202 p. 271}}{\subseteq} \bigcup_{i\in I} A_i$.

Donc $\boxed{\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i}$.

CQFD.

4 Produit cartésien de familles

Définition 52 (Produit cartésien d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

On appelle **produit cartésien** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \;\middle|\; \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$.

On le note alors $\prod_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\prod_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut remplacer tous les i par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit, à condition que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque sinon de produire des contre sens !

Ainsi, on a $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{j\in I} A_j = \prod_{k\in I} A_k$.

Proposition 224 (Produit cartésien d'indice vide)

Soit $(A_i)_{i\in\varnothing}$ une famille indexée par $\varnothing$.

Alors $\prod_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}$.

Démonstration

On a $\mathcal{A}\left(\varnothing \to \bigcup_{i\in\varnothing} A_i\right) = \{\varnothing\}$ d'après la prop. 140 p. 173.

Donc $\prod_{i\in\varnothing} A_i \subseteq \{\varnothing\}$ par définitio.

Mais comme $\forall i \in \varnothing, \varnothing(i) \in A_i$ est vraie d'après la prop. 12 p. 16, on a $\varnothing \in \prod_{i\in\varnothing} A_i$.

Donc $\{\varnothing\} \subseteq \prod_{i\in\varnothing} A_i$ d'après la prop. 16 p. 19.

Donc $\boxed{\prod_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Théorème 2 (Axiome du choix version produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par I.
Si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, alors $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Démonstration

Supposons que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.
Posons $X := \{A_i \mid i \in I\}$.
Par hypothèse, on a $\varnothing \notin X$ donc $X = X\backslash\{\varnothing\}$.
Il existe au moins une application $f : X \to \bigcup X$ telle que $\forall A \in X, f(A) \in A$ d'après **l'axiome du choix**.
Soit une telle f.
Or, $X = \{A_i \mid i \in I\}$, donc $\bigcup X = \bigcup_{i\in I} A_i$ par définition.
Donc $f : X \to \bigcup_{i\in I} A_i$.
De plus, $\forall i \in I$, comme $A_i \in X$ par définition, on a $f(A_i) \in A_i$.
Posons alors $g := \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & X \\ i & \longmapsto & A_i \end{pmatrix}$.
On a alors $f \circ g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 149 p. 188.
Alors pour tout $i \in I$, on a $(f \circ g)(i) \underset{150\text{ p. }190}{=} f\big(g(i)\big) = f(A_i)$ donc $(f \circ g)(i) \in A_i$.
Ainsi, on a $f \circ g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\forall i \in I, (f \circ g)(i) \in A_i$.
Donc $f \circ g \in \prod_{i\in I} A_i$ par définition.
Donc $\boxed{\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing}$.
CQFD.

Remarque :
On aurait pu prendre ce théorème comme axiome, et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version".
Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le système d'axiome considéré sans l'axiome du choix.

Idée de preuve

Supposons que pour tout ensemble I et toute famille $(A_i)_{i\in I}$, si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, alors $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.
Soit E un ensemble. Soit $X := E\backslash\{\varnothing\}$.
En posant $I := X$, soit $(A_i)_{i\in I}$ la famille associée à X, c'est-à-dire que $\forall i \in I, A_i = i$.
Par définition, on a $X = E\backslash\{\varnothing\}$ donc $\varnothing \notin X$ donc $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Donc par hypothèse, $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins une $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Soit une telle f.

On a donc $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\forall i \in I, f(i) \in A_i$ par définition.

Mais $I = X$ donc $f : X \to \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\forall i \in X, f(i) \in A_i$.

Mais $(A_i)_{i\in I}$ est la famille associée à X, donc $\{A_i \mid i \in I\} = X$ d'après la prop. 194 p. 263.

Donc $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup X$ par définition.

Donc $f : X \to \bigcup X$ et $\forall i \in X, f(i) \in A_i$.

Mais on a dit que par définition, $\forall i \in X, A_i = i$.

Donc $f : X \to \bigcup X$ et $\forall i \in X, f(i) \in i$.

Autrement dit, $\boxed{f : X \to \bigcup X \text{ et } \forall A \in X, f(A) \in A}$.

CQFD.

Proposition 225 (Caractérisation du produit cartésien d'une famille)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

Alors $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ si et seulement si $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

Démonstration

Posons $a := (a_i)_{i\in I}$.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$.

Comme $a \in \prod_{i\in I} A_i$, on a $\forall i \in I, a(i) \in A_i$ par définition du produit cartésien.

Donc comme $\forall i \in I, a(i) = a_i$, on a $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

Donc si $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, alors $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Par hypothèse, on a $a_i \in A_i$.

Or, $A_i \subseteq \bigcup_{j\in I} A_j$ d'après la prop. 202 p. 271.

Donc $a_i \in \bigcup_{j\in I} A_j$.

Donc si $i \in I$, alors $a_i \in \bigcup_{j\in I} A_j$.

Donc $\forall i, \left(i \in I \implies a_i \in \bigcup_{j \in I} A_j \right)$.

Donc $\forall i \in I, a_i \in \bigcup_{j \in I} A_j$.

Notons $(\star)$ cette dernière assertion.

Montrons que $\mathrm{im}(a) \subseteq \bigcup_{I \in I} A_I$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}(a)$.

Il existe donc au moins un $i \in \mathrm{dom}(a)$ tel que $y = a(i)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel i.

Comme $a = (a_j)_{j \in I}$, on a $\mathrm{dom}(a) = I$ par définition.

Donc $i \in I$.

Ainsi, on a $y = a(i)$, et comme $a = (a_j)_{j \in I}$, on a $a(i) = a_i$.

Donc $y = a_i$.

Or, $a_i \in \bigcup_{j \in I} A_j$ d'après $(\star)$.

Donc $y \in \bigcup_{j \in I} A_j$.

Donc si $y \in \mathrm{im}(a)$, alors $y \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $\forall y, \left(y \in \mathrm{im}(a) \implies y \in \bigcup_{I \in I} A_I \right)$.

Donc $\mathrm{im}(a) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ par définition de l'inclusion.

Ainsi, on a $a : I \to \bigcup_{i \in I} A_i$, et on a $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

Donc $a \in \prod_{i \in I} A_i$ par définition.

Donc comme $a = (a_i)_{i \in I}$, on a $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Donc si $\forall i \in I, a_i \in A_i$, alors $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i \text{ si et seulement si } \forall i \in I, a_i \in A_i}$.

CQFD.

Proposition 226 (Croissance du produit cartésien de familles)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles indexées par I.

1. Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} B_i$.
2. Réciproquement, si $\prod_{i \in I} A_i \subseteq \prod_{i \in I} B_i$, et si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, alors $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Démonstration

(1) Supposons que $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

En particulier, on a $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ d'après la prop. 203 p. 273.

Soit f un ensemble.

Supposons que $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Donc $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ par définition.

Or, on a dit que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$.

Donc $f : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$ d'après la prop. 138 p. 170.

De plus, comme $f \in \prod_{i\in I} A_i$, on a $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

On a alors $f(i) \in A_i$.

Or, $A_i \subseteq B_i$ par hypothèse.

Donc $f(i) \in B_i$.

Donc si $i \in I$, alors $f(i) \in B_i$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies f(i) \in B_i\big)$.

Donc $\forall i \in I, f(i) \in B_i$.

Donc comme $f : I \to \bigcup_{i\in I} B_i$, on a $f \in \prod_{i\in I} B_i$.

Donc si $f \in \prod_{i\in I} A_i$, alors $f \in \prod_{i\in I} B_i$.

Donc $\forall f, \left(f \in \prod_{i\in I} A_i \implies f \in \prod_{i\in I} B_i\right)$.

Donc $\boxed{\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i}$ par définition de l'inclusion.

(2) Supposons que $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$ et que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in I$.

Montrons que $A_j \subseteq B_j$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A_j$.

Comme $A_j \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 202 p. 271, on a $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Par hypothèse, on a $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Donc $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$ d'après **l'axiome du choix** (version produit cartésien).

Il existe donc au moins un $f \in \prod_{i\in I} A_i$.

Soit une telle f.

On a donc $f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ et $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

Posons $g := \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \bigcup_{i\in I} A_i \\ i & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } i = j \\ f(i) & \text{si } i \neq j \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que $g \in \prod_{i\in I} A_i$.

On a bien $g : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ par définition.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

On a alors ou bien $i = j$, ou bien $i \neq j$ d'après le principe du tiers exclu.

Si $i = j$, alors $g(i) = g(j) = x \in A_j = A_i$ donc $g(i) \in A_i$.

Si $i \neq j$, alors $g(i) = f(i) \in A_i$.

Dans les deux cas, on a $g(i) \in A_i$.

Donc si $i \in I$, alors $g(i) \in A_i$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies g(i) \in A_i\big)$.

Donc $\forall i \in I, g(i) \in A_i$.

Ainsi, $g \in \prod_{i\in I} A_i$.

Or, on a $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$ par hypothèse.

Donc $g \in \prod_{i\in I} B_i$.

On a donc $\forall i \in I, g(i) \in B_i$.

En particulier, $g(j) \in B_j$.

Or, $g(j) = x$ par définition de g.

Donc $x \in B_j$.

Donc si $x \in A_j$, alors $x \in B_j$.

Donc $\forall x, \big(x \in A_j \implies x \in B_j\big)$.

Donc $A_j \subseteq B_j$ par définition de l'inclusion.

Donc si $j \in I$, alors $A_j \subseteq B_j$.

Donc $\forall j, \big(j \in I \implies A_j \subseteq B_j\big)$.

Donc $\boxed{\forall j \in I, A_j \subseteq B_j}$.

Proposition 227 (Produit cartésien de familles et intersections)

1. Soient I et J deux ensembles. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$ une famille indexée par $I \times J$.

Si $J \neq \varnothing$, alors on a $\bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right)$.

(2) Soit I un ensemble **non vide**. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.
On a alors $\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

Démonstration

(1) Supposons $J \neq \varnothing$.

Soit f un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \in \bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) &\iff \forall j \in J, f \in \prod_{i\in I} A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293}\\
&\iff \forall j \in J, \forall i \in I, f(i) \in A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 225 p. 316}\\
&\iff \forall i \in I, \forall j \in J, f(i) \in A_{(i;j)}\\
&\iff \forall i \in I, f(i) \in \bigcap_{j\in J} A_{(i;j)} \text{ d'après la prop. 213 p. 293}\\
&\iff f \in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right) \text{ d'après la prop. 225 p. 316}
\end{aligned}$$

Donc $f \in \bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) \iff f \in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right)$.

Donc $\forall f, \left(f \in \bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) \iff f \in \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right)\right)$.

Donc $\boxed{\bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right)}$ par définition de l'égalité.

(2) Notons $0 := \varnothing$ et $1 := \{\varnothing\}$.
Pour tout $i \in I$, posons $C_{(i;0)} = A_i$ et $C_{(i;1)} = B_i$.
On obtient alors une famille $(C_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in\{0;1\}}}$.
On a alors les égalités suivantes :

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \left(\prod_{i\in I} C_{(i;0)}\right) \cap \left(\prod_{i\in I} C_{(i;1)}\right)$$

$$= \bigcap_{j\in\{0;1\}} \left(\prod_{i\in I} C_{(i;j)}\right) \text{ d'après la prop. 214 p. 294}$$

$$= \prod_{i\in I} \left(\bigcap_{j\in\{0;1\}} C_{(i;j)}\right) \text{ d'après } 1$$

$$= \prod_{i\in I} (C_{(i;0)} \cap C_{(i;1)}) \text{ d'après la prop. 214 p. 294}$$

$$= \prod_{i\in I} (A_i \cap B_i)$$

Donc $\boxed{\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I} (A_i \cap B_i)}$.

CQFD.

Définition 53 (Projections depuis le produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. Pour tout $j \in I$, on appelle $j^{\text{ème}}$ **projection** depuis $\prod_{i\in I} A_i$ l'application

$$\pi_j := \left(\begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & A_j \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & a_j \end{array}\right).$$

2. Pour tout $J \subseteq I$, on appelle **projection** de $\prod_{i\in I} A_i$ sur $\prod_{j\in J} A_j$ l'application

$$\pi_J := \left(\begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & \prod_{j\in J} A_j \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & (a_j)_{j\in J} \end{array}\right).$$

Théorème 3 (Propriété universelle du produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit X un ensemble.
Soit pour tout $j \in I$ la projection $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$.

1. Pour tout application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ et tout $i \in I$, on a $\pi_i \circ f : X \to A_i$.

2. Pour tout application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$, on a $(\pi_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

3. Pour toute famille d'application $(f_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, f_i : X \to A_i$, il existe une unique

application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ telle que $\forall i \in I, f_i = \pi_i \circ f$.

4 L'application $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i) \\ f & \longmapsto & (\pi_i \circ f)_{i\in I} \end{array}\right)$ est une bijection dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

Démonstration

1 Soit $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

On a donc $f : X \to \prod_{j\in I} A_j$ et $\pi_i : \prod_{j\in I} A_j \to A_i$.

Donc $\pi_i \circ f : X \to A_i$ d'après la prop. 149 p. 188.

Donc si $i \in I$, alors $\pi_i \circ f : X \to A_i$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies \pi_i \circ f : X \to A_i\big)$.

Donc $\boxed{\forall i \in I, \pi_i \circ f : X \to A_i}$.

2 Soit $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$.

D'après 1, on a $\forall i \in I, \pi_i \circ f : X \to A_i$.

Donc $\forall i \in I, \pi_i \circ f \in \mathcal{A}(X \to A_i)$.

Donc $\boxed{(\pi_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i)}$ d'après la prop. 225 p. 316.

3 Soit une famille d'application $(f_i)_{i\in I}$ indexée par I telle que $\forall i \in I, f_i : X \to A_i$.

• Existence de f.

Pour tout $x \in X$, on a $\forall i \in I, f_i(x) \in A_i$ par définition de $(f_i)_{i\in I}$.

Donc pour tout $x \in X$, on a $(f_i(x))_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 225 p. 316.

Nous pouvons donc poser $f := \left(\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \prod_{i\in I} A_i \\ x & \longmapsto & (f_i(x))_{i\in I} \end{array}\right)$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Montrons que $\pi_i \circ f = f_i$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in X$.

On a $f(x) = (f_i(x))_{i\in I}$ par définition de f.

Donc $\pi_i\big(f(x)\big) = f_i(x)$ par définition de π_i.

Or, $\pi_i\big(f(x)\big) = (\pi_i \circ f)(x)$ d'après la prop. 150 p. 190.

Donc $(\pi_i \circ f)(x) = f_i(x)$.

Donc si $x \in X$, alors $(\pi_i \circ f)(x) = f_i(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in X \implies (\pi_i \circ f)(x) = f_i(x)\big)$.

Donc $\forall x \in X, (\pi_i \circ f)(x) = f_i(x)$.

Or, $\pi_i \circ f : X \to A_i$ d'après 1, et $f_i : X \to A_i$ par définition.

Donc $\pi_i \circ f = f_i$ d'après la prop. 139 p. 171

Donc si $i \in I$, alors $\pi_i \circ f = f_i$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies \pi_i \circ f = f_i\big)$.

Donc $\boxed{\forall i \in I, \pi_i \circ f = f_i}$.

D'où l'existence.

• Unicité de f

Soit $g : X \to \prod_{i\in I} A_i$ telle que $\forall i \in I, \pi_i \circ g = f_i$.

En particulier, on a $\forall i \in I, \pi_i \circ g = \pi_i \circ f$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in X$.

On a $g(x) \in \prod_{i\in I} A_i$.

Nous pouvons donc écrire $g(x) = (g(x)_i)_{i\in I}$ avec $\forall i \in I, g(x)_i \in A_i$.

Alors $\forall i \in I, \pi_i\big(g(x)\big) = g(x)_i$.

Or, $\forall i \in I, \pi_i\big(g(x)\big) = (\pi_i \circ g)(x)$ d'après la prop. 150 p. 190.

Donc $\forall i \in I, (\pi_i \circ g)(x) = g(x)_i$.

Mais par hypothèse, on a $\forall i \in I, \pi_i \circ g = \pi_i \circ f$.

Donc $\forall i \in I, (\pi_i \circ g)(x) = (\pi_i \circ f)(x)$.

Donc $\forall i \in I, g(x)_i = (\pi_i \circ f)(x)$.

Or, $f(x) \in \prod_{i\in I} A_i$.

Nous pouvons donc écrire $f(x) = (f(x)_i)_{i\in I}$ avec $\forall i \in I, f(x)_i \in A_i$.

Alors $\forall i \in I, \pi_i\big(f(x)\big) = f(x)_i$ par définition de π_i.

Or, $\forall i \in I, \pi_i\big(f(x)\big) = (\pi_i \circ f)(x)$ d'après la prop. 150 p. 190.

Donc $\forall i \in I, (\pi_i \circ f)(x) = f(x)_i$.

Or, on a dit que $\forall i \in I, g(x)_i = (\pi_i \circ f)(x)$.

Donc $\forall i \in I, f(x)_i = g(x)_i$.

Donc $(f(x)_i)_{i\in I} = (g(x)_i)_{i\in I}$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc $f(x) = g(x)$.

Donc si $x \in X$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in X \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in X, f(x) = g(x)$.

Or, $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ et $g : X \to \prod_{i\in I} A_i$ par définition.

Donc $\boxed{f = g}$ d'après la prop. 139 p. 171.

D'où l'unicité.

4 Considérons donc $\varphi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathcal{A}\left(X \to A_i\right) \\ f & \longmapsto & \pi_i \circ f \end{array}\right)$.

• Montrons que φ est injective.

Soit f un ensemble.

Supposons que $f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right)$.

Soit g un ensemble.

Supposons que $g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right)$.

Supposons que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

Notons $(h_i)_{i\in I} = \varphi(f) = \varphi(g)$.

Par définition de φ, f et g sont donc deux applications $X \to \prod_{i\in I} A_i$ telles que $\forall i \in I, \pi_i \circ f = h_i = \pi_i \circ g$.

Mais une telle application est unique d'après 3.

Donc $f = g$.

Donc si $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors $f = g$.

Donc si $g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right)$, alors $\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g$.

Donc $\forall g, \left(g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right) \implies \big(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\big)\right)$.

Donc $\forall g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right), \big(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\big)$.

Donc si $f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right)$, alors $\forall g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right), \big(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\big)$.

Donc $\forall f, \left(f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right) \implies \left(\forall g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right), \big(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\big)\right)\right)$.

Donc $\forall f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right), \forall g \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right), \big(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\big)$.

Donc φ est injective.

• Montrons que φ est surjective dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}\left(X \to A_i\right)$.

Soit F un ensemble.

Supposons que $F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

Nous pouvons donc écrire $F = (f_i)_{i \in I}$ avec $\forall i \in I, f_i : X \to A_i$.

Alors il existe une unique application $f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i \in I} A_i\right)$ telle que $\forall i \in I, \pi_i \circ f = f_i$ d'après 3.

Soit une telle f.

On a donc $F = (f_i)_{i \in I} = (\pi_i \circ f)_{i \in I} = \varphi(f)$.

Donc si $F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$, alors il existe au moins une application $f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i \in I} A_i\right)$ telle que $\varphi(f) = F$.

Donc $\forall F, \left(F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i) \implies \left(\exists f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i \in I} A_i\right), \varphi(f) = F\right)\right)$.

Donc $\forall F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i), \exists f \in \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i \in I} A_i\right), \varphi(f) = F$.

Donc φ est surjective dans $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est bijective dans } \prod_{i \in I} \mathcal{A}(X \to A_i)}$.

CQFD.

5 Union disjointe d'une famille

Définition 54 (Union disjointe d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille.

On appelle **union disjointe** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times \{i\})$.

On le note alors $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\coprod\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut remplacer tous les i par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit, à condition que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque sinon de produire des contre sens !

Ainsi, on a $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \coprod\limits_{j\in I} A_j = \coprod\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 228 (Caractérisation de l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.

1. $x \in \coprod\limits_{i\in I} A_i \iff \exists! i \in I, \exists! a \in A_i, x = (a; i)$.
2. $x \in \coprod\limits_{i\in I} A_i \implies \exists! i \in I, \exists! a \in \bigcup\limits_{j\in I} A_j, x = (a; i)$.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in \coprod\limits_{i\in I} A_i$.

• Existence du i et du a.

Par définition, on a $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times \{i\})$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times \{i\})$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i \times \{i\}$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i.

On a donc $x \in A_i \times \{i\}$.

Il existe donc au moins un $a \in A_i$ et un $i' \in \{i\}$ tels que $x = (a; i')$ par définition du produit cartésien.

Soient de tels a et i'.

Comme $i' \in \{i\}$, on a $i' = i$.

Ainsi, il existe au moins un $i \in I$ et un $a \in A_i$ tels que $x = (a; i)$.

D'où l'existence.

• Unicité du i et du a.

Soient $j \in I$ et $b \in A_j$ tels que $x = (b; j)$.

Comme $x = (a; i)$, on a donc $(a; i) = (b; j)$.

Donc $a = b$ et $i = j$ d'après la prop. 62 p. 81.

D'où l'unicité.

Donc si $x \in \coprod_{i \in I} A_i$, alors $\exists! i \in I, \exists! a \in A_i, x = (a; i)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe un unique $i \in I$ et un unique $a \in A_i$ tels que $x = (a; i)$.

Soient de tels i et a.

On a $a \in A_i$, $i \in \{i\}$ donc $(a; i) \in A_i \times \{i\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc comme $x = (a; i)$, on a $x \in A_i \times \{i\}$.

Il existe donc au moins un $j \in J$ tel que $x \in A_j \times \{j\}$.

Donc $x \in \bigcup_{j \in J} (A_j \times \{j\})$ d'après la prop. 200 p. 269.

Or, $\bigcup_{j \in J} (A_j \times \{j\}) = \coprod_{j \in J} A_j$ par définition.

Donc $x \in \coprod_{j \in J} A_j$.

Donc si $\exists! i \in I, \exists! a \in A_i, x = (a; i)$, alors $x \in \coprod_{i \in I} A_i$.

Finalement, $\boxed{x \in \coprod_{i \in I} A_i \iff \exists! i \in I, \exists! a \in A_i, x = (a; i)}$.

2

Supposons que $x \in \coprod_{i \in I} A_i$.

• Existence du i et du a.

D'après 1, il existe un unique $i \in I$ et un unique $a \in A_i$ tels que $x = (a; i)$.

Soient de tels a et i.

On sait que $A_i \subseteq \bigcup_{j \in I} A_j$ d'après la prop. 202 p. 271.

Donc comme $a \in A_i$, on a $a \in \bigcup_{j \in I} A_j$.

Ainsi, il existe au moins un $a \in \bigcup_{j \in I} A_j$ et un $i \in I$ tels que $x = (a; i)$.

D'où l'existence.

• Unicité du i et du a.

Soient $i' \in I$ et $a' \in \bigcup_{j \in I} A_j$ tels que $x = (a'; i')$.

Comme $x = (a; i)$, on a alors $(a; i) = (a'; i')$.

Donc $a = a'$ et $i = i'$ d'après la prop. 62 p. 81.

D'où l'unicité.

Donc $\boxed{\text{si } x \in \coprod_{i \in I} A_i, \text{ alors } \exists! i \in I, \exists! a \in \bigcup_{j \in I} A_j, x = (a; i)}$.

CQFD.

Définition 55 (Projections cartésiennes depuis l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$.

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons donc définir les deux **projections cartésiennes** suivantes :

$$\pi_g := \begin{pmatrix} \coprod_{i \in I} A_i & \longrightarrow & \bigcup_{i \in I} A_i \\ (a; i) & \longmapsto & a \end{pmatrix} \qquad \pi_d := \begin{pmatrix} \coprod_{i \in I} A_i & \longrightarrow & I \\ (a; i) & \longmapsto & i \end{pmatrix}$$

Définition 56 (Injections canoniques dans l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Pour tout $j \in I$, on appelle $j^{\text{ème}}$ **injection canonique** dans $\coprod_{i \in I} A_i$ l'application

$$\iota_j := \begin{pmatrix} A_j & \longrightarrow & \coprod_{i \in I} A_i \\ a & \longmapsto & (a; j) \end{pmatrix}$$

Théorème 4 (Propriété universelle de l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I. Soit X un ensemble.

Soit pour tout $j \in I$ l'injection canonique $\iota_j : A_j \to \coprod_{i \in I} A_i$.

1. Pour toute application $f : \coprod_{i \in I} A_i \to X$, et pour tout $i \in I$ on a $f \circ \iota_i : A_j \to X$.

(2) Pour toute application $f : \coprod_{i\in I} A_i \to X$, on a $(f \circ \iota_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

(3) Pour toute famille d'applications $(f_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, f_i : A_i \to X$, il existe une unique application $f : \coprod_{i\in I} A_i \to X$ telle que $\forall i \in I, f \circ \iota_i = f_i$.

(4) L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X) \\ f & \longmapsto & (f \circ \iota_i)_{i\in I} \end{pmatrix}$ est bijective dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

Démonstration

(1) Soit $f : \coprod_{i\in I} A_i \to X$. Soit $j \in I$.
On a alors $\iota_j : A_j \to \coprod_{i\in I} A_i$ par définition.
Donc $\boxed{f \circ \iota_j : A_j \to X}$ d'après la prop. 149 p. 188.

(2) Soit $f : \coprod_{i\in I} A_i \to X$.
Alors $\forall i \in I, f \circ \iota_i : A_i \to X$ d'après (1).
Donc $\forall i \in I, f \circ \iota_i \in \mathcal{A}(A_i \to X)$.
Donc $\boxed{(f \circ \iota_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)}$ d'après la prop. 225 p. 316.

(3) Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications indexée par I telle que $\forall i \in I, f_i : A_i \to X$.

• Existence de f.
Rappelons que pour tout $x \in \coprod_{i\in I} A_i$, il existe un unique $i \in I$ et un unique $a \in A_i$ tels que $x = (a; i)$ d'après la prop. 228 p. 326.
Nous avions alors noté $\pi_d : \coprod_{i\in I} A_i \to I$ l'application qui à $x \in \coprod_{i\in I} A_i$ associait cet unique $i \in I$.

Nous pouvons alors définir $f := \begin{pmatrix} \coprod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & f_{\pi_d(x)}(x) \end{pmatrix}$.

Autrement dit, on a $f := \begin{pmatrix} \coprod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & X \\ (a; i) & \longmapsto & f_i(a) \end{pmatrix}$.

Montrons que $\forall i \in I, f \circ \iota_i = f_i$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Montrons que $f \circ \iota_i = f_i$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in A_i$.

On a alors $\iota_i(x) = (x; i)$ par définition de ι_i.

Donc $(f \circ \iota_i)(x) \underset{\text{150 p. 190}}{=} f\big(\iota_i(x)\big) = f\big((x; i)\big) = f_i(x)$ par définition de f.

Donc $(f \circ \iota_i)(x) = f_i(x)$.

Donc si $x \in A_i$, alors $(f \circ \iota_i)(x) = f_i(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in A_i \implies (f \circ \iota_i)(x) = f_i(x)$.

Donc $\forall x \in A_i, (f \circ \iota_i)(x) = f_i(x)$.

Or, $f \circ \iota_i : A_i \to X$ d'après 1, et $f_i : A_i \to X$ par définition.

Donc $f \circ \iota_i = f_i$ d'après la prop. 139 p. 171.

Donc si $i \in I$, alors $f \circ \iota_i = f_i$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies f \circ \iota_i = f_i\big)$.

Donc $\forall i \in I, f \circ \iota_i = f_i$.

Donc f convient, d'où l'existence.

• Unicité de f.

Soit $g : \coprod_{i \in I} A_i \to X$ telle que $\forall i \in I, g \circ \iota_i = f_i$.

Montrons que $f = g$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \coprod_{i \in I} A_i$.

Il existe donc un unique $i \in I$ et un unique $a \in A_i$ tel que $x = (a; i)$.

Soient de tels a et i.

On a alors :

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a; i) \\ &= f_i(a) \text{ par définition de } f \\ &= (g \circ \iota_i)(a) \text{ par hypothèse} \\ &= g\big(\iota_i(a)\big) \text{ d'après la prop. 150 p. 190} \\ &= g\big((a; i)\big) \text{ par définition de } \iota_i \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc $f(x) = g(x)$.

Donc si $x \in \coprod_{i \in I} A_i$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \coprod_{i\in I} A_i \implies f(x) = g(x)\right)$.
Donc $\forall x \in \coprod_{i\in I} A_i, f(x) = g(x)$.
Or, $f : \coprod_{i\in I} A_i \to X$ et $g : \coprod_{i\in I} A_i \to X$.
Donc $f = g$ d'après la prop. 139 p. 171.
D'où l'unicité.

4

• Montrons que φ est injective.

Soit f un ensemble.

Supposons $f \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right)$.

Soit g un ensemble.

Supposons que $g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right)$.

Supposons que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

Notons donc $(h_i)_{i\in I} := \varphi(f) = \varphi(g)$.

Par définition de φ, on a $\varphi(f) = (f \circ \iota_i)_{i\in I}$ et $\varphi(g) = (g \circ \iota_i)_{i\in I}$.

Donc f et g sont deux applications $\coprod_{i\in I} A_i \to X$ telles que $\forall i \in I, f \circ \iota_i = h_i = g \circ \iota_i$.

Mais une telle application est unique d'après 3.

Donc $f = g$.

Donc si $\varphi(f) = \varphi(g)$, alors $f = g$.

Donc si $g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right)$, alors $\left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)$.

Donc $\forall g, \left(g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right) \implies \left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)\right)$.

Donc $\forall g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right), \left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)$.

Donc si $f \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right)$, alors $\forall g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right), \left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)$.

Donc $\forall f, \left(f \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right) \implies \left(\forall g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right), \left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)\right)\right)$.

Donc $\forall f \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right), \forall g \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right), \left(\varphi(f) = \varphi(g) \implies f = g\right)$.

Or, $\varphi : \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right) \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.
Donc φ est injective.

• Montrons que φ est surjective dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

On sait que $\varphi : \mathcal{A}\left(\coprod_{i\in I} A_i \to X\right) \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$ par définition, donc $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \prod_{i\in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit F un ensemble.

Supposons que $F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

Nous pouvons donc écrire $F = (f_i)_{i \in I}$ avec $\forall i \in I, f : A_i \to X$.

Alors il existe un unique application $f \in \mathcal{A}\left(\coprod_{i \in I} A_i \to X\right)$ telle que $\forall i \in I, f \circ \iota_i = f_i$ d'après 3.

Soit une telle f.

On a alors $\varphi(f) = (f \circ \iota_i)_{i \in I} = (f_i)_{i \in I} = F$.

Donc $\varphi(f) = F$.

Donc il existe au moins un $f \in \mathrm{dom}(\varphi)$ telle que $\varphi(f) = F$.

Donc $F \in \mathrm{im}(\varphi)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$, alors $F \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Donc $\forall F, \left(F \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X) \implies F \in \mathrm{im}(\varphi)\right)$.

Donc $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X) \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\mathrm{im}(\varphi) = \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc φ est surjective dans $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

Finalement, $\boxed{\varphi \text{ est bijective dans } \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)}$.

CQFD.

Chapitre 5

Relations d'équivalence et partitions

Note de l'auteur

Nous entrons dans un chapitre très utile pour la suite : les relations d'équivalences.
Les relations d'équivalences interviennent dès que deux objets se comportent de la même manière au vu de notre intérêt du moment. On peut alors les considérer comme un seul et même objet, et ce grâce aux classes d'équivalences. C'est notamment le cas lorsque l'on a trop d'éléments dans un ensemble et que l'on souhaite les trier. Tout cela rentre en jeu dans les constructions de nombreux ensembles comme les ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple.

Sommaire

1 Partitions **334**

2 Relations d'équivalences **350**

2.1 Relations d'équivalence 350

2.2 Clôtures 362

3 Classes d'équivalences et ensembles quotients **372**

1 Partitions

Définition 57 (Partitions indexées)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition indexée** de E si et seulement si les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$
2. Les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.
3. $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Proposition 229 (Partition indexée et ensemble non vide)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors E est non vide si et seulement si I est non vide.

Démonstration

Supposons que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est non vide.
Or, $I = \varnothing \implies \bigcup\limits_{i\in I} A_i = \varnothing$ d'après la prop. 201 p. 270.
Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \neq \varnothing \implies I \neq \varnothing$ par contraposition.
Or, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ car $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.
Donc comme E est non vide par hypothèse, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est non vide.
Donc I est non vide par modus ponens.

Donc si E est non vide, alors I est non vide.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que I est non vide.
Il existe donc au moins un $i_0 \in I$.
Soit un tel i_0.
On a alors $A_{i_0} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 202 p. 271.
Or $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ car $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

Donc $A_{i_0} \subseteq E$.

On a donc $E = \varnothing \implies A_{i_0} \subseteq \varnothing \underset{\text{11 p. 15}}{\implies} A_{i_0} = \varnothing$.

Donc $A_{i_0} \neq \varnothing \implies E \neq \varnothing$.

Or, $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$ car $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

En particulier, $A_{i_0} \neq \varnothing$.

Donc E est non vide par modus ponens.

Donc si I est non vide, alors E est non vide.

Finalement, $\boxed{E \text{ est non vide si et seulement si } I \text{ est non vide}}$.

CQFD.

Proposition 230 (Caractérisation des partitions indexées)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition indexée de E. Soit x un ensemble.

On a alors :

$$x \in E \iff \exists! i \in I, x \in A_i$$

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in E$.

• <u>Existence d'un tel i</u>.

On sait que $(A_i)_{i\in I}$ une partition indexée de E.

On a donc $E = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

On a donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

D'où l'existence.

Soit un tel $i \in I$.

• <u>Unicité de i</u>.

Soit $j \in J$ tel que $x \in A_j$.

Or, $x \in A_i$ par définition de i.

Donc $x \in A_i$ et $x \in A_j$.

Donc $x \in A_i \cap A_j$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $A_i \cap A_j \neq \varnothing$.

Or, $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$ puisque $(A_k)_{k\in I}$ est une partition indexée de E.

Donc $A_i \cap A_j \neq \varnothing \implies i = j$ par contraposition.

Donc $i = j$ par modus ponens.

D'où l'unicité.

Donc si $x \in E$, alors $\exists! i \in I, x \in A_i$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe un unique $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

En particulier, il existe au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Or, $E = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ puisque $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

Donc $x \in E$.

Donc si $\exists! i \in I, x \in A_i$, alors $x \in E$.

Finalement, $\boxed{x \in E \iff \exists! i \in I, x \in A_i}$.

CQFD.

Définition 58 (Partitions)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.

On dit que $\mathcal{E}$ est une **partition (non indexée)** de E si et seulement si les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A = E$.
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.
3. $\varnothing \notin \mathcal{E}$

Proposition 231 (Lien entre partitions et partitions indexées)

Soit E un ensemble. Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.

On a alors :

1. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors $\{A_i \mid i \in I\}$ est une partition de E.
2. Si $\mathcal{E}$ est une partition de E, alors la famille associée à $\mathcal{E}$ est une partition indexée de E.

Démonstration

1

Supposons que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.
Posons $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$.

• On a alors $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ puisque $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

• Soit B un ensemble.
Supposons que $B \in \mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$, on a $B \in \{A_i \mid i \in I\}$.
Il existe donc au moins un $i_B \in I$ tel que $B = A_{i_B}$.
Soit un tel i_B.
Soit C un ensemble.
Supposons que $C \in \mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{A} := \{A_i \mid i \in I\}$, on a $C \in \{A_i \mid i \in I\}$.
Il existe donc au moins un $i_C \in I$ tel que $C = A_{i_C}$.
Soit un tel i_C.
Supposons que $B \neq C$.
On a $i_B = i_C \implies A_{i_B} = A_{i_C} \implies B = C$.
Donc $B \neq C \implies i_B \neq i_C$ par contraposition.
Donc $i_B \neq i_C$ par modus ponens.
Donc $A_{i_B} \cap A_{i_C} = \varnothing$ puisque $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.
Donc $B \cap C = \varnothing$.
Donc si $B \neq C$, alors $B \cap C = \varnothing$.
Donc si $C \in \mathcal{A}$, alors $B \neq C \implies B \cap C = \varnothing$.
Donc $\forall C, \Big(C \in \mathcal{A} \implies \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)\Big)$.
Donc $\forall C \in \mathcal{A}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)$.
Donc si $B \in \mathcal{A}$, alors $\forall C \in \mathcal{A}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)$.
Donc $\forall B, \Big(B \in \mathcal{A} \implies \Big(\forall C \in \mathcal{A}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)\Big)\Big)$.
Donc $\forall B \in \mathcal{A}, \forall C \in \mathcal{A}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)$.

• Soit B un ensemble.
Supposons que $B \in \mathcal{A}$.
Comme $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$, on a $B \in \{A_i \mid i \in I\}$.
Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $B = A_i$.
Soit un tel i.

On a $A_i \neq \varnothing$ car $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E.

Donc $B \neq \varnothing$.

Donc si $B \in \mathcal{A}$, alors $B \neq \varnothing$.

Donc $\forall B, \big(B \in \mathcal{A} \implies B \neq \varnothing\big)$.

Donc $\forall B \in \mathcal{A}, B \neq \varnothing$.

Ainsi, on a $\bigcup \mathcal{A} = E$, on a $\forall B \in \mathcal{A}, \forall C \in \mathcal{A}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)$ et on a $\forall B \in \mathcal{A}, B \neq \varnothing$.

Donc comme $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$, $\boxed{\{A_i \mid i \in I\} \text{ est une partition de } E}$.

2

Supposons que $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Soit $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ la famille associée à $\mathcal{E}$.

• On a $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A = \bigcup\{A \mid A \in \mathcal{E}\} \underset{\text{194 p. 263}}{=} \bigcup \mathcal{E} = E$ car $\mathcal{E}$ est une partition de E.

• On a $\forall B \in \mathcal{E}, \forall C \in \mathcal{E}, \big(B \neq C \implies B \cap C = \varnothing\big)$ car $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc les termes de $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ sont deux à deux disjoints.

• On a $\forall B \in \mathcal{E}, B \neq \varnothing$ car $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc les termes de $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ sont tous non vides.

Ainsi, $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A = E$, les termes de $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ sont deux à deux disjoints et les termes de $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ sont tous non vides.

Donc $\boxed{(A)_{A\in\mathcal{E}} \text{ est une partition indexée de } E}$.

CQFD.

Proposition 232 (Partitions et ensemble non vide)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.

Si $\mathcal{E}$ est une partition de E, alors E est non vide si et seulement si $\mathcal{E}$ est non vide.

Démonstration

Supposons que $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Alors $(A)_{A\in\mathcal{E}}$, la famille associée à $\mathcal{E}$, est une partition indexée de E d'après la prop. 231 p. 336.

Donc comme l'ensemble des indices de $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ est $\mathcal{E}$, on a $\boxed{E \neq \varnothing \iff \mathcal{E} \neq \varnothing}$ d'après la prop. 229 p. 334.

. **CQFD**.

Proposition 233 (Caractérisation des partitions)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E}$ une partition de E. Soit x un ensemble.

On a alors :

$$x \in E \iff \exists! A \in \mathcal{E}, x \in A$$

Démonstration

Par définition, $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc la famille associée à $\mathcal{E}$ est une partition indexée de E d'après la prop. 231 p. 336.

Ainsi, $(A)_{A\in\mathcal{E}}$ est une partition indexée de E.

On a donc l'équivalence $\boxed{x \in E \iff \exists! A \in \mathcal{E}, x \in A}$ d'après la prop. 230 p. 335.

CQFD.

Proposition 234 (Partitions triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

1. $\big(\{x\}\big)_{x\in E}$ est une partition indexée de E.
   En particulier, $\{\{x\} \mid x \in E\}$ est une partition de E d'après la prop. 231 p. 336.
2. $\{E\}$ est une partition de E.

Démonstration

1.

- On a $\bigcup\limits_{x\in E} \{x\} = E$ d'après la prop. 204 p. 274.

- Montrons que les termes de $\big(\{x\}\big)_{x\in E}$ sont deux à deux disjoints.

  Soient $x \in E$ et $y \in E$.

  Supposons que $\{x\} = \{y\}$.

  Alors $x = y$ d'après la prop. 14 p. 18.

  Donc si $\{x\} = \{y\}$, alors $x = y$.

  Donc si $x \neq y$, alors $\{x\} \neq \{y\}$ par contraposition.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \neq y \implies \{x\} \neq \{y\}\big)$.

Donc les termes de $\big(\{x\}\big)_{x\in E}$ sont deux à deux disjoints.

• Montrons que $\forall x \in E, \{x\} \neq \varnothing$.

Soit $x \in E$.

Alors $x \in \{x\}$ par définition de $\{x\}$.

Donc $\{x\} \neq \varnothing$.

Donc $\forall x \in E, \{x\} \neq \varnothing$.

Ainsi, $\boxed{\big(\{x\}\big)_{x\in E} \text{ est une partition indexée de } E}$ par définition.

(2)

• On a $\displaystyle\bigcup_{A\in\{E\}} A = E$ d'après la prop. 201 p. 270.

•

Soient $A \in \{E\}$ et $B \in \{E\}$.

On a donc $A = E = B$ par définition de $\{E\}$.

Donc $A = B$.

On a donc $A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$.

Donc $\forall A \in \{E\}, \forall B \in \{E\}, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.

•

Soit $A \in \{E\}$.

Alors $A = E$.

Or, E est non vide par hypothèse.

Donc $A \neq \varnothing$.

Donc $\forall A \in \{E\}, A \neq \varnothing$.

Ainsi, $\boxed{\{E\} \text{ est une partition de } E}$.

CQFD.

Proposition 235 (Partition et image réciproque)

Soit f une application.

(1) Soit I un ensemble. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une partition indexée de $\mathrm{im}(f)$.

Alors $\big(f^{\leftarrow}(Y_i)\big)_{i\in I}$ est une partition indexée de $\mathrm{dom}(f)$.

En particulier, $\big\{f^{\leftarrow}(Y_i) \mid i \in I\big\}$ est une partition de $\mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 231 p. 336.

(2) En particulier, $\Big(f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)\Big)_{y\in\mathrm{im}(f)}$ est une partition indexée de $\mathrm{dom}(f)$.

En particulier, $\left\{f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in \mathrm{im}(f)\right\}$ est une partition de $\mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 231 p. 336.

Démonstration

1

• Montrons que $\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) = \mathrm{dom}(f)$.

$\boxed{\subseteq}$

On a $\forall i \in I, f^{\leftarrow}(Y_i) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ par définition de $f^{\leftarrow}$.

Donc $\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) \subseteq \mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 202 p. 271.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{dom}(f)$.

Alors $f(x) \in \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Or, $(Y_i)_{i\in I}$ est une partition de $\mathrm{im}(f)$ par définition.

Donc $\bigcup_{i\in I} Y_i = \mathrm{im}(f)$.

Donc comme $f(x) \in \mathrm{im}(f)$, on a $f(x) \in \bigcup_{i\in I} Y_i$.

Il existe donc au moins un $j \in I$ tel que $f(x) \in Y_j$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel j.

Comme $f(x) \in Y_j$, on a $x \in f^{\leftarrow}(Y_j)$ d'après la prop. 179 p. 234.

Or, $f^{\leftarrow}(Y_j) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$ d'après la prop. 202 p. 271.

Donc $x \in \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$.

Donc si $x \in \mathrm{dom}(f)$, alors $x \in \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$.

Donc $\forall x, \left(x \in \mathrm{dom}(f) \implies x \in \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)\right)$.

Donc $\mathrm{dom}(f) \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\bigcup_{i\in I} f^{\leftarrow}(Y_i) = \mathrm{dom}(f)$ par antisymétrie de l'inclusion.

• Les termes de $\left(f^{\leftarrow}(Y_i)\right)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints d'après la prop. 197 p. 265.

• Montrons que $\forall i \in I, f^{\leftarrow}(Y_i) \neq \varnothing$.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in I$.

On sait que $(Y_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de $\mathrm{im}(f)$.

Donc $\forall i \in I, Y_i \neq \varnothing$.

En particulier, $Y_j \neq \varnothing$.

Donc $f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing$ d'après la prop. 181 p. 236.

Donc si $j \in I$, alors $f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing$.

Donc $\forall j, \big(j \in I \implies f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing\big)$.

Donc $\forall j \in I, f^{\leftarrow}(Y_j) \neq \varnothing$.

Ainsi, $\boxed{\big(f^{\leftarrow}(Y_i)\big)_{i\in I} \text{ est une partition indexée de } \mathrm{dom}(f)}$.

(2) On sait que $\big(\{y\}\big)_{y\in \mathrm{im}(f)}$ est une partition indexée de $\mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 234 p. 339.

Donc $\boxed{\Big(f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)\Big)_{y\in \mathrm{im}(f)} \text{ est une partition indexée de } \mathrm{dom}(f)}$ d'après (1).

CQFD.

Proposition 236 (Partition induite par une union disjointe)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I, telle que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Alors $(A_i \times \{i\})_{i\in I}$ est une partition indexée de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

En particulier, $\{A_i \times \{i\} \mid i \in I\}$ est une partition de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 231 p. 336.

Démonstration

- Par définition de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$, on a bien $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times \{i\})$.

- Montrons que les termes de $(A_i \times \{i\})_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

  Soient i et j dans I.

  Supposons que $(A_i \times \{i\}) \cap (A_j \times \{j\}) \neq \varnothing$.

  Il existe donc au moins un $x \in (A_i \times \{i\}) \cap (A_j \times \{j\})$.

  Soit un tel x.

  On a donc $x \in A_i \times \{i\}$ et $x \in A_j \times \{j\}$ d'après la prop. 35 p. 42.

  Montrons que $\forall y, \forall k \in I, \big(y \in A_k \times \{k\} \implies \exists a_k \in A_k, y = (a_k; k)\big)$.

  Soit y un ensemble.

  Soit $k \in I$.

  Supposons que $y \in A_k \times \{k\}$.

  Il existe au moins un $a_k \in A_k$ et un $\ell \in \{k\}$ tels que $y = (a_k; \ell)$ par définition du produit cartésien.

  Soient de tels a_k et ℓ.

  Comme $\ell \in \{k\}$, on a $\ell = k$ par définition de $\{k\}$.

  Donc $y = (a_k; k)$.

Donc si $y \in A_k \times \{k\}$, alors il existe au moins un $a_k \in A_k$ tel que $y = (a_k; k)$.

Donc $\forall k \in I, \big(y \in A_k \times \{k\} \implies \exists a_k \in A_k, y = (a_k; k)\big)$.

Donc $\forall y, \forall k \in I, \big(y \in A_k \times \{k\} \implies \exists a_k \in A_k, y = (a_k; k)\big)$.

Comme $x \in A_i \times \{i\}$, il existe donc au moins un $a_i \in A_i$ tel que $x = (a_i; i)$.

Soit un tel a_i.

De même, comme $x \in A_j \times \{j\}$, il existe donc au moins un $a_j \in A_j$ tel que $x = (a_j; j)$.

Soit un tel a_j.

Ainsi, $x = (a_i; i)$ et $x = (a_j; j)$ donc $(a_i; i) = (a_j; j)$.

Donc $a_i = a_j$ et surtout $i = j$ d'après la prop. 62 p. 81.

Donc si $(A_i \times \{i\}) \cap (A_j \times \{j\}) \neq \varnothing$, alors $i = j$.

Donc si $i \neq j$, alors $(A_i \times \{i\}) \cap (A_j \times \{j\}) = \varnothing$ par contraposition.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in I, \big(i \neq j \implies (A_i \times \{i\}) \cap (A_j \times \{j\}) = \varnothing\big)$.

Donc les termes de $(A_i \times \{i\})_{i \in I}$ sont deux à deux disjoints.

• Montrons qu'aucun terme de $(A_i \times \{i\})_{i \in I}$ n'est vide.

Soit $i \in I$.

Alors $A_i \neq \varnothing$ par hypothèse, et $i \in \{i\}$ par définition de $\{i\}$, donc $\{i\} \neq \varnothing$.

Donc $A_i \times \{i\} \neq \varnothing$ d'après la prop. 66 p. 86.

Donc $\forall i \in I, A_i \times \{i\} \neq \varnothing$.

Donc aucun terme de $(A_i \times \{i\})_{i \in I}$ n'est vide.

Finalement, $\boxed{\big((A_i \times \{i\})_{i \in I}\big) \text{ est bien une partition indexée de } \coprod_{i \in I} A_i}$.

CQFD.

Proposition 237 (Applications qui se recollent et partitions)

Soient E, I et F trois ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Soit $(f_i)_{i \in I}$ une famille d'applications telle que $\forall i \in I, f_i : A_i \to F$.

1. Si $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ et si les termes de $(f_i)_{i \in I}$ se recollent deux à deux, alors $\bigcup_{i \in I} f_i$ est l'unique application $E \to F$ qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i \in I}$.

2. En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E, alors $\bigcup_{i \in I} f_i$ est l'unique application $E \to F$ qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i \in I}$.

Démonstration

(1) Supposons que $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ et que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

• Montrons que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application.

Par hypothèse, les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

Donc $\bigcup_{i\in I} f_i$ est une application d'après la prop. 210 p. 289.

De plus, d'après la même proposition, $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i \text{ prolonge tous les termes de } (f_i)_{i\in I}}$.

• Montrons que $\bigcup_{i\in I} f_i : E \to F$.

Pour cela, montrons tout d'abord que $\operatorname{dom}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) = E$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \operatorname{dom}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$.

Il existe donc au moins un y tel que $x \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) y$, et donc $(x;y) \in \bigcup_{i\in I} f_i$ d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel y.

Comme $(x;y) \in \bigcup_{i\in I} f_i$, il existe au moins un $i \in I$ tel que $(x;y) \in f_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i.

On a donc $(x;y) \in f_i$, donc $x f_i y$.

Il existe donc au moins un y tel que $x f_i y$.

Donc $x \in \operatorname{dom}(f_i)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\operatorname{dom}(f_i) = A_i$ par définition.

Donc $x \in A_i$.

Or, $A_i \subseteq \bigcup_{j\in I} A_j$ d'après la prop. 202 p. 271.

Donc $x \in \bigcup_{j\in I} A_j$.

Or, $\bigcup_{j\in I} A_j = E$ par hypothèse.

Donc $x \in E$.

Donc si $x \in \operatorname{dom}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$, alors $x \in E$.

Donc $\forall x, \left(x \in \operatorname{dom}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) \implies x \in E\right)$.

Donc $\operatorname{dom}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) \subseteq E$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Or, $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

Donc $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$.

Donc $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel $i \in I$.

On a $\mathrm{dom}(f_i) = A_i$ par définition.

Donc $x \in \mathrm{dom}(f_i)$.

Or, on a montré $\bigcup\limits_{j\in I} f_j$ prolonge tous les termes de $(f_j)_{j\in I}$.

En particulier, $\bigcup\limits_{j\in I} f_j$ prolonge f_i.

Donc $\mathrm{dom}(f_i) \subseteq \mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{j\in I} f_j\right)$ d'après la prop. 129 p. 155.

Donc $x \in \mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{j\in I} f_j\right)$.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right)$.

Donc $\forall x, \left(x \in E \implies x \in \mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right)\right)$.

Donc $E \subseteq \mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right)$ par définition de l'inclusion.

Ainsi, $\mathrm{dom}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right) = E$ par antisymétrie de l'inclusion.

Enfin, montrons que $\mathrm{im}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right) \subseteq F$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in \mathrm{im}\left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right)$.

Il existe donc au moins un x tel que $x \left(\bigcup\limits_{i\in I} f_i\right) y$, et donc $(x;y) \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$, d'après la prop. 81 p. 110.

Soit un tel x.

On a donc $(x;y) \in \bigcup\limits_{i\in I} f_i$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $(x;y) \in f_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i.

On a donc $(x;y) \in f_i$ donc $x f_i y$.

Il existe donc au moins un x tel que $x f_i y$.

Donc $y \in \mathrm{im}(f_i)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $f_i : A_i \to F$ par définition.

Donc $\mathrm{im}(f_i) \subseteq F$.

Donc $y \in F$.

Donc si $y \in \mathrm{im}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)$, alors $y \in F$.

Donc $\forall y, \left(y \in \mathrm{im}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) \implies y \in F\right)$.

Donc $\mathrm{im}\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right) \subseteq F$ par définition de l'inclusion.

Finalement, on a bien $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i : E \to F}$.

• Montrons que $\bigcup_{i\in I} f_i$ est unique.

Soit $g : E \to F$ qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Or, $\bigcup_{i\in I} A_i = E$ par hypothèse.

Donc donc $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$.

Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i.

On a alors $\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = f_i(x) = g(x)$ d'après la prop. 189 p. 250, car $\bigcup_{i\in I} f_i$ et g prolongent f_i par hypothèse.

Donc $\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = g(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $\left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \left(x \in E \implies \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = g(x)\right)$.

Donc $\forall x \in E, \left(\bigcup_{i\in I} f_i\right)(x) = g(x)$.

Or, $\bigcup_{i\in I} f_i : E \to F$ et $g : E \to F$.

Donc $\boxed{\bigcup_{i\in I} f_i = g}$ d'après la prop. 139 p. 171.

(2) Supposons que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E.

En particulier, on a $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

Il nous suffit donc de montrer que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux pour appliquer (1) et conclure.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Soit j un ensemble.

Supposons que $j \in J$.

On a alors ou bien $i = j$, ou bien $i \neq j$ d'après le principe du tiers exclu.

Si $i = j$, alors $f_i = f_j$ donc f_i et f_j se recollent.

Si $i \neq j$, alors $\mathrm{dom}(f_i) = A_i$ et $\mathrm{dom}(f_j) = A_j$ par définition.

Or, $(A_k)_{k \in I}$ est une partition indexée de E.

Donc $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Donc $\forall x \in A_i \cap A_j, f_i(x) = f_j(x)$.

Donc $\forall x \in \mathrm{dom}(f_i) \cap \mathrm{dom}(f_j), f_i(x) = f_j(x)$.

Donc f_i et f_j se recollent.

Dans les deux cas, f_i et f_j se recollent.

Donc si $j \in I$, alors f_i et f_j se recollent.

Donc $\forall j, \big(j \in I \implies (f_i \text{ et } f_j \text{ se recollent })\big)$.

Donc $\forall j \in I, f_i \text{ et } f_j$ se recollent .

Donc si $i \in I$, alors $\forall j \in I, f_i \text{ et } f_j$ se recollent .

Donc $\forall i, \Big(i \in I \implies \big(\forall j \in I, f_i \text{ et } f_j \text{ se recollent }\big)\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \forall j \in I, f_i \text{ et } f_j$ se recollent .

Donc les termes de $(f_i)_{i \in I}$ se recollent deux à deux.

CQFD.

Définition 59 (Recouvrement et sous-recouvrement d'un ensemble)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

1. On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **E-recouvrement** si et seulement si $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.
2. Dans ce cas-là, pour tout $J \subseteq I$, on dit que $(A_j)_{j \in J}$ est un **sous-E-recouvrement** de $(A_i)_{i \in I}$ si et seulement si $(A_j)_{j \in J}$ est aussi un E-recouvrement.

Proposition 238 (Partition indexée et recouvrement)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E, alors $(A_i)_{i \in I}$ est un E-recouvrement.

Démonstration

Supposons que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E.

Alors $\bigcup_{i \in I} A_i = E$ par définition.

En particulier, $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $\boxed{(A_i)_{i \in I} \text{ est un } E\text{-recouvrement}}$.

CQFD.

Proposition 239 (Recouvrement et applications qui coïncident)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un E-recouvrement.

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{dom}(f) = E = \mathrm{dom}(g)$.

1. Si $\forall i \in I, \forall x \in E \cap A_i, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
2. En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E, alors $\big(\forall i \in I, \forall x \in A_i, f(x) = g(x)\big) \implies f = g$.

Démonstration

Supposons que $\forall i \in I, \forall x \in E \cap A_i$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Par définition, $(A_i)_{i \in I}$ est un E-recouvrement.

Donc $E \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Donc $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$.

Il existe donc au moins un $i \in I$ tel que $x \in A_i$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel i.

On a donc $x \in E$ et $x \in A_i$.

Donc $x \in E \cap A_i$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $f(x) = g(x)$ par hypothèse.

Donc si $x \in E$, alors $f(x) = g(x)$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies f(x) = g(x)\big)$.

Donc $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Or, $\mathrm{dom}(f) = E = \mathrm{dom}(g)$.

Donc $\boxed{f = g}$ d'après la prop. 139 p. 171.

2 Supposons que $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E.

En particulier, $(A_i)_{i \in I}$ est un E-recouvrement d'après la prop. 238 p. 347.

Donc $\big(\forall i \in I, \forall x \in E \cap A_i, f(x) = g(x)\big) \implies f = g$ d'après 1.

Mais $\forall i \in I, A_i \subseteq E$ par définition d'une partition indexée.

Donc $\forall i \in I, E \cap A_i = A_i$ d'après la prop. 39 p. 49.

Donc $\boxed{\big(\forall i \in I, \forall x \in A_i, f(x) = g(x)\big) \implies f = g}$.
CQFD.

2 Relations d'équivalences

Définition 60 (Vocabulaire de relations binaires)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

1. On dit que $\mathcal{R}$ une relation binaire est une relation binaire **sur** E si et seulement si $\mathcal{R} \subseteq E^2$.
2. On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive sur** E si et seulement si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
3. On dit que $\mathcal{R}$ est **antiréflexive** si et seulement si $\forall x, \text{non}(x\mathcal{R}x)$.
4. On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.
5. On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si et seulement si $\forall x, \forall y, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x = y\Big)$.
6. On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Attention !

L'antiréfléxivité n'est pas le contraire de la réflexivité : pour que $\mathcal{R}$ ne soit pas réflexive sur E, il suffit qu'un seul élément x de E ne vérifie pas $x\mathcal{R}x$.

De même, l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie : id_E est par exemple à la fois symétrique et antisymétrique.

2.1 Relations d'équivalence

Proposition 240 (Relation symétrique et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Les assertions suivantes sont équivalences :

1. $\mathcal{R}$ est symétrique.
2. $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$
3. $\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}$

Démonstration

Démontrons les implications suivantes 1 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 3 $\Rightarrow$ 1.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

On a alors $x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est symétrique par hypothèse.

Or, $y\mathcal{R}x \iff x{}^t\mathcal{R}y$ par définition de ${}^t\mathcal{R}$.

Donc $x\mathcal{R}y \iff x{}^t\mathcal{R}y$ par transitivité de l'équivalence.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x{}^t\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x{}^t\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$ d'après la prop. 74 p. 100.

Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \text{ est symétrique, alors } \mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$

Supposons que $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R}$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc $\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}$.

Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}, \text{ alors } \mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$

Supposons que $\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}$.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$.

On a donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}$ par hypothèse.

Donc $(x; y) \in {}^t\mathcal{R}$ par définition de l'inclusion.

Donc $x{}^t\mathcal{R}y$.

Donc $y\mathcal{R}x$ d'après la prop. 93 p. 124.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Donc $\boxed{\text{si } \mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}, \text{ alors } \mathcal{R} \text{ est symétrique}}$.

CQFD.

Proposition 241 (Relation transitive et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

Démonstration

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x\,{}^t\mathcal{R}\,y$ et $y\,{}^t\mathcal{R}\,z$.

On a donc $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$ d'après la prop. 93 p. 124.

Donc $z\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Donc $z\mathcal{R}x$ par transitivité de $\mathcal{R}$.

Donc $x\,{}^t\mathcal{R}\,z$ d'après la prop. 93 p. 124.

Donc si $x\,{}^t\mathcal{R}\,y$ et $y\,{}^t\mathcal{R}\,z$, alors $x\,{}^t\mathcal{R}\,z$.

Donc $\forall z, \Big(\big(x\,{}^t\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}\,z\big) \implies x\,{}^t\mathcal{R}\,z\Big)$.

Donc $\forall y, \forall z, \Big(\big(x\,{}^t\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}\,z\big) \implies x\,{}^t\mathcal{R}\,z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x\,{}^t\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,{}^t\mathcal{R}\,z\big) \implies x\,{}^t\mathcal{R}\,z\Big)$.

Donc ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

Donc si $\mathcal{R}$ est transitive, alors ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

Alors ${}^t({}^t\mathcal{R})$ est transitive d'après $\boxed{\Rightarrow}$.

Or, ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ d'après la prop. 94 p. 126.

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc si ${}^t\mathcal{R}$ est transitive, alors $\mathcal{R}$ est transitive.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est transitive}}$.

CQFD.

Proposition 242 (Qualificatifs de relations et identité)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

1. $\mathcal{R}$ est réflexive sur E si et seulement si id_E est une restriction de $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.
3. $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.
   Autrement dit, il existe une partie F de E telle que $\mathcal{R} = \mathrm{id}_F$.
4. En particulier, $\mathcal{R}$ est symétrique, antisymétrique et réflexive sur E si et seulement si $\mathcal{R} = \mathrm{id}_E$.
   En particulier, id_E est symétrique, antisymétrique et réflexive.

Démonstration

1. Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Soient x et y deux ensembles.

Supposons que $x\mathrm{id}_E y$.

On a donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

De plus, $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 81 p. 110.

Or, $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $x \in E$.

On sait que $\mathcal{R}$ est réflexive sur E par hypothèse.

Donc $x\mathcal{R}x$ car $x \in E$.

Donc $x\mathcal{R}y$ car $x = y$.

Donc si $x\mathrm{id}_E y$, alors $x\mathcal{R}y$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathrm{id}_E y \implies x\mathcal{R}y\big)$.

Donc $\mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R}$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc id_E est une restriction de $\mathcal{R}$.

Donc si $\mathcal{R}$ est réflexive sur E, alors id_E est une restriction de $\mathcal{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que id_E est une restriction de $\mathcal{R}$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a alors $x\mathrm{id}_E x$ d'après la prop. 78 p. 106.

Or, id_E est une restriction de $\mathcal{R}$ par hypothèse.

Donc $x\mathcal{R}x$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc si $x \in E$, alors $x\mathcal{R}x$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Donc si id_E est une restriction de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \text{ si et seulement si } \mathrm{id}_E \text{ est une restriction de } \mathcal{R}}$.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x(\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R})y$.

On a donc $x\mathcal{R}y$ et $x{}^t\mathcal{R}y$ d'après la prop. 122 p. 150.

Comme $x{}^t\mathcal{R}y$, on a $y\mathcal{R}x$ par définition de ^{t}.

Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Or, $\mathcal{R}$ est antisymétrique par hypothèse.

Donc $x = y$.

On a $x\mathcal{R}y$ donc $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Or, $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, donc $\mathcal{R} \subseteq E^2$.

Donc $(x; y) \in E^2$ donc $x \in E$ et $y \in E$ d'après la prop. 65 p. 85.

Or, on a dit que $x = y$, donc $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $x(\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R})y$, alors $x\mathrm{id}_E y$.

Donc $\forall y, \Big(x(\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R})y \implies x\mathrm{id}_E y\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \Big(x(\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R})y \implies x\mathrm{id}_E y\Big)$.

Donc $\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E d'après la prop. 128 p. 154.

Donc si $\mathcal{R}$ est antisymétrique, alors $\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et que $y\mathcal{R}x$.

Comme $y\mathcal{R}x$, on a $x{}^t\mathcal{R}y$ par définition de ${}^t\mathcal{R}$.

Ainsi, on a $x\mathcal{R}y$ et $x{}^t\mathcal{R}y$.

Donc $x\big(\mathcal{R}\cap{}^t\mathcal{R}\big)y$ d'après la prop. 122 p. 150.

Or, $\mathcal{R}\cap{}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E par hypothèse.

Donc $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc $x=y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $x\mathcal{R}y$ et que $y\mathcal{R}x$, alors $x=y$.

Donc $\forall y, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x=y\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x=y\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Donc si $\mathcal{R}\cap{}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E, alors $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } \mathcal{R}\cap{}^t\mathcal{R} \text{ est une restriction de } \mathrm{id}_E}$.

3 Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique.

Comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique, on a $\mathcal{R}\cap{}^t\mathcal{R}\subseteq\mathrm{id}_E$ d'après 2.

Comme $\mathcal{R}$ est symétrique, on a $\mathcal{R}={}^t\mathcal{R}$ d'après la prop. 240 p. 350.

On a donc $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}\subseteq\mathrm{id}_E$.

Or, $\mathcal{R}\cap\mathcal{R}=\mathcal{R}$ d'après la prop. 37 p. 45.

Donc $\mathcal{R}\subseteq\mathrm{id}_E$.

Donc $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.

Donc si $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique, alors $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.

Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$.

Or, $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E par hypothèse.

Donc $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc $x=y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Or, on a $x\mathcal{R}y$.

Donc $y\mathcal{R}x$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

Montrons que $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$.

Or, $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E par hypothèse.

Donc $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 128 p. 154.

Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$.

Donc $\forall y, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x = y\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\big) \implies x = y\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Ainsi, $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique.

Donc si $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E, alors $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique.

Finalement, $\boxed{\mathcal{R} \text{ est symétrique et antisymétrique si et seulement si } \mathcal{R} \text{ est une restriction de } \mathrm{id}_E}$.

(4) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R} \text{ est symétrique} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \quad \text{et} \quad \mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \\
\iff\ & \mathcal{R} \subseteq \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ \mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \text{ d'après (3)} \\
\iff\ & \mathcal{R} \subseteq \mathrm{id}_E \ \text{ et } \ \mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R} \text{ d'après (1)} \\
\iff\ & \mathcal{R} = \mathrm{id}_E \text{ par antisymétrie de l'inclusion}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est symétrique, antisymétrique et réflexive sur } E \text{ si et seulement si } \mathcal{R} = \mathrm{id}_E}$.

CQFD.

Proposition 243 (Relation réflexive et transposée)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

(1) $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.

(2) $\mathcal{R}$ est réflexive sur E si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Démonstration

1

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est une relation binaire sur } E \\
\iff & \mathcal{R} \subseteq E^2 \\
\iff & \mathcal{R} \subseteq E \times E \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \subseteq {}^t(E \times E) \text{ d'après la prop. 130 p. 157} \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \subseteq E \times E \text{ d'après la prop. 97 p. 128} \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \subseteq E^2 \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \text{ est une relation binaire sur } E
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation binaire sur } E \text{ si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est une relation binaire sur } E}$.

2

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \\
\iff & \mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R} \text{ d'après la prop. 242 p. 353} \\
\iff & {}^t\mathrm{id}_E \subseteq {}^t\mathcal{R} \text{ d'après la prop. 130 p. 157} \\
\iff & \mathrm{id}_E \subseteq {}^t\mathcal{R} \text{ d'après la prop. 97 p. 128} \\
\iff & {}^t\mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \text{ d'après la prop. 242 p. 353}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E \text{ si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est réflexive sur } E}$.

CQFD.

Proposition 244 (Relation antisymétrique et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Démonstration

Posons $E := \bigcup\bigcup \mathcal{R}$, de sorte que l'on ait $\mathcal{R} \subseteq E^2$ d'après la prop. 73 p. 98, et donc $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \\
\iff\ & \mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R} \subseteq \mathrm{id}_E \text{ d'après la prop. 242 p. 353} \\
\iff\ & {}^t\mathcal{R} \cap \mathcal{R} \subseteq \mathrm{id}_E \text{ par commutativité de l'intersection} \\
\iff\ & {}^t\mathcal{R} \cap {}^t\left({}^t\mathcal{R}\right) \text{ par involution du passage à la transposée} \\
\iff\ & {}^t\mathcal{R} \text{ est antisymétrique d'après la prop. 242 p. 353}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est antisymétrique si et seulement si } {}^t\mathcal{R} \text{ est antisymétrique}}$.
CQFD.

Définition 61 (Relations d'équivalences)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** sur E si et seulement si les 3 assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.
2. $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

Proposition 245 (Relations d'équivalences triviales)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

1. id_E est une relation d'équivalence sur E.
2. E^2 est une relation d'équivalence sur E.
   On dit que id_E et E^2 sont les relations d'équivalence **triviales** sur E.
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R} \subseteq E^2$.

Démonstration

1

- id_E est réflexive.

  Soit x un ensemble.

  Supposons que $x \in E$.

  Or, $E = \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$ d'après la prop. 83 p. 113.

Donc $x \in \mathrm{dom}(\mathrm{id}_E)$.

Or, id_E est une application d'après la prop. 143 p. 178.

Nous pouvons donc poser $y := \mathrm{id}_E(x)$.

On a alors $x\mathrm{id}_E y$ par définition de y.

Or $\mathrm{id}_E(x) = x$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $y = x$.

Donc $x\mathrm{id}_E x$.

Donc si $x \in E$, alors $x\mathrm{id}_E x$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x\mathrm{id}_E x\big)$.

Donc $\forall x \in E, x\mathrm{id}_E x$.

• id_E est symétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathrm{id}_E y$.

On a alors $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc $y\mathrm{id}_E x$.

Donc si $x\mathrm{id}_E y$, alors $y\mathrm{id}_E x$.

Donc $\forall y, \big(x\mathrm{id}_E y \implies y\mathrm{id}_E x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathrm{id}_E y \implies y\mathrm{id}_E x\big)$.

• id_E est transitive.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x\mathrm{id}_E y$ et $y\mathrm{id}_E z$.

On a alors $x = y$ et $y = z$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc $x = z$.

Donc $x\mathrm{id}_E z$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $x\mathrm{id}_E y$ et $y\mathrm{id}_E z$, alors $x\mathrm{id}_E z$.

Donc $\forall z, \Big(\big(x\mathrm{id}_E y \text{ et } y\mathrm{id}_E z\big) \implies x\mathrm{id}_E z\Big)$.

Donc $\forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathrm{id}_E y \text{ et } y\mathrm{id}_E z\big) \implies x\mathrm{id}_E z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathrm{id}_E y \text{ et } y\mathrm{id}_E z\big) \implies x\mathrm{id}_E z\Big)$.

Ainsi, id_E est réflexive sur E, symétrique et transitive.

On peut donc dire que $\boxed{\mathrm{id}_E \text{ est une relation d'équivalence sur } E}$.

2

• Montrons que E^2 est réflexive sur E.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Alors $(x;x) \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x(E^2)x$.

Donc si $x \in E$, alors $x(E^2)x$.

Donc $\forall x, \big(x \in E \implies x(E^2)x\big)$.

Donc $\forall x \in E, x(E^2)x$.

Donc E^2 est réflexive sur E.

• Montrons que E^2 est symétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x(E^2)y$.

On a alors $(x;y) \in E^2$.

Donc $(y;x) \in E^2$ d'après la prop. 91 p. 123.

Donc $y(E^2)x$.

Donc si $x(E^2)y$, alors $y(E^2)x$.

Donc $\forall y, \big(x(E^2)y \implies y(E^2)x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x(E^2)y \implies y(E^2)x\big)$.

Donc E^2 est symétrique.

• Montrons que E^2 est transitive.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x(E^2)y$ et $y(E^2)z$.

On a donc $(x;y) \in E^2$ et $(y;z) \in E^2$.

Donc $x \in E$ et $y \in E$ et $z \in E$ d'après la prop. 65 p. 85.

En particulier, $x \in E$ et $z \in E$.

Donc $(x;z) \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x(E^2)z$.

Donc si $x(E^2)y$ et $y(E^2)z$, alors $x(E^2)z$.

Donc $\forall z, \Big(\big(x(E^2)y \text{ et } y(E^2)z\big) \implies x(E^2)z\Big)$.

Donc $\forall y, \forall z, \Big(\big(x(E^2)y \text{ et } y(E^2)z\big) \implies x(E^2)z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x(E^2)y \text{ et } y(E^2)z\big) \implies x(E^2)z \Big)$.
Donc E^2 est transitive.

Ainsi, E^2 est réflexive dans E, symétrique et transitive.
Donc $\boxed{E^2 \text{ est une relation d'équivalence sur } E}$.

3

Supposons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
En particulier, $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.
Donc $\boxed{\mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R}}$ d'après la prop. ?? p. ??.
De plus, $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \subseteq E^2}$ par définition.
CQFD.

Proposition 246 (Relation d'équivalence induite par une application)

Soit E un ensemble. Soit f une application telle que $\mathrm{dom}(f) = E$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y) \Big)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
On dit que c'est **la relation d'équivalence induite** par f.

Démonstration

• On a $\forall x \in E, f(x) = f(x)$ par réflexivité de l'égalité.
Donc $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$ par définition de $\mathcal{R}$.
Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est réflexive sur E}}$.

• Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique.
Soit x un ensemble.
Soit y un ensemble.
Supposons que $x\mathcal{R}y$.
On a donc $f(x) = f(y)$ par définition de $\mathcal{R}$ (et $x \in E$ et $y \in E$).
Donc $f(y) = f(x)$ par symétrie de l'égalité (et $x \in E$ et $y \in E$).
Donc $y\mathcal{R}x$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est symétrique}}$.

• Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

On a donc $f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)$ par définition de $\mathcal{R}$ (et $x \in E$, $y \in E$ et $z \in E$).

Donc $f(x) = f(z)$ par transitivité de l'égalité (et $x \in E$ et $z \in E$).

Donc $x\mathcal{R}z$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Donc $\forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est transitive}}$.

Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive sur E, $\mathcal{R}$ est symétrique et $\mathcal{R}$ est transitive.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } E}$ par définition.

CQFD.

2.2 Clôtures

Proposition 247 (Qualificatifs des relations et stabilité par intersection)

1. Pour tout ensemble F, notons $RB(F)$ l'assertion « F *est une relation binaire* ».
L'assertion RB dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

2. Soit E un ensemble. Pour tout ensemble F, notons $R_E(F)$ l'assertion « F *est une relation binaire réflexive sur* E ». L'assertion R_E dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

3. Pour tout ensemble F, notons $S(F)$ l'assertion « F *est une relation binaire symétrique* ».
L'assertion S dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

④ Pour tout ensemble F, notons $AS(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire antisymétrique* ». L'assertion AS dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

⑤ Pour tout ensemble F, notons $T(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire transitive* ». L'assertion T dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

⑥ Soit E un ensemble. Pour tout ensemble F, notons $Q_E(F)$ l'assertion « *F est une relation d'équivalence sur E* ». L'assertion Q_E dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

Démonstration

①

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, RB(A)$.

Ainsi, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des relations binaires.

Montrons que $RB\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \bigcap \mathcal{E}$.

On sait que $\mathcal{E}$ est non vide par définition.

Il existe donc au moins un $C \in \mathcal{E}$.

Soit un tel C.

Comme $c \in \bigcap \mathcal{E}$, on a $\forall A \in \mathcal{E}, c \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

En particulier, on a donc $c \in C$.

Or, $\forall A \in \mathcal{E}, RB(A)$ par hypothèse.

En particulier, on a $RB(C)$.

Donc C est une relation binaire.

Donc tous les éléments de C sont des couples.

En particulier, c est un couple.

Donc si $c \in \bigcap \mathcal{E}$, alors c est un couple.

Donc $\forall c, (c \in \bigcap \mathcal{E} \implies c \text{ est un couple})$.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire.

Donc $RB\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, RB(A)$, alors $RB\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing, \big((\forall A \in \mathcal{E}, RB(A)) \implies RB\left(\bigcap \mathcal{E}\right)\big)$.
Donc $\boxed{RB \text{ est stable par intersection}}$.

2

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, R_E(A)$.

Montrons que $R_E\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire réflexive sur E.

• Pour commencer, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire sur E.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E} \subseteq E^2$.

Soit c un ensemble.

Supposons que $c \in \bigcap \mathcal{E}$.

On a donc $\forall A \in \mathcal{E}, c \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

Or, $\mathcal{E}$ est non vide par hypothèse.

Il existe donc au moins un $B \in \mathcal{E}$.

Soit un tel B.

On a donc $c \in B$.

Or, $\forall A \in \mathcal{E}, R_E(A)$ par hypothèse.

En particulier, on a $R_E(B)$.

Donc B est une relation binaire réflexive sur E par définition de R_E.

En particulier, B est une relation binaire sur E.

Donc $B \subseteq E^2$.

Or, $c \in B$, donc $c \in E^2$.

Donc si $c \in \bigcap \mathcal{E}$, alors $c \in E^2$.

Donc $\forall c, (c \in \bigcap \mathcal{E} \implies c \in E^2)$.

Donc $\bigcap \mathcal{E} \subseteq E^2$ par définition de l'inclusion.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire sur E.

• Montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est réflexive sur E.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit $B \in \mathcal{E}$.

On a $\forall A \in \mathcal{E}, R_E(A)$ par hypothèse.

En particulier, on a $R_E(B)$.

Donc B est réflexive sur E.

Donc $\forall y \in E, yBy$.

En particulier, on a xBx.

Donc $(x;x) \in B$.

Donc $\forall B \in \mathcal{E}, (x;x) \in B$.

Donc $(x;x) \in \bigcap \mathcal{E}$ d'après la prop. 32 p. 39.

Donc $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

Donc si $x \in E$, alors $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

Donc $\forall x, (x \in E \implies x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x)$.

Donc $\forall x \in E, x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est réflexive sur E.

Donc $R_E \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ par définition de R_E.

Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, R_E(A)$, alors $R_E \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing \left(\left(\forall A \in \mathcal{E}, R_E(A)\right) \implies R_E \left(\bigcap \mathcal{E}\right)\right)$.

Donc $\boxed{R_E \text{ est stable par intersection}}$.

3

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, S(A)$.

Montrons que $S \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire symétrique.

Par définition de S, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont donc des relations binaires symétriques.

En particulier, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des relations binaires.

Or, le fait d'être une relation binaire est stable par intersection d'après 1.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que l'on a $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$.

On a donc $(x;y) \in \bigcap \mathcal{E}$.

Donc $\forall A \in \mathcal{E}, (x;y) \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

Soit $A \in \mathcal{E}$.

On a donc $(x;y) \in A$.

Donc xAy.

Or, on a $S(A)$ par hypothèse.

Donc A est symétrique.

Donc yAx.

Donc $(y;x) \in A$.

Donc $\forall A \in \mathcal{E}, (y;x) \in A$.

Donc $(y;x) \in \bigcap \mathcal{E}$ d'après la prop. 32 p. 39.

Donc $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

Donc si $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$, alors $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

Donc $\forall y, (x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \implies y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x)$.

Donc $\forall x, \forall y, (x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \implies y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x)$.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est symétrique.

Donc $S \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ par définition de S.

Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, S(A)$, alors $S \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing, \left(\left(\forall A \in \mathcal{E}, S(A)\right) \implies S \left(\bigcap \mathcal{E}\right)\right)$.

Donc $\boxed{S \text{ est stable par intersection}}$.

4

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, AS(A)$.

Montrons que $AS \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire antisymétrique.

Par définition de AS, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont donc des relations binaires antisymétriques.

En particulier, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des relations binaires.

Or, le fait d'être une relation binaire est stable par intersection d'après 1.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$ et $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$.

On a donc $(x;y) \in \bigcap \mathcal{E}$ et $(y;x) \in \bigcap \mathcal{E}$.

On a donc $\forall A \in \mathcal{E}, (x;y) \in A$ et $\forall A \in \mathcal{E}, (y;x) \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

Par définition, $\mathcal{E}$ est non vide.

Il existe donc au moins un $B \in \mathcal{E}$.

Soit un tel B.

On a donc $(x;y) \in B$ et $(y;x) \in B$.

On a donc xBy et yBx.

Or, $\forall A \in \mathcal{E}, AS(A)$ par hypothèse.

En particulier $AS(B)$.

Donc B est antisymétrique.

Donc $x = y$.

Donc si $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$ et $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x$, alors $x = y$.

Donc $\forall y, \left(\left(x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \text{ et } y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x\right) \implies x = y\right)$.

Donc $\forall x, \forall y, \left(\left(x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \text{ et } y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) x\right) \implies x = y\right)$.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est antisymétrique.

Donc $AS\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ par définition de AS.

Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, AS(A)$, alors $AS\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing, \left(\left(\forall A \in \mathcal{E}, AS(A)\right) \implies AS\left(\bigcap \mathcal{E}\right)\right)$.

Donc $\boxed{AS \text{ est stable par intersection}}$.

5

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide.

Supposons que $\forall A \in \mathcal{E}, T(A)$.

Montrons que $T\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Autrement dit, montrons que $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire transitive.

Par définition de T, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont donc des relations binaires transitives.

En particulier, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont des relations binaires.

Or, le fait d'être une relation binaire est stable par intersection d'après 1.

Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est une relation binaire.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$ et $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z$.

On a donc $(x; y) \in \bigcap \mathcal{E}$ et $(y; z) \in \bigcap \mathcal{E}$.

Donc $\forall A \in \mathcal{E}, (x; y) \in A$ et $\forall A \in \mathcal{E}, (y; z) \in A$ d'après la prop. 32 p. 39.

Soit $A \in \mathcal{E}$.

On a donc $(x; y) \in A$ et $(y; z) \in A$.

Donc xAy et yAz.

Or, $\forall B \in \mathcal{E}, T(B)$ par hypothèse.

En particulier, $T(A)$.

Donc A est transitive par définition de T.

Donc xAz.

Donc $(x; z) \in A$.

Donc $\forall A \in \mathcal{E}, (x; z) \in A$.
Donc $(x; z) \in \bigcap \mathcal{E}$ d'après la prop. 32 p. 39.
Donc $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z$.
Donc si $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y$ et $y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z$, alors $x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z$.
Donc $\forall z, ((x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \text{ et } y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z) \implies x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z)$.
Donc $\forall y, \forall z, ((x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \text{ et } y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z) \implies x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z)$.
Donc $\forall x, \forall y, \forall z, ((x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) y \text{ et } y \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z) \implies x \left(\bigcap \mathcal{E}\right) z)$.
Donc $\bigcap \mathcal{E}$ est transitive.
Donc $T \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$ par définition de T.
Donc si $\forall A \in \mathcal{E}, T(A)$, alors $T \left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.
Donc $\forall \mathcal{E} \neq \varnothing, \left(\left(\forall A \in \mathcal{E}, T(A)\right) \implies T \left(\bigcap \mathcal{E}\right)\right)$.
Donc $\boxed{T \text{ est stable par intersection}}$.

(6) Q_E est la conjonction de R_E, de S et de T par définition d'une relation d'équivalence sur E.
Or, ces trois assertions dépendant de paramètres sont stables par intersections d'après (2),(3) et (5).
Donc $\boxed{Q_E \text{ est stable par intersection}}$ d'après la prop. 55 p. 71.
CQFD.

Définition 62 (Clôtures d'une relation binaire)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
Pour tout ensemble F, soient :

- $\mathrm{ref}_E(F)$ l'assertion « *F est une relation réflexive sur E* ».
- $\mathrm{sym}(F)$ l'assertion « *F est une relation symétrique* ».
- $\mathrm{tra}(F)$ l'assertion « *F est une relation transitive* ».
- $\mathrm{equiv}_E(F)$ l'assertion « *F est une relation réflexive sur E* ».

Nous obtenons alors quatre assertions dépendant de paramètres, ref_E, sym, tra et equiv_E qui sont stables par intersection d'après la prop. 247 p. 362.
De plus, comme $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, on a $\mathcal{R} \subseteq E^2$.
Or, E^2 est une relation d'équivalence sur E d'après la prop. 245 p. 358, donc on a $\mathrm{equiv}_E(E^2)$, et donc $\mathrm{ref}_E(E^2)$, ainsi que $\mathrm{sym}(E^2)$ et $\mathrm{tra}(E^2)$.

Nous pouvons donc définir les relations engendrées suivantes :

(1) On appelle **clôture réflexive sur E de $\mathcal{R}$** la relation réflexive sur E définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$.
(2) On appelle **clôture symétrique de $\mathcal{R}$** la relation symétrique définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$.
(3) On appelle **clôture transitive de $\mathcal{R}$** la relation transitive définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{tra}}$.

④ On appelle **relation d'équivalence sur E engendrée par** $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur E définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{equi}_E}$.

Proposition 248 (Clôture réflexive d'une relation)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On a alors $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E} = \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$.
En particulier, on a les propriétés suivantes d'après la prop. 58 p. 74 :

- $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ est réflexive sur E.
- Si $\mathcal{S}$ est une relation réflexive sur E telle que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{S}$.

Démonstration

Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

• On sait déjà que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 26 p. 31.

• Par définition, $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.
On a donc $\mathcal{R} \subseteq E^2$.
De même, par définition de id_E, on a $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$.
Ainsi, on a $\mathcal{R} \subseteq E^2$ et $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$.
On a donc $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E \subseteq E^2$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ est une relation binaire sur E.
Or, $\mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 26 p. 31.
Donc $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ est réflexive sur E d'après la prop. 242 p. 353.

• Ainsi, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ et $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ est réflexive sur E.
Donc $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E} \subseteq \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 58 p. 74.

$\boxed{\supseteq}$

On sait que $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ est telle que $\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ et $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ est réflexive sur E d'après la prop. 58 p. 74.
Comme $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ est réflexive sur E, on a $\mathrm{id}_E \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ d'après la prop. 242 p. 353.
Ainsi, on a $\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ et $\mathrm{id}_E \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$.
Donc $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$ d'après la prop. 26 p. 31.

Ainsi, on a $\boxed{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E} = \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E}$ par antisymétrique de l'inclusion.
CQFD.

Proposition 249 (Clôture symétrique d'une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.
On a alors $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}} = \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$.
En particulier, on a les propriétés suivantes d'après la prop. 58 p. 74 :

- $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ est symétrique.
- Si $\mathcal{S}$ est une relation symétrique telle que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.

Démonstration

Raisonnons par double inclusion :

$\boxed{\subseteq}$

On sait déjà que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ d'après la prop. 26 p. 31.

De plus, on a ${}^t(\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}) \underset{\text{117 p. 145}}{=} {}^t\mathcal{R} \cup {}^t({}^t\mathcal{R}) \underset{\text{94 p. 126}}{=} {}^t\mathcal{R} \cup \mathcal{R} \underset{\text{27 p. 33}}{=} \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$.
Donc ${}^t(\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$.
Donc $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ est symétrique d'après la prop. 240 p. 350.

Ainsi, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ est symétrique.
Donc $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}} \subseteq \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ d'après la prop. 27 p. 33.

$\boxed{\supseteq}$

On a $\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ d'après la prop. 58 p. 74.
On a donc ${}^t\mathcal{R} \subseteq {}^t\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ d'après la prop. 130 p. 157.
Or $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ est symétrique d'après la prop. 58 p. 74.
Donc ${}^t\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}} = \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ d'après la prop. 240 p. 350.
Donc ${}^t\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$.

Ainsi, on a $\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ et ${}^t\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$.
Donc $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R} \subseteq \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$ d'après la prop. 26 p. 31.

Finalement, on a $\boxed{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}} = \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}}$ par antisymétrie de l'inclusion.
CQFD.

3 Classes d'équivalences et ensembles quotients

Définition 63 (Classe d'équivalence)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

• Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x pour $\sim$ l'ensemble $\{y \in E \mid x \sim y\}$.
On le note $\mathrm{cl}_\sim(x)$.

• Pour toute partie A de E, on dit que A est une classe d'équivalence de E pour $\sim$ si et seulement s'il existe au moins un $x \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.
On dit alors que x est un **représentant** de A.

Notation

A la place de $\mathrm{cl}_\sim(x)$, certains auteurs notent parfois $\overline{x}$, ou bien $\dot{x}$, ou encore $x[\sim]$.

Définition 64 (Ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
On appelle **ensemble quotient** de E par $\sim$ l'ensemble $\{A \in \mathscr{P}(E) \mid \exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)\}$.
On le note $E/\sim$.

Proposition 250 (Caractérisation d'un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Soit A un ensemble.
On a alors $A \in E/\sim \iff \exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.
En particulier, on a $E/\sim = \{\mathrm{cl}_\sim(x) \mid x \in E\}$.

Démonstration

Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \in E/\sim$.
Alors $\exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$ par définition de $E/\sim$.

Donc si $A \in E/\sim$, alors $\exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe au moins un $x \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Soit un tel x.

Par définition, on a $\mathrm{cl}_\sim(x) \subseteq E$.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(x) \in \mathscr{P}(E)$.

Donc $A \in \mathscr{P}(E)$.

Ainsi, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $\exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Donc $A \in E/\sim$ par définition.

Donc si $\exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$, alors $A \in E/\sim$.

Finalement, $\boxed{A \in E/\sim \iff \exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)}$.

CQFD.

Proposition 251 (Propriétés des classes d'équivalences)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

Soit A une classe d'équivalence de E pour $\sim$. Soient a et b dans E.

1. $a \in \mathrm{cl}_\sim(a)$. En particulier, une classe d'équivalence n'est jamais vide.
2. $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b) \iff a \sim b$.
3. a est un représentant de A si et seulement si $a \in A$

Démonstration

1

Par définition, on sait que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

En particulier, $\sim$ est réflexive sur E.

Donc comme $a \in E$, on a $a \sim a$.

Donc comme $a \in E$, on a $a \in \{x \in E \mid a \sim x\}$.

Donc $\boxed{a \in \mathrm{cl}_\sim(a)}$ par définition.

2

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$.

On a $b \in \mathrm{cl}_\sim(b)$ d'après 1.

Donc $b \in \mathrm{cl}_\sim(a)$.

Donc $a \sim b$ par définition.

Donc si $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$, alors $a \sim b$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $a \sim b$.

Montrons que $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$.

Montrons tout d'abord que $\forall c \in E, \forall d \in E, \big(c \sim d \implies \mathrm{cl}_\sim(c) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(d)\big)$.

Soient $c \in E$ et $d \in E$.

Supposons que $c \sim d$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in \mathrm{cl}_\sim(c)$.

On a donc $c \sim x$ par définition.

Or, $c \sim d$ par hypothèse.

Donc $d \sim c$ car $\sim$ est symétrique.

Ainsi, on a $d \sim c$ et $c \sim x$.

Donc $d \sim x$ car $\sim$ est transitive car $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Donc $x \in \mathrm{cl}_\sim(d)$ par définition.

Donc si $x \in \mathrm{cl}_\sim(c)$, alors $x \in \mathrm{cl}_\sim(d)$.

Donc $\forall x, \big(x \in \mathrm{cl}_\sim(c) \implies x \in \mathrm{cl}_\sim(d)\big)$.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(c) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(d)$ par définition de l'inclusion.

Donc si $c \sim d$, alors $\mathrm{cl}_\sim(c) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(d)$.

Donc $\forall c \in E, \forall d \in E, \big(c \sim d \implies \mathrm{cl}_\sim(c) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(d)\big)$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

On a $a \sim b$ donc $\mathrm{cl}_\sim(a) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(b)$ d'après $(\star)$.

On a $a \sim b$ donc $b \sim a$ car $\sim$ est symétrique.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(b) \subseteq \mathrm{cl}_\sim(a)$ d'après $(\star)$.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc si $a \sim b$, alors $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$.

Finalement, $\boxed{\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b) \iff a \sim b}$.

3

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que a est un représentant de A.

On a donc $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$ par définition.

Or, $a \in \mathrm{cl}_\sim(a)$ d'après 1.

Donc $a \in A$.

Donc si a est un représentant de A, alors $a \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $a \in A$.

On sait que A est une classe d'équivalence de E pour $\sim$.

Il existe donc au moins un $x \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$ par définition.

Soit un tel x.

Comme $a \in A$, on a $a \in \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Donc $x \sim a$ par définition.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(a)$ d'après 2.

Donc comme $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$, on a $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$.

Donc a est un représentant de A par définition.

Donc si $a \in A$, alors a est un représentant de A.

Finalement, $\boxed{a \text{ est un représentant de } A \text{ si et seulement si } a \in A}$.

CQFD.

Proposition 252 (Ensembles quotients triviaux)

Soit E un ensemble **non vide**.

On a alors :

1. Pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x) = \{x\}$.
   En particulier,$E/\mathrm{id}_E = \{\{x\} \mid x \in E\}$ d'après la prop. 250 p. 372.

2. Pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{cl}_{E^2}(x) = E$.
   En particulier, $E/E^2 = \{E\}$ d'après la prop. 250 p. 372.

Démonstration

1 Soit $x \in E$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in \mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x)$.

On a donc $x \mathrm{id}_E y$ par définition de $\mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x)$.

Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc $y \in \{x\}$ par définition de $\{x\}$.

Donc $\forall y \in \mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x), y \in \{x\}$.
Donc $\mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x) \subseteq \{x\}$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$
On a $x \in \mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x)$ d'après la prop. 251 p. 373.
Donc $\{x\} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Finalement, $\boxed{\mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x) = \{x\}}$ par antisymétrie de l'inclusion.

(2) Soit $x \in E$.
$\boxed{\subseteq}$
Par définition, $\mathrm{cl}_{E^2}(x) \subseteq E$.

$\boxed{\supseteq}$
Soit $y \in E$.
On a alors $(x; y) \in E^2$ d'après la prop. 65 p. 85.
Donc xE^2y.
Donc $y \in \mathrm{cl}_{E^2}(x)$ par définition.
Donc $\forall y \in E, y \in \mathrm{cl}_{E^2}(x)$.
Donc $E \subseteq \mathrm{cl}_{E^2}(x)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\mathrm{cl}_{E^2}(x) = E}$ par antisymétrie de l'inclusion.
CQFD.

Proposition 253 (Un ensemble quotient est une partition)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
Alors $E/\sim$ est une partition de E.

Démonstration

• Montrons que $\bigcup_{A \in E/\sim} A = E$.
$\boxed{\subseteq}$
On a $E/\sim \subseteq \mathscr{P}(E)$ par définition.
Donc $\forall A \in E/\sim, A \in \mathscr{P}(E)$.
Donc $\forall A \in E/\sim, A \subseteq E$.

Donc $\bigcup_{A \in E/\sim} A \subseteq E$ d'après la prop. 202 p. 271.

$\boxed{\supseteq}$

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Posons $B := \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Alors $B \in E/\sim$ par définition.

Donc $B \subseteq \bigcup_{A \in E/\sim} A$ d'après la prop. 202 p. 271.

Or, $x \in \mathrm{cl}_\sim(x)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $x \in B$.

Donc $x \in \bigcup_{A \in E/\sim} A$.

Donc si $x \in E$, alors $x \in \bigcup_{A \in E/\sim} A$.

Donc $\forall x, \left(x \in E \implies x \in \bigcup_{A \in E/\sim} A\right)$.

Donc $E \subseteq \bigcup_{A \in E/\sim} A$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\bigcup_{A \in E/\sim} A = E$ par antisymétrie de l'inclusion.

• Montrons que $\forall A \in E/\sim, \forall B \in E/\sim, \left(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\right)$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E/\sim$.

Il existe donc au moins un $a \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$ par définition.

Soit un tel a.

Soit B un ensemble.

Supposons que $B \in E/\sim$.

Il existe donc au moins un $b \in E$ tel que $B = \mathrm{cl}_\sim(b)$ par définition.

Soit un tel b.

Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $x \in A \cap B$.

Soit un tel x.

On a donc $x \in A$ et $x \in B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Or, $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$ et $B = \mathrm{cl}_\sim(b)$.

Donc $x \in \mathrm{cl}_\sim(a)$ et $x \in \mathrm{cl}_\sim(b)$.

Donc $a \sim x$ et $b \sim x$ par définition.

Donc $a \sim x$ et $x \sim b$ par symétrie de $\sim$.

Donc $a \sim b$ par transitivité de $\sim$.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $A = B$.

Donc si $A \cap B \neq \varnothing$, alors $A = B$.

Donc si $A \neq B$, alors $A \cap B = \varnothing$ par contraposition.

Donc si $B \in E/\sim$, alors $A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$.

Donc $\forall B, \Big(B \in E/\sim \implies \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)\Big)$.

Donc $\forall B \in E/\sim, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.

Donc si $A \in E/\sim$, alors $\forall B \in E/\sim, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.

Donc $\forall A, \Big(A \in E/\sim \implies \big(\forall B \in E/\sim, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall A \in E/\sim, \forall B \in E/\sim, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.

• Montrons que $\forall A \in E/\sim, A \neq \varnothing$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E/\sim$.

Il existe donc au moins un $a \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$.

Soit un tel a.

On a alors $a \in \mathrm{cl}_\sim(a)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $a \in A$.

Donc $A \neq \varnothing$.

Donc si $A \in E/\sim$, alors $A \neq \varnothing$.

Donc $\forall A, \big(A \in E/\sim \implies A \neq \varnothing\big)$.

Finalement, $\boxed{E/\sim \text{ est bien une partition de } E}$.

CQFD.

Proposition 254 (Relation d'équivalence issue d'une partition)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $\mathcal{E}$ une partition de E.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff \exists A \in \mathcal{E}, \big(x \in A \text{ et } y \in A\big)\Big)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est la **relation d'équivalence issue** de $\mathcal{E}$.

Démonstration

• Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Soit $x \in E$.

On sait que $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc $\bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A = E$.

Donc comme $x \in E$, on a $x \in \bigcup\limits_{A\in\mathcal{E}} A$.

Il existe donc au moins un $A \in \mathcal{E}$ tel que $x \in A$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc $\exists A \in \mathcal{E}, \big(x \in A \text{ et } x \in A\big)$.

Donc $x\mathcal{R}x$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.

Donc $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

• Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$.

Donc $\exists A \in \mathcal{E}, \big(x \in A \text{ et } y \in A\big)$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc $\exists A \in \mathcal{E}, \big(y \in A \text{ et } x \in A\big)$.

Donc $y\mathcal{R}x$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.

• Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Soit z un ensemble.

Supposons que $x\mathcal{R}y$ et que $y\mathcal{R}z$.

Comme $x\mathcal{R}y$, il existe au moins un $A \in \mathcal{E}$ tel que $x \in A$ et $y \in A$.

Soit un tel A.

Comme $y\mathcal{R}z$, il existe au moins un $B \in \mathcal{E}$ tel que $y \in B$ et $z \in B$.

Soit un tel B.

Ainsi, on a $y \in A$ et $y \in B$, donc $y \in A \cap B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $A \cap B \neq \varnothing$.

Comme $\mathcal{E}$ est une partition de E, on a $A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$.

Donc $A \cap B \neq \varnothing \implies A = B$ par contraposition.

Donc $A = B$ par modus ponens.

Or, $x \in A$ et $z \in B$, donc $x \in A$ et $z \in A$.

Il existe donc au moins un $A \in \mathcal{E}$ tel que $x \in A$ et $z \in A$.

Donc $x\mathcal{R}z$.

Donc si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$.

Donc $\forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\big(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\big) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Donc $\mathcal{R}$ est transitive.

Ainsi, $\mathcal{R}$ est réflexive sur E, symétrique et transitive.

Donc $\boxed{\mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } E}$.

CQFD.

Proposition 255 (Les relations d'équivalence et les partitions)

Soit E un ensemble.

Soit $\mathcal{A} := \{\mathcal{R} \subseteq E^2 \mid \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } E\}$.

Soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E) \mid \mathcal{E} \text{ est une partition de } E\}$.

Soient $f := \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \mathcal{R} & \longmapsto & E/\mathcal{R} \end{pmatrix}$ et $g := \begin{pmatrix} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{E} & \longmapsto & \text{La relation d'équivalence issue de } \mathcal{E} \end{pmatrix}$.

Alors f est une bijection dans $\mathcal{B}$, g est une bijection dans $\mathcal{A}$, et f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Démonstration

- Montrons que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{S}$ la relation d'équivalence issue de $E/\mathcal{R}$.

On a alors $f(\mathcal{R}) = E/\mathcal{R}$ et $g(E/\mathcal{R}) = \mathcal{S}$ par définition.

Donc $(g \circ f)(\mathcal{R}) \underset{\text{150 p. 190}}{=} g\big(f(\mathcal{R})\big) = g(E/\mathcal{R}) = \mathcal{S}$.

Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x\mathcal{R}y$.

Donc $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(y)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Posons ainsi $A := \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(y)$.

On a $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ et $y \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(y)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $x \in A$ et $y \in A$.

Or, $A \in E/\mathcal{R}$ par définition.

Donc il existe au moins un $A \in E/\mathcal{R}$ tel que $x \in A$ et $y \in A$.

Donc $x\mathcal{S}y$ par définition de $\mathcal{S}$.

Donc si $x\mathcal{R}y$, alors $x\mathcal{S}y$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x\mathcal{S}y$.

Il existe donc au moins un $A \in E/\mathcal{R}$ tel que $x \in A$ et $y \in A$.

Soit un tel A.

Comme $A \in E/\mathcal{R}$, A est une classe d'équivalence de E pour $\mathcal{R}$.

Or, $x \in A$ et $y \in A$.

Donc x et y sont des représentants de A d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ et $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(y)$ par définition.

Donc $\mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(y)$.

Donc $x\mathcal{R}y$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc si $x\mathcal{S}y$, alors $x\mathcal{R}y$.

Ainsi, $x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y$.

Donc $\forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$.

Donc $\mathcal{R} = \mathcal{S}$ d'après la prop. 74 p. 100.

Or, on a dit que $\mathcal{S} = (g \circ f)(\mathcal{R})$, et $\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $(g \circ f)(\mathcal{R}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$.

Donc $\forall \mathcal{R} \in \mathcal{A}, (g \circ f)(\mathcal{R}) = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}(\mathcal{R})$.

On a donc $\boxed{g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}}$ d'après la prop. 139 p. 171.

En effet, on a $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ par définition, donc $g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ d'après la prop. 149 p. 188.

On a de plus $\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ d'après la prop. 143 p. 178, d'où le résultat.

• Montrons que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$.

Soit $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$.

Posons $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence issue de $\mathcal{E}$, de sorte que $g(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$ par définition de g.

On a alors $f(\mathcal{R}) = E/\mathcal{R}$ par définition de f.

On a donc $(f \circ g)(\mathcal{E}) \underset{150\text{ p. }190}{=} f\big(g(\mathcal{E})\big) = f(\mathcal{R}) = E/\mathcal{R}$.

Il nous suffit donc de montrer que $\mathcal{E} = E/\mathcal{R}$.

Soit A un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $A \in \mathcal{E}$.

Par définition, $\mathcal{E} \in \mathcal{B}$ donc $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc comme $A \in \mathcal{E}$, on a $A \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $a \in A$.

Soit un tel a.

Montrons que $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A$.

On a donc $a \in A$ et $x \in A$.

Donc comme $A \in \mathcal{E}$, on a $\exists B \in \mathcal{E}, \big(a \in B \text{ et } x \in B\big)$.

Donc $a\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est issue de $\mathcal{E}$ par définition.

Donc $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$ par définition.

Donc si $x \in A$, alors $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

On a donc $a\mathcal{R}x$ par définition.

Or, $\mathcal{R}$ est issue de $\mathcal{E}$.

Il existe donc au moins un $B \in \mathcal{E}$ tel que $a \in B$ et $x \in B$.

Soit un tel B.

On a donc $a \in A$ par définition de a, et $a \in B$ par définition de B.

Donc $a \in A \cap B$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $A \cap B \neq \varnothing$.

Or, $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc comme $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$, on a $A \neq B \implies A \cap B = \varnothing$.

Donc $A \cap B \neq \varnothing \implies A = B$ par contraposition.

Donc $A = B$ par modus ponens.

Or, $x \in B$ par définition de B.

Donc $x \in A$.

Donc si $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$, alors $x \in A$.

Ainsi, $x \in A$ si et seulement si $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \iff x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)\big)$.

Donc $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

Il existe donc au moins un $b \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(b)$.

Donc $A \in E/\mathcal{R}$.

Donc si $A \in \mathcal{E}$, alors $A \in E/\mathcal{R}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $A \in E/\mathcal{R}$.

Il existe donc au moins un $a \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$ par définition.

Soit un tel a.

Or, $\mathcal{E}$ est une partition de E.

En particulier, $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{E}} B = E$.

Donc comme $a \in E$, on a $a \in \bigcup\limits_{B\in\mathcal{E}} B$.

Il existe donc au moins un $B \in \mathcal{E}$ tel que $a \in B$ d'après la prop. 200 p. 269.

Soit un tel B.

Montrons que $A = B$.

Soit x un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $x \in A$.

Comme $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$, on a donc $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$.

On a donc $a\mathcal{R}x$ par définition.

Or, $\mathcal{R}$ est issue de $\mathcal{E}$.

Il existe donc au moins un $C \in \mathcal{E}$ tel que $a \in C$ et $x \in C$.

Soit un tel C.

On a donc $a \in B$ par définition de B, et $a \in C$ par définition de C.

Donc $a \in B \cap C$ d'après la prop. 35 p. 42.

Donc $B \cap C \neq \varnothing$.

Mais $\mathcal{E}$ est une partition de E.

Donc comme $B \in \mathcal{E}$ et $C \in \mathcal{E}$, on a $B \neq C \implies B \cap C = \varnothing$.

Donc $B \cap C \neq \varnothing \implies B = C$ par contraposition.

Donc $B = C$ par modus ponens.

Or, $x \in C$ par définition de C.

Donc $x \in B$.

Donc si $x \in A$, alors $x \in B$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $x \in B$.

On a donc $a \in B$ et $x \in B$.

Comme $B \in \mathcal{E}$, il existe au moins un $C \in \mathcal{E}$ tel que $a \in C$ et $x \in C$.

Donc $a\mathcal{R}x$ car $\mathcal{R}$ est issue de $\mathcal{E}$.

Donc $x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$ par définition.

Donc $x \in A$ car $A = \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(a)$ par définition de a.

Donc si $x \in B$, alors $x \in A$.

Ainsi, $x \in A$ si et seulement si $x \in B$.

Donc $\forall x, \big(x \in A \iff x \in B\big)$.

Donc $A = B$ par définition de l'égalité.

Or, $B \in \mathcal{E}$ par définition de B.

Donc $A \in \mathcal{E}$.

Donc si $A \in E/\mathcal{R}$, alors $A \in \mathcal{E}$.

Ainsi, $A \in \mathcal{E}$ si et seulement si $A \in E/\mathcal{R}$.

Donc $\forall A, \big(A \in \mathcal{E} \iff A \in E/\mathcal{R}\big)$.

Donc $\mathcal{E} = E/\mathcal{R}$ par définition de l'égalité.

Or, on a dit que $(f \circ g)(\mathcal{E}) = E/\mathcal{R}$, et on a $\mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ d'après la prop. 143 p. 178.

Donc $(f \circ g)(\mathcal{E}) = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$.

Donc $\forall \mathcal{E} \in \mathcal{B}, (f \circ g)(\mathcal{E}) = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E})$.

Donc $\boxed{f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}}$ d'après la prop. 139 p. 171.

En effet, on a $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ et $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, donc $f \circ g : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ d'après la prop. 149 p. 188.

De plus, $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ d'après la prop. 143 p. 178, d'où le résultat.

Ainsi, on a $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$.

Or, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $g : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective dans } \mathcal{B},\ g \text{ est bijective dans } \mathcal{A} \text{ et } f \text{ et } g \text{ sont inverses l'une de l'autre}}$ d'après la prop. 166 p. 215.

CQFD.

Proposition 256 (Union des classes d'équivalences)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

On a alors $\displaystyle\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = E$.

Démonstration

$\boxed{\subseteq}$

Par définition, on a $\forall x \in E, \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq E$.

Donc $\displaystyle\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) \subseteq E$ d'après la prop. 202 p. 271.

$\boxed{\supseteq}$

On a $\forall x \in E, x \in \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $\forall x \in E, \{x\} \subseteq \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ d'après la prop. 16 p. 19.

Donc $\displaystyle\bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$ d'après la prop. 203 p. 273.

Or, $\displaystyle E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$ d'après la prop. 204 p. 274.

Donc $\displaystyle E \subseteq \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x)$.

Ainsi $\boxed{\bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = E}$ par antisymétrie de l'inclusion.

CQFD.

Définition 65 (Système de représentants des classes d'équivalence)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation binaire sur E. Soit X une partie de E.

On dit que X est un **système de représentants** de $\sim$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! a \in X, x \sim a$$

Théorème 5 (Axiome du choix version systèmes de représentants)

Soit E un ensemble.

Alors pour toute relation d'équivalence sur E, il existe au moins un système de représentants.

Démonstration

Si E est vide, alors $\varnothing$ convient comme système de représentants.

Supposons à présent E non vide.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

Alors $E/\sim$ est une partition de E d'après la prop. 253 p. 376.

Comme E est non vide, $E/\sim$ est aussi non vide d'après la prop. 232 p. 338.

D'après **l'axiome du choix**, il existe donc une fonction de choix $f : (E/\sim) \to \bigcup(E/\sim)$.

Soit une telle f.

Comme $E/\sim$ est une partition de E, on a $\bigcup(E/\sim) = \bigcup_{A \in E/\sim} A = E$.

Donc $f : (E/\sim) \to E$.

Posons alors $X := \mathrm{im}(f)$ et montrons que X est un système de représentants de $\sim$.

Soit $x \in E$.

• **Existence d'un représentant**.

Posons $A := \mathrm{cl}_{\sim}(x)$.

On a alors $A \in E/\sim$ par définition.

Comme f est une fonction de choix de $E/\sim$, on a $f(A) \in A$.

Posons $a := f(A)$.

Comme $a \in A$ et $A = \mathrm{cl}_{\sim}(x)$, on a $a \in \mathrm{cl}_{\sim}(x)$.

Donc $x \sim a$ par définition.

Or, $a = f(A)$ donc $a \in \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 167 p. 217, et donc comme $X = \mathrm{im}(f)$, on a $a \in X$.
D'où l'existence.

• **Unicité du représentant**.
Soit $b \in X$ tel que $x \sim b$.
On sait que $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(b)$ d'après la prop. 251 p. 373.
Or, $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$ par définition, donc $A = \mathrm{cl}_\sim(b)$.
On a $X = \mathrm{im}(f)$ par définition de X, et $b \in X$, donc $b \in \mathrm{im}(f)$.
Il existe donc au moins un $B \in E/\sim$ tel que $b = f(B)$ d'après la prop. 167 p. 217.
Soit un tel B, qui est donc une classe d'équivalence de E pour $\sim$.
Comme f est une fonction de choix de $E/\sim$, on a $f(B) \in B$.
Donc $b \in B$, et donc b est un représentant de B pour $\sim$ d'après la prop. 251 p. 373.
Donc $B = \mathrm{cl}_\sim(b)$.
Mais on a dit que $A = \mathrm{cl}_\sim(b)$, donc $A = B$.
Or, $b = f(B)$, donc $b = f(A)$.
Or, $a = f(A)$ par définition, donc $a = b$.
D'où l'unicité.

Donc $\forall x \in E, \exists! a \in X, x \sim a$.
Donc $\boxed{X \text{ est un système de représentants de } \sim}$.
CQFD.

Remarque :
On aurait pu prendre ce théorème comme axiome, et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version".
Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le systèmes d'axiomes considéré sans l'axiome du choix.

Idée de preuve

Supposons que pour tout ensemble E et tout relation binaire $\mathcal{R}$ sur E, il existe au moins un système de représentants X de $\mathcal{R}$.

Soit I un ensemble, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I telle que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.
Posons $E := \coprod_{i\in I} A_i$.
Alors $\{A_i \times \{i\} \mid i \in I\}$ est une partition de E d'après la prop. 236 p. 342.
Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur E issue de $\{A_i \times \{i\} \mid i \in I\}$.
Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff \exists i \in I, \big(x \in A_i \times \{i\} \text{ et } y \in A_i \times \{i\}\big)\Big)$.
Il existe au moins un système de représentant X de $\mathcal{R}$ par hypothèse.

Soit un tel X. Montrons que $\forall i \in I, \exists! a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Commençons par montrer que $\forall i \in I, \exists a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

Par définition, $A_i \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $b_i \in A_i$.

Soit un tel b_i.

On alors $(b_i; i) \in \coprod_{j \in I} A_j = E$ d'après la prop. 228 p. 326.

Posons $x_i := (b_i; i)$.

On a donc $x_i \in E$.

Comme $b_i \in A_i$ et $i \in \{i\}$, on a $(b_i; i) \in A_i \times \{i\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

Donc $x_i \in A_i \times \{i\}$.

Comme X est un système de représentants de $\mathcal{R}$, il existe unique $y \in X$ tel que $x_i \mathcal{R} y$.

Soit un tel y.

Comme $x_i \mathcal{R} y$, il existe au moins un $j \in I$ tel que $x_i \in A_j \times \{j\}$ et $y \in A_j \times \{j\}$.

Soit un tel j.

Mais $(A_k \times \{k\})_{k \in I}$ est une partition indexée de E d'après la prop. 236 p. 342.

Donc comme $x_i \in E$, l'élément $k \in I$ tel que $x_i \in A_k \times \{k\}$ est unique d'après la prop. 230 p. 335.

Donc comme i et j sont de tels k, on a $i = j$ par unicité.

Or, $y \in A_j \times \{j\}$.

Donc $y \in A_i \times \{i\}$.

Il existe donc au moins un $a_i \in A_i$ et un $k \in \{i\}$ tels que $y = (a_i; k)$.

Soient de tels a_i et k.

Comme $k \in \{i\}$, on a $k = i$ par définition de $\{i\}$.

Donc $y = (a_i; i)$.

Or, $y \in X$.

Donc $(a_i; i) \in X$.

Donc si $i \in I$, alors $\exists a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Donc $\forall i, \big(i \in I \implies \exists a_i \in A_i, (a_i; i) \in X\big)$.

Donc $\forall i \in I, \exists a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Montrons à présent qu'un tel a_i est unique.

Soit i un ensemble.

Supposons que $i \in I$.

D'après ce que l'on vient de montrer, il existe au moins un $a_i \in A_i$ tel que $(a_i; i) \in X$.

Soit un tel a_i.

Comme $a_i \in A_i$ et $i \in \{i\}$, on a $(a_i; i) \in A_i \times \{i\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

Soit $b_i \in A_i$ tel que $(b_i; i) \in X$.

Comme $b_i \in A_i$ et $i \in \{i\}$, on a $(b_i; i) \in A_i \times \{i\}$ d'après la prop. 65 p. 85.

Ainsi, on a $(a_i; i) \in A_i \times \{i\}$ et $(b_i; i) \in A_i \times \{i\}$.

Donc $(a_i; i)\mathcal{R}(b_i; i)$ par définition de $\mathcal{R}$.

Donc $(b_i; i)$ est un représentant de la classe de $(a_i; i)$ qui est dans X.

Mais $(a_i; i)\mathcal{R}(a_i; i)$ par réflexivité de $\mathcal{R}$.

Donc $(a_i; i)$ est aussi un représentant de la classe de $(a_i; i)$ qui est dans X.

Or, X est un système de représentant $\mathcal{R}$ donc de tels représentants sont uniques.

Donc $(a_i; i) = (b_i; i)$.

En particulier, on $a_i = b_i$ d'après la prop. 62 p. 81.

Donc si $i \in I$, alors $\exists! a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Donc $\forall i, \Big(i \in I \implies \exists! a_i \in A_i, (a_i; i) \in X\Big)$.

Donc $\forall i \in I, \exists! a_i \in A_i, (a_i; i) \in X$.

Posons alors $f : \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \bigcup\limits_{i \in I} A_i \\ i & \longmapsto & \text{l'unique } a_i \in A_i \text{ tel que } (a_i; i) \in X \end{array}\right)$.

Par définition, on a bien $f : I \to \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Or, $\forall i \in I, f(i) \in A_i$ par définition de f.

Donc f est une fonction de choix de $(A_i)_{i \in I}$.

Donc $f \in \prod\limits_{i \in I} A_i$.

Donc $\boxed{\prod\limits_{i \in I} A_i \neq \varnothing}$, et on en déduit l'axiome du choix version produit cartésien.

CQFD.

Proposition 257 (Partition indexée par un système de représentants)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

D'après **l'axiome du choix** (version système de représentants), il existe au moins un système de représentants X de $\sim$. Soit un tel X.

Alors $\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big)_{x \in X}$ est une partition indexée de E.

Démonstration

• Pour tout $x \in X$, on a $\mathrm{cl}_\sim(x) \subseteq E$ par définition.

Donc $\bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x) \subseteq E$ d'après la prop. 202 p. 271.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

Comme X est un système de représentants de $\mathcal{R}$, il existe un unique $z \in X$ tel que $y \sim z$.

Soit cet z.

Comme $y \sim z$, on a $z \sim y$ par symétrique de $\sim$.

Donc $y \in \mathrm{cl}_\sim(z)$ par définition.

Il existe donc au moins un $x \in X$ tel que $y \in \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Donc $y \in \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x)$ d'après la prop. 200 p. 269.

Donc si $y \in E$, alors $y \in \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Donc $\forall y, \left(y \in E \implies y \in \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x) \right)$.

Donc $E \subseteq \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x)$ par définition de l'inclusion.

Finalement, $\boxed{\bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x) = E}$ par antisymétrie de l'inclusion.

• Montrons que les termes de $\left(\mathrm{cl}_\sim(x)\right)_{x \in X}$ sont deux à deux disjoints.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in X$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in X$.

Supposons que $\mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) \neq \varnothing$.

Il existe donc au moins un $z \in \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y)$.

Soit un tel z.

On a donc $z \in \mathrm{cl}_\sim(x)$ et $z \in \mathrm{cl}_\sim(y)$ d'après la prop. 35 p. 42.

Comme $z \in \mathrm{cl}_\sim(x)$, on a $x \sim z$ par définition de $\mathrm{cl}_\sim(x)$.

Comme $z \in \mathrm{cl}_\sim(y)$, on a $y \sim z$ par définition de $\mathrm{cl}_\sim(y)$, et donc $z \sim y$ par symétrie de $\sim$.

Ainsi, on a $x \sim z$ et $z \sim y$, donc $x \sim y$ par transitivité de $\sim$.

Ainsi, $x \sim y$ et $y \in X$ donc y est l'unique élément de X qui est équivalent à X (puisque X est un système de représentant).

Mais on a $x \sim x$ par réflexivité de $\sim$, et $x \in X$ donc x est aussi l'unique élément de X qui est équivalent à x (puisque X est un système de représentant).

Donc $x = y$ par unicité.

Donc si $\mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) \neq \varnothing$, alors $x = y$.

Donc si $x \neq y$, alors $\mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing$ par contraposition.

Donc si $y \in X$, alors $\Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in X \implies \Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)\Big)$.

Donc $\forall y \in X, \Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)$.

Donc si $x \in X$, alors $\forall y \in X, \Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in X \implies \forall y \in X, \Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)\Big)$.

Donc $\forall x \in X, \forall y \in X, \Big(x \neq y \implies \mathrm{cl}_\sim(x) \cap \mathrm{cl}_\sim(y) = \varnothing\Big)$.

Donc $\boxed{\text{les termes de } \big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big)_{x \in X} \text{ sont deux à deux disjoints}}$.

• On sait déjà que tout classe d'équivalence est non vide d'après la prop. 251 p. 373.

En particulier, $\boxed{\forall x \in X, \mathrm{cl}_\sim(x) \neq \varnothing}$.

Ainsi, $\bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{cl}_\sim(x) = E$, les termes de $\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big)_{x \in X}$ sont deux à deux disjoints et $\forall x \in X, \mathrm{cl}_\sim(x) \neq \varnothing$.

Donc $\boxed{\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big)_{x \in X} \text{ est une partition indexée de } E}$ par définition.

CQFD.

Définition 66 (Projection canonique dans un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

On appelle **projection canonique sur $E/\sim$** l'application $\mathrm{cl}_\sim := \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & E/\sim \\ x & \longmapsto & \mathrm{cl}_\sim(x) \end{pmatrix}$.

Proposition 258 (Propriétés de la projection canonique sur un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

1. $\mathrm{cl}_\sim$ est surjective dans $E/\sim$, on a donc $\mathrm{cl}_\sim : E \twoheadrightarrow E/\sim$.
2. $\mathrm{cl}_\sim$ est injective si et seulement si $\sim = \mathrm{id}_E$.
3. $\sim$ est la relation d'équivalence sur E induite par l'application $\mathrm{cl}_\sim$.

Démonstration

1

Soit A un ensemble.

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & A \in \mathrm{im}(\mathrm{cl}_\sim) \\ \iff & \exists a \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(a) \text{ d'après la prop. 167 p. 217} \\ \iff & A \in E/\sim \text{ d'après la prop. 250 p. 372} \end{aligned}$$

Donc $A \in \mathrm{im}(\mathrm{cl}_\sim) \iff A \in E/\sim$.

Donc $\forall A, \Big(A \in \mathrm{im}(\mathrm{cl}_\sim) \iff A \in E/\sim\Big)$.

Donc $\mathrm{im}(\mathrm{cl}_\sim) = E/\sim$ par définition de l'égalité.

Donc $\boxed{\mathrm{cl}_\sim \text{ est surjective dans } E/\sim}$.

2

Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\mathrm{cl}_\sim$ est injective.

On sait que $\sim$ est réflexive sur E puisque $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.

Donc $\mathrm{id}_E \subseteq \sim$ d'après la prop. 242 p. 353.

Soit x un ensemble.

Soit y un ensemble.

Supposons que $x \sim y$.

On a donc $x \in E$ et $y \in E$ puisque $\sim$ est une relation binaire sur E.

De plus, on a $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Or, $\mathrm{cl}_\sim$ est injective par hypothèse.

Donc $x = y$.

Donc comme $x \in E$ et $y \in E$, on a $x\mathrm{id}_E y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $x \sim y$, alors $x\mathrm{id}_E y$.

Donc $\forall y, \Big(x \sim y \implies x\mathrm{id}_E y\Big)$.

Donc $\forall x, \forall y, \Big(x \sim y \implies x\mathrm{id}_E y\Big)$.

Donc $\sim \subseteq \mathrm{id}_E$ d'après la prop. 128 p. 154.

Finalement, on a $\sim = \mathrm{id}_E$ par antisymétrique de l'inclusion.

Donc si $\mathrm{cl}_\sim$ est injective, alors $\sim = \mathrm{id}_E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\sim = \mathrm{id}_E$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

Supposons que $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)$.

On a donc $x \sim y$ d'après la prop. 251 p. 373.

Or, $\sim = \mathrm{id}_E$ par hypothèse.

Donc $x \mathrm{id}_E y$.

Donc $x = y$ d'après la prop. 78 p. 106.

Donc si $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)$, alors $x = y$.

Donc si $y \in E$, alors $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y$.

Donc $\forall y, \Big(y \in E \implies \big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y\big)\Big)$.

Donc $\forall y \in E, \big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y\big)$.

Donc si $x \in E$, alors $\forall y \in E, \big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies \big(\forall y \in E, \big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies x = y\big)$.

Donc $\mathrm{cl}_\sim$ est injective par définition.

Donc si $\sim = \mathrm{id}_E$, alors $\mathrm{cl}_\sim$ est injective.

Finalement, $\boxed{\mathrm{cl}_\sim \text{ est injective si et seulement si } \sim = \mathrm{id}_E}$.

3 On a $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x \sim y \iff \mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)\Big)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $\boxed{\sim \text{ est la relation d'équivalence sur } E \text{ induite par l'application } \mathrm{cl}_\sim}$.

CQFD.

Théorème 6 (Théorème de factorisation (version équipotence))

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E telle que $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x \sim y \implies f(x) = f(y)\Big)$.

Alors :

1 Il existe une unique application $g : (E/\sim) \to F$ telle que $f = g \circ \mathrm{cl}_\sim$.

On peut représenter la situation par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{cl}_\sim"] & F \\ E/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Il s'agit de l'application $g = \begin{pmatrix} (E/\sim) & \longrightarrow & F \\ \mathrm{cl}_\sim(x) & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$.

Considérons à présent cette unique application g.

(2) g est injective si et seulement si $\forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)$.
Autrement dit, g est injective si et seulement si $\sim$ est la relation d'équivalence sur E issue de f.

(3) g est surjective dans F si et seulement si f est surjective dans F.

(4) g est bijective dans F si et seulement si :

(a) $\forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)$

(b) et f est surjective dans F

Démonstration

(1)

• Existence de g.

Par définition de $\sim$, on a $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x \sim y \implies f(x) = f(y)\Big)$.

On a donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \underset{\text{251 p. 373}}{\implies} x \sim y \implies f(x) = f(y)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y) \implies f(x) = f(y)\Big)$.

Ainsi, $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(\text{« } x \text{ et } y \text{ sont deux représentants d'une même classe »} \implies f(x) = f(y)\Big)$.

En particulier, $\forall A \in E/\sim, \forall x \in A, \forall y \in A, f(x) = f(y)$.

D'après l'axiome du choix (version systèmes de représentants), il existe au moins un système de représentant X de $\sim$. Soit un tel X.

On a donc $\forall A \in E/\sim, \exists! x \in X, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.

On peut donc définir l'application suivante :

$$g := \begin{pmatrix} (E/\sim) & \longrightarrow & F \\ A & \longmapsto & f(x) \text{ où } x \in E \text{ est l'unique } x \in X \text{ tel que } x \in A \end{pmatrix}.$$

Montrons que $g = \begin{pmatrix} (E/\sim) & \longrightarrow & F \\ \mathrm{cl}_\sim(x) & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que $\forall x \in E, g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Posons $A := \mathrm{cl}_\sim(x)$.

Soit y l'unique $y \in X$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(y)$.

On a donc $g(A) = f(y)$ par définition de g.

Mais comme $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)$, on a dit que $f(x) = f(y)$.

Donc $g(A) = f(x)$.

Donc comme $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$, on a $g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$.

Donc comme $\mathrm{cl}_\sim$ est surjective d'après la prop. 258 p. 390, on a $\boxed{g = \begin{pmatrix} (E/\sim) & \longrightarrow & F \\ \mathrm{cl}_\sim(x) & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}}$.

Montrons que $f = g \circ \mathrm{cl}_\sim$.

Premièrement, remarquons qu'on a $\mathrm{cl}_\sim : E \to (E/\sim)$ et $g : (E/\sim) \to F$ donc $g \circ \mathrm{cl}_\sim : E \to F$ d'après la prop. 149 p. 188, et on a aussi $f : E \to F$ par définition.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

On a alors $(g \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) \underset{150\text{ p. }190}{=} g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$ par définition de g.

Donc $(g \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) = f(x)$.

Donc si $x \in E$, alors $(g \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) = f(x)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies (g \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) = f(x)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, (g \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) = f(x)$.

Donc $\boxed{f = g \circ \mathrm{cl}_\sim}$ d'après la prop. 139 p. 171.

• <u>Unicité de g</u>.

Soit $h : (E/\sim) \to F$ telle que $f = h \circ \mathrm{cl}_\sim$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E/\sim$.

Soit x un représentant de A : on a donc $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} g(A) &= f(x) \text{ par définition de } g \\ &= (h \circ \mathrm{cl}_\sim)(x) \text{ puisque } f = h \circ \mathrm{cl}_\sim \text{ par définition de } h \end{aligned}$$

$= h\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big)$ d'après la prop. 150 p. 190

$= h(A)$ puisque $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$ par définition de x

Donc $g(A) = h(A)$.

Donc si $A \in E/\sim$, alors $g(A) = h(A)$.

Donc $\forall A, \Big(A \in E/\sim \implies g(A) = h(A)\Big)$.

Donc $\forall A \in E/\sim, g(A) = h(A)$.

Or, $g : (E/\sim) \to F$ et $h : (E/\sim) \to F$.

Donc $\boxed{g = h}$ d'après la prop. 139 p. 171.

(2) Raisonnons par double implication :

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que g est injective.

Soit x un ensemble.

Supposons que $x \in E$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in E$.

Supposons que $f(x) = f(y)$.

Donc $g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x) = f(y) = g\big(\mathrm{cl}_\sim(y)\big)$ par définition de g.

Donc $g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = g\big(\mathrm{cl}_\sim(y)\big)$.

Or, g est injective par hypothèse.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(x) = \mathrm{cl}_\sim(y)$.

Donc $x \sim y$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc si $f(x) = f(y)$, alors $x \sim y$.

Donc si $y \in E$, alors $f(x) = f(y) \implies x \sim y$.

Donc $\forall y, \Big(y \in E \implies \big(f(x) = f(y) \implies x \sim y\big)\Big)$.

Donc $\forall y \in E, \big(f(x) = f(y) \implies x \sim y\big)$.

Donc si $x \in E$, alors $\forall y \in E, \big(f(x) = f(y) \implies x \sim y\big)$.

Donc $\forall x, \Big(x \in E \implies \big(\forall y \in E, \big(f(x) = f(y) \implies x \sim y\big)\big)\Big)$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(f(x) = f(y) \implies x \sim y\big)$.

Or, on a $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \implies f(x) = f(y)\big)$ par définition de $\sim$.

Donc $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\big)$.

Donc si g est injective, alors $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\big)$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\big)$.

Soit A un ensemble.

Supposons que $A \in E/\sim$.

Soit B un ensemble.

Supposons que $B \in E/\sim$.

Supposons que $g(A) = g(B)$.

Soient a un représentant de A et b un représentant de B.

On a donc $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$ et $B = \mathrm{cl}_\sim(b)$.

On a alors $g(A) = f(a)$ et $g(B) = f(b)$ par définition de g.

Comme $g(A) = g(B)$, on a donc $f(a) = f(b)$.

Or, on a $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\big)$ par hypothèse.

En particulier, $a \sim b \iff f(a) = f(b)$.

Donc $a \sim b$ par modus ponens.

Donc $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b)$ d'après la prop. 251 p. 373.

Donc $A = \mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b) = B$.

Donc $A = B$.

Donc si $g(A) = g(B)$, alors $A = B$.

Donc si $B \in E/\sim$, alors $g(A) = g(B) \implies A = B$.

Donc $\forall B, \Big(B \in E/\sim \implies \big(g(A) = g(B) \implies A = B\big)\Big)$.

Donc $\forall B \in E/\sim, \big(g(A) = g(B) \implies A = B\big)$.

Donc si $A \in E/\sim$, alors $\forall B \in E/\sim, \big(g(A) = g(B) \implies A = B\big)$.

Donc $\forall A, \Big(A \in E/\sim \implies \Big(\forall B \in E/\sim, \big(g(A) = g(B) \implies A = B\big)\Big)\Big)$.

Donc $\forall A \in E/\sim, \forall B \in E/\sim, \big(g(A) = g(B) \implies A = B\big)$.

Donc g est injective.

Donc si $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\big)$, alors g est injective.

Finalement, $\boxed{g \text{ est injective si et seulement si } \forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)}$.

3 Raisonnons par double implication.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que g est surjective dans F.

On a donc $\mathrm{im}(g) = F$.

En particulier, on a $F \subseteq \mathrm{im}(g)$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in F$.

On a $F \subseteq \mathrm{im}(g)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(g)$.

Il existe donc au moins un $A \in \mathrm{dom}(g) = E/\sim$ tel que $y = g(A)$ d'après la prop.

167 p. 217.

Soit un tel A.

Soit a un représentant de A : on a donc $a \in E$ et $A = \mathrm{cl}_\sim(a)$.

On a donc $g(A) = g\big(\mathrm{cl}_\sim(a)\big) = f(a)$ par définition de g.

Donc $f(a) = g(A) = y$ et donc $f(a) = y$.

Il existe donc au moins un $x \in E = \mathrm{dom}(f)$ tel que $y = f(x)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(f)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in F$, alors $y \in \mathrm{im}(f)$.

Donc $\forall y, \big(y \in F \implies y \in \mathrm{im}(f)\big)$.

Donc $F \subseteq \mathrm{im}(f)$ par définition de l'inclusion.

Or, $f : E \to F$ par définition, donc $\mathrm{im}(f) \subseteq F$.

Donc $\mathrm{im}(f) = F$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc f est surjective dans F.

Donc si g est surjective dans F, alors f est surjective dans F.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que f est surjective dans F.

On a donc $\mathrm{im}(f) = F$.

En particulier, on a $F \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Soit y un ensemble.

Supposons que $y \in F$.

Or, on a $F \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc au moins un $x \in \mathrm{dom}(f) = E$ tel que $y = f(x)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Soit un tel x.

Posons $A := \mathrm{cl}_\sim(x) \in E/\sim$.

On a alors $g(A) = g\big(\mathrm{cl}_\sim(x)\big) = f(x)$ par définition de g.

Il existe donc au moins un $B \in E/\sim$ tel que $y = g(B)$.

Donc $y \in \mathrm{im}(g)$ d'après la prop. 167 p. 217.

Donc si $y \in F$, alors $y \in \mathrm{im}(g)$.

Donc $\forall y, \Big(y \in F \implies y \in \mathrm{im}(g)\Big)$.

Donc $F \subseteq \mathrm{im}(g)$ par définition de l'inclusion.

Or, $g : (E/\sim) \to F$ par définition, donc $\mathrm{im}(g) \subseteq F$.

Donc $\mathrm{im}(g) = F$ par antisymétrie de l'inclusion.

Donc g est surjective dans F.

Donc si f est surjective dans F, alors g est surjective dans F.

Finalement, $\boxed{g \text{ est surjective dans } F \text{ si et seulement si } f \text{ est surjective dans } F}$.

4

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
g \text{ est bijective dans } F &\iff \begin{cases} g \text{ est injective} \\ \text{et } g \text{ est surjective dans } F \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big) \\ \text{et } g \text{ est surjective dans } F \end{cases} \quad \text{d'après } 2 \\
&\iff \begin{cases} \forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big) \\ \text{et } f \text{ est surjective dans } F \end{cases} \quad \text{d'après } 3
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est bijective dans } F \iff \begin{cases} \forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big) \\ \text{et } f \text{ est surjective dans } F \end{cases}}$.

CQFD.

Remarque :

Le théorème précédant nous donne le cas particulier suivant : si $\sim$ est la relation d'équivalence induite par f, c'est-à-dire que $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)$, alors en notant $\iota : \mathrm{im}(f) \hookrightarrow F$ l'injection canonique de $\mathrm{im}(f)$ dans F (c'est-à-dire $\iota = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$), on a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{cl}_\sim"] & F \\
E/\sim \arrow[r, hook, two heads, "g"] & \mathrm{im}(f) \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

On se réfèrera à ce dernier résultat comme étant **le premier théorème d'isomorphisme (version équipotence)**.

Bibliographie

[1] Wikipédia.

[2] Nicolas Bourbaki. Eléments de mathématiques - théorie des ensembles, 1970.

[3] Laurent Schwartz. Analyse i : Théorie des ensembles et topologie, 1991.

Mathématiciens

Les mathématiciens ci-après sont triés par leur année de naissance.

Deuxième moitié du 16ème siècle

René Descartes (page 85)

1596 - 1650

Première moitié du 19ème siècle

Auguste De Morgan (page 64)

1806 - 1871

John Venn (page 42)

1834 - 1923

Deuxième moitié du 19ème siècle

Ernst Zermelo (page 185)

1871 - 1953

Kazimierz Kuratowski (page 80)

1896 - 1980