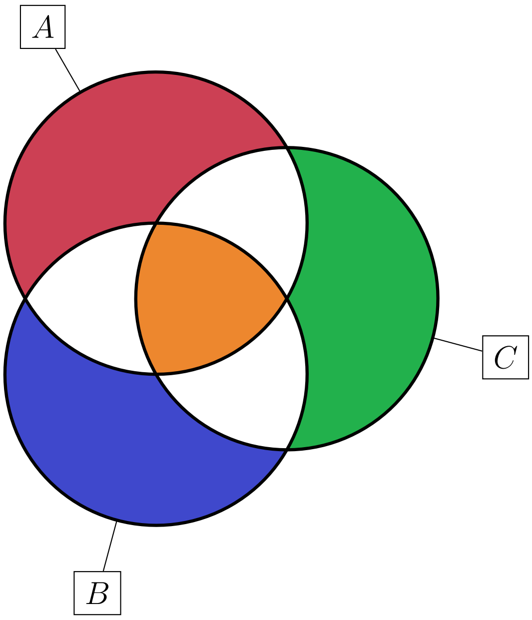
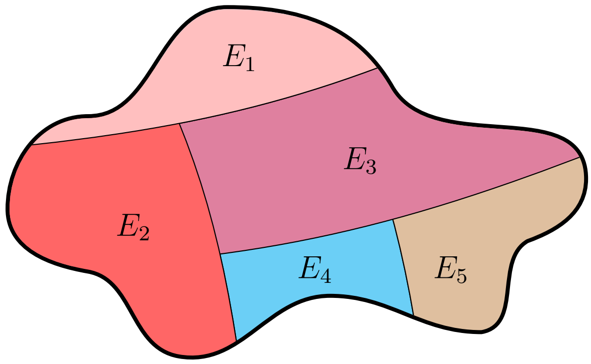




Mathématiques du supérieur I

-

Théorie élémentaire des ensembles

Version sans les démonstrations

Daniel -Barbu- Williams

Mars 2020 - Août 2021

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le premier d'une collection qui tente de démontrer "les mathématiques" du supérieur, c'est-à-dire du niveau BAC+1 à BAC+4 environ.

I - Théorie élémentaire des ensembles.
II - Théorie des ensembles infinis.
III - Arithmétique des entiers relatifs.
IV - Théorie élémentaire des catégories
V - Théorie des groupes
VI - Théorie des anneaux et des corps
VII - Analyse réelle élémentaire
VIII - Analyse complexe élémentaire
IX - A venir

Avant-propos

Cet ouvrage n'a pas pour but d'être pédagogique, et je le rédige avant tout pour moi-même, mais peut-être qu'il vous sera utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire de connaître la logique élémentaire. En particulier, il vous faut connaître :
- la notion d'assertion
- la notion de négation d'une assertion
- la notion de conjonction et la notion de disjonction
- la notion d'implication, ainsi que la notion de contraposée et de réciproque
- la notion d'équivalence
- les quantificateurs $\forall$, $\exists$ et $\exists!$

Remerciements

Merci à Lyra, GrothenDitQue et Chæris pour leur pinaillage, à Tom pour le LaTeX, et à Maxtimax pour m'avoir fortement débloqué !

Table des matières

Chapitre 1

Théorie élémentaire des ensembles

Note de l'auteur

Ce chapitre a pour but de poser les bases ensemblistes : il n'est pas exagéré de dire que l'ensemble du reste des mathématiques va reposer sur ce qui va être vu dans ce chapitre.

Ce chapitre est fondamental pour deux raisons.

La première c'est que à beaucoup d'endroits en mathématiques, les ensembles interviennent (ensembles de solutions, une droite peut être vue comme un ensemble de points, les structures algébriques reposent sur la notion d'ensembles, etc.).

La deuxième est que le parti pris de cette collection d'ouvrage est de construire tous les objets mathématiques à partir de cette simple notion d'ensembles, pour ne considérer fondamentalement qu'un seul type d'objet.

Sommaire

1 Généralités sur les ensembles

1.1 Appartenance et égalité

L'objet au cœur de notre discours est comme nous l'avons dit « *l'ensemble* ». Cependant, il s'agit d'un objet « primitif », c'est-à-dire que nous n'allons pas lui donner de définition à proprement parler. Au lieu de cela, nous allons dire que tous les objets que nous allons manipuler (en dehors des assertions, propositions, théorèmes, etc.) seront des ensembles. Nous pouvons alors nous demander en quoi il est légitime de les appeler « *ensembles* ». En fait, c'est par le biais d'axiomes que nous allons imposer certaines propriétés à nos objets, de sortent qu'ils « *miment* »l'idée intuitive que nous pouvons nous faire de la notion d'ensemble.

Définition 1 (Ensemble)

Tous les objets que nous allons manipuler seront appelés **ensembles**.

Pour deux ensembles x et E, il est possible de former une assertion notée $x \in E$ dont la véracité se déduira des axiomes et des définitions. On dit alors x **appartient** à E.

Sa négation sera notée $x \notin E$.

Remarque :
Les ensembles représentent intuitivement des sacs dans lesquels on peut mettre des objets. L'appartenance $x \in E$ traduit donc intuitivement le fait que l'objet x se trouve dans le sac E.

Axiome 1 (Axiome de l'existence)

Il existe au moins un ensemble.

Notation

Pour E un ensemble et P une assertion pouvant dépendre de paramètres, on notera parfois :

- $\forall x \in E, P(x)$ à la place de $\forall x, \big(x \in E \implies P(x)\big)$
- $\exists x \in E, P(x)$ à la place de $\exists x, \big(x \in E \text{ et } P(x)\big)$

Définissons à présent ce que cela veut dire pour deux ensembles d'êtres égaux.

Définition 2 (Egalité)

Soient E et F deux ensembles.

On dira que E est **égal** à F si et seulement si « *tout élément de E est aussi un élément de F et réciproquement* », ce qui se traduit donc par $\forall x, (x \in E \iff x \in F)$.

On notera alors $E = F$.
Dans le cas contraire, on notera $E \neq F$, et on dira qu'ils sont **distincts**, ou **différents**.

Axiome 2 (Principe de Leibniz)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E = F$, alors toute formule vraie qui fait intervenir E est aussi vraie si on remplace les apparitions de E de notre choix par F.

Proposition 1 (Propriétés de l'égalité)

Soient E, F et G trois ensembles.
On a alors :

1. $E = E$: on dit que l'égalité est **réflexive**.
2. Si $E = F$, alors $F = E$: on dit que l'égalité est **symétrique**.
3. Si $E = F$ et $F = G$, alors $E = G$: on dit que l'égalité est **transitive**.

Remarque :
On verra au **chapitre 5** que cela fait de l'égalité une **relation d'équivalence**.

Proposition 2 (Caractérisation de l'inégalité)

Soient E et F deux ensembles.

On a $E \neq F \iff \Big(\big(\exists x \in E, x \notin F\big) \text{ ou } \big(\exists x \in F, x \notin F\big) \Big)$.

1.2 Inclusion et inclusion stricte

Définition 3 (Inclusion)

Soient E et F deux ensembles.

On dira que E est **inclus** dans F si et seulement si « *tout élément de E est aussi un élément de F* », ce qui se traduit par $\forall x, \big(x \in E \implies x \in F\big)$.

On notera alors $E \subseteq F$, ou encore $F \supseteq E$.
On dira alors que

- E est un **sous-ensemble** de F.
- E est une **partie** de F.
- F est un **sur-ensemble** de E.
- F **contient** E.

Dans le cas contraire, on notera $E \nsubseteq F$.

Remarque :
Certains auteurs, notamment francophones, notent cela $E \subset F$. Cela ne sera pas le cas dans cet ouvrage.

Proposition 3 (Décomposition de l'égalité en inclusions)

Soient E et F deux ensembles.

Si $E = F$, alors $E \subseteq F$ et $E \supseteq F$.

Proposition 4 (Propriétés de l'inclusion)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

① $E \subseteq E$: l'inclusion est **réflexive**.

② Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq E$, alors $E = F$: l'inclusion est **antisymétrique**.

③ Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$, alors $E \subseteq G$: l'inclusion est **transitive**.

Remarque :

On verra au **chapitre ??** que cela fait de l'inclusion une **relation d'ordre**.

Proposition 5 (Caractérisation par les parties et les sur-ensembles)

Soient E et F deux ensembles.

Alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

① $E = F$

② $\forall X, \big(X \subseteq E \iff X \subseteq F\big)$

③ $\forall X, \big(E \subseteq X \iff F \subseteq X\big)$

Autrement dit, un ensemble est entièrement caractérisé par ses sous-ensembles, et un ensemble est entièrement caractérisé par ses sur-ensembles.

Définition 4 (Inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On dit que E est **inclus strictement** dans F si et seulement si $E \subseteq F$ et $E \neq F$.

On notera alors $E \subsetneq F$.

On dira alors que :

- E est un **sous-ensemble propre** de F.
- E est une **partie propre** de F.
- F est un **sur-ensemble propre** de E.
- F **contient strictement** E.

Attention !

Il ne faut pas confondre l'assertion « *E est inclus strictement dans F* », qui se note $E \subsetneq F$, avec l'assertion « *E n'est pas inclus dans F* », qui se note $E \not\subseteq F$.

Remarque :
Par définition de l'inclusion stricte, on a $E \subsetneq F \iff \big(E \subseteq F \text{ et } E \neq F\big)$.
Voyons une équivalence similaire.

Proposition 6 (Inclusion et inclusion stricte)

Soient E et F deux ensembles.

On a l'équivalence $E \subseteq F \iff \big(E \subsetneq F \text{ ou } E = F\big)$.

Proposition 7 (Transitivité de l'inclusion stricte)

Soient E, F et G trois ensembles.

Si $E \subsetneq F$ et $F \subsetneq G$, alors $E \subsetneq G$.
On dit que l'inclusion stricte est **transitive**.

1.3 Compréhension et vide

Axiome 3 (Axiome de compréhension)

Soient E un ensemble, et P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

Alors il existe une partie de E dont les éléments sont exactement ceux de E qui vérifient P.
On le note $\{x \in E \mid P(x)\}$.

Autrement dit, $\forall y, \Big(y \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff \big(y \in E \text{ et } P(y)\big)\Big)$.

Notation

Dans la notation $\{x \in E \mid P(x)\}$, la variable x est dite « *muette* ».
Cela veut dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit.

Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire des contre-sens.

Ainsi, $\{x \in E \mid P(x)\} = \{y \in E \mid P(y)\} = \{z \in E \mid P(z)\}$.

Proposition 8 (Compréhension, implications et équivalences)

Soient E un ensembles, et P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.

On a alors

1. $\forall x \in E, \big(P(x) \implies Q(x)\big)$ si et seulement si $\left\{x \in E \,\middle|\, P(x)\right\} \subseteq \left\{x \in E \,\middle|\, Q(x)\right\}$.
2. $\forall x \in E, \big(P(x) \iff Q(x)\big)$ si et seulement si $\left\{x \in E \,\middle|\, P(x)\right\} = \left\{x \in E \,\middle|\, Q(x)\right\}$.

Proposition 9 (Compréhension et sous-ensemble)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

Si $E \subseteq F$, alors $\{x \in E \mid P(x)\} \subseteq \{x \in F \mid P(x)\}$.

Proposition 10 (Justification de l'ensemble vide)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. $\forall y, y \notin \{x \in E \mid x \neq x\}$.
2. $\{x \in F \mid x \neq x\} = \{x \in G \mid x \neq x\}$.

Définition 5 (Ensemble vide)

Soit E un ensemble.

La proposition précédente nous assure que l'ensemble $\{x \in E \mid x \neq x\}$ ne dépend pas de E.
Nous le noterons $\varnothing$, et l'appellerons **ensemble vide**.

Ainsi, toujours d'après la proposition précédente, on a $\forall x, x \notin \varnothing$.

Proposition 11 (Propriétés de l'ensemble vide)

Soit E un ensemble.
On a alors :

1. $\varnothing \subseteq E$.
2. $E \subseteq \varnothing \iff E = \varnothing$.
3. $(\forall x, x \notin E) \iff E = \varnothing$.

Définition 6 (Parties triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble.
D'après la réflexivité de l'inclusion, on a $E \subseteq E$, donc E est une partie de E.
D'après la proposition 11 page 8, on a $\varnothing \subseteq E$, donc $\varnothing$ est une partie de E.

On dira que $\varnothing$ et E sont les **parties triviales** de E.

Proposition 12 (Ensemble vide et quantificateurs)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
On a alors :

1. L'assertion $\forall x \in \varnothing, P(x)$ est vraie.
2. L'assertion $\exists x \in \varnothing, P(x)$ est fausse.

1.4 Paires et singletons

Axiome 4 (Axiome de la paire)

Soient x et y deux ensembles.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement x et y.
On le note $\{x; y\}$, et on dit que c'est une **paire**.

Ainsi, on a $\forall z, \big(z \in \{x; y\} \iff (z = x \text{ ou } z = y)\big)$.
En particulier, on a $x \in \{x; y\}$ et $y \in \{x; y\}$ par définition.

Proposition 13 (Paire et ordre de ses éléments)

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $\{x; y\} = \{y; x\}$.
Ainsi, l'ordre ne compte pas dans une paire.

Définition 7 (Singleton)

Soit x un ensemble.

On notera parfois $\{x\}$ l'ensemble $\{x; x\}$.
On dira que c'est un **singleton**.

On a donc $\forall z, \big(z \in \{x\} \iff z = x\big)$.

Proposition 14 (Égalité entre deux singletons)

Soient x et y deux ensembles.
Alors $\{x\} = \{y\} \iff x = y$.

Proposition 15 (Singleton inclus dans paire)

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $\{x\} \subseteq \{x; y\}$.

Proposition 16 (Singleton, paire et minimum)

Soient x, y et A trois ensembles.
On a alors :

1. $x \in A \iff \{x\} \subseteq A$.
   On dit que $\{x\}$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les ensembles dont x est un élément du fait de $\Rightarrow$.

2. $\left(x \in A \text{ et } y \in A\right) \iff \{x; y\} \subseteq A$.
   On dit que $\{x; y\}$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les ensembles dont x et y sont éléments du fait de $\Rightarrow$.

1.5 Ensemble des parties

Axiome 5 (Axiome des parties)

Soit E un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les parties de E.
On le notera $\mathscr{P}(E)$.

Autrement dit, on a $\forall F, \left(F \in \mathscr{P}(E) \iff F \subseteq E\right)$.

Notation

Certains auteur notent cet ensemble $\mathcal{P}(E)$, ou bien $\mathfrak{P}(E)$, ou parfois $\wp(E)$, ou encore 2^E.

Pour toute assertion Q pouvant dépendre de paramètres, l'assertion $\forall F \in \mathscr{P}(E), Q(F)$ sera parfois notée $\forall F \subseteq E, Q(F)$.

Proposition 17 (Parties triviales et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$
2. $E \in \mathscr{P}(E)$

Autrement dit, les parties de triviales de E sont dans l'ensemble des parties de E.

Proposition 18 (Croissance de l'ensemble des parties)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a $E \subseteq F \iff \mathscr{P}(E) \subseteq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Rightarrow$ s'appelle la **croissance** pour l'inclusion du passage à l'ensemble des parties.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle la **rétrocroissance** pour l'inclusion du passage à l'ensemble des parties.
   On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme fort** pour l'inclusion du fait de l'équivalence.

2. On a $E \subsetneq F \iff \mathscr{P}(E) \subsetneq \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Rightarrow$ s'appelle la **stricte croissance** du passage à l'ensemble des parties pour l'inclusion.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle la **stricte rétrocroissance** du passage à l'ensemble des parties pour l'inclusion.
   On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme fort** pour l'inclusion stricte du fait de l'équivalence.

3. On a $E = F \iff \mathscr{P}(E) = \mathscr{P}(F)$.
   L'implication $\Leftarrow$ s'appelle **l'injectivité** du passage à l'ensemble des parties.
   L'implication $\Rightarrow$ est tout simplement le principe de Leibniz, il n'y a pas de propriété particulière.

On dit que le passage à l'ensemble des partis est un **morphisme fort** pour l'égalité du fait de l'équivalence.

1.6 Ensemble des sur-ensembles

Définition 8 (Ensemble des sur-ensembles)

Soient E et F deux ensembles.

Alors on appellera **ensemble des sur-ensembles de F sous E** l'ensemble $\{A \in E \mid F \subseteq A\}$.
On le note parfois $\mathscr{S}_E(F)$.

Proposition 19 (Ensembles des sur-ensembles du vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\mathscr{S}_E(\varnothing) = E$.

Proposition 20 (Décroissance de l'ensemble des sur-ensembles)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a $F \subseteq G \implies \mathscr{S}_E(F) \supseteq \mathscr{S}_E(G)$.
On dit que le passage à l'ensemble des sur-ensembles sous E est **décroissant** pour l'inclusion.

2 Opérations sur les ensembles

2.1 Réunion

Axiome 6 (Axiome de la réunion)

Soit E un ensemble.

Alors il existe un ensemble dont les éléments sont exactement les éléments des éléments de E.
On le notera $\bigcup E$ et on dira que c'est la **réunion** de E.

Autrement dit, $\forall x, \big(x \in \bigcup E \iff \exists A \in E, x \in A\big)$.

Proposition 21 (Réunion de l'ensemble vide)

On a $\bigcup \varnothing = \varnothing$.

Proposition 22 (Réunion et ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
On a alors :

1. $\bigcup \mathscr{P}(E) = E$
2. $E \subseteq \mathscr{P}(\bigcup E)$

Remarque :
L'inclusion réciproque $E \supseteq \mathscr{P}(\bigcup E)$ n'est pas vraie en toute généralité.
Par exemple, si l'on prend $E = \big\{\{1; 2\}\big\}$, alors $\bigcup E = \{1; 2\}$ donc $\mathscr{P}(\bigcup E) = \mathscr{P}(\{1; 2\}) = \big\{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1; 2\}\big\}$.

Proposition 23 (Croissance de la réunion)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E \subseteq F$, alors $\bigcup E \subseteq \bigcup F$.
On dit que la réunion est **croissante** pour l'inclusion.

Remarque :

a) On a en général pas l'implication $\bigcup E \subseteq \bigcup F \implies E \subseteq F$.
En effet, en prenant par exemple $E = \{\{1;2\}\}$ et $F = \{\{1\};\{2\}\}$, alors $\bigcup E = \{1;2\} = \bigcup F$ mais aucun des deux n'est inclus dans l'autre.

b) On a en général pas l'implication $E \subsetneq F \implies \bigcup E \subsetneq \bigcup F$ (le passage l'ensemble des parties n'est donc pas strictement croissant). En effet, en prenant par exemple $E = \{\{1;2\}\}$ et $F = \{\{1;2\};\{1\}\}$, on a $E \subsetneq F$ mais $\bigcup E = \{1;2\} = \bigcup F$.

Proposition 24 (Réunion et inclusion)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $A \in E$.

On a alors $A \subseteq \bigcup E$.

Définition 9 (Union de deux ensemble)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **union** de A et de B l'ensemble $\bigcup\{A;B\}$.
On le note souvent $A \cup B$.

Proposition 25 (Union et disjonction)

Soient A et B deux ensembles.
Soit x un ensemble.
On a alors $x \in A \cup B \iff (x \in A \text{ ou } x \in B)$.

Proposition 26 (Union, sur-ensembles et minimum)

Soient A, B et X trois ensembles.

1. On a $A \subseteq A \cup B$ et $B \subseteq A \cup B$.
   Autrement dit, $A \cup B$ est un sur-ensemble commun à A et à B.

2. $\left(A \subseteq X \text{ et } B \subseteq X\right) \iff A \cup B \subseteq X$.
   L'implication $\Rightarrow$ traduit le fait que $A \cup B$ est **minimum** pour l'inclusion parmi les sur-ensembles communs à A et à B.

Proposition 27 (Propriétés de l'union)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $A \cup A = A$: on dit que l'union est **idempotente**.
2. $A \cup B = B \cup A$: on dit que l'union est **commutative**.
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$: on dit que l'union est **associative**.

Remarque :
On aurait aussi pu démontrer la commutativité de l'union en utilisant la propriété 13 page 9 qui nous dit que $\{A; B\} = \{B; A\}$.
Alors $A \cup B = \bigcup\{A; B\} = \bigcup\{B; A\} = B \cup A$.

Notation

Du fait de l'associativité de l'union, on notera parfois $A \cup B \cup C$ à la place de $(A \cup B) \cup C$ ou $A \cup (B \cup C)$. Dans une expression ne comportant que des unions, les parenthèses pourront ainsi être retirées.

Proposition 28 (Réunion d'un singleton)

Soit A un ensemble.

On a alors $\bigcup\{A\} = A$.

Proposition 29 (Réunion de deux singletons)

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $\{x\} \cup \{y\} = \{x; y\}$.

Proposition 30 (Union et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles.

Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \cup B \subseteq A' \cup B'$.
On dit que l'union est **compatible** avec l'inclusion.

Proposition 31 (Union, absorbant et neutre)

Soient E et F deux ensembles.

1. $E \subseteq F \iff E \cup F = F$
   On dit que F est **absorbant** pour l'union avec ses sous-ensembles du fait de l'implication $\Rightarrow$.
   On dit que E est **neutre** pour l'union avec ses sur-ensembles du fait de cette même implication.

2. $E \cup \varnothing = E$
   Ainsi, $\varnothing$ est **neutre** pour l'union.

Notation

Soient a, b, c, d, e, f, g, h, i, j dix ensembles.

- On notera $\{a; b; c\}$ l'ensemble $\{a; b\} \cup \{c\}$.
- On notera $\{a; b; c; d\}$ l'ensemble $\{a; b; c\} \cup \{d\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d\} \cup \{e\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e\} \cup \{f\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f\} \cup \{g\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g\} \cup \{h\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g; h\} \cup \{i\}$.
- On notera $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i; j\}$ l'ensemble $\{a; b; c; d; e; f; g; h; i\} \cup \{j\}$.

2.2 Intersection

Définition 10 (Intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

On appelle **intersection** de E l'ensemble $\{x \in \bigcup E \mid \forall A \in E, x \in A\}$.
On le note alors $\bigcap E$.

Proposition 32 (Caractérisation de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit x un ensemble.
On a alors $x \in \bigcap E \iff \forall A \in E, x \in A$.

Proposition 33 (Décroissance de l'intersection)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.

Si $E \subseteq F$, alors $\bigcap E \supseteq \bigcap F$.
On dit que l'intersection est **décroissante** pour l'inclusion.

Proposition 34 (Intersection et inclusion)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $A \in E$.

On a alors $\bigcap E \subseteq A$.

Définition 11 (Intersection de deux ensembles)

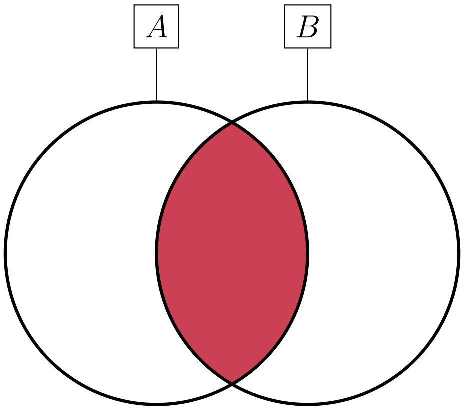
Soient A et B deux ensembles.

On appelle **intersection** de A et de B l'ensemble $\bigcap\{A; B\}$.
On le note souvent $A \cap B$.

Illustration :

Illustrons l'intersection par un **diagramme de Venn**.

Ici, on a colorié en **rouge** l'ensemble $A \cap B$.



Pour la petite histoire

John Venn (1834-1923) est un mathématicien et logicien britannique, renommé pour avoir conçu les diagrammes de Venn qu'il a présenté en 1881. En 1883, il est élu membre de la Royal Society.

Proposition 35 (Intersection et conjonction)

Soient A et B deux ensembles.

Soit x un ensemble.

On a alors $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$.

En particulier, on a $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$.

Proposition 36 (Intersection, sous-ensembles et maximum)

Soient A, B et X trois ensembles.

1. On a $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$.
   $A \cap B$ est donc un sous-ensemble **commun** à A et à B.

2. $(X \subseteq A \text{ et } X \subseteq B) \iff X \subseteq A \cap B$.

L'implication $\Longrightarrow$ traduit le fait que $A \cap B$ est **maximum** pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à A et à B.

Proposition 37 (Propriétés de l'intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $A \cap A = A$: on dit que l'intersection est **idempotente**.
2. $A \cap B = B \cap A$: on dit que l'intersection est **commutative**.
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$: on dit que l'intersection est **associative**.

Remarque :
On aurait aussi pu démontrer la commutativité de l'intersection en utilisant la propriété 13 page 9 qui nous dit que $\{A; B\} = \{B; A\}$.
Alors $A \cap B = \bigcap\{A; B\} = \bigcap\{B; A\} = B \cap A$.

Notation

Du fait de l'associativité de l'intersection, on notera parfois $A \cap B \cap C$ à la place de $(A \cap B) \cap C$ ou $A \cap (B \cap C)$. Dans une expression ne comportant que des intersections, les parenthèses pourront ainsi être retirées.

Proposition 38 (Intersection et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles.

Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \cap B \subseteq A' \cap B'$.
On dit que l'intersection est **compatible** avec l'inclusion.

Proposition 39 (Intersection, absorbant et neutre)

Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

(1) $A \subseteq B \iff A \cap B = A$

On dit que A est **absorbant** pour l'intersection avec ses sur-ensembles du fait de l'implication $\Rightarrow$. On dit que B est **neutre** pour l'intersection avec ses sous-ensembles du fait de cette même implication.

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Ainsi, $\varnothing$ est **absorbant** pour l'intersection.

Définition 12 (Ensembles disjoints)

Soient A et B deux ensembles.

On dit que A et B sont **disjoints** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Proposition 40 (Ensemble disjoints et sous-ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

Soient A' une partie de A, et B' une partie de B.

On a alors :

(1) Si A et B sont disjoints, alors A' et B' sont disjoints.

(2) En particulier, si A et B sont disjoints, alors A et B' sont disjoints.

2.3 Réunion et intersection

Proposition 41 (Union et intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

(1) $A \cap B \subseteq A \cup B$.

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

On dit que l'union est **distributive** sur l'intersection.

③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
On dit que l'intersection est **distributive** sur l'union.

Proposition 42 (Union, intersection, sur-ensembles et parties)

Soient E, A et B trois ensembles.

On a alors :

① $\mathscr{S}_E(A) \cap \mathscr{S}_E(B) = \mathscr{S}_E(A \cup B)$

② $\mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B) = \mathscr{P}(A \cap B)$
On dit que le passage à l'ensemble des parties est un **morphisme** pour l'intersection.

Proposition 43 (Compréhension, union et intersection)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

On a alors :

① $\{x \in E \cup F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cup \{x \in F \mid P(x)\}$

② $\{x \in E \cap F \mid P(x)\} = \{x \in E \mid P(x)\} \cap \{x \in F \mid P(x)\}$

2.4 Différence ensembliste

Définition 13 (Différence ensembliste)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **différence de A par B** l'ensemble $\{x \in A \mid x \notin B\}$.

On le note alors $A \backslash B$.

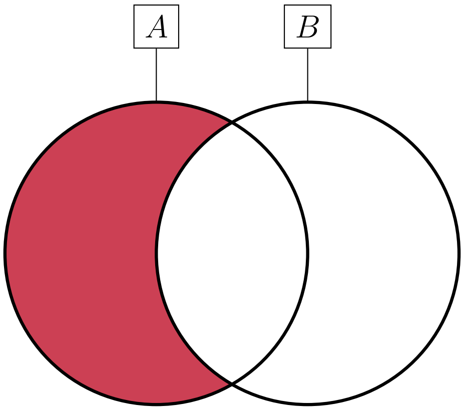
Notation

Certains auteurs le notent aussi $A - B$.

Illustration :

Illustrons la différence ensembliste par un **diagramme de Venn**.

Ici, on a colorié en rouge l'ensemble $A \backslash B$.



Proposition 44 (Différence ensembliste et parties triviales)

Soit A un ensemble. On a alors :

1. $A \backslash A = \varnothing$
2. $A \backslash \varnothing = A$
3. $\varnothing \backslash A = \varnothing$

Proposition 45 (Différence ensembliste, partie disjointe et maximum)

Soient A, B et X trois ensembles.

On a alors :

1. $(A \backslash B) \cap B = \varnothing$

   Ainsi, $A \backslash B$ est une partie de A **disjointe** de B.

2. Si X est une partie de A disjointe de B, alors $X \subseteq A \backslash B$.

   Autrement dit, $A \backslash B$ est maximum pour l'inclusion parmi les parties de A disjointes de B.

Proposition 46 (Différence ensembliste et inclusion)

Soient A, A', B et B' quatre ensembles. On a alors :

1. $\forall x, \Big(x \notin A \backslash B \iff (x \in A \implies x \in B)\Big)$
2. $A \backslash B = \varnothing \iff A \subseteq B$

③ $A \backslash B = B \backslash A \iff A = B$

④ Si $A \subseteq A'$, alors $A \backslash B \subseteq A' \backslash B$.
On dit que la différence ensembliste selon la première variable est **croissante** pour l'inclusion.

⑤ Si $B \subseteq B'$, alors $A \backslash B \supseteq A \backslash B$.
On dit que la différence ensembliste selon la deuxième variable est **décroissante** pour l'inclusion.

Proposition 47 (Différence ensembliste et décomposition d'ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

① $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$, et ces deux ensembles sont disjoints.

② $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$.

③ $A \backslash (A \cap B) = A \backslash B$

④ $(A \backslash B) \cup B = A \cup B$.

⑤ $A \cup B = (A \backslash B) \cup (A \cap B) \cup (B \backslash A)$ et ces trois ensembles sont disjoints deux à deux.

Proposition 48 (Lois de De Morgan - Version différence ensembliste)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

① $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$

② $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$

Pour la petite histoire

Auguste De Morgan (1806 - 1871) est un mathématicien et logicien britannique, né en Inde. Il est le fondateur avec Boole de la logique moderne ; il a notamment formulé les lois de De Morgan.

Proposition 49 (Différence ensembliste, union et intersection)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $(A \cup B) \backslash C = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$
2. $(A \cap B) \backslash C = (A \backslash C) \cap (B \backslash C)$

Proposition 50 (Différence ensembliste, singleton et paire)

Soient x et y deux ensembles.

Si $x \neq y$, alors $\{x\} = \{x; y\} \backslash \{y\}$.

Définition 14 (Complémentaire d'une partie d'un ensemble)

Soit E un ensemble. Soit F une partie de E.

On appelle **complémentaire** de F dans E l'ensemble $E \backslash F$.

On le note souvent $\complement_E(F)$.

Notation

Certains auteurs le notent $F^{\complement}$ ou $\overline{F}$, mais cela n'indique alors plus le sur-ensemble dans lequel on prend le complémentaire.

Proposition 51 (Involution du complémentaire)

Soit E un ensemble. Soit F un sous-ensemble de E.

On a alors $\complement_E\left(\complement_E(F)\right) = F$.
On dit que le passage au complémentaire est **involutif**.

Proposition 52 (Différence ensembliste et complémentaire)

Soit E un ensemble. Soient F et G deux parties de E.
On a alors :

1. $F \backslash G = F \cap \complement_E(G)$
2. $F \backslash G = \left(\complement_E(G)\right) \setminus \left(\complement_E(F)\right)$

2.5 Propriétés stables par intersection et ensembles engendrés

Définition 15 (Propriété stable par intersection)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
On dit que P est **stable par intersection** si et seulement si pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide**, si $\forall A \in \mathcal{E}, P(A)$, alors $P\left(\bigcap \mathcal{E}\right)$.

Proposition 53 (Propriétés stables et intersection de deux ensembles)

Soit P une assertion **stable par intersection**. Soient A et B deux ensembles.
Si $P(A)$ et si $P(B)$, alors $P(A \cap B)$.

Proposition 54 (« *Est un sur-ensemble de* » est stable par intersection)

Soit A un ensemble.
Alors la propriété « *est un sur-ensemble de* A » est stable par intersection.
Autrement dit, pour tout ensemble $\mathcal{E}$ **non vide** tel que $\forall B \in \mathcal{E}, A \subseteq B$, on a $A \subseteq \bigcap \mathcal{E}$.

Proposition 55 (Conjonction de deux propriétés stables)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres.

Si P et Q est sont stables par intersection, alors leur conjonction aussi.

Proposition 56 (Futures propriétés de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.

Soit A un ensemble.

Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.

Soit un tel E.

Posons $\mathcal{E}_E = \left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$, qui est non vide puisque $E \in \mathcal{E}_E$, puis $\mathcal{V}_E := \bigcap \mathcal{E}_E$.

On a alors :

1. $\mathcal{V}_E \in \mathcal{E}_E$.
   Autrement dit, $A \subseteq \mathcal{V}_E \subseteq E$ et $P\big(\mathcal{V}_E\big)$.

2. Pour tout $B \in \mathcal{E}_E$, on a $\mathcal{V}_E \subseteq B$.
   Autrement dit, $\mathcal{V}_E$ est minimum pour l'inclusion parmi les éléments de $\mathcal{E}_E$.
   Dit encore autrement, $\mathcal{V}_E$ est minimum pour l'inclusion parmi les parties de E qui sont des sur-ensembles de A et qui vérifient P.

Proposition 57 (L'engendré ne dépend pas d'un sur-ensemble)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.

Soit A un ensemble.

Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.

Soit un tel E.

Alors pour tout sur-ensemble F de A tel que $P(F)$, on a

$$\bigcap \left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\} = \bigcap \left\{B \subseteq F \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$$

Autrement dit, l'ensemble $\bigcap \left\{B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B)\right\}$ ne dépend pas de E.

Définition 16 (Ensemble engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, **stable par intersection**.

Soit A un ensemble.

Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A tel que $P(E)$.

Soit un tel E.

La proposition 57 page 26 nous indique que $\bigcap \left\{ B \subseteq E \;\middle|\; A \subseteq B \text{ et } P(B) \right\}$ ne dépend pas de E.
On appelle alors P-**engendré par** A cet ensemble. On le note $\langle A \rangle_P$.

Proposition 58 (Propriétés de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, qui est **stable par intersection**.

Soit A un ensemble tel qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A vérifiant $P(E)$.

On a alors :

1. $A \subseteq \langle A \rangle_P \text{ et } P\big(\langle A \rangle_P\big)$

2. Pour tout ensemble B, si $A \subseteq B$ et $P(B)$, alors $\langle A \rangle_P \subseteq B$.
   Autrement dit, $\langle A \rangle_P$ est le plus petit ensemble pour l'inclusion parmi les sur-ensembles de A qui vérifient P.

3. En particulier, si $P(A)$ alors $\langle A \rangle_P = A$.

Proposition 59 (Caractérisation de l'engendré)

Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres, qui est **stable par intersection**.

Soit A un ensemble tel qu'il existe au moins un sur-ensemble E de A vérifiant $P(E)$.

Soit $\mathcal{V}$ un ensemble.

On a alors l'équivalence suivante qui caractérise $\langle A \rangle_P$:

$$\mathcal{V} = \langle A \rangle_P \iff \begin{cases} (1)\ A \subseteq \mathcal{V} \text{ et } P(\mathcal{V}) \\ \text{et } (2)\ \forall B, \Big(\big(A \subseteq B \text{ et } P(B)\big) \implies \mathcal{V} \subseteq B \Big) \end{cases}$$

Proposition 60 (Engendré et inclusion)

Soient P et Q deux assertions pouvant dépendre de paramètres, qui sont **stables par intersection**.
Soient A et B deux ensembles.
Supposons qu'il existe au moins deux sur-ensembles E et F de A tels que $P(A)$ et $Q(A)$.
Supposons qu'il existe au moins un sur-ensemble G de B tel que $P(G)$.

On a alors :

1. Si $\forall C, \big(P(C) \implies Q(C)\big)$, alors $\langle A \rangle_P \supseteq \langle A \rangle_Q$.
2. Si $A \subseteq B$, alors $\langle A \rangle_P \subseteq \langle B \rangle_P$.

Chapitre 2

Relations binaires

Note de l'auteur

Ce chapitre a pour but de poser les bases pour les relations d'équivalences et d'ordre, mais surtout celles des applications. Beaucoup de ce qui est traité dans ce chapitre aurait pu directement être mis en place pour les applications, mais l'auteur a préféré le faire dans le cadre plus général des relations binaires, afin de mieux comprendre ce qui fait que telle ou telle proposition est vraie ou non.

Sommaire

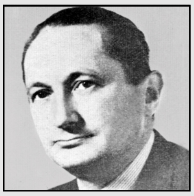
1 Couples et produits cartésiens

1.1 Couples

Définition 17 (Couple)

• Pour tout ensemble x et y, on notera $(x;y)$ l'ensemble $\{\{x\};\{x;y\}\}$.
• Soit c un ensemble. On dit que c est un **couple** si et seulement s'il existe au moins deux ensembles x et y tels que $c=(x;y)$.

Pour la petite histoire



• **Kazimierz Kuratowski** (1896-1980) est un mathématicien polonais.

• Les recherches de Kuratowski portaient principalement sur la topologie abstraite et les structures d'espace métrique. Avec Alfred Tarski et Wacław Sierpiński, il a développé la théorie des espaces polonais (nommés ainsi en hommage au groupe de mathématiciens polonais à l'origine de cette théorie).

• C'est à lui que l'on doit cette définition des couples.

Proposition 61 (Réunion d'un couple)

Soient x et y deux ensembles.
On a alors $\bigcup(x;y)=\{x;y\}$.

Proposition 62 (Couples et égalité)

Soient x, y, a et b quatre ensembles.
On a l'équivalence suivante :
$(x;y)=(a;b) \iff (x=a \text{ et } y=b)$

Proposition 63 (Existence d'au moins un couple)

Il existe au moins un couple.

Définition 18 (Composantes d'un couple)

Soit c un couple.

Il existe donc par définition au moins deux ensembles x et y tels que $c = (x; y)$.

D'après la proposition 62 page 30, de tels x et y sont uniques.

On dira alors que x est la **première composante** de c, et l'on notera $x = \pi_g(c)$.

On dira que y est la **deuxième composante** de c, et l'on notera $y = \pi_d(c)$.

1.2 Produits cartésiens

Proposition 64 (Sur-ensemble des couples)

Soient x, y, A et B quatre ensembles.

Si $x \in A$ et $y \in B$, alors $(x; y) \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B))$.

Définition 19 (Produit cartésien de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.

On appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble
$\{c \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(A \cup B)) \mid \exists a \in A, \exists b \in B, c = (a; b)\}$.
On le note $A \times B$.

Le produit $A \times A$ sera parfois noté A^2.

Pour la petite histoire

• **René Descartes** (1596-1650) est un mathématicien, physicien et philosophe français.

• Il est considéré comme l'un des fondateurs de la philosophie moderne. Il reste célèbre pour avoir exprimé dans son Discours de la méthode, le « *Je pense, donc je suis* » fondant ainsi le système des sciences sur le sujet connaissant face au monde qu'il se représente. En physique, il a apporté une contribution à l'optique et est considéré comme l'un des fondateurs du mécanisme. En mathématiques, il est à l'origine de la géométrie analytique.

• L'adjectif « *cartésien* » dans le nom « *produit cartésien* » provient de son propre nom, car il est l'un des premiers a avoir formulé la notion de coordonnées, que l'on formalise aujourd'hui à l'aide du produit cartésien de deux ensembles.

Proposition 65 (Caractérisation du produit cartésien)

Soient E, F, x et y quatre ensembles.
On a alors $(x;y) \in E \times F \iff (x \in E \text{ et } y \in F)$.

Proposition 66 (Produit cartésien et vide)

Soient A et B deux ensembles.

$A \times B \neq \varnothing \iff (A \neq \varnothing \text{ et } B \neq \varnothing)$.
Ou $A \times B = \varnothing \iff (A = \varnothing \text{ ou } B = \varnothing)$ de manière équivalente.

En particulier, on a $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$, que l'on peut aussi écrire $\varnothing^2 = \varnothing$.

Proposition 67 (Produit cartésien et compatibilité avec l'inclusion)

Soient A, B, A' et B' quatre ensembles.

On a alors :

(1) Si $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$, alors $A \times B \subseteq A' \times B'$.
On dit que le produit cartésien est **compatible** avec l'inclusion.

(2) Si $A \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$, alors $\big(A \times B \subseteq A' \times B' \implies (A \subseteq A' \text{ et } B \subseteq B')\big)$.

Proposition 68 (Egalité entre deux produits cartésiens)

Soient A, B, C et D quatre ensembles **non vides**.

Alors $A \times B = C \times D \iff \big(A = C \text{ et } B = D\big)$.

Proposition 69 (Distributivité du produit cartésien sur l'union)

Soient E, F, E' et F' quatre ensembles.

On a alors :

(1) $(E \times F) \cup (E' \times F) = (E \cup E') \times F$
On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur l'union.

(2) $(E \times F) \cup (E \times F') = E \times (F \cup F')$
On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur l'union.

Proposition 70 (Distributivité du produit cartésien sur l'intersection)

Soient E, F, E' et F' quatre ensembles.

On a alors :

(1) $(E \times F) \cap (E' \times F') = (E \cap E') \times (F \cap F')$

(2) En particulier, $(E \times F) \cap (E' \times F) = (E \cap E') \times F$.
On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur l'intersection.

(3) En particulier, $(E \times F) \cap (E \times F') = E \times (F \cap F')$.

On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur l'intersection.

Proposition 71 (Distributivité du produit cartésien sur la différence)

Soient A, B et C trois ensembles.

On a alors :

1. $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$

   On dit que le produit cartésien est **distributif à droite** sur la différence ensembliste.

2. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$

   On dit que le produit cartésien est **distributif à gauche** sur la différence ensembliste.

2 Relations binaires

2.1 Généralités

Définition 20 (Relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation binaire** si et seulement si tout élément de $\mathcal{R}$ est un couple.

Proposition 72 (Existence d'au moins une relation binaire)

Il existe au moins une relation binaire.

Notation

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient x et y deux ensembles.

Alors on notera $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $(x; y) \in \mathcal{R}$.

Définition 21 (Images et antécédents d'un élément par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient a et b deux ensembles.

- On dit que b est une **image** de a par $\mathcal{R}$ si et seulement si $a\mathcal{R}y$.
- On dit que b est un **antécédent** de a par $\mathcal{R}$ si et seulement si $b\mathcal{R}a$.

Proposition 73 (Caractérisation des relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ un ensemble.

On a alors :

1. Si $\mathcal{R}$ est une relation binaire, alors $\mathcal{R} \subseteq (\bigcup\bigcup\mathcal{R}) \times (\bigcup\bigcup\mathcal{R})$.
2. $\mathcal{R}$ est une relation binaire si et seulement s'il existe au moins deux ensembles E et F tels que $\mathcal{R} \subseteq E \times F$.

Proposition 74 (Égalité entre deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

① $\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \Big(\forall x, \forall y, (x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y)\Big)$.

② Si $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ et $\mathcal{S} \subseteq E \times F$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{S} \iff \forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff x\mathcal{S}y\big)$

Proposition 75 (Définition d'une relation binaire par compréhension)

Soient E et F deux ensembles. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.

Alors il existe une unique relation binaire $\mathcal{R} \subseteq E \times F$

telle que $\forall x \in E, \forall y \in F, \big(x\mathcal{R}y \iff P(x;y)\big)$.

On dit que l'on a défini $\mathcal{R}$ **par compréhension**.

Remarque :

Quand on dispose d'une relation binaire $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ où E et F sont deux ensembles **finis** (on donnera une définition rigoureuse de cela dans le prochain ouvrage), on donne généralement deux représentations visuelles de celle-ci : la représentation **cartésienne**, et la représentation **matricielle**. Il s'agit de représentations utiles pour mieux comprendre la relation.

• Prenons l'exemple de $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b;c;d\}$, puis $\mathcal{R} = \big\{(1;a);(1;d);(3;a);(3;b);(3;d)\big\}$.

• La représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & & \times \\ c & & & \\ b & & & \times \\ a & \times & & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & & \times \\ & & \\ & & \times \\ \times & & \times \end{pmatrix}$.

On met une croix à la ligne j et à la colonne i si et seulement si $i\mathcal{R}j$.

• La représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est alors $\begin{array}{c|c} \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix} & / \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} & \begin{matrix}a\\ b\\ c\\ d\end{matrix}\end{array}$ ou encore $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

On met un 1 à la ligne j et à la colonne i si et seulement si $i\mathcal{R}j$, et un 0 sinon.

Proposition 76 (Inclusion et relations binaires)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit S un ensemble.

Si $S \subseteq \mathcal{R}$, alors S est une relation binaire.

Proposition 77 (L'ensemble vide est une relation binaire)

L'ensemble vide est une relation binaire.

Définition 22 (Identité d'un ensemble)

Soit E un ensemble.

On appelle **identité** de E l'ensemble $\left\{c \in E^2 \;\middle|\; \pi_g(c) = \pi_d(c)\right\}$.

On le note id_E.

Remarque :

Comme $\mathrm{id}_E \subseteq E^2$, c'est une relation d'après la prop. 73 p. 35.

Proposition 78 (Relation identité et égalité)

Soit E un ensemble.

Alors $\forall x \in E, \forall y \in E, \big(x \mathrm{id}_E y \iff x = y\big)$.

Remarque :

Prenons $E = \{1;2;3\}$.

• La représentation cartésienne de id_E est $\left(\begin{array}{c|ccc} 3 & & & \times \\ 2 & & \times & \\ 1 & \times & & \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} & & \times \\ & \times & \\ \times & & \end{pmatrix}$.

• La représentation matricielle de id_E est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 79 (Un produit cartésien est une relation binaire)

Soient E et F deux ensembles.
Alors $E \times F$ est une relation binaire.
En particulier, E^2 est une relation binaire.

Remarque :
Prenons $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{a;b;c;d\}$.

• La représentation cartésienne de $E \times F$ est $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & \times & \times \\ c & \times & \times & \times \\ b & \times & \times & \times \\ a & \times & \times & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix}$.

• La représentation matricielle de $E \times F$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 1 & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.2 Domaine et image d'une relation binaire

Définition 23 (Domaine et image d'une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

• On appelle **domaine** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{x \in \bigcup\bigcup\mathcal{R} \,\middle|\, \exists y, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\operatorname{dom}(\mathcal{R})$.

• On appelle **image** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{y \in \bigcup\bigcup\mathcal{R} \,\middle|\, \exists x, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\operatorname{im}(\mathcal{R})$.

Proposition 80 (Domaine et image d'une relation et minimum)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

1. $\mathcal{R} \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \times \operatorname{im}(\mathcal{R})$
2. $\mathcal{R} \subseteq E \times F$ si et seulement si $\operatorname{dom}(\mathcal{R}) \subseteq E$ et $\operatorname{im}(\mathcal{R}) \subseteq F$.

Proposition 81 (Caractérisation du domaine et de l'image d'une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit a un ensemble.

On a alors :

1. $a \in \operatorname{dom}(\mathcal{R}) \iff \exists y, a\mathcal{R}y$
2. $a \in \operatorname{im}(\mathcal{R}) \iff \exists x, x\mathcal{R}a$

Proposition 82 (Domaine et image de l'ensemble vide)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{R} = \varnothing$
2. $\operatorname{dom}(\mathcal{R}) = \varnothing$
3. $\operatorname{im}(\mathcal{R}) = \varnothing$

Proposition 83 (Domaine et image de l'identité)

Soit E un ensemble.

On a alors :

① $\mathrm{dom}(\mathrm{id}_E) = E$

② $\mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = E$

Proposition 84 (Domaine et image d'un produit cartésien)

Soient E et F deux ensembles **non vides**.

On a alors $\mathrm{dom}(E \times F) = E$ et $\mathrm{im}(E \times F) = F$.

En particulier, on a $\mathrm{dom}(E^2) = E = \mathrm{im}(E^2)$.

2.3 Composition de relations binaires

Définition 24 (Composition de deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On appelle relation composée de $\mathcal{S}$ par $\mathcal{R}$ l'ensemble

$\{c \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \times \mathrm{im}(\mathcal{S}) \mid \exists y, \pi_g(c)\mathcal{R}y \ \text{ et } \ y\mathcal{S}\pi_d(c)\}$.

On le note $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

On notera parfois $\mathcal{R}^2$ à la place de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

Attention !

Il ne faut pas confondre $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ et $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$, qui peuvent parfois se noter tous les deux $\mathcal{R}^2$.

En cas de doute, il sera rappelé de quel ensemble il s'agit.

Proposition 85 (La composition de relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est une relation binaire.

Proposition 86 (Caractérisation de la composition de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et z deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff \exists y, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z)$.

Proposition 87 (Associativité de la composition de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.

On a alors $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$.
On dit que la composition de relations binaires est **associative**.

Proposition 88 (Domaine et image d'une composition de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
On a alors :

1. $\operatorname{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{R})$
2. Si $\operatorname{im}(\mathcal{R}) \subseteq \operatorname{dom}(\mathcal{S})$, alors $\operatorname{dom}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \operatorname{dom}(\mathcal{R})$.

3. $\operatorname{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) \subseteq \operatorname{im}(\mathcal{S})$
4. Si $\operatorname{im}(\mathcal{R}) \supseteq \operatorname{dom}(\mathcal{S})$, alors $\operatorname{im}(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = \operatorname{im}(\mathcal{S})$.

Définition 25 (Relations binaires qui commutent)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$.
On dit que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ **commutent** (pour la composition) si et seulement si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Exemple :
Une relation binaire $\mathcal{R}$ commute avec elle-même.

Proposition 89 (L'ensemble vide commute avec toute relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Alors $\mathcal{R} \circ \varnothing = \varnothing = \varnothing \circ \mathcal{R}$.

Ainsi, $\varnothing$ est **absorbant** pour la composition de relations binaires.

2.4 Transposée d'une relation binaire

Définition 26 (Transposé d'un couple)

Soit c un couple.

On appelle **transposé** de c le couple $\big(\pi_d(c); \pi_g(c)\big)$.

On le note ${}^t c$.

Proposition 90 (Autre écriture du transposé d'un couple)

Soient x et y deux ensembles.

Alors ${}^t(x; y) = (y; x)$.

Proposition 91 (Transposé d'un couple et produit cartésien)

Soient E, F, x et y quatre ensembles. Soit c un couple.

On a alors :

1. $(x; y) \in E \times F \iff (y; x) \in F \times E$
2. En particulier, $(x; y) \in E^2 \iff (y; x) \in E^2$
3. $c \in E \times F \iff {}^t c \in F \times E$
4. En particulier, $c \in E^2 \iff {}^t c \in E^2$.

Définition 27 (Transposée d'une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On appelle **transposée** de $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{c \in \left(\bigcup\bigcup\mathcal{R}\right)^2 \;\middle|\; {}^t c \in \mathcal{R}\right\}$.
On le note ${}^t\mathcal{R}$.

Proposition 92 (La transposée d'une relation est une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

Alors ${}^t\mathcal{R}$ est une relation binaire.

Proposition 93 (Caractérisation de la relation transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x\,{}^t\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.

Remarque :

• Prenons à nouveau l'exemple de $E = \{1; 2; 3\}$ et $F = \{a; b; c; d\}$, puis $\mathcal{R} = \left\{(1; a); (1; d); (3; a); (3; b); (3; d)\right\}$.
On a donc ${}^t\mathcal{R} = \left\{(a; 1); (d; 1); (a; 3); (b; 3); (d; 3)\right\}$.

• On avait dit que la représentation cartésienne de $\mathcal{R}$ est $\left(\begin{array}{c|ccc} d & \times & & \times \\ c & & & \\ b & & & \times \\ a & \times & & \times \\ \hline / & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & \times \\ & \\ & \times \\ \times & \times \end{pmatrix}$.

La représentation cartésienne de ${}^t\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{c|cccc} 3 & \times & \times & & \times \\ 2 & & & & \\ 1 & \times & & & \times \\ \hline / & a & b & c & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ & & \\ \times & & \times \end{pmatrix}$.

On a donc effectué une espèce de symétrie par rapport à la diagonale $\diagup$.

• On avait dit que la représentation matricielle de $\mathcal{R}$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & / \\ \hline 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La représentation matricielle de ${}^t\mathcal{R}$ est alors $\left(\begin{array}{cccc|c} a & b & c & d & / \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ ou encore $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc effectué une espèce de symétrie par rapport à la diagonale $\diagdown$.

Proposition 94 (Involution de la transposition)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors ${}^t({}^t\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

On dit que le passage à la transposée est **involutif**.

Proposition 95 (Domaine et image de la relation transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}\left({}^t\mathcal{R}\right) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$
2. $\mathrm{im}\left({}^t\mathcal{R}\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$

Proposition 96 (Transposée d'une composition de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors ${}^t(\mathcal{S} \circ \mathcal{R}) = {}^t\mathcal{R} \circ {}^t\mathcal{S}$.

Proposition 97 (Transposée de relations particulières)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

1. ${}^t\varnothing = \varnothing$
2. ${}^t\mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E$
3. ${}^t(E \times F) = F \times E$

2.5 Image directe par une relation binaire

Définition 28 (Image directe d'un ensemble par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **image directe** de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{ y \in \mathrm{im}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists x \in E, x\mathcal{R}y \right\}$.
On le note $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$.

Remarque :
Pour x un ensemble, l'image directe $\mathcal{R}^{\rightarrow}\big(\{x\}\big)$ est l'ensemble des images de x par $\mathcal{R}$.

Proposition 98 (Caractérisation de l'image directe par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et y deux ensembles.

On a alors $y \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \iff \exists x \in E, x\mathcal{R}y$.

Proposition 99 (Images directes particulières)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $\mathcal{R}^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{im}(\mathcal{R})$
2. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}\big(E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R})\big)$
3. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(\varnothing) = \varnothing$
4. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$

Proposition 100 (Croissance de l'image directe par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

(1) Si $E \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(F)$.

On dit que l'image directe par une relation binaire est **croissante** pour l'inclusion.

(2) En particulier, si $\operatorname{dom}(\mathcal{R}) \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(F) = \operatorname{im}(\mathcal{R})$.

Proposition 101 (Image directe par une relation, union et intersection)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

(1) $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$

On dit que le passage à l'image directe par une relation est un **morphisme** pour l'union.

(2) $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$

On dit que le passage à l'image directe par une relation est un **sous-morphisme** pour l'intersection.

Remarque :

L'inclusion réciproque de (2) est fausse en toute généralité.

En effet, prenons $\mathcal{R} := \big\{(0;2);(1;2)\big\}$. On a donc uniquement $0\mathcal{R}2$ et $1\mathcal{R}2$.

Posons alors $A := \{0\}$ et $B := \{1\}$. On a bien $2 \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A)$ puisque $0\mathcal{R}2$.

On a aussi $2 \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$ puisque $1\mathcal{R}2$. On a donc $2 \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\rightarrow}(B)$.

Cependant, on a pas $2 \in \mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B)$ puisque $A \cap B = \varnothing$ donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(A \cap B) = \varnothing$ d'après la prop. 99 p. 45.

Proposition 102 (Image directe par une relation et composition)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

Alors $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{S}^{\rightarrow}\big(\mathcal{R}^{\rightarrow}(E)\big)$.

Proposition 103 (Image directe par la relation vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\varnothing^{\rightarrow}(E) = \varnothing$.

Proposition 104 (Image directe par l'identité)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors $\mathrm{id}_E{}^{\rightarrow}(F) = E \cap F$.

Proposition 105 (Image directe par un produit cartésien)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. si $E \cap G \neq \varnothing$, alors $(E \times F)^{\rightarrow}(G) = F$.
2. si $E \cap G = \varnothing$, alors $(E \times F)^{\rightarrow}(G) = \varnothing$.

2.6 Image réciproque par une relation binaire

Définition 29 (Image réciproque d'un ensemble par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **image réciproque** de E par $\mathcal{R}$ l'ensemble $\left\{x \in \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \;\middle|\; \exists y \in E, x\mathcal{R}y\right\}$.
On le note $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$.

Remarque :
Pour y un ensemble, l'image réciproque $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ est l'ensemble des antécédents de y par $\mathcal{R}$.

Proposition 106 (Image directe et réciproque par une relation et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

① $({}^t\mathcal{R})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$

② $({}^t\mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$

Proposition 107 (Caractérisation de l'image réciproque par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et x deux ensembles.

On a alors $x \in \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \iff \exists y \in E, x\mathcal{R}y$.

Proposition 108 (Images réciproques particulières par une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On a alors :

① $\mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathrm{im}(\mathcal{R})\big) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$

② $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$

③ $\mathcal{R}^{\leftarrow}(\varnothing) = \varnothing$

④ $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \neq \varnothing \iff E \cap \mathrm{im}(\mathcal{R}) \neq \varnothing$

Proposition 109 (Croissance de l'image réciproque par une relation binaire)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles.

On a alors :

① Si $E \subseteq F$, alors $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(F)$.
On dit que l'image réciproque par une relation binaire est **croissante** pour l'inclusion.

② En particulier, si $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq E$, on a $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) = \mathrm{dom}(\mathcal{R})$.

Proposition 110 (Image réciproque par une relation, union et intersection)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient A et B deux ensembles.

On a alors :

(1) $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cup B) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cup \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)$.
On dit que l'image réciproque par une relation binaire est un **morphisme** pour l'union.

(2) $\mathcal{R}^{\leftarrow}(A \cap B) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(A) \cap \mathcal{R}^{\leftarrow}(B)$.
On dit que l'image réciproque par une relation binaire est un **sous-morphisme** pour l'intersection.

Proposition 111 (Image réciproque par une relation et composition)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

On a alors $(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}\big(\mathcal{S}^{\leftarrow}(E)\big)$.

Proposition 112 (Image réciproque par la relation vide)

Soit E un ensemble.

On a alors $\varnothing^{\leftarrow}(E) = \varnothing$.

Proposition 113 (Image réciproque par l'identité)

Soient E et F deux ensembles.

On a alors $\mathrm{id}_E{}^{\leftarrow}(F) = E \cap F$.

Proposition 114 (Image réciproque par un produit cartésien)

Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

(1) Si $F \cap G \neq \varnothing$, alors $(E \times F)^{\leftarrow}(G) = E$.

(2) Si $F \cap G = \varnothing$, alors $(E \times F)^{\leftarrow}(G) = \varnothing$.

2.7 Union de relations binaires

Proposition 115 (L'union de deux relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est une relation binaire.

Proposition 116 (Caractérisation de l'union de deux relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})y \iff \big(x\mathcal{R}y \;\text{ ou }\; x\mathcal{S}y\big)$.

Proposition 117 (Relation transposée d'une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors ${}^t(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = {}^t\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{S}$.

On dit que le passage à la transposée est un **morphisme** pour l'union.

Proposition 118 (Domaine et image d'une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{dom}(\mathcal{S})$
   On dit que le passage au domaine d'une relation est un **morphisme** pour l'union.

2. $\mathrm{im}(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cup \mathrm{im}(\mathcal{S})$
   On dit que le passage à l'image d'une relation est un **morphisme** pour l'union.

Proposition 119 (Distributivité de la composition sur l'union)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.

On a alors :

1. $\mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) = (\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{T})$.

On dit que la composition est **distributive à gauche** sur l'union.

② $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = (\mathcal{R} \circ \mathcal{T}) \cup (\mathcal{S} \circ \mathcal{T})$.
On dit que la composition est **distributive à droite** sur l'union.

D'une manière plus générale, du fait de la distributivité à gauche et à droite de la composition sur l'union, on dit que la composition est **distributive** sur l'union.

Proposition 120 (Images directe et réciproque par une union de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.
On a alors :

① $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$

② $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{\leftarrow}(E) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \cup \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

2.8 Intersection de relations binaires

Proposition 121 (L'intersection de deux relations est une relation)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
Alors $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une relation binaire.

Proposition 122 (Caractérisation de l'intersection de deux relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soient x et y deux ensembles.

On a alors $x(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } x\mathcal{S}y)$.

Proposition 123 (Transposée d'une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
On a alors ${}^t(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = ({}^t\mathcal{R}) \cap ({}^t\mathcal{S})$.
On dit que le passage à la relation transposée est un **morphisme** pour l'intersection.

Proposition 124 (Domaine et image d'une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S})$
2. $\mathrm{im}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{im}(\mathcal{S})$

Remarque :

Les inclusions réciproques sont fausses : prenons $\mathcal{R} = \{(1;2)\}$ et $\mathcal{S} = \{(1;3)\}$.

On a donc $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \varnothing$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) = \mathrm{dom}(\varnothing) \underset{82\text{ p. }39}{=} \varnothing$.

Mais $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) = \{1\} = \mathrm{dom}(\mathcal{S})$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S}) = \{1\} \cap \{1\} = \{1\}$.

Or, $1 \in \{1\}$ donc $\{1\} \neq \varnothing$ $\underset{11\text{ p. }8}{\text{donc}}$ $\{1\} \not\subseteq \varnothing$ donc $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap \mathrm{dom}(\mathcal{S}) \not\subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$.

Proposition 125 (Images directes et réciproques par une intersection de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

On a alors :

1. $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cap \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$
2. $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \cap \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

Remarque :

Les inclusions réciproques ne sont pas vraies en toute généralité.

Prenons l'exemple de $\mathcal{R} = \{(1;3)\}$, $\mathcal{S} = \{(2;3)\}$ et $E = \{1;2\}$.

On a alors $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) = \{3\} = \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$ donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cap \mathcal{S}^{\rightarrow}(E) = \{3\} \cap \{3\} \underset{37\text{ p. }19}{=} \{3\}$.

Mais $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \varnothing$ donc $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\rightarrow}(E) = \varnothing^{\rightarrow}(E) \underset{112\text{ p. }49}{=} \varnothing$.

Comme $3 \in \{3\}$, on a $\{3\} \neq \varnothing$ $\underset{11\text{ p. }8}{\text{donc}}$ $\{3\} \not\subseteq \varnothing$ donc $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \cap \mathcal{S}^{\rightarrow}(E) \not\subseteq (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{\rightarrow}(E)$.

2.9 Restrictions et prolongements de relations binaires

Définition 30 (Restriction et prolongement de relations binaires)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **restriction** de $\mathcal{S}$ si et seulement si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.
On dit aussi que $\mathcal{S}$ est un **prolongement** de $\mathcal{R}$.

Proposition 126 (Union et prolongement de relations)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.
On a alors :

1. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est un prolongement commun à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

2. Si $\mathcal{T}$ est un prolongement commun à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}$ est un prolongement de $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$.
   On dit que $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ est **minimum** pour l'inclusion,
   parmi les prolongements communs à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

Proposition 127 (Intersection et restriction de relations)

Soient $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ trois relations binaires.
On a alors :

1. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est une restriction commune à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

2. Si $\mathcal{T}$ est une restriction commune à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$, alors $\mathcal{T}$ est une restriction de $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.
   On dit que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est **maximum** pour l'inclusion,
   parmi les restrictions communes à $\mathcal{R}$ et à $\mathcal{S}$.

Proposition 128 (Caractérisation des restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.
Alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ si et seulement $\forall x, \forall y, \big(x\mathcal{R}y \implies x\mathcal{S}y\big)$.

Proposition 129 (Domaine, images et restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires. Soit E un ensemble.

Supposons que $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$.

On a alors :

1. $\mathrm{dom}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{dom}(\mathcal{S})$
2. $\mathrm{im}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{im}(\mathcal{S})$
3. $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\rightarrow}(E)$
4. $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E) \subseteq \mathcal{S}^{\leftarrow}(E)$

Proposition 130 (Transposée et restrictions de relations)

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires.

Alors $\mathcal{R}$ est une restriction de $\mathcal{S}$ si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est une restriction de ${}^t\mathcal{S}$.

Autrement dit, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \iff {}^t\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{S}$.

Définition 31 (Restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

On appelle **restriction** de $\mathcal{R}$ à E la relation $\mathcal{R} \cap \big(E \times \mathrm{im}(\mathcal{R})\big)$.

On la note $\mathcal{R}_{|E}$.

Proposition 131 (La restriction d'une relation à un ensemble est une restriction)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

Alors $\mathcal{R}_{|E}$ est une restriction de $\mathcal{R}$.

Proposition 132 (Caractérisation de la restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E, x et y trois ensembles.

On a alors $x(\mathcal{R}_{|E})y \iff \big(x \in E \text{ et } x\mathcal{R}y\big)$.

Proposition 133 (Identité et restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soit E un ensemble.

Alors $\mathcal{R} \circ \mathrm{id}_E = \mathcal{R}_{|E}$.

Proposition 134 (Domaine et images de la restriction d'une relation à un ensemble)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Soient E et F deux ensembles. On a alors :

1. $\mathrm{dom}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \mathrm{dom}(\mathcal{R}) \cap E$
2. $\mathrm{im}\left(\mathcal{R}_{|E}\right) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$
3. ${\mathcal{R}_{|E}}^{\rightarrow}(F) = \mathcal{R}^{\rightarrow}(E \cap F)$
4. ${\mathcal{R}_{|E}}^{\leftarrow}(F) = \mathcal{R}^{\leftarrow}(F) \cap E$

Chapitre 3

Applications

Note de l'auteur

Ce chapitre introduit la notion d'applications, qui sont des relations particulières. Elles permettent notamment de modéliser les notions de transformations (prenant un objet, et donnant un autre en retour), la dépendance de grandeurs en physique, ou bien encore les opérations comme l'addition ou la multiplication. Ainsi, comme tous les chapitres de ce polycopié, ce chapitre est fondamental et indispensable pour toute la suite.

Sommaire

1 Généralités

1.1 Applications

Définition 32 (Application)

Soit f une relation binaire.

• On dit que f est une **application** si et seulement $\forall x, \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.
Autrement dit, tout élément x admet au plus une image par f.
Pour $x \in \operatorname{dom}(f)$, on notera alors $f(x)$ l'unique y tel que xfy.

• Pour deux ensembles E et F, on dit que f est une application de E dans F si et seulement si :

1. f est une application
2. $\operatorname{dom}(f) = E$
3. $\operatorname{im}(f) \subseteq F$

On notera alors $f : E \to F$.
Ainsi, $\forall x \in E, f(x) \in F$.

Voyons tout de suite une version légèrement différente de la définition d'une application.

Proposition 135 (Caractérisation des applications parmi les relations)

Soit f une relation binaire.
Alors f est une application si et seulement si $\forall x \in \operatorname{dom}(f), \forall y, \forall y', \big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\big)$.

La proposition suivante va nous prouver qu'il existe au moins une application, et nous en donner un exemple par la même occasion.

Proposition 136 (La relation vide est une application)

$\varnothing$ est une application.
En particulier, il existe au moins une application. De plus, on a $\varnothing : \varnothing \to \varnothing$.

Mieux encore, nous avons le droit à une application $f : E \to F$ pour tout ensembles E et F, pour peu qu'ils respectent une certaine condition.

Proposition 137 (Existence d'une application d'un ensemble vers un autre

Soient E et F deux ensembles.

$E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$ si et seulement s'il existe au moins une application $f : E \to F$.

Proposition 138 (Application d'un ensemble vers un autre)

Soit f une application. Soient E, F et G trois ensembles.

On a alors :

1. $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathrm{im}(f)$
2. Si $f : E \to F$ et $F \subseteq G$, alors $f : E \to G$.

Proposition 139 (Égalité entre deux applications)

Soit E un ensemble. Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{dom}(f) = E = \mathrm{dom}(g)$.

On a alors $f = g \iff \forall x \in E, f(x) = g(x)$.

On appelle cette équivalence **l'extensionnalité fonctionnelle**.

Proposition 140 (Unique application du vide dans les autres ensembles)

Soit F un ensemble. Soit f une application.

Alors $f : \varnothing \to F \iff f = \varnothing$.

Proposition 141 (Définition d'une application par une expression)

Soient E et F deux ensembles.

Soit $A(x)$ une expression définie pour tout $x \in E$, et telle que $\forall x \in E, A(x) \in F$.

Alors il existe une unique application $f : E \to F$ telle que $\forall x \in E, f(x) = A(x)$.

On la note alors $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$

Notation

Dans la notation $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}$, la variable x est dite « muette ».

Cela veut dire que l'on peut la remplacer par n'importe quel caractère autre que x, sans que cela ne change quoi que ce soit.

Il faut bien entendu prendre garde à ne pas utiliser un caractère déjà utilisé, au risque de produire un contre-sens.

Ainsi, $\left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & A(x) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ y & \longmapsto & A(y) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ z & \longmapsto & A(z) \end{array}\right)$.

Définition 33 (Ensemble des applications d'un ensemble dans un autre)

Soient E et F deux ensembles.

On appelle **ensemble des applications** de E dans F l'ensemble $\left\{f \in \mathscr{P}(E \times F) \,\middle|\, f : E \to F\right\}$.

On le notera $\mathcal{A}(E \to F)$ ou encore F^E.

Proposition 142 (Caractérisation de l'ensemble des applications)

Soient E et F deux ensembles. Soit f un ensemble.

On a alors $f \in \mathcal{A}(E \to F) \iff f : E \to F$.

Remarque :

D'après la proposition 137 page 59, si $E = \varnothing$ ou $F \neq \varnothing$, alors $\mathcal{A}(E \to F) \neq \varnothing$.

De plus, d'après la proposition 140 page 59, on a $\mathcal{A}(\varnothing \to F) = \{\varnothing\}$.

Définition 34 (Point fixe d'une application)

Soit f une application. Soit x un ensemble.

On dit que x est un **point fixe** de f si et seulement si $x \in \operatorname{dom}(f)$ et $f(x) = x$.

On note alors $\operatorname{Fix}(f) := \left\{x \in \operatorname{dom}(f) \,\middle|\, f(x) = x\right\}$ l'ensemble des points fixes de f.

1.2 Applications particulières

Proposition 143 (L'identité est une application)

Soit E un ensemble.

On a alors $\mathrm{id}_E : E \to E$, et $\forall x \in E, \mathrm{id}_E(x) = x$.

Proposition 144 (Ensemble des points fixes de l'identité)

Soit E un ensemble.

Alors $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}_E) = E$.

Proposition 145 (L'identité sur le vide est le vide)

On a $\mathrm{id}_\varnothing = \varnothing$.

Définition 35 (Application constante)

Soit f une application.

On dit que f est **constante** si et seulement si $\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall y \in \mathrm{dom}(f), f(x) = f(y)$.

Proposition 146 (Caractérisation des applications constantes)

Soit f une application.

Alors f est constante si et seulement s'il existe au moins un ensemble c tel que $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f(x) = c$.

Dans ce cas-là, c est unique si et seulement si $f \neq \varnothing$.

On dit alors que c est la **valeur** de f.

Proposition 147 (Existence d'au moins une application constante)

1. Il existe au moins une application constante.

2. Soit c un ensemble.

Il existe au moins une application constante de valeur c.

③ Soit E un ensemble. Soit F un ensemble non vide. Soit $y_0 \in F$.
Il existe une unique application $E \to F$ de valeur y_0.

Définition 36 (Projections cartésiennes)

Soient E et F deux ensembles.

• On appelle **projection cartésienne gauche** de $E \times F$ l'application $\left(\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & E \\ c & \longmapsto & \pi_g(c) \end{array}\right)$.

Autrement dit, il s'agit de l'application $\left(\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x;y) & \longmapsto & x \end{array}\right)$.

• On appelle **projection cartésienne droite** de $E \times F$ l'application $\left(\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & F \\ c & \longmapsto & \pi_d(c) \end{array}\right)$.

Autrement dit, il s'agit de l'application $\left(\begin{array}{rcl} E \times F & \longrightarrow & F \\ (x;y) & \longmapsto & y \end{array}\right)$.

1.3 Axiome du choix

Axiome 7 (du choix)

Soit E un ensemble. Soit $X := E \backslash \{\varnothing\}$.
Alors il existe au moins une application $f : X \to \bigcup X$ telle que $\forall A \in X, f(A) \in A$.
On dit que f est une **fonction de choix** sur E.

Pour la petite histoire

Ernst Zermelo (1871-1953) est un mathématicien allemand. Il s'est principalement intéressé aux fondations des mathématiques et à la philosophie. Il a donné des développements importants à la théorie des ensembles et fut un des précurseurs de la théorie des jeux.

L'axiome du choix a pour la première fois été formulé par Ernst Zermelo en 1904 pour la démonstration du théorème de Zermelo que nous verrons au chapitre **??**.

Théorème 1 (Axiome du choix version ensemble des parties)

Soit E un ensemble.
Alors il existe au moins une application $f : \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\} \to E$
telle que $\forall A \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}, f(A) \in A$.

Remarque :
On aurait pu prendre ce théorème comme axiome et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version". Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le système d'axiome considéré sans l'axiome du choix.

Remarque :
Dans tout les polycopiés de cette collection, l'axiome du choix sera supposé.

2 Composition d'applications

2.1 Composition

Proposition 148 (La composition d'applications est une application)

Soient f et g deux applications. Alors $g \circ f$ est une application.

Proposition 149 (Composition d'applications, domaine et images)

Soient f et g deux applications telles que que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$.
Alors $g \circ f : \operatorname{dom}(f) \to \operatorname{im}(g)$.

Plus précisément, on a $\operatorname{im}(g \circ f) = g^{\rightarrow}\big(\operatorname{im}(f)\big)$.
En particulier, si $\operatorname{im}(f) = \operatorname{dom}(g)$, alors $\operatorname{im}(g \circ f) = \operatorname{im}(g)$.

Remarque :
Ainsi, si on a $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors $g \circ f : E \to G$.
En particulier, si $f : E \to E$ et $g : E \to E$, alors $g \circ f : E \to E$.
Autrement dit, si $f \in \mathcal{A}(E \to E)$ et si $g \in \mathcal{A}(E \to E)$, alors $g \circ f \in \mathcal{A}(E \to E)$.

Proposition 150 (Autre écriture de l'image par une composition)

Soient f et g deux applications telles que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$.
Alors $\forall x \in \operatorname{dom}(f), (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

Remarque :
Ainsi, on a $g \circ f : \left(\begin{array}{rcl} \operatorname{dom}(f) & \longrightarrow & \operatorname{im}(g) \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}\right)$.

Proposition 151 (Neutralité de l'identité pour la composition)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

On a alors :

1. $f \circ \mathrm{id}_E = f$.
2. $\mathrm{id}_F \circ f = f$

2.2 Inverses pour la composition

Définition 37 (Inverses à gauche et à droite d'une application)

Soit f une application.

1. On dit que f est **inversible à gauche** si et seulement s'il existe au moins une application $g : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$.
   On dit alors que g est un **inverse à gauche** de f.

2. On dit que f est **inversible à droite** si et seulement s'il existe au moins une application $h : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $f \circ h = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$.
   On dit alors que h est un **inverse à droite** de f.

3. On dit que f est **inversible** si et seulement si f est inversible à gauche et f est inversible à droite.

Proposition 152 (L'application vide est inversible)

L'application $\varnothing$ est inversible.

Proposition 153 (Existence et unicité des inverses)

Soit f une application.

1. Les inverses à gauche de f sont uniques sous réserve d'existence.

2. Les inverses à droite de f existent toujours sans garanti d'unicité.

3. On a équivalence entre les trois assertions suivantes :
   a) f est inversible à gauche
   b) f possède un unique inverse à droite
   c) f est inversible

   Lorsque ces assertions sont vérifiées, alors l'unique inverse à droite de f est aussi l'unique inverse à gauche de f.

Définition 38 (Inverse d'une application)

Soit f une application.
Supposons que f soit **inversible**.
Alors d'après la proposition précédente, il existe une application qui est à la fois l'unique inverse à gauche de f, et aussi l'unique inverse à droite de f.
On l'appellera **inverse** de f, et on la notera f^{-1}.

Ainsi, on a $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ telle que $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathrm{dom}(f)}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathrm{im}(f)}$, et c'est la seule application $\mathrm{im}(f) \to \mathrm{dom}(f)$ qui vérifie au moins l'une de ces deux égalités (toujours à condition que f soit inversible bien entendu).

Proposition 154 (Caractérisation de l'inverse d'une application)

Soit f une application inversible.
On a alors :

1. $\forall x \in \mathrm{dom}(f), f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.
2. $\forall y \in \mathrm{im}(f), f\big(f^{-1}(y)\big) = y$.

Proposition 155 (Inverse et transposée)

Soit f une application.

1. Si f est inversible, alors $\forall x, \forall y, \big(y = f(x) \iff f^{-1}(y) = x\big)$.
2. Si f est inversible, alors $f^{-1} = {}^{t}f$.
3. f est inversible si et seulement si ${}^{t}f$ est une application.

Proposition 156 (L'application identité est inversible)

Soit E un ensemble.

Alors id_E est inversible, et $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$.

Proposition 157 (Involution du passage à l'inverse)

Soit f une application inversible.

Alors f^{-1} est inversible, et on a alors $(f^{-1})^{-1} = f$.

On dit que le passage à l'inverse est **involutif**.

Proposition 158 (Inversibilité et composition)

Soient f et g deux applications.

1. Si f et g sont inversibles, alors $g \circ f$ est inversible.
   Dans ce cas-là, on a $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Réciproquement, si $g \circ f$ est inversible
   a. et si $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$, alors f est inversible.
   b. et si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors f et g sont inversibles.

3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définition 39 (Injectivité)

Soit f une application.

• On dit que f est **injective**, ou encore que f est une **injection**, si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$$

ou de manière équivalente

$$\forall x \in \mathrm{dom}(f), \forall x' \in \mathrm{dom}(f), \big(x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')\big)$$

• Ainsi, f est injective si intuitivement « *tout élément de* $\mathrm{im}(f)$ *est atteint au plus une fois* ».

• Pour deux ensembles E et F tels que $f : E \to F$, on note alors parfois $f : E \hookrightarrow F$.

Proposition 159 (Injectivité de l'identité et du vide)

1. Pour tout ensemble E, l'application id_E est injective.
2. En particulier, $\varnothing$ est injective.

Proposition 160 (Equivalence entre injectivité et inversiblité à gauche)

Soit f une application.
Alors f est injective si et seulement si f est inversible à gauche.

Du fait de l'équivalence entre inversibilité à gauche et inversibilité (prop. 153 page 65), on peut aussi affirmer que f est injective si et seulement si f est inversible.

Proposition 161 (Injectivité et composition)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

(2) Réciproquement, si $g \circ f$ est injective,

(a) alors f est injective.

(b) et si $\mathrm{im}(f) = \mathrm{dom}(g)$, alors f et g sont injectives.

Définition 40 (Surjectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble.

• On dit que f est **surjective** dans F si et seulement si $\mathrm{im}(f) = F$.
Autrement dit, dans le cas où tout élément de F est « atteint au moins une fois par f ».
Ainsi, $\forall y \in F, \exists x \in \mathrm{dom}(f), y = f(x)$.

• On dit aussi que f est une **surjection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.
On notera alors parfois $f : \mathrm{dom}(f) \twoheadrightarrow F$.

Proposition 162 (Surjectivité et composition)

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$.
Si f est surjective dans $\mathrm{dom}(g)$, alors $g \circ f$ est surjective dans $\mathrm{im}(g)$.

Définition 41 (Bijectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble.

• On dit que f est **bijective** dans F si et seulement si :

- f est injective
- et f est surjective dans F.

Autrement dit, dans le cas où tout élément de F « est atteint une et une seule fois par f ».

• On dit aussi que f est une **bijection** de $\mathrm{dom}(f)$ dans F.
On notera alors parfois $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} F$.

• Pour tout ensemble E, une bijection de E dans E est aussi appelée **permutation** de E.

Remarque :

Dire que f est injective (donc inversible à gauche, et donc inversible), c'est la même chose que de dire que f est bijective de $\mathrm{dom}(f)$ dans $\mathrm{im}(f)$.

Notation

Soient E et F deux ensembles.

• On notera $\mathrm{Inj}\,(E \to F)$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \mid f : E \hookrightarrow F\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications injectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Surj}\,(E \to F)$ l'ensemble $\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \mid f : E \twoheadrightarrow F\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications surjectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Bij}\,(E \to F)$, ou encore $\mathfrak{S}(E \to F)$, l'ensemble $\left\{f \in \mathcal{A}\,(E \to F) \,\middle|\, f : E \xrightarrow{\sim} F\right\}$,
c'est-à-dire l'ensemble des applications bijectives $E \to F$.

• On notera $\mathrm{Bij}(E)$, ou encore $\mathfrak{S}(E)$, l'ensemble $\mathrm{Bij}\,(E \to E)$,
c'est-à-dire l'ensemble des permutations de E.

Proposition 163 (Bijectivité de l'identité)

Soit E un ensemble. Alors $\mathrm{id}_E : E \xrightarrow{\sim} E$.

Proposition 164 (Bijectivité de l'inverse)

Soit f une application.
Si $f : \mathrm{dom}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{im}(f)$ alors $f^{-1} : \mathrm{im}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{dom}(f)$.
Cela justifie l'autre nom de l'inverse de f : on l'appelle aussi **bijection réciproque**.

En particulier, pour E un ensemble, si $f : E \xrightarrow{\sim} E$, alors $f^{-1} : E \xrightarrow{\sim} E$.

Proposition 165 (Bijectivité et composition)

Soient f et g deux applications. Soient E, F et G trois ensembles.
Si $f : E \xrightarrow{\sim} F$ et si $g : F \xrightarrow{\sim} G$, alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} G$.

En particulier, si $f : E \xrightarrow{\sim} E$ et si $g : E \xrightarrow{\sim} E$, alors $g \circ f : E \xrightarrow{\sim} E$.
Autrement dit, si $f \in \mathrm{Bij}(E)$ et $g \in \mathrm{Bij}(E)$, alors $g \circ f \in \mathrm{Bij}(E)$.

Proposition 166 (Applications inversibles et bijections)

Soient E et F deux ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to E$.
Si $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, alors :

1. f est bijective dans F.
2. g est bijective dans E.
3. f et g sont réciproques l'une de l'autre.

4 Images directes et images réciproques

4.1 Images directes

Proposition 167 (Caractérisation de l'image directe par une application)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$. Soit y un ensemble.
On a alors l'équivalence $y \in f^{\rightarrow}(A) \iff \exists x \in A, y = f(x)$.
Ainsi, $\forall a \in A, f(a) \in f^{\rightarrow}(A)$.

En particulier, $y \in \mathrm{im}(f) \iff \exists x \in \mathrm{dom}(f), y = f(x)$.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'image directe $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$ pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ et tout ensemble E. Ici, nous allons regarder cela dans le cas où $\mathcal{R}$ est une application. Nous allons alors pouvoir définir une autre application qui à un ensemble E (partie de $\mathrm{dom}(\mathcal{R})$) associe $\mathcal{R}^{\rightarrow}(E)$, et donc appeler $\mathcal{R}^{\rightarrow}$ cette nouvelle application.

Définition 42 (Application image directe)

Soit f une application.

On peut alors définir l'application suivante : $f^{\rightarrow} : \left(\begin{array}{rcl} \mathscr{P}(\mathrm{dom}(f)) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{im}(f)) \\ A & \longmapsto & f^{\rightarrow}(A) \end{array}\right)$.

Proposition 168 (Application image directe et identité)

Soit E un ensemble.
On a alors ${\mathrm{id}_E}^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

Proposition 169 (Image directe d'une paire et d'un singleton)

Soit f une application. Soient a et b deux ensembles.

1. Si $a \in \mathrm{dom}(f)$ et $b \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f^{\rightarrow}\Big(\{a; b\}\Big) = \Big\{f(a); f(b)\Big\}$.
2. En particulier, si $a \in \mathrm{dom}(f)$, alors $f^{\rightarrow}\Big(\{a\}\Big) = \Big\{f(a)\Big\}$.

Proposition 170 (Image directe d'une application et vide)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$.

Alors $f^{\rightarrow}(A) = \varnothing \iff A = \varnothing$.

On a déjà vu lors de la proposition 101 page 46 que $f^{\rightarrow}(A \cup B) = f^{\rightarrow}(A) \cup f^{\rightarrow}(B)$ et $f^{\rightarrow}(A \cap B) \subseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$. Il est temps de voir quand est-ce que l'on a $f^{\rightarrow}(A \cap B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)$.

Proposition 171 (Image directe par une application et intersection)

Soit f une application.

On a alors l'équivalence suivante :

$\Big(\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\rightarrow}(A \cap B) \supseteq f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big) \iff f$ est injective.

En particulier, du fait de la proposition 101 page 46, on a l'équivalence :

$\Big(\forall A \subseteq \mathrm{dom}(f), \forall B \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\rightarrow}(A \cap B) = f^{\rightarrow}(A) \cap f^{\rightarrow}(B)\Big) \iff f$ est injective.

Proposition 172 (Complémentaire et image directe)

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.

On a alors :

1. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}(E \backslash A) \subseteq F \backslash f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est injective
2. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}(E \backslash A) \supseteq F \backslash f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est surjective dans F
3. $\Big(\forall A \subseteq E, f^{\rightarrow}(E \backslash A) = F \backslash f^{\rightarrow}(A)\Big) \iff f$ est bijective dans F

Proposition 173 (Image de l'application image directe)

Soit f une application.

Alors $\mathrm{im}\left(f^{\rightarrow}\right) = \mathscr{P}\left(\mathrm{im}(f)\right)$.

Autrement dit, $f^{\rightarrow} : \mathscr{P}\left(\mathrm{dom}(f)\right) \twoheadrightarrow \mathscr{P}\left(\mathrm{im}(f)\right)$.

Proposition 174 (Image directe d'une composition d'applications)

Soient f et g deux applications telles que $\operatorname{im}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$.
On a alors $(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}$.

On dit que le passage à l'application image directe est un **morphisme** pour la composition.

Proposition 175 (Application image directe et inversibilité)

Soit f une application.
Alors f est inversible si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est inversible.
Dans ce cas-là, on a alors $\left(f^{\rightarrow}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{\rightarrow}$.

Proposition 176 (Image directe d'un ensemble et bijection réciproque)

Soit f une application inversible.
Soient A une partie de $\operatorname{dom}(f)$, et $y \in \operatorname{im}(f)$.
On a alors $f^{-1}(y) \in A \iff y \in f^{\rightarrow}(A)$.

Proposition 177 (Application image directe et jectivité)

Soit f une application. Soit F un ensemble. On a alors :

1. f est injective si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est injective.
2. f est surjective dans F si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(F)$.
3. f est bijective dans F si et seulement si $f^{\rightarrow}$ est bijective dans $\mathscr{P}(F)$.

Une question enfin que l'on peut se poser est de savoir si une application image directe n'est issue que d'une seule application : la réponse est oui, comme le montre cette proposition.

Proposition 178 (Injectivité du passage à l'application image directe)

Soient f et g deux applications.
Si $f^{\rightarrow} = g^{\rightarrow}$, alors $f = g$.
Autrement dit, le passage à l'application image directe est injectif.

4.2 Image réciproque

Donnons une nouvelle caractérisation de l'image réciproque d'un ensemble, cette fois dans le cas où on le fait par une application : la caractérisation est alors légèrement simplifiée.

Proposition 179 (Caractérisation de l'image réciproque par une application)

Soit f une application. Soit B une partie de $\operatorname{im}(f)$. Soit x un ensemble.
On a alors l'équivalence $x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B$.

Dans le chapitre précédent, nous avons défini l'image directe $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$ pour toute relation binaire $\mathcal{R}$ et tout ensemble E. Ici, nous allons regarder cela dans le cas où $\mathcal{R}$ est une application. Nous allons alors pouvoir définir une autre application qui à un ensemble E (partie de $\operatorname{im}(\mathcal{R})$) associe $\mathcal{R}^{\leftarrow}(E)$, et donc appeler $\mathcal{R}^{\leftarrow}$ cette nouvelle application.

Définition 43 (Application image réciproque)

Soit f une application.

On peut alors définir l'application suivante $f^{\leftarrow}$: $\begin{pmatrix} \mathscr{P}(\operatorname{im}(f)) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\operatorname{dom}(f)) \\ B & \longmapsto & f^{\leftarrow}(B) \end{pmatrix}$.

Donnons tout de suite un exemple d'application image réciproque, qui nous servira à plusieurs reprises par la suite, à savoir celui de l'identité sur un ensemble.

Proposition 180 (Application image réciproque et identité)

Soit E un ensemble.
On a alors $\operatorname{id}_E{}^{\leftarrow} = \operatorname{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

Proposition 181 (Image réciproque d'une application et vide)

Soit f une application. Soit B une partie de $\operatorname{im}(f)$.
Alors $f^{\leftarrow}(B) = \varnothing \iff B = \varnothing$.

En ce qui concerne l'application image directe, nous avions des résultats sur le passage au complémentaire si l'on se plaçait dans des cas où l'application est injective ou surjective. Ici nous allons voir que l'application image réciproque n'a besoin d'aucune hypothèse en particulier pour passer au complémentaire.

Proposition 182 (Complémentaire et image réciproque)

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.
Alors $\forall B \subseteq F, f^{\leftarrow}(F \backslash B) = E \backslash f^{\leftarrow}(B)$.

Voyons à présent comment se comporte une composition d'application quand on passe à l'image réciproque.

Proposition 183 (Image réciproque d'une composition d'application)

Soient f et g deux applications telles que $\operatorname{im}(f) = \operatorname{dom}(g)$.
On a alors $(g \circ f)^{\leftarrow} = f^{\leftarrow} \circ g^{\leftarrow}$.

Fait intéressant à présent : peu importe f, il s'avère que $f^{\leftarrow}$ est toujours inversible. Nous avons de plus une idée de son inverse dans le cas où f est elle-même inversible.

Proposition 184 (Inversibilité de l'application image réciproque)

Soit f une application. Alors $f^{\leftarrow}$ est inversible.
De plus, si f est inversible, alors $\left(f^{\leftarrow}\right)^{-1} = \left(f^{-1}\right)^{\leftarrow}$.

Observons à présent ce que l'on peut dire de la jectivité de $f^{\leftarrow}$, et si elle dépend de celle de f comme c'est le cas de $f^{\rightarrow}$.

Proposition 185 (Application image réciproque et jectivité)

Soit f une application.
On a alors :

1. $f^{\leftarrow}$ est toujours injective.
2. $f^{\leftarrow}$ est surjective dans $\mathscr{P}(\operatorname{dom}(f))$ si et seulement si f est injective.
   En particulier, d'après 1, $f^{\leftarrow}$ est bijective dans $\mathscr{P}(\operatorname{dom}(f))$ si et seulement si f est injective.

La question que l'on s'était posée pour les applications images directes se pose à nouveau : une application image réciproque donnée est-elle issue d'une seule application ? La réponse est à nouveau oui, comme le montre cette proposition.

Proposition 186 (Injectivité du passage à l'application image réciproque)

Soient f et g deux applications.
Si $f^{\leftarrow} = g^{\leftarrow}$, alors $f = g$.

4.3 Image directe et image réciproque

Voyons à présent comment se comportent entre elles les images réciproques et les images directes.

Proposition 187 (Image directe et l'image réciproque)

Soit f une application. Soient $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$ et $B \subseteq \mathrm{im}(f)$.
On a alors :

1. $f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B$.

2. $A \subseteq f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(A)\big)$.
3. $f^{\leftarrow}\Big(f^{\rightarrow}\big(\mathrm{dom}(f)\big)\Big) = \mathrm{dom}(f)$.
4. $\Big(\forall C \subseteq \mathrm{dom}(f), f^{\leftarrow}\big(f^{\rightarrow}(C)\big) = C\Big) \iff f$ est injective.

Plaçons-nous à présent dans le cas où notre application f est inversible : l'image réciproque est alors l'inverse de l'image directe !

Proposition 188 (Image directe, image réciproque et inverse)

Soit f une application inversible.
Alors $f^{\rightarrow}$ est inversible d'après la prop. 175 p. 74, et $f^{\leftarrow}$ est inversible d'après la prop. 184 p. 76.
De plus, toujours d'après ces deux propositions, on a alors $(f^{\rightarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\rightarrow}$ et $(f^{\leftarrow})^{-1} = (f^{-1})^{\leftarrow}$.

En fait, on a aussi : $(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}$, et donc manière équivalente $(f^{\leftarrow})^{-1} = f^{\rightarrow}$.

La notation qui va suivre va nous permettre plus de confort dans la pratique.

Notation

Soit f une application. Soit $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Soit P une assertion pouvant dépendre de paramètres.
L'ensemble $f^{\rightarrow}\big(A \cap \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid P(x)\}\big)$ sera parfois noté $\{f(x) \mid x \in A \;\text{ et }\; P(x)\}$.

En particulier, on pourra considérer $\{f(x) \mid x \in A\}$ en prenant une assertion toujours vraie pour P.

5 Restriction et prolongement d'applications

Intéressons-nous pour terminer ce chapitre à la notion de restrictions et de prolongements dans le cas particulier des applications.

Proposition 189 (Restriction d'une application)

Soit f une application. Soit $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

1. $f_{|A}$ est une application.
2. Plus précisément, on a $f_{|A} = \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & \mathrm{im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{pmatrix}$.
3. $f_{|\mathrm{dom}(f)} = f$.
4. $\forall C \subseteq A$, $\left(f_{|A}\right)_{|C} = f_{|C}$.

La proposition précédente nous donne une belle caractérisations des restrictions d'applications à des ensembles. Mais est-ce que cela suffit pour parler de toutes les restrictions d'applications ? La répons est oui, puisque la proposition suivante montre que toute restriction d'application est en fait une restriction à un ensemble particulier.

Proposition 190 (Restriction et prolongement d'une application)

Soient f et g deux applications.

Si f est une restriction de g, alors $g_{|\mathrm{dom}(f)} = f$.

En particulier, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$, $f(x) = g(x)$ d'après la prop. 189 p. 79.

Fait intéressant : l'inversibilité est conservée quand on restreint une application. Cela nous servira de nombreuses fois par la suite. Il en va naturellement de même pour l'injectivité.

Proposition 191 (Restrictions d'applications, inversibilité et injectivité)

Soit f une application. Soit A une partie de $\mathrm{dom}(f)$.

On a alors :

1. Si f est inversible, alors $f_{|A}$ est inversible.

Dans ce cas-là, on a $(f_{|A})^{-1} = (f^{-1})_{|f^{\rightarrow}(A)} = \left(\begin{array}{ccc} f^{\rightarrow}(A) & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array} \right)$.

2. Si f est injective, alors $f_{|A}$ est injective.

Proposition 192 (Intersection de deux applications)

Soient f et g deux applications.

On a alors :

1. $f \cap g$ est une application.
2. $f \cap g$ est la plus grande application, au sens de l'inclusion, qui soit à la fois une restriction de f et de g.

Terminons ce chapitre sur les applications par une définition et une propriété qui nous serviront à de multiples reprises dans de futurs ouvrages.

Définition 44 (Applications qui se recollent)

Soient f et g deux applications.

On dit que f et g **se recollent** si et seulement si $\forall x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(x) = g(x)$.

Voyons à présent une caractérisation du recollement de deux applications, qui nous servira dans de futurs ouvrages.

Proposition 193 (Caractérisation de deux applications qui se recollent)

Soient f et g deux applications.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f et g se recollent.
2. $f_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = g_{|\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)} = f \cap g$
3. $\mathrm{dom}(f \cap g) = \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$
4. $f \cup g$ est une application.
5. $f \cup g$ est la plus petite application, pour l'inclusion, qui prolonge à la fois f et g.
6. Il existe au moins une application qui prolonge à la fois f et g.

Chapitre 4

Familles

Note de l'auteur

> En parcourant la première définition de ce chapitre, à savoir celle des familles, le lecteur pourrait être dérouté par le fait qu'il ne s'agit de rien de neuf : la notion de famille est la même que celle d'application. Cependant, l'usage en est différent, et les notations ne sont pas forcément les mêmes. Ainsi, la notion de famille, si elle est stricto sensu exactement la même que la notion d'applications, ne l'est pas dans la pratique, et donc on adoptera l'une ou l'autre en fonction des besoins.

Sommaire

1 Familles et sous-familles

Définition 45 (Famille)

Soient E un ensemble non vide, et I un ensemble.

• On appellera **famille d'éléments de E indexée par I** toute application $x : I \to E$.
Pour tout $i \in I$, on notera souvent x_i plutôt que $x(i)$.
La famille x sera souvent notée $(x_i)_{i\in I}$ ou $\big(x(i)\big)_{i\in I}$.

• Pour tout $i_0 \in I$, on dira souvent que x_{i_0} est le $i_0^{\text{ème}}$ **terme** de $(x_i)_{i\in I}$, ou encore que c'est le **terme d'indice** i_0. On dira alors que I est **l'ensemble des indices** de $(x_i)_{i\in I}$.
On dira que les éléments de $\mathrm{im}\big(x\big)$ sont les **termes** de $(x_i)_{i\in I}$.

Par définition, si $x = (x_i)_{i\in I}$, alors $x = \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathrm{im}(x) \\ i & \longmapsto & x_i \end{array}\right)$.

Notation

Dans la notation $(x_i)_{i\in I}$, l'indice i est dit « *muet* » : on peut le remplacer par n'importe quel caractère différent de i, sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que le nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !
Ainsi, $(x_i)_{i\in I} = (x_j)_{j\in I} = (x_k)_{k\in I}$.

Remarque :
Pour f une application, on a introduit la notation au chapitre précédent $\{f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$ pour parler de $\mathrm{im}(f)$ (on a même introduit la notation pour toute image directe).
Ainsi, on a donc $f : \mathrm{dom}(f) \to \{f(x) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$.

Dans le cas particulier des familles, on a donc $(x_i)_{i\in I} : I \to \{x_i \mid i \in I\}$.

Définition 46 (Famille associée à un ensemble)

Soit E un ensemble non vide.
L'identité sur E, vue comme une famille, est parfois appelée la **famille associée à** E.

On aura donc $\mathrm{id}_E = (x_i)_{i\in E}$ où $\forall i \in E, x_i = i$.

Nous pouvons donc écrire $\mathrm{id}_E = (\mathrm{id}_E(x))_{x\in E} = (x)_{x\in E}$.

Proposition 194 (Image de la famille associée à un ensemble)

Soit E un ensemble. Soit $(x_i)_{i\in I}$ la famille associée à E.

On a alors $E = \{x_i \mid i \in I\}$.

En particulier, on a $E = \{x \mid x \in E\}$.

Définition 47 (Sous-familles et sur-familles)

Soit I un ensemble. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On appelle **sous-famille** de $(x_i)_{i\in I}$ toute restriction de $(x_i)_{i\in I}$ (à une partie de I donc).
2. On appelle **sur-famille** de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille dont $(x_i)_{i\in I}$ en est une sous-famille.

Proposition 195 (Autre écriture d'une sous-famille)

Soit I un ensemble. Soit J une partie de I. Soit $(x_i)_{i\in I}$.

Alors $((x_i)_{i\in I})_{|J} = (x_i)_{i\in J}$.

Définition 48 (Deux à deux distincts, disjoints)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux distincts** si et seulement si $(A_i)_{i\in I}$ est injective.
2. On dit que les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont **deux à deux disjoints** si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I, \big(i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing\big)$.

Proposition 196 (Deux à deux disjoints, distincts et sous-familles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux distincts, alors c'est aussi le cas de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.
2. Si les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints, alors c'est aussi le cas de toute sous-famille de $(A_i)_{i\in I}$.

Proposition 197 (Image réciproque et famille deux à deux disjoints)

Soit f une application. Soit I un ensemble.
Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$ indexée par I dont les termes sont deux à deux disjoints.
Alors les termes de $\left(f^{\leftarrow}(Y_i)\right)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.

Proposition 198 (Changement d'indice dans une famille)

Soient E un ensemble non vide, I et J deux ensembles.
Soit $x = (x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I. Soit $f : J \to I$.

1. $x \circ f$ est une famille d'éléments de E indexée par J.
   Plus précisément, on a $x \circ f = (x_{f(j)})_{j\in J}$.
2. On a $\left\{x_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} \subseteq \{x_i \mid i \in I\}$.
3. Si f est surjective dans I, alors $\left\{x_{f(j)} \;\middle|\; j \in J\right\} = \{x_i \mid i \in I\}$.

2 Réunion d'une famille

Généralisons à présent la notion d'union de deux ensembles que l'on a vu au chapitre 1.

Définition 49 (Réunion d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

On appelle **réunion de** $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcup\{A_i \mid i\in I\}$.

On le note $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{j\in I} A_j = \bigcup\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 199 (Autre notation de la réunion d'un ensemble)

Soit E un ensemble.

Alors $\bigcup E = \bigcup\limits_{A\in E} A$.

Proposition 200 (Caractérisation de la réunion d'une famille)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.

On a alors $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \iff \big(\exists i\in I, x\in A_i\big)$.

La proposition suivante va permettre de comprendre en quoi il s'agit d'une généralisation de l'union de deux ensembles que l'on avait vu au chapitre 1.

Proposition 201 (Réunions de familles simples)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

① Si $I = \varnothing$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = \varnothing$.

② S'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1; i_2\}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_1} \cup A_{i_2}$.

③ S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0}$.

Proposition 202 (Réunion de famille et minimalité)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Soit F un ensemble.

① Pour tout $i_0 \in I$, on a $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Autrement dit, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est un sur-ensemble commun à tous les termes de $(A_i)_{i \in I}$.

② Si pour tout $i \in I$, on a $A_i \subseteq F$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq F$.

Autrement dit, $\bigcup_{i \in I} A_i$ est **minimum pour l'inclusion** parmi les sur-ensembles communs à tous les termes de $(A_i)_{i \in I}$.

③ En particulier, s'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_i \subseteq A_{i_0}$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i = A_{i_0}$.

④ En particulier, si $\forall i \in I, A_i = F$, et si $I \neq \varnothing$ alors $\bigcup_{i \in I} A_i = F$.

On appelle cela **l'idempotence** de la réunion de familles.

Proposition 203 (Réunion de famille et croissance)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i \in I}$ et $(B_i)_{i \in I}$ deux familles indexées par I.

① Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$.

② Pour toute partie J de I, on a $\bigcup_{i \in J} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$.

Proposition 204 (Autre écriture d'un ensemble via réunion de singletons)

Soit E un ensemble. On a alors $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$.

Proposition 205 (Associativité de la réunion de famille)

Soient I et M deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

Soit $(J_m)_{m\in M}$ une famille de parties de I indexée par M.

Si $I = \bigcup\limits_{m\in M} J_m$, alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{m\in M}\left(\bigcup\limits_{i\in J_m} A_i\right)$.
On appelle cette propriété **l'associativité** de la réunion de familles.

Proposition 206 (Changement d'indice dans une réunion de familles)

Soient I et J deux ensembles. Soit $f : J \to I$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On a $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
2. Si f est surjective dans I, alors $\bigcup\limits_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

Proposition 207 (Réunion de familles, images directes et réciproques)

Soit f une application. Soient I et J deux ensembles.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$, indexée par I.

Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$, indexée par J.

1. $f^{\rightarrow}\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
2. $f^{\leftarrow}\left(\bigcup\limits_{j\in J} B_j\right) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.

Notation

Soient I et J deux ensembles. Soit $\big(f(z)\big)_{z\in I\times J}$ une famille indexée par $I\times J$.

• On notera parfois $\big(f(i;j)\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ ou $\big(f(i;j)\big)_{(i;j)\in I\times J}$ à la place de $\big(f(z)\big)_{z\in I\times J}$.

• On notera parfois $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ ou $\bigcup\limits_{(i;j)\in I\times J} f(i;j)$ plutôt que $\bigcup\limits_{z\in I\times J} f(z)$.

Ici encore, les indices i et j sont dits « *muets* », c'est-à-dire que l'on peut les remplacer par n'importe quels autres caractères, sans que cela ne change quoi que ce soit. Bien évidemment, il faut prendre garde à ce que ces nouveaux caractères ne soient pas déjà utilisés, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, on a $\big(f(i;j)\big)_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = \big(f(a;b)\big)_{\substack{a\in I\\ b\in J}} = \big(f(c;d)\big)_{\substack{c\in I\\ d\in J}}$.

De même, on a $\bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcup\limits_{\substack{a\in I\\ b\in J}} f(a;b) = \bigcup\limits_{\substack{c\in I\\ d\in J}} f(c;d)$.

Proposition 208 (Réunions doubles de familles)

Soient I et J deux ensembles. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille indexée par $I\times J$. Soit x un ensemble.

1. On a $x\in \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ si et seulement s'il existe au moins un $i\in I$ et un $j\in J$ tels que $x\in A_{(i;j)}$.
2. On a $\bigcup\limits_{i\in I}\bigcup\limits_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcup\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcup\limits_{j\in J}\bigcup\limits_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Proposition 209 (Réunion de familles et opérations)

Soient I et J deux ensembles. Soit F un ensemble.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Intersection

1. **Distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur la réunion de familles**

$$F\cap\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(F\cap A_i).$$

2. **Double distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur la réunion de familles**

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j).$$

Produit cartésien

3 Distributivité à gauche du produit cartésien sur la réunion de familles

$$F \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} (F \times A_i).$$

4 Distributivité à droite du produit cartésien sur la réunion de familles

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times F = \bigcup_{i\in I} (A_i \times F).$$

5 Double distributivité du produit cartésien sur la réunion de familles

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \times B_j).$$

Réunion

6 Double distributivité de la réunion (de deux ensembles) sur la réunion de familles

On a $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \supseteq \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)$.

Si de plus, I et J sont non vides, alors $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)$.

Définition 50 (Famille d'applications qui se recollent)

Soit I un ensemble. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications indexée par I.

On dit que les termes de $(f_i)_{i\in I}$ **se recollent deux à deux**

si et seulement si $\forall i \in I, \forall j \in I$, f_i et f_j se recollent.

Proposition 210 (Famille d'applications qui se recollent : caractérisations)

Soit I un ensemble. Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications indexée par I.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux.

2. $\bigcup_{i \in I} f_i$ est une application.
3. $\bigcup_{i \in I} f_i$ est la plus petite application, pour l'inclusion, qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i \in I}$.
4. Il existe au moins une application qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i \in I}$.

3 Intersection de familles

Proposition 211 (Image d'une famille indexée par un ensemble non vide)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Si I est non vide, alors $\{A_i \mid i \in I\}$ est non vide.

La définition qui suit est rendue possible grâce à la proposition précédente, puisque rappelons-le, pour pouvoir parler de $\bigcap E$, il est nécessaire que E soit non vide.

Définition 51 (Intersection d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
On appelle **intersection** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcap\{A_i \mid i \in I\}$.
On le note $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit. Il faut bien entendu que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{j\in I} A_j = \bigcap\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 212 (Autre notation de l'intersection d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.
Alors $\bigcap E = \bigcap\limits_{A\in E} A$.

Proposition 213 (Caractérisation de l'intersection d'une famille)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.
On a alors $x \in \bigcap\limits_{i\in I} A_i \iff \big(\forall i \in I, x \in A_i\big)$.

Proposition 214 (Intersections de familles simples)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. S'il existe $i_1 \in I$ et $i_2 \in I$ tels que $I = \{i_1 ; i_2\}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_1} \cap A_{i_2}$.
2. S'il existe $i_0 \in I$ tel que $I = \{i_0\}$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.

Proposition 215 (Intersection de familles et maximalité)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

Soit F un ensemble.

1. Pour tout $i_0 \in I$, on a $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq A_{i_0}$.
   Autrement dit, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un sous-ensemble commun à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.
2. Si pour tout $i \in I$, on a $F \subseteq A_i$, alors $F \subseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.
   Autrement dit, $\bigcap_{i\in I} A_i$ est **maximum** pour l'inclusion parmi les sous-ensembles communs à tous les termes de $(A_i)_{i\in I}$.
3. En particulier, s'il existe au moins un $i_0 \in I$ tel que $\forall i \in I, A_{i_0} \subseteq A_i$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i = A_{i_0}$.
4. En particulier, si $\forall i \in I, A_i = F$ alors $\bigcap_{i\in I} A_i = F$.
   On appelle cela **l'idempotence** de l'intersection de familles.

Proposition 216 (Intersection de familles, croissance et décroissance)

Soit I un ensemble **non vide**. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

1. Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.
2. Pour toute partie $J \neq \varnothing$ de I, on a $\bigcap_{j\in J} A_j \supseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.

Proposition 217 (Associativité de l'intersection de famille)

Soient I et M deux ensembles **non vides**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

Soit $(J_m)_{m\in M}$ une famille de parties **non vides** de I.

Si $I = \bigcup_{m\in M} J_m$, alors $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{m\in M} \left(\bigcap_{i\in J_m} A_i \right)$.
On appelle cette propriété **l'associativité** de l'intersection de familles.

Proposition 218 (Changement d'indice dans une intersection de familles)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $f : J \to I$. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. On a $\bigcap_{j\in J} A_{f(j)} \supseteq \bigcap_{i\in I} A_i$.
2. Si f est surjective dans I, alors $\bigcap_{j\in J} A_{f(j)} = \bigcap_{i\in I} A_i$.

Proposition 219 (Intersection de familles, images directes et réciproques)

Soit f une application. Soient I et J deux ensembles **non vides**.

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $\mathrm{dom}(f)$, indexée par I.

Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille de parties de $\mathrm{im}(f)$, indexée par J.

1. On a $f^{\leftarrow}\left(\bigcap_{j\in J} B_j \right) = \bigcap_{j\in J} f^{\leftarrow}(B_j)$.
2. On a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{i\in I} A_i \right) \subseteq \bigcap_{i\in I} f^{\rightarrow}(A_i)$.
3. f est injective si et seulement si pour tout ensemble K non vide et toute famille $(C_k)_{k\in K}$ de parties de $\mathrm{dom}(f)$ indexée par K, on a $f^{\rightarrow}\left(\bigcap_{k\in K} C_k \right) = \bigcap_{k\in K} f^{\rightarrow}(C_k)$.

Notation

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $\big(f(z)\big)_{z\in I\times J}$ une famille indexée par $I \times J$.

On notera parfois $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j)$ ou $\bigcap\limits_{(i;j)\in I\times J} f(i;j)$ plutôt que $\bigcap\limits_{z\in I\times J} f(z)$.

Ici encore, les indices i et j sont dits « *muets* », c'est-à-dire que l'on peut les remplacer par n'importe quels autres caractères, sans que cela ne change quoi que ce soit. Bien évidemment, il faut prendre garde à ce que ces nouveaux caractères ne soient pas déjà utilisés, au risque de produire des contre-sens !

Ainsi, on a $\bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(i;j) = \bigcap\limits_{\substack{a\in I\\ b\in J}} f(a;b) = \bigcap\limits_{\substack{c\in I\\ d\in J}} f(c;d)$.

Proposition 220 (Intersections doubles de familles)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille indexée par $I \times J$.
Soit x un ensemble.

1. On a $x \in \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)}$ si et seulement si pour tout $i \in I$ et pour tout $j \in J$, on a $x \in A_{(i;j)}$.
2. On a $\bigcap\limits_{i\in I}\bigcap\limits_{j\in J} A_{(i;j)} = \bigcap\limits_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{(i;j)} = \bigcap\limits_{j\in J}\bigcap\limits_{i\in I} A_{(i;j)}$.

Proposition 221 (Intersection de familles et opérations)

Soient I et J deux ensembles **non vides**. Soit F un ensemble.
Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit $(B_j)_{j\in J}$ une famille indexée par J.

Réunion de deux ensembles

1. **Distributivité de l'union (de deux ensembles) sur l'intersection de familles**

$$F \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(F \cup A_i).$$

2. **Double distributivité de l'union (de deux ensembles) sur l'intersecton de familles**

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}}(A_i \cup B_j).$$

Produit cartésien

③ **Distributivité à gauche du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$F \times \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (F \times A_i).$

④ **Distributivité à droite du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times F = \bigcap_{i \in I} (A_i \times F).$

⑤ **Double distributivité du produit cartésien sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \times B_j).$

Intersection

⑥ **Double distributivité de l'intersection (de deux ensembles) sur l'intersection de familles**

$\left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \cap \left(\bigcap_{j \in J} B_j \right) = \bigcap_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j).$

Proposition 222 (Lois de De Morgan - Version famille d'ensembles)

Soit I un ensemble non vide. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I. Soit E un ensemble.

On a alors :

① $E \backslash \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} (E \backslash A_i).$

② $E \backslash \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (E \backslash A_i).$

Des informations sur Auguste De Morgan se trouvent à la page 24.

Proposition 223 (L'intersection d'une famille est incluse dans la réunion)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Alors $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i.$

4 Produit cartésien de familles

Définition 52 (Produit cartésien d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

On appelle **produit cartésien** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \,\middle|\, \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$.

On le note alors $\prod_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\prod_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut remplacer tous les i par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit, à condition que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque sinon de produire des contre sens !

Ainsi, on a $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{j\in I} A_j = \prod_{k\in I} A_k$.

Proposition 224 (Produit cartésien d'indice vide)

Soit $(A_i)_{i\in\varnothing}$ une famille indexée par $\varnothing$.

Alors $\prod_{i\in\varnothing} A_i = \{\varnothing\}$.

Théorème 2 (Axiome du choix version produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles indexée par I.

Si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, alors $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Remarque :

On aurait pu prendre ce théorème comme axiome, et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version".

Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le système d'axiome considéré sans l'axiome du choix.

Proposition 225 (Caractérisation du produit cartésien d'une famille)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(a_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

Alors $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ si et seulement si $\forall i \in I, a_i \in A_i$.

Proposition 226 (Croissance du produit cartésien de familles)

Soit I un ensemble. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

1. Si $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$, alors $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$.
2. Réciproquement, si $\prod_{i\in I} A_i \subseteq \prod_{i\in I} B_i$, et si $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$, alors $\forall i \in I, A_i \subseteq B_i$.

Proposition 227 (Produit cartésien de familles et intersections)

1. Soient I et J deux ensembles. Soit $(A_{(i;j)})_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ une famille indexée par $I \times J$.

Si $J \neq \varnothing$, alors on a $\displaystyle\bigcap_{j\in J}\left(\prod_{i\in I} A_{(i;j)}\right) = \prod_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{(i;j)}\right)$.

2. Soit I un ensemble **non vide**. Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles indexées par I.

On a alors $\displaystyle\left(\prod_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} B_i\right) = \prod_{i\in I}(A_i \cap B_i)$.

Définition 53 (Projections depuis le produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

1. Pour tout $j \in I$, on appelle $j^{\text{ème}}$ **projection** depuis $\prod_{i\in I} A_i$ l'application

$$\pi_j := \left(\begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & A_j \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & a_j \end{array}\right).$$

2. Pour tout $J \subseteq I$, on appelle **projection** de $\prod_{i\in I} A_i$ sur $\prod_{j\in J} A_j$ l'application

$$\pi_J := \left(\begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} A_i & \longrightarrow & \prod_{j\in J} A_j \\ (a_i)_{i\in I} & \longmapsto & (a_j)_{j\in J} \end{array}\right).$$

Théorème 3 (Propriété universelle du produit cartésien)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit X un ensemble.
Soit pour tout $j \in I$ la projection $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$.

① Pour tout application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ et tout $i \in I$, on a $\pi_i \circ f : X \to A_i$.

② Pour tout application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$, on a $(\pi_i \circ f)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

③ Pour toute famille d'application $(f_i)_{i\in I}$ telle que $\forall i \in I, f_i : X \to A_i$, il existe une unique application $f : X \to \prod_{i\in I} A_i$ telle que $\forall i \in I, f_i = \pi_i \circ f$.

④ L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{A}\left(X \to \prod_{i\in I} A_i\right) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i) \\ f & \longmapsto & (\pi_i \circ f)_{i\in I} \end{pmatrix}$ est une bijection dans $\prod_{i\in I} \mathcal{A}(X \to A_i)$.

5 Union disjointe d'une famille

Définition 54 (Union disjointe d'une famille d'ensembles)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille.
On appelle **union disjointe** de $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble $\bigcup\limits_{i\in I}(A_i \times \{i\})$.
On le note alors $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.

Notation

Dans la notation $\coprod\limits_{i\in I} A_i$, l'indice i est dit « *muet* », c'est-à-dire que l'on peut remplacer tous les i par n'importe quel autre caractère sans que cela ne change quoi que ce soit, à condition que ce nouveau caractère ne soit pas déjà utilisé autre part, au risque sinon de produire des contre sens !

Ainsi, on a $\coprod\limits_{i\in I} A_i = \coprod\limits_{j\in I} A_j = \coprod\limits_{k\in I} A_k$.

Proposition 228 (Caractérisation de l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I. Soit x un ensemble.

1. $x \in \coprod\limits_{i\in I} A_i \iff \exists! i \in I, \exists! a \in A_i, x = (a;i)$.
2. $x \in \coprod\limits_{i\in I} A_i \implies \exists! i \in I, \exists! a \in \bigcup\limits_{j\in I} A_j, x = (a;i)$.

Définition 55 (Projections cartésiennes depuis l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$.
Grâce à la proposition précédente, nous pouvons donc définir les deux **projections cartésiennes** suivantes :

$$\pi_g := \begin{pmatrix} \coprod\limits_{i\in I} A_i & \longrightarrow & \bigcup\limits_{i\in I} A_i \\ (a;i) & \longmapsto & a \end{pmatrix} \qquad \pi_d := \begin{pmatrix} \coprod\limits_{i\in I} A_i & \longrightarrow & I \\ (a;i) & \longmapsto & i \end{pmatrix}$$

Définition 56 (Injections canoniques dans l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I.

Pour tout $j \in I$, on appelle $j^{\text{ème}}$ **injection canonique** dans $\coprod_{i \in I} A_i$ l'application

$$\iota_j := \begin{pmatrix} A_j & \longrightarrow & \coprod_{i \in I} A_i \\ a & \longmapsto & (a; j) \end{pmatrix}$$

Théorème 4 (Propriété universelle de l'union disjointe)

Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille indexée par I. Soit X un ensemble.

Soit pour tout $j \in I$ l'injection canonique $\iota_j : A_j \to \coprod_{i \in I} A_i$.

1. Pour toute application $f : \coprod_{i \in I} A_i \to X$, et pour tout $i \in I$ on a $f \circ \iota_i : A_j \to X$.

2. Pour toute application $f : \coprod_{i \in I} A_i \to X$, on a $(f \circ \iota_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

3. Pour toute famille d'applications $(f_i)_{i \in I}$ telle que $\forall i \in I, f_i : A_i \to X$, il existe une unique application $f : \coprod_{i \in I} A_i \to X$ telle que $\forall i \in I, f \circ \iota_i = f_i$.

4. L'application $\varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{A}\left(\coprod_{i \in I} A_i \to X\right) & \longrightarrow & \prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X) \\ f & \longmapsto & (f \circ \iota_i)_{i \in I} \end{pmatrix}$ est bijective dans $\prod_{i \in I} \mathcal{A}(A_i \to X)$.

Chapitre 5

Relations d'équivalence et partitions

Note de l'auteur

Nous entrons dans un chapitre très utile pour la suite : les relations d'équivalences.
Les relations d'équivalences interviennent dès que deux objets se comportent de la même manière au vu de notre intérêt du moment. On peut alors les considérer comme un seul et même objet, et ce grâce aux classes d'équivalences. C'est notamment le cas lorsque l'on a trop d'éléments dans un ensemble et que l'on souhaite les trier. Tout cela rentre en jeu dans les constructions de nombreux ensembles comme les ensembles de nombres $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ par exemple.

Sommaire

1 Partitions

Définition 57 (Partitions indexées)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I.
On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une **partition indexée** de E si et seulement si les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$
2. Les termes de $(A_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.
3. $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.

Proposition 229 (Partition indexée et ensemble non vide)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E indexée par I.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors E est non vide si et seulement si I est non vide.

Proposition 230 (Caractérisation des partitions indexées)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition indexée de E. Soit x un ensemble.
On a alors :

$$x \in E \iff \exists! i \in I, x \in A_i$$

Définition 58 (Partitions)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.
On dit que $\mathcal{E}$ est une **partition (non indexée)** de E si et seulement si les trois assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\bigcup_{A\in\mathcal{E}} A = E$.
2. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{E}, \big(A \neq B \implies A \cap B = \varnothing\big)$.
3. $\varnothing \notin \mathcal{E}$

Proposition 231 (Lien entre partitions et partitions indexées)

Soit E un ensemble. Soit I un ensemble. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.
On a alors :

1. Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors $\{A_i \mid i \in I\}$ est une partition de E.
2. Si $\mathcal{E}$ est une partition de E, alors la famille associée à $\mathcal{E}$ est une partition indexée de E.

Proposition 232 (Partitions et ensemble non vide)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E)$.
Si $\mathcal{E}$ est une partition de E, alors E est non vide si et seulement si $\mathcal{E}$ est non vide.

Proposition 233 (Caractérisation des partitions)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{E}$ une partition de E. Soit x un ensemble.
On a alors :

$$x \in E \iff \exists! A \in \mathcal{E}, x \in A$$

Proposition 234 (Partitions triviales d'un ensemble)

Soit E un ensemble **non vide**.

1. $\left(\{x\}\right)_{x\in E}$ est une partition indexée de E.
   En particulier, $\{\{x\} \mid x \in E\}$ est une partition de E d'après la prop. 231 p. 103.
2. $\{E\}$ est une partition de E.

Proposition 235 (Partition et image réciproque)

Soit f une application.

1. Soit I un ensemble. Soit $(Y_i)_{i\in I}$ une partition indexée de $\mathrm{im}(f)$.
   Alors $\left(f^{\leftarrow}(Y_i)\right)_{i\in I}$ est une partition indexée de $\mathrm{dom}(f)$.
   En particulier, $\left\{f^{\leftarrow}(Y_i) \mid i \in I\right\}$ est une partition de $\mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 231 p. 103.

(2) En particulier, $\left(f^{\leftarrow}(\{y\})\right)_{y\in \mathrm{im}(f)}$ est une partition indexée de $\mathrm{dom}(f)$.
En particulier, $\left\{f^{\leftarrow}(\{y\}) \mid y \in \mathrm{im}(f)\right\}$ est une partition de $\mathrm{dom}(f)$ d'après la prop. 231 p. 103.

Proposition 236 (Partition induite par une union disjointe)

Soit I un ensemble **non vide**. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I, telle que $\forall i \in I, A_i \neq \varnothing$.
Alors $(A_i \times \{i\})_{i\in I}$ est une partition indexée de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$.
En particulier, $\{A_i \times \{i\} \mid i \in I\}$ est une partition de $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ d'après la prop. 231 p. 103.

Proposition 237 (Applications qui se recollent et partitions)

Soient E, I et F trois ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'applications telle que $\forall i \in I, f_i : A_i \to F$.

(1) Si $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = E$ et si les termes de $(f_i)_{i\in I}$ se recollent deux à deux, alors $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est l'unique application $E \to F$ qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

(2) En particulier, si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors $\bigcup\limits_{i\in I} f_i$ est l'unique application $E \to F$ qui prolonge tous les termes de $(f_i)_{i\in I}$.

Définition 59 (Recouvrement et sous-recouvrement d'un ensemble)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.

(1) On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un **E-recouvrement** si et seulement si $E \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

(2) Dans ce cas-là, pour tout $J \subseteq I$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un **sous-E-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$ si et seulement si $(A_j)_{j\in J}$ est aussi un E-recouvrement.

Proposition 238 (Partition indexée et recouvrement)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille indexée par I.
Si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition indexée de E, alors $(A_i)_{i\in I}$ est un E-recouvrement.

Proposition 239 (Recouvrement et applications qui coïncident)

Soient E et I deux ensembles. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un E-recouvrement.

Soient f et g deux applications telles que $\mathrm{dom}(f) = E = \mathrm{dom}(g)$.

1. Si $\forall i \in I, \forall x \in E \cap A_i, f(x) = g(x)$, alors $f = g$.
2. En particulier, si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition indexée de E, alors $\big(\forall i \in I, \forall x \in A_i, f(x) = g(x)\big) \implies f = g$.

2 Relations d'équivalences

Définition 60 (Vocabulaire de relations binaires)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

1. On dit que $\mathcal{R}$ une relation binaire est une relation binaire **sur** E si et seulement si $\mathcal{R} \subseteq E^2$.
2. On dit que $\mathcal{R}$ est **réflexive sur** E si et seulement si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$.
3. On dit que $\mathcal{R}$ est **antiréflexive** si et seulement si $\forall x, \mathrm{non}(x\mathcal{R}x)$.
4. On dit que $\mathcal{R}$ est **symétrique** si et seulement si $\forall x, \forall y, \left(x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x\right)$.
5. On dit que $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** si et seulement si $\forall x, \forall y, \Big(\left(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x\right) \implies x = y\Big)$.
6. On dit que $\mathcal{R}$ est **transitive** si et seulement si $\forall x, \forall y, \forall z, \Big(\left(x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z\right) \implies x\mathcal{R}z\Big)$.

Attention !

L'antiréfléxivité n'est pas le contraire de la réflexivité : pour que $\mathcal{R}$ ne soit pas réflexive sur E, il suffit qu'un seul élément x de E ne vérifie pas $x\mathcal{R}x$.
De même, l'antisymétrie n'est pas le contraire de la symétrie : id_E est par exemple à la fois symétrique et antisymétrique.

2.1 Relations d'équivalence

Proposition 240 (Relation symétrique et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.
Les assertions suivantes sont équivalences :

1. $\mathcal{R}$ est symétrique.
2. $\mathcal{R} = {}^t\mathcal{R}$
3. $\mathcal{R} \subseteq {}^t\mathcal{R}$

Proposition 241 (Relation transitive et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.
On a alors $\mathcal{R}$ est transitive si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est transitive.

Proposition 242 (Qualificatifs de relations et identité)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

1. $\mathcal{R}$ est réflexive sur E si et seulement si id_E est une restriction de $\mathcal{R}$.
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R} \cap {}^t\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.
3. $\mathcal{R}$ est symétrique et antisymétrique si et seulement si $\mathcal{R}$ est une restriction de id_E.
   Autrement dit, il existe une partie F de E telle que $\mathcal{R} = \mathrm{id}_F$.
4. En particulier, $\mathcal{R}$ est symétrique, antisymétrique et réflexive sur E si et seulement si $\mathcal{R} = \mathrm{id}_E$.
   En particulier, id_E est symétrique, antisymétrique et réflexive.

Proposition 243 (Relation réflexive et transposée)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

1. $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E.
2. $\mathcal{R}$ est réflexive sur E si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est réflexive sur E.

Proposition 244 (Relation antisymétrique et transposée)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.
$\mathcal{R}$ est antisymétrique si et seulement si ${}^t\mathcal{R}$ est antisymétrique.

Définition 61 (Relations d'équivalences)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** sur E si et seulement si les 3 assertions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{R}$ est réflexive sur E.
2. $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. $\mathcal{R}$ est transitive.

Proposition 245 (Relations d'équivalences triviales)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.

1. id_E est une relation d'équivalence sur E.
2. E^2 est une relation d'équivalence sur E.
   On dit que id_E et E^2 sont les relations d'équivalence **triviales** sur E.
3. Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors $\mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{R} \subseteq E^2$.

Proposition 246 (Relation d'équivalence induite par une application)

Soit E un ensemble. Soit f une application telle que $\mathrm{dom}(f) = E$.
Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire définie sur E par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)\Big)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
On dit que c'est **la relation d'équivalence induite** par f.

2.2 Clôtures

Proposition 247 (Qualificatifs des relations et stabilité par intersection)

1. Pour tout ensemble F, notons $RB(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire* ».
   L'assertion RB dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.
2. Soit E un ensemble. Pour tout ensemble F, notons $R_E(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire réflexive sur E* ». L'assertion R_E dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.
3. Pour tout ensemble F, notons $S(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire symétrique* ».
   L'assertion S dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.
4. Pour tout ensemble F, notons $AS(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire antisymétrique* ».
   L'assertion AS dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

⑤ Pour tout ensemble F, notons $T(F)$ l'assertion « *F est une relation binaire transitive* ». L'assertion T dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

⑥ Soit E un ensemble. Pour tout ensemble F, notons $Q_E(F)$ l'assertion « *F est une relation d'équivalence sur E* ». L'assertion Q_E dépendant de paramètres que l'on vient de définir est alors stable par intersection.

Définition 62 (Clôtures d'une relation binaire)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
Pour tout ensemble F, soient :

- $\mathrm{ref}_E(F)$ l'assertion « *F est une relation réflexive sur E* ».
- $\mathrm{sym}(F)$ l'assertion « *F est une relation symétrique* ».
- $\mathrm{tra}(F)$ l'assertion « *F est une relation transitive* ».
- $\mathrm{equiv}_E(F)$ l'assertion « *F est une relation réflexive sur E* ».

Nous obtenons alors quatre assertions dépendant de paramètres, ref_E, sym, tra et equiv_E qui sont stables par intersection d'après la prop. 247 p. 108.
De plus, comme $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, on a $\mathcal{R} \subseteq E^2$.
Or, E^2 est une relation d'équivalence sur E d'après la prop. 245 p. 108, donc on a $\mathrm{equiv}_E(E^2)$, et donc $\mathrm{ref}_E(E^2)$, ainsi que $\mathrm{sym}(E^2)$ et $\mathrm{tra}(E^2)$.

Nous pouvons donc définir les relations engendrées suivantes :

① On appelle **clôture réflexive sur E de $\mathcal{R}$** la relation réflexive sur E définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E}$.

② On appelle **clôture symétrique de $\mathcal{R}$** la relation symétrique définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}}$.

③ On appelle **clôture transitive de $\mathcal{R}$** la relation transitive définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{tra}}$.

④ On appelle **relation d'équivalence sur E engendrée par $\mathcal{R}$** la relation d'équivalence sur E définie par $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{equi}_E}$.

Proposition 248 (Clôture réflexive d'une relation)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E.
On a alors $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{ref}_E} = \mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$.
En particulier, on a les propriétés suivantes d'après la prop. 58 p. 27 :

- $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E$ est réflexive sur E.
- Si $\mathcal{S}$ est une relation réflexive sur E telle que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \cup \mathrm{id}_E \subseteq \mathcal{S}$.

Proposition 249 (Clôture symétrique d'une relation)

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire.

On a alors $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathrm{sym}} = \mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$.

En particulier, on a les propriétés suivantes d'après la prop. 58 p. 27 :

- $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R}$ est symétrique.
- Si $\mathcal{S}$ est une relation symétrique telle que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, alors $\mathcal{R} \cup {}^t\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$.

3 Classes d'équivalences et ensembles quotients

Définition 63 (Classe d'équivalence)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

• Pour tout $x \in E$, on appelle **classe d'équivalence** de x pour $\sim$ l'ensemble $\{y \in E \mid x \sim y\}$.
On le note $\mathrm{cl}_\sim(x)$.

• Pour toute partie A de E, on dit que A est une classe d'équivalence de E pour $\sim$ si et seulement s'il existe au moins un $x \in E$ tel que $A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.
On dit alors que x est un **représentant** de A.

Notation

A la place de $\mathrm{cl}_\sim(x)$, certains auteurs notent parfois $\overline{x}$, ou bien $\dot{x}$, ou encore $x[\sim]$.

Définition 64 (Ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
On appelle **ensemble quotient** de E par $\sim$ l'ensemble $\{A \in \mathscr{P}(E) \mid \exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)\}$.
On le note $E/\sim$.

Proposition 250 (Caractérisation d'un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E. Soit A un ensemble.
On a alors $A \in E/\sim \iff \exists x \in E, A = \mathrm{cl}_\sim(x)$.
En particulier, on a $E/\sim = \{\mathrm{cl}_\sim(x) \mid x \in E\}$.

Proposition 251 (Propriétés des classes d'équivalences)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.
Soit A une classe d'équivalence de E pour $\sim$. Soient a et b dans E.

1. $a \in \mathrm{cl}_\sim(a)$. En particulier, une classe d'équivalence n'est jamais vide.
2. $\mathrm{cl}_\sim(a) = \mathrm{cl}_\sim(b) \iff a \sim b$.

3. a est un représentant de A si et seulement si $a \in A$

Proposition 252 (Ensembles quotients triviaux)

Soit E un ensemble **non vide**.

On a alors :

1. Pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{cl}_{\mathrm{id}_E}(x) = \{x\}$.
   En particulier,$E/\mathrm{id}_E = \{\{x\} \mid x \in E\}$ d'après la prop. 250 p. 111.

2. Pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{cl}_{E^2}(x) = E$.
   En particulier, $E/E^2 = \{E\}$ d'après la prop. 250 p. 111.

Proposition 253 (Un ensemble quotient est une partition)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

Alors $E/\sim$ est une partition de E.

Proposition 254 (Relation d'équivalence issue d'une partition)

Soit E un ensemble **non vide**. Soit $\mathcal{E}$ une partition de E.

Soit $\mathcal{R}$ la relation binaire sur E définie par

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x\mathcal{R}y \iff \exists A \in \mathcal{E}, \big(x \in A \text{ et } y \in A\big)\Big)$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

On dit que $\mathcal{R}$ est la **relation d'équivalence issue** de $\mathcal{E}$.

Proposition 255 (Les relations d'équivalence et les partitions)

Soit E un ensemble.

Soit $\mathcal{A} := \{\mathcal{R} \subseteq E^2 \mid \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence sur } E\}$.

Soit $\mathcal{B} := \{\mathcal{E} \subseteq \mathscr{P}(E) \mid \mathcal{E} \text{ est une partition de } E\}$.

Soient $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ \mathcal{R} & \longmapsto & E/\mathcal{R} \end{array}\right)$ et $g := \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ \mathcal{E} & \longmapsto & \text{La relation d'équivalence issue de } \mathcal{E} \end{array}\right)$.

Alors f est une bijection dans $\mathcal{B}$, g est une bijection dans $\mathcal{A}$, et f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Proposition 256 (Union des classes d'équivalences)

Soit E un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E.

On a alors $\bigcup\limits_{x \in E} \mathrm{cl}_{\mathcal{R}}(x) = E$.

Définition 65 (Système de représentants des classes d'équivalence)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation binaire sur E. Soit X une partie de E.

On dit que X est un **système de représentants** de $\sim$ si et seulement si

$$\forall x \in E, \exists! a \in X, x \sim a$$

Théorème 5 (Axiome du choix version systèmes de représentants)

Soit E un ensemble.

Alors pour toute relation d'équivalence sur E, il existe au moins un système de représentants.

Remarque :

On aurait pu prendre ce théorème comme axiome, et en déduire l'axiome du choix, d'où le nom "version".
Ainsi, les deux énoncés sont équivalents dans le systèmes d'axiomes considéré sans l'axiome du choix.

Proposition 257 (Partition indexée par un système de représentants)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

D'après **l'axiome du choix** (version système de représentants), il existe au moins un système de représentants X de $\sim$. Soit un tel X.

Alors $\left(\mathrm{cl}_{\sim}(x)\right)_{x \in X}$ est une partition indexée de E.

Définition 66 (Projection canonique dans un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

On appelle **projection canonique sur $E/\sim$** l'application $\mathrm{cl}_{\sim} := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E/\sim \\ x & \longmapsto & \mathrm{cl}_{\sim}(x) \end{array}\right)$.

Proposition 258 (Propriétés de la projection canonique sur un ensemble quotient)

Soit E un ensemble. Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E.

1. $\mathrm{cl}_{\sim}$ est surjective dans $E/\sim$, on a donc $\mathrm{cl}_{\sim} : E \twoheadrightarrow E/\sim$.
2. $\mathrm{cl}_{\sim}$ est injective si et seulement si $\sim = \mathrm{id}_E$.
3. $\sim$ est la relation d'équivalence sur E induite par l'application $\mathrm{cl}_{\sim}$.

Théorème 6 (Théorème de factorisation (version équipotence))

Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \to F$.
Soit $\sim$ une relation d'équivalence sur E telle que $\forall x \in E, \forall y \in E, \left(x \sim y \implies f(x) = f(y)\right)$.
Alors :

1. Il existe une unique application $g : (E/\sim) \to F$ telle que $f = g \circ \mathrm{cl}_{\sim}$.

   On peut représenter la situation par le diagramme suivant :
   $$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{cl}_{\sim}"'] & F \\ E/\sim \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

   Il s'agit de l'application $g = \left(\begin{array}{ccc} (E/\sim) & \longrightarrow & F \\ \mathrm{cl}_{\sim}(x) & \longmapsto & f(x) \end{array}\right)$.

Considérons à présent cette unique application g.

2. g est injective si et seulement si $\forall x \in E, \forall y, \left(x \sim y \iff f(x) = f(y)\right)$.
   Autrement dit, g est injective si et seulement si $\sim$ est la relation d'équivalence sur E issue de f.

3. g est surjective dans F si et seulement si f est surjective dans F.

4 g est bijective dans F si et seulement si :

a $\forall x \in E, \forall y, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)$

b et f est surjective dans F

Remarque :

Le théorème précédant nous donne le cas particulier suivant : si $\sim$ est la relation d'équivalence induite par f, c'est-à-dire que $\forall x \in E, \forall y \in E, \Big(x \sim y \iff f(x) = f(y)\Big)$, alors en notant $\iota : \operatorname{im}(f) \hookrightarrow F$ l'injection canonique de $\operatorname{im}(f)$ dans F (c'est-à-dire $\iota = \mathrm{id}_{\operatorname{im}(f)}$), on a alors le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{cl}_\sim"] & F \\
E/\sim \arrow[r, hook, two heads, "g"] & \operatorname{im}(f) \arrow[u, hook, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

On se réfèrera à ce dernier résultat comme étant **le premier théorème d'isomorphisme (version équipotence)**.

Bibliographie

[1] Wikipédia.

[2] Nicolas Bourbaki. Eléments de mathématiques - théorie des ensembles, 1970.

[3] Laurent Schwartz. Analyse i : Théorie des ensembles et topologie, 1991.

Mathématiciens

Les mathématiciens ci-après sont triés par leur année de naissance.

Deuxième moitié du 16$^{\text{ème}}$ siècle

René Descartes (page 32)

1596 - 1650

Première moitié du 19$^{\text{ème}}$ siècle

Auguste De Morgan (page 24)

1806 - 1871

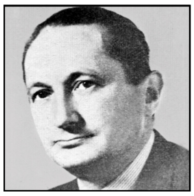
John Venn (page 18)

1834 - 1923

Deuxième moitié du 19$^{\text{ème}}$ siècle

Ernst Zermelo (page 63)

1871 - 1953



Kazimierz Kuratowski (page 30)

1896 - 1980