Ordinaux et cardinaux

-

Le Barbuki 2

2ème édition (publiée en octobre 2025)

Florian Langlois

1ère édition rédigée entre mars 2024 et novembre 2024

Collection

Bienvenue dans ce livre ! C'est le deuxième d'une collection qui tente d'exposer et démontrer les mathématiques de niveau licence et master. Le nom BARBUKI est une référence au célèbre groupe BOURBAKI, dont la démarche de cette collection est inspirée.

0 – Logique élémentaire

1 – Théorie élémentaire des ensembles

2 – Ordinaux et cardinaux

Avant-propos

« *Vers l'infini et au-delà* ». Voilà qui résume bien la théorie des nombres ordinaux dont il est question dans ce livre : s'amuser à compter au-delà même de l'infini, et ce de manière démesurée et vertigineuse. Si cette étude du gigantisme est belle en elle-même, elle est aussi féconde car elle débouche notamment sur la notion d'entiers naturels, c'est-à-dire les nombres de la vie de tous les jours avec lesquels on a l'habitude de compter. Compter est d'ailleurs un usage important des nombres ordinaux : on apprendra dans le troisième chapitre à le faire rigoureusement à travers les nombres cardinaux. Le célèbre lemme de Zorn pointera aussi le bout de son nez, les ordinaux représentant un cadre idéal pour le démontrer.

Il s'agit ici d'exposer l'une des plus belles théories mathématiques que je connaisse. Je me souviens encore avoir ressenti un vertige métaphysique en découvrant ce dont elle parle. C'était en regardant la vidéo de la chaîne YouTube VSauce intitulée "*How to count past infinity*". Je vous recommande au passage vivement d'aller visionner sa vidéo.

Cet ouvrage est là pour me permettre de coucher sur le papier les différentes mathématiques que j'ai apprises durant mes études supérieures : je le rédige principalement pour moi-même et il n'a pas pour but d'être pédagogique. Il va me permettre de conserver sur le long terme une trace de ces connaissances, mais aussi d'organiser celles-ci pour en avoir une vue d'ensemble.

Bien que ce livre reste assez personnel, il est possible qu'il vous soit utile. Afin de comprendre pleinement son contenu, il est nécessaire d'être au courant de ce dont parle le premier ouvrage, c'est-à-dire des bases de la théorie des ensembles, notamment à travers les différents axiomes de ZFC.

Il vous faut aussi savoir mener un raisonnement, ou tout du moins en suivre un, puisque c'est l'un des objets principaux de ce livre. Il est à noter que la construction de cette collection se fait sous la manière d'un escalier à gravir : nous n'utiliserons pas des résultats postérieurs pour démontrer des résultats antérieurs, les seules exceptions étant les exemples donnés pour illustrer, puisque ceux-ci ne sont là que pour aider à la lecture, et non permettre une quelconque démonstration, mais aussi certaines digressions abordant d'autres démonstrations que celles proposées.

Remerciements

Merci à Lyra, Chæris, Shika, Alysio, GrothenDitQue, et Cassis pour leur pinaillage et leurs précieux éclairages. Sans eux cet ouvrage ne pourrait pas exister.

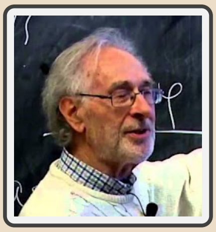
Les biographiques de mathématiciens sont en parties inspirées de Wikipédia ainsi que de l'excellent ouvrage *Des mathématiciens de A à Z* de Daniel Suratteau et Bertrand Hauchecorne, paru en 2008 aux éditions Ellipses.

Le contenu à proprement parlé est très fortement inspiré de l'incroyable ouvrage *The Foundations of Mathematics* de Kenneth Kunen dans son édition de 2007, ainsi que de *Théorie des ensembles* de Jean-Louis Krivine, paru aux éditions Cassini en 2007.

Pour la petite histoire

Kenneth Kunen (2 août 1943 – 14 août 2020) est un mathématicien américain, professeur émérite de mathématiques à l'université du Wisconsin à Madison qui travaillait en théorie des ensembles et à ses applications en topologie et en théorie de la mesure.

Pour la petite histoire



Jean-Louis Krivine (1939 –) est professeur à l'Université Paris7, spécialiste de géométrie algébrique réelle, d'analyse fonctionnelle, de logique et d'informatique théorique. Il a créé, en 1982, l'équipe de logique mathématique, qui est l'un des plus importants laboratoires au monde dans ce domaine. Lauréat de l'Académie des Sciences en 1994 et Prix du Rayonnement français en 2004, il est l'auteur de plusieurs ouvrages de référence en logique.

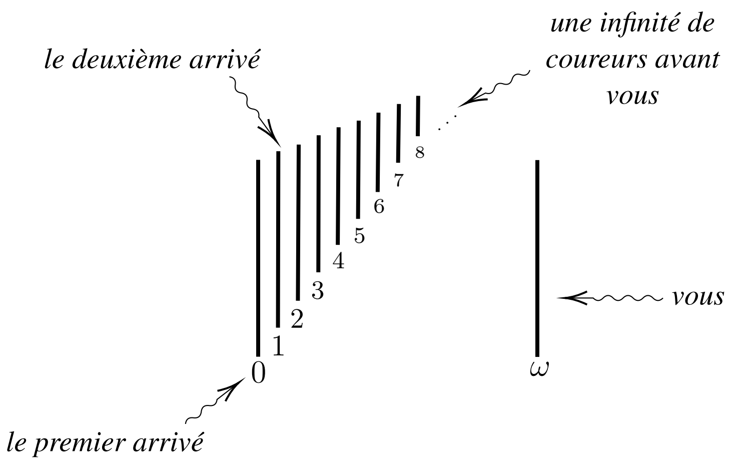
Table des matières

Chapitre 1

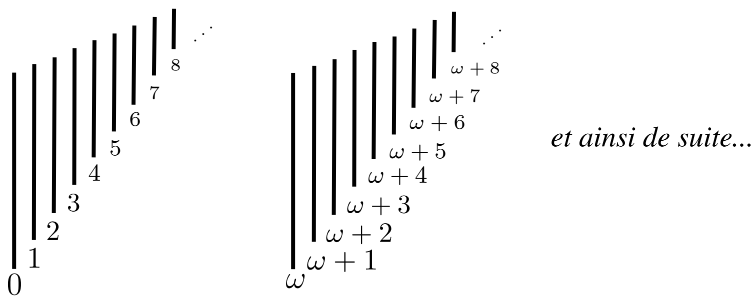
Ordinaux

Sommaire

Imaginez une course à laquelle vous concourez et à laquelle participe une infinité de coureurs. À la fin de la course, chaque participant se voit attribuer un nombre en fonction de l'ordre dans lequel il est arrivé : le premier arrivé reçoit le nombre 0, le deuxième le nombre 1, le troisième le nombre 2, et ainsi de suite pour chaque entier naturel. Et vous ? Vous arrivez après tous les coureurs ayant reçu un nombre entier naturel ! Quel nombre vous correspond-il ? Certainement pas un entier naturel, puisque ceux-ci ont déjà tous été attribués. Il faut donc introduire un nouveau nombre : on le note généralement ω.



Quel nombre attribuer alors à votre ami arrivé juste après vous ? Le nombre $\omega+1$ naturellement ! Et $\omega + 2$ pour la personne juste après-lui, puis $\omega + 3$ et ainsi de suite pour les suivants !



Ces nouveaux nombres que nous venons d'introduire font partie de ce que l'on appelle les **nombres ordinaux**, catégorie dans laquelle se trouvent aussi les entiers naturels. L'objet de ce chapitre est justement de définir et développer les nombres ordinaux. Cela s'inscrit dans un contexte plus général qui est celui des **ensembles bien ordonnés**, pour lesquels chaque partie non vide admet un minimum, permettant de répondre notamment à la question « *quel élément vient juste après celui-ci ?* ». S'intéresser aux ordinaux présente différentes vertus :

- comme les nombres entiers naturels en font partie, nous aurons enfin l'occasion de les définir proprement.
- même si l'exemple de la course est un peu fantaisiste, des situations où l'on souhaite ordonner des choses avec l'une d'entre elle après une infinité d'autres peuvent se présenter à nous et les ordinaux représentent un outil de choix pour cela.
- enfin, les ordinaux constituent le cadre idéal pour compter le nombre d'éléments des ensembles, ce qui sera l'objet du chapitre 3.

1 Classes et assertions fonctionnelles

1.1 Assertions à paramètres

Dans le livre précédent, nous avons développé la notion d'**ensemble**. Intuitivement, un ensemble est une sorte de sac dans lequel on peut mettre n'importe quel objet mathématique. Par exemple, l'ensemble $\{\pi, ABC\}$ contient le nombre π ainsi qu'un triangle que nous nommons ici ABC. Les ensembles de nombres sont des exemples classiques : l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ en est une illustration. Nous aurons d'ailleurs enfin l'occasion de le définir proprement dans ce chapitre, ainsi que tous ses éléments.

Cela dit, nous n'avons pas véritablement défini ce que sont les ensembles. Ils constituent simplement les objets fondamentaux sur lesquels porte notre discours mathématique. Par exemple, dans l'énoncé « *Pour tout x, on a nécessairement $x = x$* », tous les objets désignés par x sont par convention des ensembles. C'est à travers des définitions et des axiomes que nous avons donné à ces objets un comportement conforme à notre intuition du « sac », permettant en particulier la formation de l'assertion $x \in E$, qui signifie que x est un élément de l'ensemble E.

Pour maîtriser rigoureusement notre langage, nous avons également été amenés à manipuler les **assertions** elles-mêmes : ce sont des phrases qui portent sur les ensembles, et qui sont ou bien vraies ou bien fausses. Leur véracité dépend des définitions et des axiomes adoptés. Nous pouvons même formuler des affirmations sur les assertions elles-mêmes : par exemple, le principe du tiers exclu affirme que pour toute assertion P on a nécessairement P ou non(P). Certaines assertions peuvent dépendre de paramètres : l'énoncé « *x est un nombre réel positif* » dépend, bien sûr, de la valeur de x.

L'auteur de ce livre suppose que le lecteur sait déjà raisonner en mathématiques et possède une intuition suffisante de ces notions. Toutefois, un petit rappel permet de bien poser le cadre, d'où la définition suivante.

Définition 1 (Assertion à paramètres)

Une **assertion à paramètres** est une assertion qui nécessite un ou plusieurs paramètres pour être énoncée, et donc la vérité peut varier en fonction de ces paramètres éventuels. Un paramètre est toujours un ensemble.

Exemple :

1. L'assertion $P(n)$ définie par « *n est un entier pair* » dépend de qui est n. C'est en cela que l'on précise entre parenthèses la dépendance de P par rapport à n, pour insister sur ce point. Par exemple $P(4)$ est vraie tandis que $P(5)$ et $P(3.6)$ sont fausses.
2. En revanche, l'assertion $Q(x)$ définie par « $x = x$ » est toujours vraie, quand bien même elle nécessite le paramètre x pour être énoncée.

1.2 Classes

La notion d'ensemble est née de l'idée de vouloir réunir et regrouper plusieurs objets différents : typiquement $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble qui contient tous les entiers relatifs. Nous avons expliqué dans le premier livre les règles qui régissent les ensembles. Un usage fréquent des ensembles est de pouvoir réunir dans un même ensembles tous les objets mathématiques qui vérifient une même propriété. Par exemple, on peut vouloir rassembler dans un même ensemble tous les triangles rectangles, qui partagent donc la propriété d'avoir un angle droit.

À première vue, il semble raisonnable d'imaginer que, pour toute assertion à paramètre P, on puisse former un ensemble A tel que, pour tout x on ait l'équivalence $x \in A \iff P(x)$. En d'autres termes, être dans A reviendrait exactement à satisfaire P. La notation usuelle pour cet ensemble serait $\{x \mid P(x)\}$. Par exemple, on pourrait vouloir définir l'ensemble $\{x \mid 1 \in x\}$ des ensembles dont 1 est élément.

C'est ici que le **paradoxe de Russell** entre en jeu. Considérons en effet $F := \{x \mid x \notin x\}$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Pour tout ensemble x, on a donc l'équivalence $x \in F \iff x \notin x$. Comme tous les objets de notre univers mathématique sont des ensembles, on peut tout à fait prendre x égal F lui-même, ce qui conduit à l'équivalence $F \in F \iff F \notin F$, ce qui aboutit à une contradiction. Ce paradoxe montre clairement qu'on ne peut pas former un ensemble à partir de n'importe quelle propriété. La compréhension naïve, qui consisterait à dire qu'à toute propriété correspond un ensemble, conduit à des incohérences.

Pour pallier ce problème nous avons dans le précédent livre restreint les possibilités de formation des ensembles. Ainsi, pour former un ensemble à partir d'une assertion à paramètre P, il faut commencer par se donner un ensemble E, et ne considérer que les éléments de E qui vérifient P. L'ensemble F ainsi obtenu, généralement noté $\{x \in E \mid P(x)\}$, est défini par la propriété suivante : $x \in F \iff \big(x \in E \text{ et } P(x)\big)$.

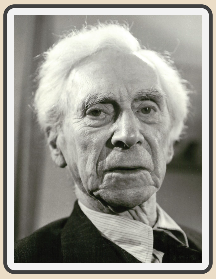
On pourrait s'interroger sur l'efficacité de cette restriction. Après tout, on peut encore considérer l'ensemble $F := \{x \in E \mid x \notin x\}$. Pour tout ensemble x on a maintenant l'équivalence $x \in F \iff (x \in E \text{ et } x \notin x)$. Appliquée à $x = F$, on aboutit alors à $F \in F \iff (F \in E \text{ et } F \notin F)$. Autrement dit :

- Si $F \in F$, alors $F \in E$ mais surtout $F \notin F$. Comme précédemment on aboutit à une contradiction.
- En revanche si $F \notin F$ il n'y a aucune raison d'avoir particulièrement $F \in E$, et donc aucune raison d'en déduire $F \in F$: la contradiction disparaît.

Ainsi, cette version restreinte de la formation des ensembles empêche le paradoxe de Russell de se produire, et c'est cela que l'on a appelé l'**axiome de compréhension**.

Cependant, cette restriction a un prix : certaines collections intuitivement naturelles ne peuvent plus être considérées comme des ensembles. Par exemple, il n'est pas possible de former Ω, l'« *ensemble de tous les ensembles* ». En effet, si un tel ensemble Ω existait, alors l'axiome de compréhension permettrait de définir $F := \{x \in \Omega \mid x \notin x\}$, et comme $F \in \Omega$ serait garanti par définition, on retomberait exactement dans le paradoxe de Russell.

Pour la petite histoire



Bertrand Russell (18 mai 1872 – 2 février 1970), est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique.

Russell est, avec Frege, l'un des fondateurs de la logique contemporaine qui fait de cette dernière le fondement des mathématiques. Son ouvrage majeur, écrit avec Whitehead, a pour titre *Principia Mathematica*. À la suite des travaux d'axiomatisation de l'arithmétique de Peano, Russell a tenté d'appliquer ses propres travaux de logique à la question du fondement des mathématiques (cf. logicisme). Son œuvre littéraire est aussi couronnée par le prix Nobel de littérature en 1950, « *en reconnaissance des divers écrits, toujours de premier plan, qui le posent en champion des idéaux humanistes et de la liberté de pensée* ».

Dans une lettre envoyée en 1902 à Frege, Russell explicite le paradoxe qui porte aujourd'hui son nom.

Pourtant, il serait très utile de pouvoir simplifier nos discours en regroupant, sous une seule entité, tous les ensembles. C'est précisément ce que permet la notion de **classe**, qui généralise celle d'ensemble. Contrairement aux ensembles, les classes peuvent être définies à partir de n'importe quelle assertion à paramètre. En particulier, on peut parfaitement considérer la « *classe de tous les ensembles* ». Plus généralement, à toute assertion à paramètre P, on associe une classe, qui regroupe tous les ensembles x tels que $P(x)$ est vraie. Pour réaliser cela, nul besoin d'introduire de nouveaux objets : nous allons simplement nous servir des assertions elles-mêmes pour représenter les classes. Étant donnée une assertion P, elle jouera le rôle de la classe correspondante, et on posera la convention suivante : $x \in P \iff P(x)$. Appartenir à P signifiera simplement vérifier P.

Définition 2 (Classe)

Soit C une assertion à paramètres.
Si C nécessite un seul paramètre pour être énoncée, on dit parfois que C est une **classe**.

Pour un ensemble x donné, on dit que x **appartient** à C si et seulement si $C(x)$ est vraie, auquel cas on note alors $x \in C$. On dit aussi que x est un **élément** de C.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $C(x)$ est fausse, on dit que x n'appartient pas à C, ou que x n'est pas un élément de C, et on note $x \notin C$.

Exemple :

1. La classe C de tous les ensembles dont 1 est un élément : pour tout x on a l'équivalence $x \in C \iff 1 \in x$.
2. La classe U de tous les ensembles : pour tout x on a nécessairement $x \in U$. Pour la définir, il suffit simplement de choisir une assertion qui est toujours vraie. Par exemple, on peut poser $U(x)$ l'assertion « $x = x$ » si bien que $\forall x, U(x)$ et donc $\forall x, x \in U$.

Ainsi, la notion de classe généralise celle d'ensemble. En effet, étant donné un ensemble E, on peut lui associer l'assertion à paramètres « $x \in E$ », qui est donc une classe.

Définition 3 (Classe propre)

Soient E un ensemble et C une classe.

On dit que C est **issue** de E si et seulement si pour tout ensemble x, on a l'équivalence

$$x \in C \iff x \in E$$

Dans le cas où C n'est issue d'aucun ensemble, on dit que C est **propre**.

Remarque :
Si une classe C est issue d'un ensemble E, alors cet ensemble est unique. En effet, cela vient du fait que l'appartenance caractérise entièrement un ensemble. On commettra souvent l'abus de confondre une classe et l'ensemble dont elle est issue, si celui-ci existe.

Exemple :
Dès que l'on dispose d'un ensemble E, l'assertion « $x \in E$ » est la classe issue de E. Voici en revanche quelques exemples de classes propres :

1. La classe U de tous les ensembles. Comme on l'a dit en introduction, d'après le paradoxe de Russell cette classe est nécessairement propre.
2. Nous allons plus tard introduire la notion d'ordinal, et donc considérer ON la classe de tous les ordinaux. Nous verrons via le paradoxe de Burali-Forti que cette classe est propre. C'est d'ailleurs pour s'intéresser précisément à cette classe-là que nous avons introduit dans ce livre la notion de classe, l'intérêt étant de pouvoir notamment considérer des applications entre des classes d'ordinaux.

Remarque :
Le terme de *classe* peut prêter à confusion avec la notion de *classe d'équivalence*. Nous avons abordé cette notion dans le précédent livre : une classe d'équivalence est un cas particulier d'ensemble, là où une classe (tout court) est une généralisation de la notion d'ensemble. Évidemment, une classe d'équivalence est donc un cas particulier de classe (tout court), mais c'est aussi le cas de n'importe quel ensemble.

Notation :
On introduit d'un coup d'un seul toutes ces notations différentes. Il ne s'agit pas de rentrer dans le détails de chacune, car l'objet de ce livre n'est pas d'étudier les classes. Il s'agit ici plutôt de montrer en quoi cette nouvelle notion prolonge intuitivement celle d'ensembles.

Soient C et D deux classes, E un ensemble et C_E la classe issue de E.

- On note $C \subseteq D$ si et seulement si $\forall x, (x \in C \Rightarrow x \in D)$.
  En particulier on note $E \subseteq D$ si et seulement si $C_E \subseteq D$.
  Autrement dit, $E \subseteq D$ si et seulement si $\forall x, (x \in E \Rightarrow x \in D)$.
- On note $C \cap D$ la classe définie pour tout ensemble x par

$$x \in C \cap D \iff (x \in C \text{ et } x \in D)$$

  En particulier on note $E \cap D$ la classe $C_E \cap D$.
  D'après l'axiome de compréhension que $E \cap D$ est une classe issue d'un ensemble.
  En effet, elle est issue de l'ensemble défini en compréhension par :

$$\{x \in E \mid x \in D\} = \big\{x \in E \bigm| D(x)\big\}$$

  Comme indiqué précédemment on confondra souvent la classe $E \cap D$ et cet ensemble.
- On note $C \cup D$ la classe définie pour tout ensemble x par

$$x \in C \cup D \iff (x \in C \text{ ou } x \in D)$$

  En particulier on note $E \cup D$ la classe $C_E \cup D$.
- On note $D \backslash C$ la classe définie pour tout ensemble x par

$$x \in D \backslash C \iff (x \in D \text{ et } x \notin C)$$

  En particulier on note $D \backslash E$ la classe $D \backslash C_E$.
- On note $C \in D$ si et seulement si C est **issue d'un ensemble** F qui vérifie $F \in D$. C'est une notation légitime dans le sens où comme C est issue de F, on confond les deux. C'est d'ailleurs le seul cas où on s'autorise à dire qu'une classe est un élément d'une autre. C'est en cela que l'on évite le paradoxe de Russell : il est interdit de considérer des classes de classes, les classes ne peuvent avoir pour éléments que des ensembles (ou des classes issues d'ensembles), de sorte que la classe de tous les ensembles n'est pas un élément d'elle-même car elle n'est pas un ensemble.

1.3 Assertions fonctionnelles

Maintenant que nous avons généralisé la notion d'ensemble avec celle de classe, il est temps de généraliser la notion d'application. Nous avons défini une application f comme étant une relation binaire (un ensemble de couples donc) vérifiant

$$\forall x, \forall y, \forall y', \Big((xfy \text{ et } xfy') \implies y = y'\Big)$$

c'est-à-dire que si x est en relation avec au moins un y, alors ce y est unique. On le note alors $f(x)$ et on dit que c'est l'image de x par f.

Comment généraliser cette idée pour les classes ? Encore une fois, cela va passer par la notion d'assertion à paramètres. Plus précisément, parmi toutes les assertions à paramètres nous allons considérer les assertions dites **fonctionnelles**, l'adjectif faisant référence au fait que l'on généralise la notion de fonction. C'est une notion que l'on a déjà déployée lors du premier livre, mais rappelons tout de même ici la définition.

Définition 4 (Assertion fonctionnelle)

Soit P une assertion à paramètres.
On dit que P est **fonctionnelle** si et seulement si elle nécessite deux paramètres pour être énoncée et pour tout ensembles x, y et y', on a l'implication

$$\Big(P(x,y) \text{ et } P(x,y')\Big) \implies y = y'$$

Ainsi pour un ensemble x donné, il y a au plus un ensemble y qui lui est associé par le biais de P. On dit alors que y est **l'image** de x par P et on note alors $P(x) := y$.

Exemple :

1. L'assertion P définie pour deux ensembles a et b par

$$P(a,b) \iff \text{« } a \textit{ est un entier naturel et } b = 2a \text{ »}$$

est une assertion fonctionnelle. Pour tout a entier naturel, on a alors $P(a) = 2a$.

2. Étant donnée une application f, on peut naturellement lui associer une assertion fonctionnelle P_f en posant pour tout ensembles x et y

$$P_f(x,y) \iff \text{« } x \in \operatorname{dom}(f) \textit{ et } y = f(x) \text{ »}$$

Pour tout $x \in \operatorname{dom}(f)$, on a alors $P_f(x) = f(x)$. Tout comme on confond un ensemble et la classe associée, on confondra souvent f et P_f.

Comme l'indiquent ces exemples, la notion d'assertion fonctionnelle et la notion de fonctions sont très liées, du fait pour un ensemble x de n'associer qu'au plus un autre ensemble. On retrouve donc naturellement la notion d'image, et les notations $P(x)$ et $f(x)$ qui s'y réfèrent sont identiques. Il est important au passage pour une assertion fonctionnelle de ne pas confondre la notation $P(x,y)$ qui se réfère à l'assertion en elle-même et qui est donc soit vraie soit fausse en fonction des paramètres x et y, et la notation $P(x)$ qui désigne l'unique paramètre y tel que $P(x,y)$ soit vraie, à condition bien sûr que celui-ci existe.

Dans le cas d'une fonction f, on peut parler de son domaine $\operatorname{dom}(f)$ comme d'un ensemble, c'est-à-dire l'ensemble de tout ce qui admet une image par f. Dans le cas des assertions fonctionnelles, la notion de domaine et d'image s'incarne à travers les classes que nous avons introduites plus tôt.

Définition 5 (Domaine et image d'une assertion fonctionnelle)

Soit P une assertion fonctionnelle.

1. On appelle **domaine** de P la classe notée $\mathrm{dom}(P)$ définie pour tout ensemble x par
$$x \in \mathrm{dom}(P) \iff \exists y, P(x,y)$$
2. On appelle **image** de P la classe notée $\mathrm{im}(P)$ définie pour tout ensemble y par
$$y \in \mathrm{im}(P) \iff \exists x, P(x,y)$$

Exemple :

1. Considérons l'assertion fonctionnelle P définie pour tout ensembles x et y par
$$P(x,y) \iff \text{« } x = y \text{ »}$$
Alors P a pour domaine U, la classe de tous les ensembles, et pour tout x on a $P(x) = x$. C'est la généralisation de l'identité à U tout entier.
2. L'assertion fonctionnelle Q définie pour tout ensembles a et b par
$$Q(a,b) \iff \text{« } a \textit{ est un entier naturel et } b = 2a \text{ »}$$
a pour domaine la classe issue de $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Comme dit précédemment, on commettra souvent l'abus de confondre un ensemble et la classe issue de celui-ci, si bien qu'on écrira $\mathrm{dom}(Q) = \mathbb{N}$.
3. Plus généralement, soient f une application et F_f l'assertion fonctionnelle issue de f, c'est-à-dire
$$F_f(x,y) \iff \text{« } x \in \mathrm{dom}(f) \textit{ et } y = f(x) \text{ »}$$
On peut voir que $\mathrm{dom}(F_f)$ est tout simplement la classe issue de $\mathrm{dom}(f)$. Comme dit précédemment, on commettra souvent l'abus de confondre un ensemble et la classe issue de celui-ci, si bien qu'on écrira $\mathrm{dom}(F_f) = \mathrm{dom}(f)$.

Remarque :

1. Soient P une assertion fonctionnelle, ainsi que C et D deux classes.
   - On note $P : C \longrightarrow ?$ lorsque $\mathrm{dom}(P) = C$.
   - On note $P : C \longrightarrow D$ lorsque $\mathrm{dom}(P) = C$ et $\mathrm{im}(P) \subseteq D$.
2. À la manière des images directes et réciproques d'un ensemble par une fonction, on peut se donner une classe C et considérer son **image directe** par P, à savoir la classe notée $P^{\rightarrow}(C)$ définie pour tout ensemble y par
$$y \in P^{\rightarrow}(C) \iff \exists x \in C, P(x,y)$$
Nous avons vu dans le livre 1 via l'axiome de remplacement que si E est un ensemble tel que $E \subseteq \mathrm{dom}(P)$ alors $P^{\rightarrow}(E)$ est un ensemble que l'on a noté $\{P(x) \mid x \in E\}$. De même, on peut considère l'**image réciproque** de la classe C par P, à savoir la classe notée $P^{\leftarrow}(C)$ définie pour tout ensemble x par
$$x \in P^{\leftarrow}(C) \iff \exists y \in C, P(x,y)$$

3. Soient P une assertion fonctionnelle et E un ensemble tel que $E \subseteq \mathrm{dom}(P)$. On a montré dans le précédent livre qu'il existe alors une unique application $f : E \longrightarrow ?$ telle que $\forall x \in E, f(x) = P(x)$, que l'on note généralement

$$\left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & ? \\ x & \longmapsto & P(x) \end{array} \right)$$

En cela, on dira que f est la **restriction** de P à E, et on notera $P_{|E} := f$. Ainsi, même si P est une assertion fonctionnelle sans être une application, toute restriction de celle-ci à un ensemble est nécessairement une application.

2 Ensembles bien ordonnés

Étant donnés un ensemble E et x un élément de celui-ci, est-il possible de donner du sens à la question « *quel est l'élément de E qui vient juste après x ?* ». Par exemple chez les entiers naturels, $n+1$ est l'élément qui vient juste après n.

Pour donner un contre exemple, dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, la notion de successeur n'a pas vraiment de sens : si je prends un réel x, il n'y a pas de nombre réel y qui viendrait juste après x puisque par exemple $\dfrac{x+y}{2}$ sera forcément situé entre les deux.

Pour donner du sens à l'idée de successeur d'un élément x, on peut regarder du côté des ensembles **bien ordonnés**. Un ensemble bien ordonné $(E, \leq)$, c'est un ensemble muni d'un ordre tel que toutes les parties non vides de l'ensemble vont admettre un minimum. En considérant alors la partie $\{y \in E \mid x < y\}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui sont strictement plus grands que x, à supposé que cette partie est non vide elle va forcément admettre un minimum, et c'est lui qu'on appellera successeur de x. Par exemple dans $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, pour $n \in \mathbb{N}$, il s'avère que $n+1$ est le minimum des entiers naturels strictement plus grands que n.

Ainsi, nous allons partir étudier les ensembles bien ordonnés. Pour en saisir quelques subtilités, commençons tout d'abord par rappeler la définition de 4 notions abordées à la fin du précédent livre : prenons A une partie de l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ et x un élément de E

1. on dit que x est **un minorant** de A si et seulement si $\forall a \in A, x \leq a$.
2. on dit que x est **le minimum** de A si et seulement si $x \in A$ et x est un minorant de A.
3. on dit que x est **un élément minimal** de A si et seulement si $x \in A$ et

   $$\forall a \in A, \big(a \leq x \Rightarrow a = x\big)$$

   Ainsi il n'y a rien dans A qui soit plus petit que x, à part x lui-même.
4. on dit que x est **la borne inférieure** de A si et seulement si x est le maximum des minorants de A.

On remarque alors que si A admet un minimum, alors c'est aussi la borne inférieure de A et aussi le seul élément minimal de A. Par exemple 3 est le minimum de $[3, 4[$ dans $\mathbb{R}$. En revanche une partie peut admettre une borne inférieure sans avoir de minimum : par exemple 3 est la borne inférieure de $]3, 4[$ mais n'en est pas minimum car n'en est pas un élément. Pour que la borne inférieure soit aussi le minimum, il faut et il suffit qu'elle en soit un élément.

De même, une partie peut admettre un ou plusieurs éléments minimaux sans qu'aucun ne soit minimum de la partie. Par exemple dans $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ muni de la relation de divisibilité, tous les nombres premiers sont des éléments minimaux mais aucun n'est minimum. En effet, rien dans $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ n'est plus petit que 2 (à part 2 lui-même), car rien autre que 2 ne divise 2. Cependant, 2 n'est pas pour autant plus petit que 3 car 2 ne divise pas 3 : ainsi 2 n'est pas le minimum de $\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Ce qu'il faut pour qu'un élément minimal soit aussi le minimum de la partie, c'est qu'il soit comparable à chacun des autres éléments de la partie. Ici, 2 n'est pas comparable à 3 car aucun des deux ne divise l'autre. On dit que l'ordre de divisibilité n'est pas **total**.

Proposition 1 (Éléments minimaux, borne inf et minimum)

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1. Supposons que A admet une borne inférieure.
   Alors A admet un minimum si et seulement si $\inf(A) \in A$.
   Dans ce cas-là, on a $\inf(A) = \min(A)$.
2. Soit m un élément minimal de A.
   Les assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) A admet un minimum.
   (b) m est le minimum de A.
   (c) m est un minorant de A.
   (d) m est comparable avec tous les éléments de A.

Démonstration

1.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que A admet un minimum.

On a vu dans le précédent livre qu'alors $\inf(A) = \min(A)$.

Or $\min(A) \in A$ par définition, donc $\inf(A) \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\inf(A) \in A$.

Par définition $\inf(A)$ est un minorant de A.

Comme c'est un élément de A, par définition c'est le minimum de A.

Donc A admet un minimum.

2. Nous allons montrer (a) $\iff$ (b) $\iff$ (c) $\iff$ (d).

$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$

Supposons que A admet un minimum.

Comme m est un élément de A, on a $\min(A) \leq m$.

Or m est minimal donc $\min(A) = m$ par définition d'être minimal.

$\boxed{\text{(b)}\Leftarrow\text{(a)}}$

Supposons que m est le minimum de A.

En particulier A admet un minimum.

$\boxed{\text{(b)}\Rightarrow\text{(c)}}$

Supposons que m est le minimum de A.

En particulier m est un minorant de A.

$\boxed{\text{(c)}\Leftarrow\text{(b)}}$

Supposons que m est un minorant de A.

Par définition d'être un élément minimal, on a $m \in A$.

Donc m est un minorant de A et un élément de A, donc m est le minimum de A.

$\boxed{\text{(c)}\Rightarrow\text{(d)}}$

Supposons que m est un minorant de A.

Cela signifie que $\forall a \in A, m \leq a$.

En particulier m est comparable avec tous les éléments de A.

$\boxed{\text{(d)}\Rightarrow\text{(b)}}$

Supposons que m est comparable avec tous les éléments de A.

Soit $a \in A$.

Comme m et a sont comparables, on a $m \leq a$ ou $a \leq m$.

Si $a \leq m$ alors $a = m$ car m est minimal, donc $m \leq a$ par réflexivité de $\leq$.

Dans les deux cas on a $m \leq a$.

Ainsi $\forall a \in A, m \leq a$ donc m est un minorant de A.

CQFD.

Remarque :
On pourrait démontrer de la même manière que si A admet une borne supérieure, alors A admet un maximum si et seulement si sa borne supérieure en est un élément. De même, on retrouve les équivalences similaires en ce qui concerne les éléments maximaux. La démonstration est identique.

Une caractérisation pratique des éléments minimaux passe par l'ordre strict associé : un élément est minimal si et seulement si aucun élément n'est strictement plus petit que lui.

Proposition 2 (Élément minimal et ordre strict)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné non vide, $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$ et $a \in E$.

Alors a est minimal pour $(E, \preccurlyeq)$ si et seulement si $\forall x \in E, \mathrm{non}(x \prec a)$.

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que a est minimal pour $(E, \preccurlyeq)$.

Soit $x \in E$.

Supposons par l'absurde que $x \prec a$.

On a donc $x \preccurlyeq a$ et $x \neq a$.

Comme $x \preccurlyeq a$ et a est minimal pour $(E, \preccurlyeq)$, on a $x = a$.

Ainsi on a à la fois $x \neq a$ et $x = a$: c'est absurde.

Par l'absurde, on a donc montré que $\operatorname{non}(x \prec a)$.

Donc $\forall x \in E, \operatorname{non}(x \prec a)$.

Donc $\boxed{\text{si } a \text{ est minimal pour } (E, \preccurlyeq) \text{ alors } \forall x \in E, \operatorname{non}(x \prec a)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall x \in E, \operatorname{non}(x \prec a)$.

Soit $x \in E$.

Supposons que $x \preccurlyeq a$.

On a donc $x \prec a$ ou $x = a$.

Or on a $\operatorname{non}(x \prec a)$ par hypothèse donc nécessairement $x = a$.

Donc si $x \preccurlyeq a$ alors $x = a$.

Donc $\forall x \in E, \Big(x \preccurlyeq a \implies x = a\Big)$.

Donc a est minimal pour $(E, \preccurlyeq)$.

Donc si $\boxed{\forall x \in E, \operatorname{non}(x \prec a) \text{ alors } a \text{ est minimal pour } (E, \preccurlyeq)}$.

CQFD.

Nous l'avons dit dans l'introduction, nous allons dire qu'un ensemble est muni d'un bon ordre lorsque chacune de ses parties non vides admet un minimum. Une version plus faible de la notion de bon ordre est la notion d'ordre **bien fondé**, où l'on demande à chaque partie non vide d'admettre un élément minimal.

Définition 6 (Ordre bien fondé et bon ordre)

Soit E un ensemble ordonné.

1. On dit que E est **bien fondé** si et seulement si toute partie **non vide** de E admet au moins un élément minimal.
2. On dit que E est **bien ordonné** si et seulement si toute partie **non vide** de E admet un minimum. On dit aussi que l'ordre sur E est un **bon ordre**.

Exemple :

1. L'ensemble des entiers naturels $(\mathbb{N}, \leq)$ est bien ordonné : nous aurons justement l'occasion de le démontrer plus tard dans ce livre, après l'avoir construit.
2. Considérons $X := \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\big\}$ ordonné par l'inclusion. Ses parties sont alors $\varnothing$, $A := \big\{\{1\}\big\}$, $B := \big\{\{2\}\big\}$, $C := \big\{\varnothing, \{1\}\big\}$, $D := \big\{\varnothing, \{2\}\big\}$, $E := \big\{\{1\}, \{2\}\big\}$ et X lui-même. Chacune des parties non vides de X admettent au moins un élément minimal.
   - Pour C, D et X, comme $\varnothing$ est inclus dans n'importe quel ensemble, il est le minimum de C, de D et de X, donc a fortiori leur unique élément minimal.

- Pour A et E, alors $\{1\}$ en est un élément minimal car aucun autre élément de A ou de E n'est inclus dans $\{1\}$ donc n'est plus petit que $\{1\}$.
- Pour B, $\{2\}$ en est l'unique élément donc minimum et donc élément minimal.

Ainsi X est bien fondé. En revanche E n'admet pas de minimum car on n'a ni $\{1\} \subseteq \{2\}$ ni $\{1\} \supseteq \{2\}$, si bien que l'inclusion n'est pas un bon ordre sur X.

3. L'ensemble des nombres réels $(\mathbb{R}, \leq)$ n'est pas bien fondé (donc a fortiori pas bien ordonné) car certaines parties non vides, par exemple $\mathbb{R}$ lui-même, n'ont pas d'élément minimaux (et donc a fortiori pas de minimum).

Remarque :
Dans la suite de cet ouvrage, on va étendre les définitions qui concernent les ordres (larges) aux ordres stricts. Par exemple, considérons $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$ et $a \in E$.

- On dit que a est **minimal** pour $(E, \prec)$ si et seulement si a est minimal pour $(E, \preccurlyeq)$.
- On dit que a **le minimum** de $(E, \prec)$ si et seulement si a est le minimum de $(E, \preccurlyeq)$.
- On dit que $\prec$ est un **ordre strict bien fondé** sur E si et seulement si toute partie non vide de E admet un élément minimal pour $\prec$. Comme $\prec$ et $\preccurlyeq$ partagent les mêmes éléments minimaux d'après ce qui précède, $\prec$ est un ordre strict bien fondé sur E si et seulement si $\preccurlyeq$ est un ordre (large) bien fondé.
- On dit que $\prec$ est un **bon ordre strict** sur E, ou que $(E, \prec)$ est **strictement bien ordonné**, si et seulement si toute partie non vide de E admet un minimum pour $\prec$. Comme $\prec$ et $\preccurlyeq$ partagent le même minimum éventuel, $\prec$ est un bon ordre strict sur E si et seulement si $\preccurlyeq$ est un bon ordre (large) sur E.

On pourrait aussi parler d'éléments maximaux et de maximum, mais dans ce livre ce sont avant tout les minimaux et minimum qui vont nous intéresser, bien qu'à quelques endroits les maximaux et maximums reviendront nous voir.

On l'a vu dans le précédent livre, si une partie admet un minimum alors celui-ci est un élément minimal de la partie. Autrement dit, un ensemble bien ordonné est nécessairement un ensemble bien fondé.

Réciproquement, à quelle condition un ensemble bien fondé est-il bien ordonné ? On l'a dit lors de la proposition 1 page 12, un élément minimal d'une partie en est le minimum si et seulement s'il est comparable avec tous les autres éléments de la partie. Si on souhaite que ce soit le cas peu importe la partie non vide, il faut donc que tous les éléments de l'ensemble soient comparables deux à deux : il faut et il suffit que l'ordre soit total !

Proposition 3 (Caractérisation des bons ordres)

Soit E un ensemble ordonné.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est bien ordonné.
2. E est bien fondé et totalement ordonné.

Démonstration

Notons $\preccurlyeq$ l'ordre sur E.

Raisonnons par double implications.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que E est bien ordonné.

Alors toute partie non vide de E admet un minimum.

Or un minimum est un élément minimal (c'est alors le seul).

Donc toute partie non vide de E admet un élément minimal.

Donc $\boxed{E \text{ est bien fondé}}$.

Montrons que E est totalement ordonné.

Soient x et y dans E.

Alors $\{x, y\}$ est une partie non vide de E.

Elle admet donc un minimum m.

Si $m = x$ alors on a $x = m \preccurlyeq y$.

Si $m = y$ alors on a $y = m \preccurlyeq x$.

Dans les deux cas on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$.

Donc tous les éléments de E sont comparables : $\boxed{E \text{ est totalement ordonné}}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que E est bien fondé et totalement ordonné.

Soit A une partie non vide de E.

Comme E est bien fondé, A admet au moins un élément minimal m.

Or E est totalement ordonné donc m est comparable avec tous les éléments de A.

Donc m est le minimum de A d'après la proposition 1 page 12.

Donc toute partie non vide de E admet un minimum.

Donc $\boxed{E \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Le fait pour un ensemble d'être muni d'un ordre bien fondé ou d'un bon ordre se transmet aux parties de cet ensemble, en considérant bien entendu que l'on conserve la même relation d'ordre au passage.

Proposition 4 (Partie d'un ensemble bien ordonné)

Soient E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.
On munit A de la même relation d'ordre que celle de E.

1. Si E est bien fondé alors A est bien fondé.
2. Si E est bien ordonné alors A est bien ordonné.

Démonstration

1. Supposons que E est bien fondé.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien fondé par hypothèse.

Donc B admet au moins un élément minimal.

Donc toute partie non vide de A admet au moins un élément minimal.

Donc $\boxed{A \text{ est bien fondé}}$.

2. Supposons que E est bien ordonné.

Soit B une partie non vide de A.

Comme $A \subseteq E$, B est aussi une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné par hypothèse.

Donc B admet un minimum.

Donc toute partie non vide de A admet un minimum.

Donc $\boxed{A \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Rappelons qu'étant donnés deux ensembles ordonnés $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \sqsubseteq)$, on peut munir $E \times F$ de l'ordre **lexicographique** associé, c'est-à-dire que pour x et y dans E et s et t dans F, on a

$$(x, s) \trianglelefteq (y, t) \iff \Big[x \prec y \text{ ou } (x = y \text{ et } s \sqsubseteq t)\Big]$$

où $\prec$ désigne l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$. L'ordre lexicographique tire son nom du fait que les dictionnaires fonctionnent sur ce principe (par rapport à l'ordre alphabétique) : on compare d'abord les premières lettres de chaque mot, et éventuellement si ce sont les mêmes on compare les deuxième lettres et ainsi de suite. Ici il s'agit simplement de comparer des mots ayant chacun deux lettres.

Proposition 5 (Bons ordres et ordre lexicographique)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ et $(F, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $\trianglelefteq$ l'ordre lexicographique associé sur $E \times F$.
Si $\preccurlyeq$ et $\sqsubseteq$ sont des bons ordres alors $\trianglelefteq$ est un bon ordre.

Démonstration

Notons $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$.

Supposons que $\preccurlyeq$ et $\sqsubseteq$ sont des bons ordres.

Soit G une partie non vide de $E \times F$.

Considérons $A := \{x \in E \mid \exists y \in F, (x, y) \in G\}$.
Comme G est non vide, A est une partie non vide de E.
Or E est bien ordonné donc A admet un minimum a_0.

Considérons alors $B := \{y \in F \mid (a_0, y) \in G\}$.
Par définition on a $a_0 \in A$ donc il existe $y \in F$ tel que $(a_0, y) \in G$ et donc $y \in B$.
Donc B est une partie non vide de F.
Or F est bien ordonné donc B admet un minimum b_0.

Considérons alors $g_0 := (a_0, b_0)$ et montrons que g_0 est le minimum de G.
Soit $z = (x, y) \in G$.
Par définition de A on a $x \in A$.
Or a_0 est le minimum de A donc $a_0 \preccurlyeq x$.
On a donc $a_0 \prec x$ ou $a_0 = x$.
Si $a_0 \prec x$ alors par définition de $\trianglelefteq$ on a $(a_0, b_0) \trianglelefteq (x, y)$.
Supposons à présent que $a_0 = x$.
On a donc $(a_0, y) = (x, y) \in G$ donc $y \in B$ par définition de B.
Or b_0 est le minimum de B donc $b_0 \sqsubseteq y$.
On a donc $a_0 = x$ et $b_0 \sqsubseteq y$ donc $(a_0, b_0) \trianglelefteq (x, y)$ par définition de $\trianglelefteq$.
Dans les deux cas on a bien $g_0 \trianglelefteq z$.
Donc pour tout $z \in G$, on a $g_0 \trianglelefteq z$.
Donc g_0 est le minimum de G.
Donc toute partie non vide de $E \times F$ admet un minimum.
Donc $\boxed{E \times F \text{ est bien ordonné}}$.
CQFD.

Introduisons à présent la notion de **segment initial**. Une partie d'un ensemble ordonné est un segment initial si et seulement si pour chacun de ses éléments, elle contient aussi tous les éléments qui lui sont inférieurs.

Définition 7 (Segment initial)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.
On dit que A est un **segment initial** de E si et seulement si pour tout x et y dans E, on a

$$\big(y \preccurlyeq x \in A\big) \implies y \in A$$

Exemple :

1. Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel, $]-\infty, 2[$ est un segment initial. En revanche $]1; 3]$ n'en est pas un car $3 \in]1; 3]$ et $0 \leq 3$ alors que $0 \notin]1; 3]$.

2. Dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité, $\{1, 2, 4, 8\}$ est un segment initial. En revanche $\{1, 2, 6\}$ n'en est pas un car $6 \in \{1, 2, 6\}$ et $3|6$ alors que $3 \notin \{1, 2, 6\}$.

Notation :
Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, $\prec$ l'ordre strict associé et $x \in E$.
On pose $E_{\prec x} := \{y \in E \mid y \prec x\}$.

Dans le cas des ensembles bien ordonnés, on a une caractérisation simple des segments initiaux propres. On rappelle au passage qu'une partie A d'un ensemble E est dite propre si et seulement si $A \neq E$.

Proposition 6 (Segments initiaux d'un ensemble bien ordonné)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble **bien ordonné** et A une partie de E.
Soit $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est un segment initial **propre** de E.
2. Il existe $x \in E$ tel que $A = E_{\prec x}$.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que A est un segment initial propre de E.

Comme A est une partie propre de E, on a $A \subsetneq E$ donc $E \backslash A \neq \varnothing$.

Or E est bien ordonné par définition donc $E \backslash A$ possède un minimum x.

Montrons que $A = E_{\prec x}$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $a \in A$.

Comme E est bien ordonné, E est totalement ordonné d'après la prop. 3 p. 15.

On a donc $x \preccurlyeq a$ ou $a \prec x$.

Supposons par l'absurde que $x \preccurlyeq a$.

On a donc $x \preccurlyeq a \in A$ et A est un segment initial de E par hypothèse.

Donc $x \in A$, ce qui est absurde car $x \in E \backslash A$.

Donc par l'absurde on a $a \prec x$, c'est-à-dire $a \in E_{\prec x}$.

On a donc $A \subseteq E_{\prec x}$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in E_{\prec x}$.

On a alors $y \in E$ et $y \prec x$.

Or par définition x est le minimum de $E \backslash A$.

On a donc $y \notin E \backslash A$, donc comme $y \in E$ on a $y \in A$.

Donc $A \supseteq E_{\prec x}$ et donc $\boxed{A = E_{\prec x}}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons qu'il existe $x \in E$ tel que $A = E_{\prec x}$.

Soient y et z dans E.

Supposons que $z \preccurlyeq y \in A$.

Par hypothèse on a $A = E_{\prec x}$ donc $y \in E_{\prec x}$ et donc $y \prec x$.

Comme $z \preccurlyeq y$ on a donc $z \prec x$ par transitivité et donc $z \in E_{\prec x} = A$.

Donc si $z \preccurlyeq y \in A$ alors $z \in A$.

Donc $\boxed{A \text{ est un segment initial de } E}$.

De plus, on n'a pas $x \prec x$ par antiréflexivité donc $x \notin E_{\prec x} = A$.

Ainsi $x \in E$ et $x \notin A$, donc $E \neq A$ et donc $\boxed{A \text{ est une partie propre de } E}$.

CQFD.

Nous venons de voir ce que sont les ensembles bien ordonnés, et nous savons en quoi ils permettent de donner du sens à l'idée d'un élément successeur, qui vient juste après. Nous verrons plus tard qu'ils permettent aussi de généraliser le principe de récurrence que l'on a vu au lycée : il sera possible de faire une récurrence sur n'importe quel ensemble bien ordonné.

Pour pratiquement toute la suite du livre, nous allons nous concentrer uniquement sur certains ensembles ordonnés bien particuliers : ce sont eux qu'on appellera les **ordinaux**. Nous verrons cependant qu'ils peuvent être utilisés pour représenter n'importe quel ensemble bien ordonné, ce qui fait qu'on pourra toujours se ramener à eux !

3 Ordinaux

Lors du précédent livre, nous avons vu la notion d'**isomorphisme** entre deux ensembles ordonnés. C'est une façon de dire que ces deux ensembles ordonnés "*se comportent de la même manière*", pour peu que l'on ne s'intèresse qu'à leur structure d'ensembles ordonnés. Nous pouvons donc d'une certaine manière "*identifier*" deux ensembles ordonnés dès lors qu'il existe un isomorphisme entre les deux, et donc dire en ce sens-là qu'ils sont équivalents. Qui dit équivalence dit classe d'équivalence, c'est-à-dire rassembler en un seul endroit tous ces ensembles ordonnés qui sont isomorphes entre eux. Notons au passage que la notion de classe d'équivalence ici n'a pas besoin d'être un ensemble : nous avons justement introduit plus tôt le concept de classe (tout court) pour palier ce problème.

Se pose alors la question suivante : pour chacune de ces classes d'équivalences, peut-on se donner un représentant canonique, c'est-à-dire un ensemble ordonné qui représenterait toute la classe d'équivalence ? Si nous n'allons pas donner de réponse à cette question en toute généralité, nous allons le faire dans le cas particulier où les ensembles sont munis d'un bon ordre : c'est l'objectif derrière la construction des **ordinaux**, car nous verrons après les avoir définis qu'il en existera systématiquement un et un seul dans chacune des classes d'équivalence des ensembles bien ordonnés.

Pour choisir l'ensemble ordonné en question, il faut choisir en particulier sa relation d'ordre. Tout choix de relation pourrait sembler arbitraire, mais il en existe deux qui sortent naturellement du lot : $\in$ et $\subseteq$, car ce sont les relations les plus fondamentales qui existent chez les ensembles. Nous n'allons d'ailleurs pas avoir besoin de choisir entre les deux : nous allons faire en sorte que $\subseteq$ soit l'ordre (large) et $\in$ l'ordre strict associé.

Définition 8 (Ensemble transitif)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **transitif** si et seulement si $\forall x \in E, x \subseteq E$.

Remarque :
Remarquons la chose suivante :

$$\begin{aligned} E \text{ est transitif } &\iff \forall y \in E, y \subseteq E \\ &\iff \forall y, \Big(y \in E \implies y \subseteq E\Big) \\ &\iff \forall x, \forall y, \Big(x \in y \in E \implies x \in E\Big) \end{aligned}$$

Ainsi, la transitivité de E signifie une certaine transitivité de $\in$.
Cette définition répond aussi au fait que nous allons faire de $\in$ un ordre strict sur E : en particulier $\in$ sera transitif, c'est-à-dire que pour x, y et z dans E, si $x \in y \in z$ alors $x \in z$.
Le fait pour E d'être transitif va donc étendre légèrement cette propriété en se permettant en plus de remplacer z par E lui-même : si $x \in y \in E$ alors $x \in E$.

Définition 9 (Ordinaux)

Soit E un ensemble.
On dit que E est un **ordinal** si et seulement si

1. $\in$ est un bon ordre strict sur E.
2. E est transitif.

Remarque :
Ainsi, un ordinal est un ensemble E tel que :

1. $\in$ est antiréflexive sur E, c'est-à-dire $\forall x \in E, x \notin x$.
2. $\in$ est transitive sur E, c'est-à-dire $\forall x \in E, \forall y \in E, \forall z \in E, (x \in y \in z \Rightarrow x \in z)$.
3. Pour toute partie non vide F de E, F admet un minimum pour $\in$, c'est-à-dire qu'il existe $a \in F$ tel que $\forall x \in F, (x \neq a \Rightarrow a \in x)$.
4. E est transitif, c'est-à-dire que $\forall x, \forall y, (x \in y \in E \Rightarrow x \in E)$.

Pour la petite histoire

John von Neumann (28 décembre 1903 – 8 février 1957) est un mathématicien et physicien américano-hongrois. Il a apporté d'importantes contributions en mécanique quantique, en analyse fonctionnelle, en logique mathématique, en informatique théorique, en sciences économiques et dans beaucoup d'autres domaines des mathématiques et de la physique. Il a de plus participé aux programmes militaires américains comme le célèbre projet Manhatann.

C'est à lui que l'on doit cette définition d'ordinaux.

Exemple :

1. $\varnothing$ est un ordinal. En effet, par vérité creuse, on a les quatre points suivants :
   (a) On a $\forall x \in \varnothing, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\varnothing$.
   (b) On a $\forall x \in \varnothing, \forall y \in \varnothing, \forall z \in \varnothing, (x \in y \in z \implies x \in z)$.
   Ainsi $\in$ est transitive sur $\varnothing$.
   (c) Comme aucune partie de $\varnothing$ n'est non vide, on a bien que toutes les parties non vides de $\varnothing$ admettent un minimum pour $\in$.
   (d) On a $\forall x \in \varnothing, x \subseteq \varnothing$ donc $\varnothing$ est transitif.

Les points (a) et (b) font de $\in$ un ordre strict sur $\varnothing$.
Combinés au point (c), on en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $\varnothing$.
Enfin, combinés au point (d) on en conclut que $\varnothing$ est un ordinal.

2. Nous verrons plus tard que tout entier naturel, et même $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels lui-même, est un ordinal.

Remarque :
Il est d'usage de désigner un ordinal par une lettre grecque minuscule.
Par exemple $\mathbb{N}$ sera aussi désigné par la lettre ω, qui lui sera alors réservée.

Notation :
On note ON la classe de tous les ordinaux, c'est-à-dire que pour un ensemble x, on a l'équivalence $x \in ON \iff x$ est un ordinal.

Tentons de justifier le choix de la notion d'ordinal pour représenter une classe d'équivalence des ensembles bien ordonnés. Nous avons déjà justifié l'usage de $\in$ comme relation de bon ordre strict pour son côté naturel. Il reste donc simplement à justifier la transitivité de l'ensemble lui-même, c'est-à-dire le point 2 de la définition d'ordinal.

Pour cela, intéressons-nous au cas simple d'ensembles à deux éléments, pour la relation d'ordre strict $\in$. Comme on veut que $\in$ soit un bon ordre strict, on veut en particulier que tous les éléments distincts soient comparables pour l'appartenance, et donc que sur les deux éléments l'un appartienne à l'autre, ce qui impose au représentant α d'être de la forme $\alpha = \{x, E\}$ avec $x \in E$. Pour rendre le choix de α le plus naturel possible, on aimerait épurer au maximum le choix de x et de E : en particulier il semble naturel de demander $x = \varnothing$ pour ne pas s'encombrer avec d'éventuels éléments de x qui seraient nécessairement arbitraires. Pour la même raison, on aimerait que E ne contienne rien d'autre que x, ce qui impose naturellement $E = \{x\}$ et donc $\alpha = \big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\}$.

La transitivité va permettre de retirer les éventuels éléments encombrants : si x est un élément de l'ordinal α, alors par transitivité de α on a $x \subseteq \alpha$, c'est-à-dire que tous les éléments de x font aussi partie de α. Ainsi dans l'exemple $\alpha = \{x, E\}$, x ne peut rien contenir car tout élément éventuel de x se retrouverait en plus dans les éléments de α, et pour la même raison E ne peut rien contenir de plus que x.

Proposition 7 (Les éléments d'un ordinal sont des ordinaux)

Soient α un ordinal et x un ensemble.
Si $x \in \alpha$ alors x est un ordinal.

Démonstration

Supposons que $x \in \alpha$.

• Par définition α est un ordinal donc α est transitif et $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.
Comme $x \in \alpha$, on a donc $x \subseteq \alpha$ par définition de la transitivité.

Or on vient de dire que $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc $\boxed{(x, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la proposition 4 page 16.

• Il reste donc à montrer que x est transitif.

Soit $y \in x$.

On a vu que $x \subseteq \alpha$ donc $y \in \alpha$ par définition de l'inclusion.

On a donc $y \subseteq \alpha$ car α est transitif.

Montrons que $y \subseteq x$.

Soit $z \in y$.

Comme $y \subseteq \alpha$, on a en particulier $z \in \alpha$ par définition de l'inclusion.

On a donc $z \in y \in x$, et tous les trois sont des éléments de α.

Or $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\in$ est transitif sur α.

On a donc $z \in x$ par transitivité de $\in$.

Donc $\forall z \in y, z \in x$ et donc $y \subseteq x$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall y \in x, y \subseteq x$.

Ainsi $\boxed{x \text{ est transitif}}$.

Finalement, $(x, \in)$ est strictement bien ordonné et x est transitif.

Donc $\boxed{x \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Proposition 8 (L'intersection de deux ordinaux est un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.
Alors $\alpha \cap \beta$ est un ordinal.

Démonstration

Comme α est un ordinal, $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Or $\alpha \cap \beta \subseteq \alpha$ donc $\boxed{(\alpha \cap \beta, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après la prop. 4 p. 16.

Il reste à montrer que $\alpha \cap \beta$ est transitif.

Soit $x \in \alpha \cap \beta$.

On a donc $x \in \alpha$ et $x \in \beta$.

Or α et β sont des ordinaux donc sont transitifs donc $x \subseteq \alpha$ et $x \subseteq \beta$.

On a donc $x \subseteq \alpha \cap \beta$.

Donc $\forall x \in \alpha \cap \beta, x \subseteq \alpha \cap \beta$.

Donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est transitif}}$.

Finalement $(\alpha \cap \beta, \in)$ est strictement bien ordonné et $\alpha \cap \beta$ est transitif.

On a donc $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.

CQFD.

Nous l'avons annoncé quand nous avons introduit la notion d'ordinal : étant donné un ordinal, nous voulons faire de $\subseteq$ l'ordre (large) et de $\in$ l'ordre strict. Par définition d'un ordinal, $\in$ est le bon ordre strict concerné. La proposition suivante va nous montrer que $\subseteq$ est quant à lui l'ordre (large) associé à $\in$.

Proposition 9 (Ordre large sur les ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.
On a l'équivalence

$$\alpha \subseteq \beta \iff (\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta)$$

Démonstration

Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\alpha \subseteq \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

Montrons que $\alpha \in \beta$.

Posons $X := \beta \backslash \alpha$: par hypothèse on a $X \neq \varnothing$.

Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc comme $X \subseteq \beta$ et $X \neq \varnothing$, on en déduit que $(X, \in)$ admet un minimum ξ.

Comme $\xi \in X$ et $X \subseteq \beta$, on a $\xi \in \beta$ par définition de l'inclusion.

On peut donc montrer $\xi = \alpha$ pour conclure.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\mu \in \xi$.

On a alors $\mu \in \xi \in \beta$ et β est transitif (car ordinal) donc $\mu \in \beta$.

Comme $\mu \in \xi$ et que ξ est le minimum de $(X, \in)$, on a $\mu \notin X$.

On a donc $\mu \in \beta$ et $\mu \notin X$ donc $\mu \in \beta \backslash X = \alpha$.

Donc $\xi \subseteq \alpha$.

$\boxed{\supseteq}$

Supposons par l'absurde que $\xi \neq \alpha$, c'est-à-dire $\xi \subsetneq \alpha$ d'après ce qui précède.

On a donc $\alpha \backslash \xi \neq \varnothing$ donc il existe $\mu \in \alpha \backslash \xi$.

En particulier on a $\mu \in \alpha$.

Comme $\alpha \subseteq \beta$ par hypothèse, on a $\mu \in \beta$ par définition de l'inclusion.

Ainsi on a $\xi \in \beta$ et $\mu \in \beta$.

Or β est un ordinal donc $(\beta, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc $\in$ est un ordre strict total sur β d'après la proposition 3 page 15.

On a donc $\mu \in \xi$ ou $\xi \in \mu$ ou $\mu = \xi$.

- $\mu \in \xi$ est impossible.
  En effet par définition on a $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \notin \xi$.
- $\xi \in \mu$ est impossible.
  En effet on aurait $\xi \in \mu \in \alpha$ donc $\xi \in \alpha$ car α est transitif car ordinal.
  Or on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$.
- $\mu = \xi$ est impossible.
  En effet on a $\xi \in X = \beta \backslash \alpha$ donc $\xi \notin \alpha$ alors que $\mu \in \alpha \backslash \xi$ donc $\mu \in \alpha$.
  On a donc $\xi \notin \alpha$ et $\mu \in \alpha$ donc on ne peut pas avoir $\mu = \xi$.

On aboutit donc à une contradiction.

Par l'absurde, on a prouvé que $\xi = \alpha$.

Comme $\xi \in \beta$, on a donc $\alpha \in \beta$.

Donc $(\alpha \subseteq \beta \text{ et } \alpha \neq \beta) \implies \alpha \in \beta$.

Donc $\boxed{\alpha \subseteq \beta \implies (\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta)}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\alpha \in \beta$ ou $\alpha = \beta$.

Si $\alpha \in \beta$ alors $\alpha \subseteq \beta$ car β est transitif car ordinal.

Si $\alpha = \beta$ alors en particulier $\alpha \subseteq \beta$ par réflexivité de l'inclusion.

Dans tous les cas on a $\alpha \subseteq \beta$.

Donc si $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta \text{ alors } \alpha \subseteq \beta}$.

CQFD.

Remarque :
Désormais, on utilisera régulièrement le fait qu'étant donné un ordinal, il est naturellement muni de $\subseteq$ en tant que relation de bon ordre et que $\in$ est le bon ordre strict associé. En particulier pour deux ordinaux α et β, on a l'équivalence $\alpha \subsetneq \beta \iff \alpha \in \beta$.

Le fait d'avoir prouvé ces quelques propriétés générales sur les ordinaux nous permet d'entrevoir le magnifique théorème qui va suivre : celui-ci affirme qu'en fait c'est toute la classe ON qui se comporte comme un ordinal.

Théorème 1 (Bon ordre strict sur les ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Si $\alpha \in \beta \in \gamma$ alors $\alpha \in \gamma$.
   Ainsi $\in$ est **transitif** sur ON.
2. On a $\alpha \notin \alpha$.
   Ainsi $\in$ est **antiréflexive** sur ON.

Ainsi par 1 et 2, $\in$ peut être vu comme un **ordre strict** sur ON.

3. On a $\alpha \in \beta$ ou $\beta \in \alpha$ ou $\alpha = \beta$.
   Autrement dit $\in$ est un ordre strict **total** sur ON.
4. Soit E un ensemble non vide dont les éléments sont tous des ordinaux.
   Alors $(E, \in)$ possède un minimum.
   Ainsi $\in$ est un **bon** ordre strict sur ON.

Ainsi, $\in$ est un **bon ordre strict** sur ON.

Démonstration

1. Supposons que $\alpha \in \beta \in \gamma$.
On a alors $\boxed{\alpha \in \gamma}$ car γ est transitif car ordinal.

2.
Supposons par l'absurde que $\alpha \in \alpha$.
En prenant $x := \alpha$, on a l'existence d'un $x \in \alpha$ tel que $x \in x$.
Or α est un ordinal donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné donc $\in$ est antiréflexive sur α. En particulier $\forall x \in \alpha, x \notin x$, d'où l'absurdité.
Par l'absurde, on a donc $\boxed{\alpha \notin \alpha}$.

3. Considérons $\delta := \alpha \cap \beta$.
Alors δ est un ordinal d'après la proposition 8 page 24.
Or on a $\delta \subseteq \alpha$ donc ($\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$) d'après la proposition 9 page 25.
De même on a $\delta \subseteq \beta$ donc ($\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$) d'après la proposition 9 page 25.

- Si $\delta = \alpha$ alors comme on a ($\delta \in \beta$ ou $\delta = \beta$) on a $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \alpha = \beta}$.
- Si $\delta = \beta$ alors comme on a ($\delta \in \alpha$ ou $\delta = \alpha$) on a $\boxed{\beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha}$.
- Sinon si $\delta \neq \alpha$ et $\delta \neq \beta$ alors d'après ce qui précède on a $\delta \in \alpha$ et $\delta \in \beta$.
  On a donc $\delta \in \alpha \cap \beta$ par définition de l'intersection.
  Mais on a aussi $\delta = \alpha \cap \beta$ par définition de δ, donc $\delta \in \delta$, ce qui contredit 1.

Finalement, on a bien $\boxed{\alpha \in \beta \text{ ou } \beta \in \alpha \text{ ou } \alpha = \beta}$.

4. Comme E est non vide, il existe $\varepsilon \in E$.
Si ε est le minimum de $(E, \in)$ c'est bon.

Supposons donc que ε n'est pas le minimum de $(E, \in)$.
Il existe donc $\mu \in E$ tel que l'on n'a ni $\varepsilon \in \mu$ ni $\varepsilon = \mu$.
Or tous les éléments de E sont des ordinaux donc $\mu \in \varepsilon$ d'après 3.
Ainsi $\mu \in E$ et $\mu \in \varepsilon$ donc $\mu \in \varepsilon \cap E$ et donc $\varepsilon \cap E \neq \varnothing$.
Donc $\varepsilon \cap E$ est une partie non vide de ε.
Or $(\varepsilon, \in)$ est strictement bien ordonné car ε est un ordinal.
Donc $\varepsilon \cap E$ possède un minimum ξ.

Montrons que ξ est le minimum de E.
Soit $\nu \in E$ tel que $\nu \neq \xi$.
Par définition tous les éléments de E sont des ordinaux.
On a donc $\nu \in \varepsilon$ ou $\varepsilon \in \nu$ ou $\nu = \varepsilon$ d'après 3.

- Si $\nu \in \varepsilon$ alors $\nu \in \varepsilon \cap E$ donc $\xi \in \nu$ car ξ est le minimum de $\varepsilon \cap E$.
- Si $\varepsilon \in \nu$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \varepsilon \in \nu$ et donc $\xi \in \nu$ d'après 1.
- Si $\nu = \varepsilon$, comme $\xi \in \varepsilon \cap E$ on a $\xi \in \varepsilon$ donc $\xi \in \nu$.

Dans tous les cas on a $\xi \in \nu$.
Donc ξ est le minimum de E.
Dans tous les cas, $\boxed{E \text{ admet un minimum}}$.
CQFD.

Remarque :

1. Ainsi on dira simplement que $(ON, \in)$ est une classe strictement bien ordonnée, et grâce à la proposition 9 page 25, nous savons que l'ordre associé est $\subseteq$, donc nous dirons aussi que $(ON, \subseteq)$ est une classe bien ordonné. Ces affirmations doivent être comprises comme étant un résumé du théorème qui précède.
2. Désormais pour α et β deux ordinaux, il va arriver fréquemment que nous notions $\alpha < \beta$ à la place de $\alpha \in \beta$ et $\alpha \leq \beta$ à la place de $\alpha \subseteq \beta$. **Ce ne sera pas toujours le cas**, mais quand nous le ferons ce sera pour insister sur le fait que c'est en tant que relation d'ordre strict et relation d'ordre (large) sur ON que nous employons ces objets mathématiques. Dans le cas où c'est véritablement l'idée d'appartenance et d'inclusion ensembliste qui nous intéressera, là nous resterons bel et bien avec les symboles $\in$ et $\subseteq$. À ce titre, nous aurons parfois l'occasion de jongler avec les deux types de symboles.
3. $\varnothing$ est le plus petit des ordinaux. En effet, on a déjà montré dans un exemple précédent que $\varnothing$ est un ordinal, et on sait déjà que pour tout ensemble E on a $\varnothing \subseteq E$. En particulier pour tout ordinal α on a $\varnothing \subseteq \alpha$ et donc $\varnothing \leq \alpha$.

Nous avons expliqué avant le théorème que la classe des ordinaux ON se comporte elle-même comme un ordinal, mais nous n'avons pas montré de propriété qui s'apparente à la transitivité d'un ordinal. En réalité si, c'est l'objet de la proposition 7 page 23 qui affirme que tout élément d'un ordinal est aussi un ordinal. Autrement dit, pour tout $\alpha \in ON$, tous les éléments de α sont des ordinaux et donc $\alpha \subseteq ON$.

Nous avons affirmé pour justifier de l'intérêt des classes qu'il n'existe pas d'ensemble de tous les ordinaux, si bien que ON est une classe qui n'est pas issue d'un ensemble (elle est donc une classe **propre**). Montrons-le enfin : c'est le fameux **paradoxe de Burali-Forti**.

Théorème 2 (Paradoxe de Burali-Forti)

Il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ordinaux.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble E tel que tout ordinal en est un élément.
Potentiellement il y a d'autres éléments dans E qui ne sont pas des ordinaux, mais on est cependant sûr que tout ordinal est un élément de E.
Considérons alors $X := \{x \in E \mid x \text{ est un ordinal}\}$.
X est donc par définition l'ensemble de tous les ordinaux.
Pour arriver à la contradiction, nous allons montrer qu'alors X est en fait lui-même un ordinal, si bien que $X \in X$, ce qui est impossible chez les ordinaux.

- Montrons que X est transitif.
  - Soit $\alpha \in X$.
  - Par définition α est un ordinal.
    - Soit $\beta \in \alpha$.
    - Alors β est un ordinal d'après la proposition 7 page 23.
    - On a donc $\beta \in E$ par définition de E et donc $\beta \in X$ par définition de X.
  - Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \in X$ donc $\alpha \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \alpha \in X, \alpha \subseteq X$ donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

- Par définition, tous les éléments de X sont des ordinaux.

Donc $\boxed{(X, \in) \text{ est strictement bien ordonné}}$ d'après le théorème 1 page 27.

Ainsi X est transitif et $(X, \in)$ est strictement bien ordonné.
Donc X est un ordinal donc $X \in E$ par définition de E donc $X \in X$ par définition de X.
C'est en contradiction avec l'antiréflexivité de $\in$ chez les ordinaux.
CQFD.

Pour la petite histoire

Cesare Burali-Forti (13 août 1861 – 21 janvier 1931) est un mathématicien italien.

Cesare Burali-Forti est assistant de Giuseppe Peano à Turin de 1894 à 1896. Il a travaillé sur les fondements de la géométrie, sur la géométrie différentielle et le calcul vectoriel. Il a aussi étudié la validité de la théorie de la relativité.

Bertrand Russell a nommé paradoxe de Burali-Forti, le paradoxe du plus grand ordinal en théorie des ensembles, en référence à un article de 1897 où le mathématicien italien, croyant démontrer que deux ordinaux ne sont pas toujours comparables, fait le raisonnement qui conduit au paradoxe décrit par Russell.

Ainsi, il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ordinaux : ON n'est pas issue d'un ensemble, c'est donc une **classe propre**. De fait parmi toutes les sous-classes de ON, certaines sont propres (elle-même par exemple). Nous avons vu lors du théorème 1 page 27 que tout ensemble non vide $X \subseteq ON$ possède un minimum. En fait, ce résultat reste vrai si on remplace X par une classe quelconque, pas forcément issue d'un ensemble.

Proposition 10 (Les sous-classes de ON possèdent un minimum)

Soit $C \subseteq ON$ une classe non vide.
Alors $(C, \leq)$ possède un ordinal minimum, c'est-à-dire $\exists \xi \in C, \forall \alpha \in C, \xi \leq \alpha$.

Démonstration

• Supposons que C est issue d'un ensemble X non vide.

En particulier $X \subseteq ON$ par définition de C.

D'après le théorème 1 page 27, X possède un ordinal minimum.

Donc $\boxed{C \text{ possède un ordinal minimum}}$.

• Supposons que C est propre.

En particulier elle n'est pas vide car pas issue de l'ensemble vide.

Il existe donc au moins un ordinal $\alpha \in C$.

Posons alors $X := \alpha \cap C = \{\beta \in \alpha \mid \beta \in C\} = \{\beta \in \alpha \mid C(\beta)\}$.

D'après l'axiome de compréhension, X est un ensemble.

► Supposons que X est vide.

Montrons que α est le minimum de C.

Soit $\beta \in C$.

Par définition de C on a $C \subseteq ON$.

Donc α et β sont des ordinaux.

On a donc $\alpha \leq \beta$ ou $\beta < \alpha$ d'après le théorème 1 page 27.

Supposons par l'absurde que $\beta < \alpha$.

On a donc $\beta \in \alpha$ par définition de $<$.

On a donc $\beta \in \alpha \cap C = X$.

Donc X est non vide.

C'est absurde puisqu'on a justement supposé que X est vide.

Par l'absurde on vient donc de montrer que $\alpha \leq \beta$.

Donc $\forall \beta \in C, \alpha \leq \beta$.

Donc α est le minimum de C.

► Supposons que X n'est pas vide.

Comme $X = \alpha \cap C$, on a $X \subseteq \alpha$.

Or α est un ordinal donc tous ses éléments sont des ordinaux.

Donc X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc X possède un ordinal minimum ξ d'après le théorème 1 page 27.

Montrons que ξ est le minimum de C.

Comme $\xi \in X = \alpha \cap C$, on a déjà $\xi \in C$.

Soit $\beta \in C$.

Par définition de C on a $C \subseteq ON$.

Donc α et β sont des ordinaux.

On a donc $\alpha \leq \beta$ ou $\beta < \alpha$ d'après le théorème 1 page 27.

Supposons que $\alpha \leq \beta$, c'est-à-dire $\alpha \subseteq \beta$.

On a $\xi \in X = \alpha \cap C$ donc $\xi \in \alpha$.

On a donc $\xi \in \beta$ par définition de l'inclusion.

Donc $\xi \subseteq \beta$ car β est transitif car ordinal.

Supposons que $\beta < \alpha$, c'est-à-dire $\beta \in \alpha$.

Comme $\beta \in C$, on a $\beta \in \alpha \cap C = X$.

Or ξ est le minium de X donc $\xi \subseteq \beta$.

Donc $\forall \xi \in C, \xi \subseteq \beta$, et donc $\forall \xi \in C, \xi \leq \beta$.

Donc ξ est le minimum de C.

Dans tous les cas, $\boxed{C \text{ possède un ordinal minimum}}$.

CQFD.

Nous venons de voir que ON est une classe **propre**, et qu'elle se comporte *comme un ordinal*, c'est-à-dire :

1. ON est transitive, au sens où si $\beta \in \alpha \in ON$ alors $\beta \in ON$, puisque les éléments d'un ordinal sont eux aussi des ordinaux.
2. $(ON, \in)$ est strictement bien ordonné, d'après le théorème 1 page 27.

Il s'avère qu'en fait, il s'agit de la seule classe propre à vérifier ces deux propriétés, comme le montre la proposition suivante. En cela, ON est en quelque sorte l'ordinal ultime.

Proposition 11 (ON est la seule classe propre ordinale)

Soit C une classe propre.
Supposons que :

1. C est transitive, c'est-à-dire $\forall \alpha \in C, \alpha \subseteq C$.
2. $(C, \in)$ est strictement bien ordonné, c'est-à-dire :
   - $\in$ est antiréflexif sur C : $\forall \alpha \in C, \alpha \notin \alpha$
   - $\in$ est transitif sur C : $\forall \alpha \in C, \forall \beta \in C, \forall \gamma \in C, (\alpha \in \beta \in \gamma \implies \alpha \in \gamma)$.
   - Tout ensemble non vide $X \subseteq C$ possède un minimum pour $\in$.

Alors $C = ON$.

Démonstration

• Commençons par montrer que $C \subseteq ON$.

Autrement dit, montrons que tous les éléments de C sont des ordinaux.

Soit $\alpha \in C$.

Montrons que α est un ordinal.

► Montrons que α est transitif.

Par hypothèse C est transitive donc $\alpha \subseteq C$.

Soit $\beta \in \alpha$.

Comme $\alpha \subseteq C$, on a $\beta \in C$ par définition de l'inclusion.

Donc $\beta \subseteq C$ par transitivité de C.

Soit $\gamma \in \beta$.

Comme $\beta \subseteq C$, on a $\gamma \in C$ par définition de l'inclusion.

Ainsi on a $\gamma \in \beta \in \alpha$ et tous trois sont éléments de C.

Or $\in$ est transitive sur C par hypothèse donc $\gamma \in \alpha$.

Donc $\forall \gamma \in \beta, \gamma \in \alpha$ donc $\beta \subseteq \alpha$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \subseteq \alpha$ donc α est transitif.

▶ Montrons que $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Soient β, γ et δ dans α.

Supposons que $\beta \in \gamma \in \delta$.

On a dit que $\alpha \subseteq C$ donc β, γ et δ sont dans C.

Or $\in$ est transitive sur C donc $\beta \in \delta$.

Donc si $\beta \in \gamma \in \delta$ alors $\beta \in \delta$.

Donc $\in$ est transitive sur α.

Soit $\beta \in \alpha$.

On a dit que $\alpha \subseteq C$ donc $\beta \in C$ par définition de l'inclusion.

Donc $\beta \notin \beta$ par antiréflexivité de $\in$ sur C.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \notin \beta$.

Donc $\in$ est antiréflexive sur α.

Ainsi $(\alpha, \in)$ est strictement ordonné.

Soit X une partie non vide de α.

On a dit que $\alpha \subseteq C$ donc $X \subseteq C$ par transitivité de l'inclusion.

Ainsi X est un ensemble non vide inclus dans C.

Donc X possède un minimum pour $\in$ par hypothèse.

Donc toutes les parties non vides de α possède un minimum pour $\in$.

On en conclut que $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Ainsi α est transitif et $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc α est un ordinal.

Donc tout élément de C est un ordinal, et donc $\boxed{C \subseteq ON}$.

• Montrons que $C = ON$.

Supposons par l'absurde que $C \neq ON$.

On a donc $C \subsetneq ON$ par ce qui précède.

Considérons alors $D := ON \backslash C$, qui est donc une classe non vide.

Alors $(D, \in)$ possède un ordinal minimum δ d'après la proposition 10 page 30.

Montrons que $\delta = C$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\alpha \in \delta$.

Comme δ est le minimum de $(D, \in)$, on a $\alpha \notin D$.

Or $\delta \in D = ON \backslash C$ donc $\delta \in ON$.

Donc α est un ordinal comme élément de l'ordinal δ.

Ainsi on a $\alpha \in ON$ et $\alpha \notin D$ donc $\alpha \in ON \backslash D = C$.

Donc $\forall \alpha \in \delta, \alpha \in C$ donc $\delta \subseteq C$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $\alpha \in C$.

D'après ce qui précède, $C \subseteq ON$ donc $\alpha \in ON$.

Or on a aussi $\delta \in ON$.

On a donc $\alpha \in \delta$ ou $\alpha = \delta$ ou $\delta \in \alpha$ car $(ON, \in)$ est strictement bien ordonné.

- Plaçons-nous dans le cas où $\alpha = \delta$.
  Comme $\alpha \in C$, on a alors $\delta \in C$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\delta \in \alpha$.
  On a donc $\delta \in \alpha \in C$ et C est transitive par hypothèse.
  On a donc $\alpha \subseteq C$ et donc $\delta \in C$ par définition de l'inclusion.

Donc si $\alpha = \delta$ ou $\delta \in \alpha$ alors $\delta \in C$.

C'est absurde puisque $\delta \in D = ON \backslash C$ donc $\delta \notin C$.

On en déduit que $\alpha \in \delta$.

Ainsi $\forall \alpha \in C, \alpha \in \delta$ donc $C \subseteq \delta$ par définition de l'inclusion.

On en déduit donc que $C = \delta$ par ce qui précède.

Ainsi C est un ordinal : en particulier C est un ensemble.

C'est absurde puisque par définition C est une classe propre.

Par l'absurde, on a donc montré que nécessairement $\boxed{C = ON}$.

CQFD.

Cette propriété que nous venons de voir fait donc de ON en quelque sorte l'unique classe propre à pouvoir prétendre généraliser la notion d'ordinaux. Nous aurons l'occasion de la revoir quand nous aurons besoin d'étendre une définition qui initialement ne porte que sur les ordinaux : il semblera légitime de ne l'étendre qu'à ON.

Nous avons vu lors de la proposition 8 page 24 que l'intersection de deux ordinaux est aussi un ordinal. Il en va en fait de même pour l'union de deux ordinaux, et plus généralement pour l'intersection et la réunion d'ensembles d'ordinaux. Cela nous fournit au passage une expression explicite de la borne supérieure et du minimum d'un ensemble d'ordinaux.

Proposition 12 (Union et intersection d'ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.

1. $\alpha \cup \beta$ est un ordinal et $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
2. $\alpha \cap \beta$ est un ordinal et $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.

Soit X un ensemble dont tous les éléments sont des ordinaux.

3. $\bigcup X$ est un ordinal et $\bigcup X = \sup(X)$.
   La notion de borne supérieure est à comprendre ici "*parmi les ordinaux*".
4. Si $X \neq \varnothing$ alors $\bigcap X$ est un ordinal et $\bigcap X = \min(X)$.

Démonstration

On a $\alpha \leq \beta$ ou $\beta < \alpha$ d'après le théorème 1 page 27.

1.

- Si $\alpha \leq \beta$ alors $\beta = \max(\alpha, \beta)$ par définition du maximum.
  Or on a $\alpha \subseteq \beta$ par définition de $\leq$, donc $\alpha \cup \beta = \beta$.
  En particulier $\alpha \cup \beta$ est un ordinal, et par ce qui précède $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.
- Si $\beta < \alpha$ on a $\alpha = \max(\alpha, \beta)$ par définition du maximum.
  On a en particulier $\beta \leq \alpha$ puisque c'est l'ordre large associé.
  On a donc $\beta \subseteq \alpha$ par définition de $\leq$ et donc $\alpha \cup \beta = \alpha$.
  En particulier $\alpha \cup \beta$ est un ordinal, et par ce qui précède $\alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)$.

Dans tous les cas $\boxed{\alpha \cup \beta \text{ est un ordinal et } \alpha \cup \beta = \max(\alpha, \beta)}$.

2. On a déjà vu lors de la proposition 8 page 24 que $\boxed{\alpha \cap \beta \text{ est un ordinal}}$.

- Si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha = \min(\alpha, \beta)$ par définition du minimum.
  Or on a $\alpha \subseteq \beta$ par définition de $\leq$ donc $\alpha \cap \beta = \alpha$.
  On a donc $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$.
- Si $\beta < \alpha$ alors on a $\beta = \min(\alpha, \beta)$ par définition du minimum.
  En particulier on a $\beta \leq \alpha$ puisque c'est l'ordre large associé.
  On a donc $\beta \subseteq \alpha$ par définition de $\leq$.
  On a donc $\alpha \cap \beta = \beta$ et donc $\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)$ par ce qui précède.

Dans tous les cas on a $\boxed{\alpha \cap \beta = \min(\alpha, \beta)}$.

3. Commençons par montrer que $\bigcup X$ est un ordinal.

• Montrons que $\bigcup X$ est transitif.

Soit $x \in \bigcup X$.

Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.

Comme X est un ensemble d'ordinaux, α est un ordinal.

Donc α est transitif et donc $x \subseteq \alpha$.

Comme $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \bigcup X$ donc $x \subseteq \bigcup X$ par transitivité de l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcup X, x \subseteq \bigcup X$ donc $\boxed{\bigcup X \text{ est transitif}}$.

• Montrons que $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

► $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

Soit $x \in \bigcup X$.

Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $x \in \alpha$.

Comme X est un ensemble d'ordinaux, α est un ordinal.

Donc x est un ordinal d'après la proposition 7 page 23.

En particulier $x \notin x$ par antiréflexivité de $\in$ sur ON.

Donc $\forall x \in \bigcup X, x \notin x$ donc $\in$ est antiréflexive sur $\bigcup X$.

► $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

Soient x, y et z dans $\bigcup X$.

Il existe α, β et γ dans X tels que $x \in \alpha$, $y \in \beta$ et $z \in \gamma$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α, β et γ sont des ordinaux.

En particulier d'après 1 $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal, dont x, y et z sont des éléments.

Supposons que $x \in y \in z$.

On vient de dire que $\alpha \cup \beta \cup \gamma$ est un ordinal.

Donc $(\alpha \cup \beta \cup \gamma, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc $\in$ est transitive sur $\alpha \cup \beta \cup \gamma$.

On a donc $x \in z$ par transitivité.

Donc si $x \in y \in z$ alors $x \in z$.

Donc $\in$ est transitive sur $\bigcup X$.

Ainsi $\in$ est un ordre strict sur $\bigcup X$.

► $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Soit A une partie non vide de $\bigcup X$.

Soit $a \in A$.

Comme $A \subseteq \bigcup X$ on a $a \in \bigcup X$ par définition de l'inclusion.

Par définition de la réunion, il existe $\alpha \in X$ tel que $a \in \alpha$.

Or tous les éléments X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc a est un ordinal d'après la proposition 7 page 23.

Donc tous les éléments de A sont des ordinaux.

Comme A est non vide, il possède un minimum d'après le théorème 1 page 27.

Donc toutes les parties non vides de $\bigcup X$ possèdent un minimum.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\bigcup X$.

Donc $\boxed{\bigcup X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcup X = \sup(X)$.

Pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \bigcup X$ par définition de la réunion.

En particulier $\bigcup X$ est un majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

Soit β un majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

On a donc pour tout $\alpha \in X$, on a $\alpha \subseteq \beta$.

On a donc $\bigcup X \subseteq \beta$ par minimalité de la réunion pour l'inclusion.

Donc tout ordinal majorant de X dans $(ON, \subseteq)$ est plus grand que ou égal à $\bigcup X$.

Ainsi, $\bigcup X$ est le plus petit ordinal majorant de X dans $(ON, \subseteq)$.

Donc $\boxed{\sup(X) = \bigcup X}$.

4. Supposons que X est non vide.

Commençons par montrer que $\bigcap X$ est un ordinal.

• $\bigcap X$ est transitif.

En effet, soit $x \in \bigcap X$.

Pour tout $\alpha \in X$, on a $x \in \alpha$.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc sont transitifs.

Donc pour tout $\alpha \in X$, on a $x \subseteq \alpha$.

Donc $x \subseteq \bigcap X$ par maximalité de l'intersection pour l'inclusion.

Donc $\forall x \in \bigcap X, x \subseteq \bigcap X$.

Donc $\bigcap X$ est transitif.

• Comme X est non vide, il existe $\alpha \in X$.

On a alors $\bigcap X \subseteq \alpha$ par définition de l'intersection.

Or tous les éléments de X sont des ordinaux donc α est un ordinal.

Donc $(\alpha, \in)$ est strictement bien ordonné.

Donc $\left(\bigcap X, \in\right)$ est strictement bien ordonné d'après la proposition 4 page 16.

On en conclut que $\boxed{\bigcap X \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que $\bigcap X = \min(X)$.

Par définition X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc X admet un minimum ξ d'après le théorème 1 page 27.

Ainsi $\forall\alpha \in X, \xi \leq \alpha$ par définition du minimum.

Donc $\forall\alpha \in X, \xi \subseteq \alpha$ par définition de $\leq$.

Donc $\xi \subseteq \bigcap X$ par maximalité de l'intersection pour l'inclusion.

Or on a $\xi \in X$ puisque ξ est le minimum de X.

On a donc $\bigcap X \subseteq \xi$ par définition de l'intersection.

On a donc $\bigcap X = \xi$ par antisymétrie de l'inclusion.

Or par définition $\xi = \min(X)$ donc $\boxed{\bigcap X = \min(X)}$.

CQFD.

Ainsi, on vient de voir que tout ensemble d'ordinaux admet une borne supérieure : c'est sa réunion. En particulier, tout ensemble d'ordinaux est majoré. En fait, cela fonctionne aussi dans l'autre sens : si une classe d'ordinaux est majorée, alors cette classe est (issue d')un ensemble !

Proposition 13 (Une classe majorée est un ensemble)

Soit C une classe d'ordinaux.
Supposons que C est majorée, c'est-à-dire qu'il existe un ordinal α tel que $\forall\beta \in C, \beta < \alpha$.
Alors C est un ensemble.

Démonstration

Par hypothèse on a $\forall\beta \in C, \beta < \alpha$.

On a donc $\forall\beta \in C, \beta \in \alpha$ par définition de $<$.

En particulier on a $C = \{\beta \in C \mid \beta \in \alpha\} = \{\beta \in \alpha \mid \beta \in C\}$, qui est un ensemble d'après l'axiome de compréhension, car α est un ordinal donc un ensemble.

CQFD.

4 Successeurs, limites et entiers naturels

Il est temps de définir enfin les fameux entiers naturels : nous allons en faire des cas particuliers d'ordinaux. Il faut ici comprendre que nous allons formaliser la notion d'entier naturel grâce à la théorie des ensembles et en particulier celle des ordinaux. Cela ne veut pas dire que fondamentalement un entier naturel est un ordinal ou plus généralement un ensemble, simplement que c'est le choix d'implémentation que nous allons faire et que cela répond à nos besoins. Ainsi, dans cette collection de livres les entiers naturels sont des ordinaux, mais c'est un choix parmi d'autres.

Commençons par 0 : quel ordinal choisir pour le définir ? Il semble naturel de dire que c'est l'ensemble vide. C'est après tout l'ordinal le plus simple et le plus petit de tous comme nous l'avons déjà vu. De plus, en tant qu'ensemble il ne possède justement aucun élément, donc il est aussi sa propre quantité d'éléments : $\varnothing$ a 0 éléments, et donc 0 a 0 éléments.

À présent, on souhaite définir 1, et on aimerait que cela soit le **successeur** de 0, c'est-à-dire l'ordinal qui vient juste après. Tout d'abord, on souhaite avoir $0 < 1$ donc $0 \in 1$ dans le langage des ordinaux. Peut-il y avoir d'autres éléments dans 1 ? Supposons par l'absurde qu'il existe un élément $x \in 1$ tel que $x \neq 0$. Comme on souhaite faire de 1 un ordinal, x serait alors automatiquement lui aussi un ordinal, et donc serait comparable à 0. Or 0 est le plus petit des ordinaux, si bien que $0 < x < 1$ et donc 1 ne serait pas l'ordinal venant juste après 0, ça n'en serait pas son successeur. En conclusion, 1 ne doit pas avoir d'autres éléments que 0, et donc on peut simplement poser $1 := \{0\}$. Encore une fois, cela présente l'avantage que 1 a exactement 1 élément en tant qu'ensemble.

La suite n'est alors pas si étonnante : chez les ordinaux, « *α se situe avant β* » se traduit par $\alpha \in \beta$. Autrement dit, β est l'ensemble des ordinaux se trouvant avant lui-même :

$$\beta = \{\alpha \mid \alpha \in \beta\} = \{\alpha \in \mathit{ON} \mid \alpha < \beta\}$$

Or puisqu'on souhaite que 2 soit l'ordinal qui vient juste après 1, les ordinaux qui viennent avant 2 sont forcément 0 et 1. Autrement dit, l'ensemble des ordinaux précédant 2 est simplement $\{0, 1\}$, et donc il nous suffit de poser $2 := \{0, 1\}$. De même, on va poser $3 := \{0, 1, 2\}$, puis $4 := \{0, 1, 2, 3\}$ et ainsi de suite ce qui permet de proche en proche de définir tous les entiers naturels, en tout cas dans l'idée. D'une manière générale, on aura intuitivement

$$n + 1 := \{0, 1, 2, \ldots, n - 1, n\}$$

On remarque encore une fois que chaque entier naturel est également le nombre de ses éléments : 2 a 2 éléments, 3 en a 3, etc. D'un point de vue ensembliste, comment est-on passé de 3 à 4 par exemple ? On peut remarquer que $4 = \{0, 1, 2, 3\} = \{0, 1, 2\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\}$. De même, on a $3 = \{0, 1, 2\} = \{0, 1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}$ et ainsi de suite. D'une manière générale, on a dans l'idée $n + 1 = n \cup \{n\}$. C'est ce qui explique intuitivement la définition qui suit : le successeur d'un ordinal est donné simplement par cette union.

Définition 10 (Successeur d'un ensemble)

Soit E un ensemble.
On appelle **successeur** de E l'ensemble $S(E) := E \cup \{E\}$.

Remarque :
Dans le prochain chapitre, étant donné un ordinal α nous allons définir $\alpha + 1$ comme étant $S(\alpha)$.

On a vu tout à l'heure en quoi cette définition semble intuitivement répondre à l'idée de successeur : c'est l'ordinal qui vient juste après. En effet, on ne veut rajouter à α qu'un élément supplémentaire qui est donc α lui-même, puisque sinon un ordinal intermédiaire viendrait se greffer entre α et $S(\alpha)$. C'est ce que précise la proposition qui suit.

Proposition 14 (Successeur d'un ordinal)

Soient α et β deux ordinaux.

1. $S(\alpha)$ est un ordinal tel que $\alpha < S(\alpha)$.
   Ainsi $S(\alpha)$ est un ordinal strictement plus grand que α.
   Ou encore, α est un ordinal strictement plus petit que $S(\alpha)$.
2. On a l'équivalence $\alpha < \beta \iff S(\alpha) \leq \beta$.
   Ainsi $S(\alpha)$ est le plus petit des ordinaux strictement plus grands qu'α.
3. On a l'équivalence $\beta < S(\alpha) \iff \beta \leq \alpha$.
   Ainsi α est le plus grand des ordinaux strictement plus petits que $S(\alpha)$.

Ainsi $S(\alpha)$ porte bien son nom : c'est l'ordinal qui vient « *juste après* » α.

4. On a l'implication $S(\alpha) = S(\beta) \implies \alpha = \beta$.
   Ainsi le passage au successeur est injectif.

Démonstration

1. Commençons par montrer que $S(\alpha)$ est un ordinal.

Pour cela, montrons que $S(\alpha)$ est transitif.

Soit $x \in S(\alpha)$.

On a donc $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$ par définition du successeur.

On a donc $x \in \alpha$ ou $x \in \{\alpha\}$.

- Plaçons-nous dans le cas où $x \in \alpha$.
  On a alors $x \subseteq \alpha$ car α est transitif car ordinal.
- Plaçons-nous dans le cas où $x = \alpha$.
  On a alors $x \subseteq \alpha$ par réflexivité de l'inclusion.

Dans les deux cas on a donc $x \subseteq \alpha$.

En particulier on a $x \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$ et donc $x \subseteq S(\alpha)$.

Donc pour tout $x \in S(\alpha)$, on a $x \subseteq S(\alpha)$.

Donc $S(\alpha)$ est transitif.

Montrons que $\big(S(\alpha), \in\big)$ est strictement bien ordonné.

On a $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$.

Donc chaque élément de $S(\alpha)$ est soit un élément de α, soit α lui-même.

Or α est un ordinal.

Donc tous les éléments de α sont des ordinaux d'après la prop. 7 p. 23.

Donc tous les éléments de $S(\alpha)$ sont des ordinaux.

Donc $\in$ est transitive et antiréflexive sur $S(\alpha)$ d'après le théorème 1 page 27.

De même, toute partie non vide de $S(\alpha)$ est alors un ensemble non vide d'ordinaux.

Donc toute partie non vide de $S(\alpha)$ admet un minimum d'après ce même théorème.

On en conclut que $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Ainsi, $S(\alpha)$ est transitif et $\in$ est un bon ordre strict sur $S(\alpha)$.

Donc $\boxed{S(\alpha) \text{ est un ordinal}}$.

Par définition on a $\alpha \in \{\alpha\}$.

On a donc $\alpha \in \alpha \cup \{\alpha\}$.

On a donc $\alpha \in S(\alpha)$ par définition du successeur.

Autrement dit on a $\boxed{\alpha < S(\alpha)}$.

2. Raisonnons par double implications.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\alpha < \beta$.

En particulier on a $\alpha \leq \beta$ donc $\alpha \subseteq \beta$.

De plus comme $\alpha < \beta$, on a $\alpha \in \beta$ et donc $\{\alpha\} \subseteq \beta$.

Comme $\alpha \subseteq \beta$ et $\{\alpha\} \subseteq \beta$, on a $S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

On a donc $S(\alpha) \leq \beta$.

Donc si $\alpha < \beta$ alors $S(\alpha) \leq \beta$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $S(\alpha) \leq \beta$.

On a donc $S(\alpha) \subseteq \beta$ et donc $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$.

En particulier $\{\alpha\} \subseteq \beta$ donc $\alpha \in \beta$ et donc $\alpha < \beta$.

Donc si $S(\alpha) \leq \beta$ alors $\alpha < \beta$.

Finalement, $\boxed{\alpha < \beta \iff S(\alpha) \leq \beta}$.

3. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}\beta < S(\alpha) &\iff \beta \in S(\alpha)\\ &\iff \beta \in \alpha \cup \{\alpha\}\\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta \in \{\alpha\}\\ &\iff \beta \in \alpha \text{ ou } \beta = \alpha\\ &\iff \beta \subseteq \alpha \text{ d'après la prop. 9 p. 25}\\ &\iff \beta \leq \alpha\end{aligned}$$

On a donc bien l'équivalence $\boxed{\beta < S(\alpha) \iff \beta \leq \alpha}$.

4. Supposons que $S(\alpha) = S(\beta)$.
D'après 1 on a $\beta < S(\beta)$ donc $\beta < S(\alpha)$ et donc $\beta \leq \alpha$ d'après 3.
De même, on a $\alpha < S(\alpha)$ donc $\alpha < S(\beta)$ et donc $\alpha \leq \beta$ d'après 3.
On a donc bien $\boxed{\alpha = \beta}$ par antisymétrie de $\leq$.
CQFD.

Remarque :
Comme on a défini 0 comme étant égal à $\varnothing$, on a déjà vu que 0 est le plus petit des ordinaux. En particulier il n'est le successeur d'aucun ordinal puisque sinon celui-ci serait strictement plus petit que 0. En revanche 1, 2, 3 ou encore 4 sont bien successeurs au vu de la façon dont on les a définis.

Tout à l'heure nous avons défini 0 comme étant l'ensemble vide, puis successivement $1 := S(0)$, $2 := S(1)$, $3 := S(2)$ et $4 := S(3)$. On aurait pu continuer ainsi à volonté pour définir des entiers naturels de plus en plus grands. Toujours est-il que nous sommes obligés de nous arrêter à un moment, ce qui est embêtant si l'on souhaite définir proprement ce qu'est un entier naturel en toute généralité.

Intuitivement, un entier naturel est un ordinal que l'on obtient en partant de 0 et en passant un certain nombre de fois au successeur. Autrement dit, nous allons dire qu'un entier naturel est un ordinal tel que tous ceux qui le précèdent sont ou bien 0 ou bien successeurs, lui y compris. Par exemple 4 est un entier naturel car ceux qui le précèdent (4 y compris) sont 0, 1, 2, 3 et 4. Ceux-là sont ou bien 0 ou bien successeurs, ce qui répond à la définition.

On peut alors se demander s'il existe des ordinaux qui ne sont pas des entiers naturels. Si ce n'est pas le cas, cela voudrait dire qu'il existe des ordinaux que l'on ne peut atteindre en partant de 0 et en passant plusieurs fois au successeur. C'est effectivement le cas : nous définirons tout à l'heure $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, et montrerons que c'est un ordinal que nous noterons ω. S'il était lui-même un entier naturel, alors il serait forcément un élément de lui-même puisqu'il est précisément l'ensemble de tous les entiers naturels. Autrement dit on aurait $\omega \in \omega$, ce qui est impossible chez les ordinaux.

Ainsi ω est un ordinal qu'on ne peut pas atteindre en partant de 0 avec des successeurs. Cela s'explique par le fait qu'il n'est le successeur d'aucun ordinal. En effet, supposons par l'absurde que ω soit le successeur d'un ordinal α : on aurait $\omega = S(\alpha)$ donc en particulier $\alpha < \omega$ et donc $\alpha \in \omega$. Autrement dit, α serait un entier naturel : or nous monterons que le successeur d'un entier naturel est lui-même un entier naturel (puisque c'est l'entier ajouté de 1). Autrement dit $S(\alpha) = \omega$ serait lui-même un entier naturel, et donc on retomberait sur la contradiction $\omega \in \omega$.

Ainsi il existe des ordinaux qui ne sont successeurs d'aucun ordinal : il y a 0 bien sûr, mais aussi ω comme nous venons de le voir. Nous allons les appeler ordinaux **limites**, car il y a en quelque sorte une limite à franchir pour les atteindre, on ne peut pas simplement partir d'un ordinal et enchaîner des opérations de successeurs.

Définition 11 (Ordinaux successeurs, limites et entiers naturels)

Soit β un ordinal.

1. On dit que β est **successeur** si et seulement s'il existe un ordinal α tel que $\beta = S(\alpha)$.
2. On dit que β est **limite** si et seulement si β n'est pas successeur.
3. On dit que β est un **entier naturel** si et seulement si pour tout ordinal $\alpha \leq \beta$,
   - ou bien $\alpha = 0$
   - ou bien α est un ordinal successeur.

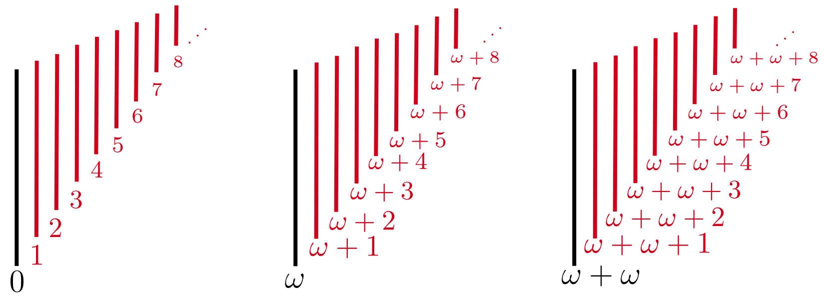
   On dit aussi que β est **fini**.
   Dans le cas contraire on dit que β est **infini**, ou encore **transfini**.

Exemple :

1. Comme $0 = \varnothing$, on a déjà vu que 0 est un ordinal.
   1 en tant que successeur de 0 est aussi un ordinal.
   1 est un successeur (de 0 donc) et 0 est limite car non successeur car vide.
   0 et 1 sont tous les deux des entiers naturels.
2. Quand nous l'aurons défini, nous verrons que $\mathbb{N} = \omega$ l'ensemble des entiers naturel est un ordinal limite.
3. De même, nous définirons plus tard l'ordinal $\omega+1 = S(\omega)$, qui est lui bien successeur de ω donc n'est pas limite, mais n'est pas entier naturel non plus puisque $\omega \leq \omega + 1$ alors que ω n'est ni 0 ni successeur.

Remarque :
La plupart des ouvrages sur le sujet considère que 0 n'est pas un ordinal limite. En effet, dans ce cas-là il n'y a pas eu de limite à franchir pour l'atteindre. Pour des soucis de simplification d'énoncés, nous considérons ici bien qu'il l'est : au contraire l'exclure demande souvent de le retirer artificiellement de beaucoup d'énoncés de résultats sur les ordinaux limites.

Pour aider à visualiser tout cela, on peut proposer l'illustration suivante :



Une représentation visuelle des ordinaux.

Il faut ici voir la disposition des bâtons comme s'étendant à l'infini à l'horizon, l'ordre des bâtons étant rangés de la gauche vers la droite : au début on a un bâton pour chaque entier naturel, puis après tous les entiers naturels vient le bâton associé à ω. Ensuite vient le bâton associé à $\omega + 1$, puis $\omega + 2$ et ainsi de suite pour tous les ordinaux de la forme $\omega + n$ où n est un entier naturel, donc une infinité de bâtons sont disposés après celui de ω. Mais après tous ceux-là se trouve un bâton associé à l'ordinal $\omega + \omega$, et ainsi de suite. Nous aurons bien entendu tout le temps de définir proprement chacun de ces ordinaux, l'idée est ici simplement de comprendre intuitivement ce que nous sommes en train de construire. Gardons bien en tête que la taille des bâtons n'a aucune importante, seul leur agencement horizontal importe. Le fait de représenter des bâtons de plus en plus petits est seulement une astuce pour en faire tenir une infinité.

On peut voir sur l'illustration que les ordinaux limites sont les bâtons qui n'ont pas de prédécesseur direct : nous les avons représentés en **noir**. En **rouge** sont représentés les ordinaux successeurs.

Proposition 15 (Successeur et ordinal limite)

Soit α un ordinal.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est un ordinal limite.
2. Pour tout ordinal $\beta < \alpha$ on a $S(\beta) < \alpha$.

Autrement dit, un ordinal est limite si et seulement si partant d'un ordinal strictement plus petit, on reste strictement plus petit même en passant au successeur.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que α est un ordinal limite.

Soit β un ordinal tel que $\beta < \alpha$.

On a alors $S(\beta) \leq \alpha$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $S(\beta) < \alpha$ ou $S(\beta) = \alpha$.

Or $S(\beta) = \alpha$ est impossible car par définition α est un ordinal limite.

On a donc nécessairement $S(\beta) < \alpha$.

Donc pour tout ordinal $\beta < \alpha$ on a $S(\beta) < \alpha$.

Donc $\boxed{\text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite alors pour tout ordinal } \beta < \alpha\text{, on a } S(\beta) < \alpha}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Supposons que pour tout ordinal $\beta < \alpha$ on a $S(\beta) < \alpha$.

Supposons par l'absurde que α n'est pas limite.

Par définition, α est donc successeur.

Il existe donc un ordinal β tel que $\alpha = S(\beta)$.

Or on a $\beta < S(\beta)$ d'après la proposition 14 page 40 donc $\beta < \alpha$.

On a donc $S(\beta) < \alpha$ par l'hypothèse.

Or on a dit que $\alpha = S(\beta)$, si bien que $\alpha < \alpha$.

C'est absurde par antiréflexivité de $<$.

Par l'absurde, on vient de montrer que α est limite.

Donc $\boxed{\text{si pour tout ordinal } \beta < \alpha \text{ on a } S(\beta) < \alpha \text{ alors } \alpha \text{ est limite}}$.

CQFD.

Proposition 16 (Successeur d'un entier naturel)

Soit n un entier naturel.

1. $S(n)$ est un entier naturel.
2. Tout ordinal $\alpha \leq n$ est aussi un entier naturel.

Démonstration

1. Par définition n est un entier naturel donc est un ordinal.

Donc $S(n)$ est un ordinal d'après la proposition 14 page 40.

Soit un ordinal $\alpha \leq S(n)$.

On a donc ou bien $\alpha < S(n)$ ou bien $\alpha = S(n)$.

- Supposons que $\alpha < S(n)$.
  On a alors $\alpha \leq n$ d'après la proposition 14 page 40.
  Or n est un entier naturel.
  Donc ou bien $\alpha = 0$, ou bien α est un successeur.
- Supposons que $\alpha = S(n)$. Comme n est un entier naturel, n est un ordinal.
  Donc $\alpha = S(n)$ est un successeur.

Dans les deux cas, ou bien $\alpha = 0$ ou bien α est un successeur.

Donc tous les ordinaux plus petit que $S(n)$ sont ou 0 ou bien un successeur.

Comme $S(n)$ est un ordinal, c'est donc par définition $\boxed{\text{un entier naturel}}$.

2. Soit un ordinal $\alpha \leq n$.

  Soit un ordinal $\beta \leq \alpha$.

  On a donc $\beta \leq n$ par transitivité de $\leq$.

  Or n est un entier naturel et β un ordinal.

  Donc ou bien $\beta = 0$ ou bien β est un successeur.

Donc tous les ordinaux plus petits que α sont ou bien 0 ou bien un successeur.

Comme α est un ordinal, par définition $\boxed{\alpha \text{ est un entier naturel}}$.

CQFD.

Bien souvent en mathématiques nous sommes amenés à mener un **raisonnement par récurrence** afin de prouver qu'une assertion P à paramètres est vraie pour tout entier naturel n. Pour cela on raisonne en deux étapes :

1. On prouve que $P(0)$ est vraie : c'est l'étape d'**initialisation**.
2. On prouve que pour tout entier naturel n, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est aussi vraie. C'est l'étape d'**hérédité**.

Grâce à ces deux étapes, on en conclut que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Qu'est-ce qui justifie la validité de ce raisonnement ? La réponse se cache dans le théorème suivant.

Théorème 3 (Principe d'induction chez les entiers naturels)

Soit X un ensemble tel que :

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Alors X contient tous les entiers naturels.

Démonstration

Voici rapidement l'idée de la preuve : on suppose par l'absurde que X ne contient pas un entier naturel donné n. On regarde alors l'ensemble Y des entiers naturels plus petits que n qui ne sont pas dans X. En particulier n est dedans donc Y n'est pas vide : il va avoir un plus petit entier naturel k. Le soucis vient alors du fait que k est le plus petit entier naturel à ne pas être dans X, et donc $k-1$ va être dans X, ce qui contredit l'hypothèse 2 selon laquelle X est stable par passage au successeur.

Soit n un entier naturel.

  Supposons par l'absurde que $n \notin X$.

  Considérons $Y := S(n) \backslash X$.

  Comme n est un entier naturel, $S(n)$ est un entier naturel d'après la prop. 16 p. 45.

  Donc tous les éléments de $S(n)$ sont des entiers naturels d'après la prop. 16 p. 45.

Or $Y = S(n)\backslash X$ donc $Y \subseteq S(n)$.

Donc tous les éléments de Y sont des entiers naturels.

On a $n < S(n)$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $n \in S(n)$ par définition de $<$, et $n \notin X$ par hypothèse.

On a donc $n \in Y$ puisque $Y = S(n)\backslash X$.

Donc Y est un ensemble non vide d'entiers naturels.

Il possède donc un entier naturel minimum k d'après le théorème 1 page 27.

On a $k \leq k$ par réflexivité de $\leq$.

Donc k est un ordinal plus petit qu'un entier naturel (lui-même).

Donc k est ou bien 0 ou bien un successeur par définition.

Or $k \in Y = S(n)\backslash X$ donc $k \notin X$. Comme $0 \in X$ par hypothèse, on a donc $k \neq 0$.

Donc k est un successeur : il existe un ordinal i tel que $k = S(i)$.

Or on a $i < S(i)$ d'après la proposition 14 page 40 donc $i < k$.

Donc $i \notin Y$ car k est le minimum de Y.

Mais comme $n \in Y$, on a aussi $k \leq n$, toujours par minimalité de k.

Ainsi on a $i < k \leq n < S(n)$ donc $i < S(n)$ par transitivité.

On a donc $i \in S(n)$ par définition de $<$.

Ainsi $i \notin Y$ et $i \in S(n)$ donc $i \in X$ par définition de Y.

Or par hypothèse X est stable par successeur donc $S(i) \in X$ et donc $k \in X$.

C'est absurde puisque $k \in Y$ et $Y = S(n)\backslash X$ donc $k \notin X$.

Donc par l'absurde on vient donc de montrer $\boxed{n \in X}$.

CQFD.

Nous pouvons donc justifier la validité du raisonnement par récurrence : imaginons avoir démontré l'étape d'initialisation et l'étape d'hérédité. On peut alors considérer l'ensemble $X := \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ qui répond alors aux hypothèses du théorème ci-dessus : il contient tous les entiers naturels, ce qui prouve donc bien que $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel.

En vérité, il manque quelque chose pour valider ce que nous venons d'affirmer : l'existence de $\mathbb{N}$ lui-même. En effet on affirme depuis le début que $\mathbb{N}$, l'ensemble de tous les entiers naturels existe, et on l'a même aussi noté ω en affirmant qu'il s'agit d'un ordinal. Malheureusement, on ne peut le faire sans un axiome, que l'on va donc rajouter aux différents axiomes de ZFC du précédent livre : l'**axiome de l'infini**.

Axiome 1 (de l'infini)

Il existe au moins un ensemble X tel que

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Nous sommes à présents armés pour définir proprement $\mathbb{N}$.

Proposition 17 (Ensemble des entiers naturels)

Il existe un unique ensemble $\mathbb{N}$ tel que pour tout ensemble n, on a l'équivalence

$$n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}$$

On dit donc que $\mathbb{N}$ est l'**ensemble des entiers naturels**, et on le note aussi parfois ω.

Démonstration

Existence :

D'après l'**axiome de l'infini**, il existe un ensemble X tel que

1. $0 \in X$
2. Pour tout $x \in X$ on a $S(x) \in X$.

Posons alors $\mathbb{N} := \{x \in X \mid x \text{ est un entier naturel}\}$.

Montrons que $\mathbb{N}$ ainsi défini vérifie l'équivalence de l'énoncé.

Soit n un ensemble.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $n \in \mathbb{N}$ alors par définition n est un entier naturel.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que n est un entier naturel.

Alors $n \in X$ d'après le principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $n \in X$ et n est un entier naturel.

Donc $n \in \mathbb{N}$ par définition de $n \in \mathbb{N}$.

Donc si n est un entier naturel alors $\mathbb{N}$.

Ainsi pour tout ensemble n, on a bien l'équivalence $\boxed{n \in \mathbb{N} \iff n \text{ est un entier naturel}}$.

Unicité :

L'unicité est garantie par le fait que cette équivalence caractérise l'appartenance à $\mathbb{N}$.

CQFD.

Avant de prouver que $\mathbb{N}$ est un ordinal, intéressons-nous aux segments initiaux de ON.

Proposition 18 (Segment initiaux des ordinaux)

Soit X un ensemble.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un ordinal.
2. Tous les éléments de X sont des ordinaux et X est transitif.
3. X est un segment initial de ON.

Démonstration

Nous allons montrer 1⇔2⇔3.

$\boxed{1\Rightarrow 2}$

Supposons que X est un ordinal.

En particulier X est transitif par définition.

De plus, tous les éléments de X sont des ordinaux d'après la proposition 7 page 23.

$\boxed{1\Leftarrow 2}$

Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et que X est transitif.

Comme X est un ensemble d'ordinaux, $(X, \in)$ est strictement bien ordonné d'après le théorème 1 page 27. Comme X est transitif, on en conclut que $\boxed{X \text{ est un ordinal}}$.

$\boxed{2\Rightarrow 3}$

Supposons que tous les éléments de X sont des ordinaux et que X est transitif.

En particulier on sait déjà que $X \subseteq ON$ par définition de ON.

Soient α et β deux ordinaux.

Supposons que $\alpha \leq \beta \in X$.

Comme $\alpha \leq \beta$, on a $(\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\alpha < \beta$.
  Par définition cela veut dire que $\alpha \in \beta$.
  Ainsi on a $\alpha \in \beta \in X$.
  Or X est transitif, donc par définition $\alpha \in X$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\alpha = \beta$.
  Par hypothèse on a $\beta \in X$ donc $\alpha \in X$.

Donc dans les deux cas on a $\alpha \in X$.

Donc si $\alpha \leq \beta \in X$ alors $\alpha \in X$.

Donc $\boxed{X \text{ est un segment initial de } ON}$.

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$

Supposons que X est un segment initial de ON.

Par définition on a alors $X \subseteq ON$.

Autrement dit, tous les éléments de X sont des ordinaux.

Soit $\beta \in X$.

Comme on vient de le dire, tous les éléments de X sont des ordinaux.

Donc β est un ordinal.

Soit $\alpha \in \beta$.

Alors α est un ordinal en tant qu'élément d'un ordinal.

Comme $\alpha \in \beta$ on a $\alpha < \beta$ et en particulier $\alpha \leq \beta$.

Ainsi α et β sont deux ordinaux tels que $\alpha \leq \beta \in X$.

On a donc $\alpha \in X$ puisque X est un segment initial de ON.

Donc $\forall \alpha \in \beta, \alpha \in X$ et donc $\beta \subseteq X$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall \beta \in X, \beta \subseteq X$ et donc $\boxed{X \text{ est transitif}}$.

CQFD.

Remarque :
On a vu grâce au théorème 1 page 27 que les ordinaux sont munis d'un bon ordre.
X est un segment initial des ordinaux est donc équivalent à l'existence d'un ordinal ξ tel que $X = ON_{<\xi}$ d'après la proposition 6 page 19. Ici ξ est tout trouvé : c'est X lui-même d'après cette proposition. C'est d'ailleurs assez logique puisque la relation d'ordre strict sur les ordinaux est l'appartenance et donc

$$X = \{\alpha \in ON \mid \alpha \in X\} = \{\alpha \in ON \mid \alpha < X\} = ON_{<X}$$

Nous pouvons désormais prouver que ω, autre nom donné à $\mathbb{N}$, est un ordinal. Comme nous l'avons dit plus tôt, c'est même un ordinal limite, c'est-à-dire qu'il n'est pas un successeur. C'est même le plus petit des ordinaux limites non nuls, c'est-à-dire le tout premier après 0.

Proposition 19 (omega est le plus petit ordinal limite non nul)

1. ω est un ordinal limite.
2. ω est le plus petit des ordinaux limites non nuls.
   Autrement dit pour tout ordinal limite non nul α, on a $\omega \leq \alpha$.

Démonstration

1.

• Montrons que ω est un ordinal.

D'après la proposition 18 page 49, il suffit de montrer que ω est un segment initial de ON.

ω ne contient que des entiers naturels (et les contient tous) par définition.

En particulier ω est un ensemble d'ordinaux : on sait déjà que $\omega \subseteq ON$.

Soient n et m deux ordinaux.

Supposons que $n \leq m \in \omega$.

On a $m \in \omega$ donc m est un entier naturel par définition.

On a $n \leq m$ donc n est un entier naturel d'après la proposition 16 page 45.

On a donc $n \in \omega$ par définition.

Donc si $n \leq m \in \omega$ alors $n \in \omega$.

Donc pour tout n et m dans ON, si $n \leq m \in \omega$ alors $n \in \omega$.

Donc ω est un segment initial de ON.

Donc $\boxed{\omega \text{ est un ordinal}}$ d'après la proposition 18 page 49.

• Montrons que ω est un ordinal limite.

Supposons par l'absurde que ω est successeur.

Il existe donc un ordinal α tel que $\omega = S(\alpha)$.

On a $\alpha < S(\alpha)$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha < \omega$, c'est-à-dire $\alpha \in \omega$ par définition de $<$.

Donc α est un entier naturel par définition de ω.

Donc $S(\alpha)$ est un entier naturel d'après la proposition 16 page 45.

Donc $S(\alpha) \in \omega$ par définition de ω, c'est-à-dire $\omega \in \omega$.

On a donc $\omega < \omega$: c'est absurde par antiréflexivité de $<$.

Donc ω n'est pas un successeur et donc $\boxed{\omega \text{ est limite}}$.

2. Montrons que ω est plus petit que tout ordinal limite non nul.

Soit α un ordinal limite non nul.

Soit n un ordinal tel que $n < \omega$.

On a donc $n \in \omega$ par définition de $<$.

Donc n est un entier naturel par définition de ω.

Or on a $n \leq n$ par réflexivité de $\leq$.

Donc n est un ordinal plus petit qu'un entier naturel (lui-même).

Donc $n = 0$ ou n est un successeur par définition des entiers naturels.

Donc tout ordinal strictement plus petit que ω est ou bien nul ou bien successeur.

Or α est limite non nul donc n'est ni nul ni successeur.

Donc α n'est pas strictement plus petit que ω.

On a donc $\boxed{\omega \leq \alpha}$ puisque $\leq$ est total chez les ordinaux.

CQFD.

Nous l'avons dit quand nous avons évoqué le paradoxe de Burali-Forti : il n'est pas possible d'encapsuler tous les ordinaux dans un seul ensemble. En fait le résultat est même plus fort : tout ensemble d'ordinaux est majoré par d'autres ordinaux qui ne sont pas dans l'ensemble. En particulier parmi tous ces majorants stricts se cache un plus petit majorant strict.

Proposition 20 (Plus petit majorant strict d'ordinaux)

Soit X un ensemble d'ordinaux.
Alors il existe un unique ordinal α tel que

1. α est un majorant strict de X.
   Autrement dit $\forall \xi \in X, \xi < \alpha$.
2. α est plus petit que tout majorant strict de X.
   Autrement dit pour tout ordinal β, si $\forall \xi \in X, \xi < \beta$ alors $\alpha \leq \beta$.

Autrement dit α est le plus petit de tous les majorants stricts de X.

Démonstration

D'après la proposition 12 page 35, $\bigcup X$ est un ordinal.

Le plus petit des majorants stricts de X va dépendre de si $\bigcup X$ appartient à X ou non.

Posons alors $\alpha := \begin{cases} \bigcup X & \text{si } \bigcup X \notin X \\ S(\bigcup X) & \text{si } \bigcup X \in X \end{cases}$.

1.

On a vu lors de la proposition 12 page 35 que $\bigcup X = \sup(X)$.

En particulier $\bigcup X$ est un majorant de X.

- Plaçons-nous dans le cas où $\bigcup X \notin X$.
  Alors $\bigcup X$ est un majorant strict de X puisqu'il n'en est pas un élément.
  Or dans ce cas-là on a $\alpha = \bigcup X$ donc α est un majorant strict de X.
- Supposons à présent que $\bigcup X \in X$.
  On a donc $\alpha = S(\bigcup X)$.
  Or $\bigcup X$ est un majorant de X donc $\forall \xi \in X, \xi \leq \bigcup X$.
  Donc $\forall \xi \in X, \xi < S(\bigcup X)$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $\forall \xi \in X, \xi < \alpha$ et donc α est un majorant strict de X.

Dans les deux cas, $\boxed{\alpha \text{ est un majorant strict de } X}$.

2. Soit β un ordinal majorant strict de X.

Comme α et β sont deux ordinaux, on a $\beta < \alpha$ ou $\alpha \leq \beta$.

Supposons par l'absurde que $\beta < \alpha$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\bigcup X \notin X$.
  Par définition de α on a alors $\alpha = \bigcup X$ donc $\beta < \bigcup X$.
  Autrement dit on a $\beta \in \bigcup X$ par définition de $<$.
  Par définition de la réunion, il existe donc $\xi \in X$ tel que $\beta \in \xi$.
  Autrement dit il existe $\xi \in X$ tel que $\beta < \xi$ par définition de $<$.
  Donc β n'est pas un majorant de X, ce qui est absurde.

- Plaçons-nous dans le cas où $\bigcup X \in X$.
  Par définition de α on a alors $\alpha = S(\bigcup X)$ donc $\beta \in S(\bigcup X)$.
  On a donc $\beta < S(\bigcup X)$ par définition de $<$.
  Donc $\beta \leq \bigcup X$ d'après la proposition 14 page 40.
  Or $\bigcup X \in X$ par hypothèse donc β n'est pas un majorant strict de X.
  C'est absurde.

Dans les deux cas on aboutit à une absurdité.

Donc par l'absurde on a montré que l'on n'a pas $\beta < \alpha$, et donc $\boxed{\alpha \leq \beta}$.

CQFD.

Dans la preuve qui précède, nous avons discuté du fait que pour un ensemble d'ordinaux X, sa borne supérieure $\sup(X) = \bigcup X$ est un élément de X ou non. Si ce n'est pas le cas, on est en fait assuré que $\sup(X)$ est un ordinal limite.

Proposition 21 (Borne supérieure qui n'est pas un maximum)

Soit X un ensemble d'ordinaux.
Si $\sup(X) \notin X$ alors $\sup(X)$ est un ordinal limite.

Démonstration

Montrons le résultat par contraposition.

Supposons que $\sup(X)$ n'est pas un ordinal limite.

Donc $\sup(X)$ est un successeur par définition.

Il existe donc un ordinal α tel que $\sup(X) = S(\alpha)$.

Par définition $\sup(X)$ est un majorant de X.

Donc $S(\alpha)$ est un majorant de X : on a $\forall \xi \in X, \xi \leq S(\alpha)$.

Supposons par l'absurde que $\sup(X) \notin X$.

On a donc $S(\alpha) \notin X$ donc $\forall \xi \in X, \xi \neq S(\alpha)$.

Donc $\forall \xi \in X, \xi < S(\alpha)$ d'après ce qui précède.

On a donc $\forall \xi \in X, \xi \leq \alpha$ d'après la proposition 10 page 39.

Donc α est un majorant de X.

Or on a $\alpha < S(\alpha)$ d'après la proposition 10 page 39.

Donc $S(\alpha)$ n'est pas le plus petit des majorants de X.

C'est absurde : cela veut dire que $S(\alpha)$ n'est pas la borne supérieure de X.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\sup(X) \in X$.

Donc si $\sup(X)$ n'est pas limite alors $\sup(X) \in X$.

Par contraposition, on a $\boxed{\text{si } \sup(X) \notin X \text{ alors } \sup(X) \text{ est limite}}$.

CQFD.

Dans le cas où X est lui-même un ordinal, cette proposition se précise. Cela nous fournit même une autre caractérisation d'être un ordinal limite, en plus de celle donnée par la proposition 15 page 44.

Proposition 22 (Ordinal limite et borne supérieure)

Soit α un ordinal.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est un ordinal limite.
2. $\sup(\alpha) = \alpha$

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Supposons que α est un ordinal limite.

On a donc $\forall \beta \in \alpha, S(\beta) < \alpha$ d'après la proposition 15 page 44.

Notons $(\star)$ cette affirmation.

Par définition de $<$ on a $\forall \beta \in \alpha, \beta < \alpha$.

En particulier $\forall \beta \in \alpha, \beta \leq \alpha$ donc α est un majorant de lui-même.

On a donc $\sup(\alpha) \leq \alpha$ par minimalité de la borne supérieure.

Supposons par l'absurde que $\sup(\alpha) \neq \alpha$.

On a donc $\sup(\alpha) < \alpha$ par ce qui précède.

On a donc $S\big(\sup(\alpha)\big) < \alpha$ d'après $(\star)$, donc $S\big(\sup(\alpha)\big) \in \alpha$ par définition de $<$.

Or on a $\sup(\alpha) < S\big(\sup(\alpha)\big)$ d'après la proposition 14 page 40.

Donc $\sup(\alpha)$ n'est pas un majorant de α.

C'est absurde par définition de la borne supérieure.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{\sup(\alpha) = \alpha}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Supposons que $\sup(\alpha) = \alpha$.
On n'a pas $\alpha < \alpha$ par antiréflexivité de $<$.
On n'a donc pas $\sup(\alpha) < \alpha$ par hypothèse, et donc $\sup(\alpha) \notin \alpha$ par définition de $<$.
Donc $\sup(\alpha)$ est un ordinal limite d'après la proposition 21 page 53.
Donc comme $\sup(\alpha) = \alpha$, on en déduit que $\boxed{\alpha \text{ est un ordinal limite}}$.
CQFD.

5 Isomorphisme avec les ordinaux

Jusqu'à présent, nous avons définis, construits et étudiés les ordinaux pour eux-mêmes. Or à la base nous les avons introduits dans l'optique d'en faire des représentants de classes d'isomorphie. Il est donc temps d'étudier d'un peu plus près les isomorphismes. Commençons par constater quelques propriétés de base que conservent les isomorphismes.

Proposition 23 (Isomorphismes et propriétés conservées)

Soient E et F deux ensembles ordonnées.
Supposons que E et F sont **isomorphes**.

1. E est totalement ordonné si et seulement si F est totalement ordonné.
2. L'ordre sur E est bien fondé si et seulement si l'ordre sur F est bien fondé.
3. E est bien ordonné si et seulement si F est bien ordonné.

Démonstration

Notons $\preccurlyeq$ l'ordre sur E et $\sqsubseteq$ l'ordre sur F.

Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'ordres.

1. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est totalement ordonné.

Soient y_1 et y_2 dans F.

Par définition f est un isomorphismes d'ordres.

En particulier f est surjective dans F.

Il existe donc x_1 et x_2 dans E tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.

Or E est totalement ordonné donc $x_1 \preccurlyeq x_2$ ou $x_2 \preccurlyeq x_1$.

On a donc $f(x_1) \sqsubseteq f(x_2)$ ou $f(x_2) \sqsubseteq f(x_1)$ car f est un isomorphisme d'ordres. On a donc $y_1 \sqsubseteq y_2$ ou $y_2 \sqsubseteq y_1$.

Donc F est totalement ordonné.

Donc si E est totalement ordonné alors F est totalement ordonné.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que F est totalement ordonné.

Par définition $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'ordres.

Donc f est inversible et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est un isomorphisme d'ordres.

Donc E est totalement ordonné d'après le sens $\boxed{\Rightarrow}$.

Donc si F est totalement ordonné alors E est totalement ordonné.

Finalement, $\boxed{E \text{ est totalement ordonné si et seulement si } F \text{ est totalement ordonné}}$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que l'ordre sur E est bien fondé.

Soit B une partie non vide de F.

Considérons $A := f^{\leftarrow}(B)$.

Comme f est un isomorphisme d'ordres, A est une partie non vide de E.

Or l'ordre sur E est bien fondé donc A admet un élément minimal a_0.

Donc $f(a_0)$ est un élément minimal de $f^{\rightarrow}(A)$.

Or f est un isomorphisme d'ordre, donc en particulier

$$f^{\rightarrow}(A) = f^{\rightarrow}\big(f^{\leftarrow}(B)\big) = B$$

Donc B admet un élément minimal.

Donc toute partie non vide de F admet un élément minimal.

Donc l'ordre sur F est bien fondé.

Donc si l'ordre sur E est bien fondé alors l'ordre sur F est bien fondé.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que l'ordre sur F est bien fondé.

Par définition $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'ordres.

Donc f est inversible et $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est un isomorphisme d'ordres.

Donc l'ordre sur F est bien fondé d'après le sens $\boxed{\Rightarrow}$.

Donc si l'ordre sur F est bien fondé alors l'ordre sur E est bien fondé.

Finalement, $\boxed{\text{L'ordre sur } E \text{ est bien fondé si et seulement si l'ordre sur } F \text{ est bien fondé}}$.

11. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} E \text{ est bien ordonné} &\iff \text{L'ordre sur } E \text{ est total et bien fondé d'après la prop. 3 p. 15} \\ &\iff \text{L'ordre sur } F \text{ est total et bien fondé d'après 1. et 2.} \\ &\iff F \text{ est bien ordonné d'après la prop. 3 p. 15} \end{aligned}$$

D'où l'équivalence recherchée.

CQFD.

Rentrons dans le cœur de ce qui nous intéresse : constatons la proposition suivante, qui n'est au fond pas étonnante dans la mesure où l'on a dit lors de la proposition 6 page 19 qu'étant donné un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$, tout segment initial propre est de la forme $E_{\prec x}$ pour un certain $x \in E$.

Proposition 24 (Ensemble des segments initiaux)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble **bien ordonné** et $\prec$ l'ordre strict associé.
Soit X l'ensemble des segments initiaux propres de E.
On munit X de la relation d'ordre $\subseteq$.
Soit $f := \begin{pmatrix} E & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & E_{\prec x} \end{pmatrix}$.

On a alors :

1. f est un isomorphisme d'ordres de E vers X.
2. Si de plus E est un ordinal alors $f = \mathrm{id}_E$ et en particulier $E = X$.

Démonstration

1.

• Montrons que f est strictement croissante.

Rappelons que la relation d'ordre strict sur X est l'inclusion stricte $\subsetneq$.

Soient x et y dans E.

Supposons que $x \prec y$.

On a alors $x \in E_{\prec y}$ par définition.

Or on n'a pas $x \prec x$ par antiréflexivité de $\prec$ donc $x \notin E_{\prec x}$.

Comme $x \in E_{\prec y}$ et $x \notin E_{\prec x}$ on a $E_{\prec x} \neq E_{\prec y}$.

Soit $z \in E_{\prec x}$.

On a alors $z \prec x$ par définition.

Donc $z \prec y$ par transitivité de $\prec$.

Donc $z \in E_{\prec y}$ par définition.

Donc $E_{\prec x} \subseteq E_{\prec y}$ par définition de l'inclusion.

Comme $E_{\prec x} \neq E_{\prec y}$, on a donc $E_{\prec x} \subsetneq E_{\prec y}$

Ainsi on a $f(x) \subsetneq f(y)$ par définition de f.

Donc si $x \prec y$ alors $f(x) \subsetneq f(y)$.

Donc f est strictement croissante.

Or E est bien ordonné donc en particulier totalement ordonné d'après la prop. 3 p. 15.

Donc le domaine de f est totalement ordonné et donc $\boxed{f \text{ est croissante et injective}}$.

• Montrons que f est surjective dans X.

Par définition de f on sait déjà que $\mathrm{im}(f) \subseteq X$.

Soit $A \in X$.

Alors A est un segment initial propre de E par définition de X.

Or E est bien ordonné donc il existe $x \in E$ tel que $A = E_{\prec x}$ d'après la prop. 6 p. 19.

On a donc $A = f(x)$ et donc $A \in \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f) \supseteq X$ et donc $\mathrm{im}(f) = X$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective dans } X}$.

• Ainsi f est croissante, injective et surjective dans X.

Or on a dit que E le domaine de f est totalement ordonné.

Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } E \text{ vers } X}$.

2. Supposons que E est un ordinal.

Dans ce cas particulier, l'ordre strict $\prec$ est l'appartenance $\in$.

Ainsi pour tout $\alpha \in E$ on a $E_{\prec\alpha} = \{\beta \in E \mid \beta \prec \alpha\} = \{\beta \in E \mid \beta \in \alpha\} = E \cap \alpha$.

Remarquons pour commencer que f et id_E ont le même domaine E.

Soit $\alpha \in E$.

Comme E est ordinal, E est transitif donc $\alpha \subseteq E$ et donc $E \cap \alpha = \alpha$.

Or on a vu que $E_{\prec\alpha} = E \cap \alpha$ donc $E_{\prec\alpha} = \alpha$.

En particulier $f(\alpha) = E_{\prec\alpha} = \alpha = \mathrm{id}_E(\alpha)$.

Donc $\forall \alpha \in E, f(\alpha) = \mathrm{id}_E(\alpha)$.

Donc $\boxed{f = \mathrm{id}_E}$.

En particulier $\boxed{E = \mathrm{im}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{im}(f) = X}$.

CQFD.

Remarque :

1. On peut remarquer que $g := \begin{pmatrix} X & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & \min(E \backslash A) \end{pmatrix}$ est la réciproque de f.
2. Le cas où E est un ordinal n'est pas non plus étonnant : on a déjà vu lors de la proposition 18 page 49 que les ordinaux sont eux-mêmes les segments initiaux de ON.

Proposition 25 (Isomorphismes entre bons ordres)

Soient E et F deux ensembles **bien ordonnés**.
Il y a au plus un isomorphisme d'ordres de E vers F.

Démonstration

Notons $\preccurlyeq$ l'ordre sur E et $\prec$ la relation d'ordre strict associée.

Notons $\trianglelefteq$ l'ordre sur F et $\triangleleft$ la relation d'ordre strict associée.

Supposons qu'il existe un isomorphisme d'ordres $f : E \longrightarrow F$.

Soit $g : E \longrightarrow F$ un autre isomorphisme d'ordres.

Montrons que $f = g$.

Supposons par l'absurde que $f \neq g$.

Considérons alors l'ensemble $A := \{x \in E \mid f(x) \neq g(x)\}$.

Par hypothèse A est donc une partie non vide de E.

Or E est bien ordonné donc A admet un minimum a.

Comme $a = \min(A)$, pour tout $b \in E$ tel que $b \prec a$ on a $b \notin A$ donc $f(b) = g(b)$.
De plus $a \in A$ donc $f(a) \neq g(a)$. Or F est bien ordonné donc totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15, donc $f(a) \lhd g(a)$ ou $g(a) \lhd f(a)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $f(a) \lhd g(a)$.

  Soit $b \in E$.

  Comme E est bien ordonné, il est en particulier totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

  On a donc $b \prec a$ ou $a \preccurlyeq b$.

  Si $b \prec a$ alors $g(b) = f(b) \lhd f(a)$ par stricte croissance de f.

  Si $a \preccurlyeq b$ alors $f(a) \lhd g(a) \preccurlyeq g(b)$ par croissance de g.

  Dans les deux cas on a $g(b) \neq f(a)$.

  Ainsi pour tout $b \in E$ on a $g(b) \neq f(a)$.

  Ainsi $f(a)$ est un élément de F que g n'atteint pas.

  C'est absurde puisque g est surjective dans F.

- Plaçons-nous dans le cas où $g(a) \lhd f(a)$.

  On montre de la même manière que dans ce cas-là $g(a)$ est un élément de F que f n'atteint pas. C'est absurde puisque f est surjective dans F.

Dans les deux cas on aboutit une absurdité concernant la surjectivité d'une des deux applications.

Par l'absurde on vient de montrer que $\boxed{f = g}$, d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :
En particulier pour E un ensemble bien ordonné quelconque, il n'a que l'identité comme isomorphisme d'ordres de E vers E.

Quand nous avons dit que les ordinaux fournissaient un représentant de chaque classe d'isomorphie pour les bons ordres, nous avons aussi affirmé qu'il n'y en avait qu'un seul par classe. Autrement dit, si deux ordinaux sont isomorphes, alors nécessairement il s'agit d'un même ordinal.

Proposition 26 (Isomorphisme entre ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux et $f : \alpha \longrightarrow \beta$.
Si f est un isomorphisme de α vers β alors $f = \mathrm{id}_\alpha$ et donc $\alpha = \beta$.

Démonstration

Supposons que f est un isomorphisme de α vers β.

En particulier f est injective, surjective sur β et croissante.

Étant injective et croissante, f est strictement croissante.

Remarquons que comme α est un ordinal, α est transitif.

Donc pour tout $\xi \in \alpha$, on aussi $\xi \subseteq \alpha$.

Autrement dit tout élément de α est aussi une partie de α.

Donc pour tout $\xi \in \alpha$, on peut s'intéresser à la fois à $f(\xi)$ et $f^{\rightarrow}(\xi)$.

• Montrons que pour tout $\xi \in \alpha$, on a $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

Soit $\xi \in \alpha$.

Montrons que $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $\gamma \in f(\xi)$.

Comme f est surjective sur β on a $\mathrm{im}(f) = \beta$ donc $f(\xi) \in \beta$.

Comme β est un ordinal, β est transitif donc $f(\xi) \subseteq \beta$.

On a donc $\gamma \in \beta$ par définition de l'inclusion.

Comme $\mathrm{im}(f) = \beta$ on a $\gamma \in \mathrm{im}(f)$ donc il existe $\mu \in \alpha$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

Comme α est un ordinal, μ et ξ sont des ordinaux d'après la prop. 7 p. 23.

On a donc $\mu < \xi$ ou $\mu = \xi$ ou $\xi < \mu$ d'après le théorème 1 page 27.

► Si $\mu = \xi$ alors $\gamma = f(\mu) = f(\xi)$.
Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$, donc $\gamma \in \gamma$ et donc $\gamma < \gamma$.

► Si $\xi < \mu$ alors $f(\xi) < f(\mu)$ par stricte croissance de f.
Comme $f(\mu) = \gamma$ par définition de μ, on a donc $f(\xi) < \gamma$.
Or par définition on a $\gamma \in f(\xi)$ donc $\gamma < f(\xi)$.
On a donc $\gamma < \gamma$ par transitivité de $<$.

Dans ces deux cas-là on a donc nécessairement $\gamma < \gamma$.

C'est absurde par antiréflexivité de $<$.

On a donc nécessairement le troisième cas $\mu < \xi$.

On a donc $\mu \in \xi$ par définition de $<$.

Donc $f(\mu) \in f^{\rightarrow}(\xi)$ par définition de l'image directe.

Comme $\gamma = f(\mu)$, on a donc $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$.

Donc $f(\xi) \subseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $\gamma \in f^{\rightarrow}(\xi)$.

Il existe donc $\mu \in \xi$ tel que $\gamma = f(\mu)$.

Comme $\mu \in \xi$, on a $\mu < \xi$ par définition de $<$.

On a donc $f(\mu) < f(\xi)$ par stricte croissance de f.

Or $\gamma = f(\mu)$ donc $\gamma < f(\xi)$.

On a donc $\gamma \in f(\xi)$ par définition de $<$.

Donc $f(\xi) \supseteq f^{\rightarrow}(\xi)$.

Finalement on a bien $f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } \xi \in \alpha, \text{ on a } f(\xi) = f^{\rightarrow}(\xi)}$ $(\star)$.

• On veut montrer que $f = \mathrm{id}_\alpha$.

Comme elles ont le même domaine α, cela revient à montrer que $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$.

Pour cela, considérons $X := \left\{\xi \in \alpha \;\middle|\; f(\xi) \neq \xi\right\}$ et montrons que $X = \varnothing$.

Supposons par l'absurde que X est non vide.

Par définition X est donc une partie non vide de l'ordinal α.

Or tous les éléments de α sont des ordinaux d'après la proposition 7 page 23.

Donc X est un ensemble non vide dont les éléments sont tous des ordinaux.

Il possède donc un ordinal minimum ξ d'après le théorème 1 page 27.

Soit $\mu \in \xi$.

On a donc $\mu < \xi$ par définition de $<$.

Comme ξ est minimum de X, on a $\mu \notin X$.

Or $\xi \in X$ et $X \subseteq \alpha$ par définitions, donc $\xi \in \alpha$ par définition de l'inclusion.

On a donc $\xi < \alpha$ par définition de $<$.

Ainsi on a $\mu < \xi < \alpha$ donc $\mu < \alpha$ par transitivité de $<$.

On a donc $\mu \in \alpha$ par définition de $<$, et on a vu que $\mu \notin X$.

On a donc $f(\mu) = \mu$ par définition de X.

Donc $\forall \mu \in \xi, f(\mu) = \mu$.

Donc $f(\xi) \underset{(\star)}{=} f^{\rightarrow}(\xi) = \left\{f(\mu) \;\middle|\; \mu \in \xi\right\} = \{\mu \mid \mu \in \xi\} = \xi$.

Donc $f(\xi) = \xi$ donc $\xi \notin X$ par définition de X : c'est absurde.

Par l'absurde, on vient de montrer que X est vide.

Donc $\forall \xi \in \alpha, f(\xi) = \xi$ par définition de X.

Finalement, on a donc $\boxed{f = \mathrm{id}_\alpha}$.

On a en particulier $\alpha = \mathrm{im}(\mathrm{id}_\alpha) = \mathrm{im}(f) = \beta$ par surjectivité de f sur β.
CQFD.

Ainsi, on vient de montrer qu'au sein d'une classe d'isomorphie, il ne peut y avoir au maximum qu'un seul ordinal. Précisions ce que l'on entend par là.

Proposition 27 (Au plus un ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.
Supposons qu'il existe au moins un ordinal α tel que $(E, \preccurlyeq)$ et $(\alpha, \leq)$ sont isomorphes.
Alors un tel α est unique, et l'isomorphisme de $(E, \preccurlyeq)$ vers $(\alpha, \leq)$ est unique.

Démonstration

• **Unicité de l'ordinal**

Soit $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Soit β un ordinal tel que $(E, \preccurlyeq)$ et $(\beta, \leq)$ sont isomorphes.

Il existe donc un isomorphisme $g : E \longrightarrow \beta$.

Comme $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme, $f^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $g \circ f^{-1} : \alpha \longrightarrow \beta$ est un isomorphisme.

Donc $\alpha = \beta$ d'après la proposition 26 page 61.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'ordinal } \alpha \text{ isomorphe à } E}$.

• **Unicité de l'isomorphisme**.

Soit $g : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme.

Alors $g^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} : \alpha \longrightarrow \alpha$ est un isomorphisme.

Donc $f \circ g^{-1} = \mathrm{id}_\alpha$ d'après la proposition 26 page 61.

Donc $f = f \circ \mathrm{id}_E = f \circ (g^{-1} \circ g) = (f \circ g^{-1}) \circ g = \mathrm{id}_\alpha \circ g = g$.

On a donc $\boxed{\text{unicité de l'isomorphisme de } E \text{ vers } \alpha}$.

CQFD.

Venons-en finalement à ce qui nous intéressait depuis le début : utiliser les ordinaux pour représenter n'importe quel bon ordre, à isomorphisme près. On vient déjà de voir l'unicité, mais formulons quand-même complètement un théorème digne de ce nom !

Pour le démontrer, nous allons utiliser l'idée proposée par la proposition 24 page 58, qui affirme qu'à isomorphisme près, un ensemble bien ordonné se comporte comme l'ensemble de ses segments initiaux propres. Autrement dit, on peut tout à fait raisonner sur les segments initiaux propres plutôt que sur l'ensemble directement.

Théorème 4 (Unique ordinal associé à un bon ordre)

Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble **bien ordonné**.
Alors il existe un unique ordinal α tel que $(E, \preccurlyeq)$ et $(\alpha, \leq)$ sont isomorphes.
On dit alors que α est le **type** de $(E, \preccurlyeq)$ et on note $\operatorname{type}(E, \preccurlyeq) := \alpha$.

Démonstration

• Soit $\prec$ l'ordre strict sur E associé à $\preccurlyeq$.

Soit $x \in E$.

Rappelons-nous que $E_{\prec x} = \{y \in E \mid y \prec x\}$.

Ainsi $E_{\prec x}$ est une partie de E et $(E, \preccurlyeq)$ est bien ordonné.

Donc $(E_{\prec x}, \preccurlyeq)$ est bien ordonné d'après la prop. 4 p. 16.

Pour la suite de cette démonstration, on dira que x est **bon** si et seulement s'il existe au moins un ordinal ξ tel que $(E_{\prec x}, \preccurlyeq)$ est isomorphe à $(\xi, \leq)$.

Dans ce cas-là, un tel ordinal ξ est unique d'après la proposition 27 page 63.

Nous noterons par la suite $f(x) := \xi$ cet unique ordinal.

Posons $G := \{x \in E \mid x \text{ est bon }\}$.

On a donc l'application $f : G \longrightarrow ?$ qui à $x \in G$ associe l'unique ordinal $f(x)$ tel que $(E_{\prec x}, \preccurlyeq)$ est isomorphe à $\big(f(x), \leq\big)$.

Pour tout $x \in G$, l'isomorphisme de $(E_{\prec x}, \preccurlyeq)$ vers $\big(f(x), \leq\big)$ est unique d'après la proposition 27 page 63 : on le notera h_x. Ainsi on a $h_x : E_{\prec x} \longrightarrow f(x)$.

Avant d'avancer, remarquons que par définition pour tout $x \in G$, son image $f(x)$ est un ordinal. En particulier $\operatorname{im}(f)$ est un ensemble d'ordinaux et est donc naturellement muni de l'ordre induit $\leq$.

Voici à présent les différentes étapes de la preuve :

1. On prouve que G est un segment initial de E.
2. On montre que f est un isomorphisme de $(G, \preccurlyeq)$ dans $\big(\operatorname{im}(f), \leq\big)$.
3. On montre que $\operatorname{im}(f)$ est un ordinal : G est donc lui-même isomorphe à un ordinal.
4. On montre qu'en fait $G = E$, ce qui permet de conclure.

1. Montrons que G est un segment initial de E.
Autrement dit, montrons que pour tout x et y dans E, si $y \prec x \in G$ alors $y \in G$.
Montrons aussi au passage que dans ce cas-là on a $f(y) = h_x(y)$.

Soient x et y dans E tels que $y \prec x \in G$.

Alors pour tout $z \in E_{\prec y}$, on a $z \prec y$ donc $z \prec x$ par transitivité de $\prec$ et donc $z \in E_{\prec x}$. Ainsi $E_{\prec y} \subseteq E_{\prec x}$ donc on peut considérer la restriction de h_x à $E_{\prec y}$.

Nous allons montrer que $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est un isomorphisme de $E_{\prec y}$ vers $h_x(y)$.
Par définition on sait déjà que $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ a pour domaine $E_{\prec y}$.
Par définition h_x est un isomorphisme d'ordre, donc est injectif et croissant.
On en déduit déjà que $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est lui aussi injectif et croissant.
De plus, on en déduit aussi que h_x est strictement croissant.

Montrons que $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est surjectif sur $h_x(y)$, c'est-à-dire $\mathrm{im}\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big) = h_x(y)$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $u \in \mathrm{im}\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big)$.
Il existe donc $z \in E_{\prec y}$ tel que $u = (h_x)_{|E_{\prec y}}(z) = h_x(z)$.
Comme $z \in E_{\prec y}$, on a $z \prec y$ donc $h_x(z) < h_x(y)$ par stricte croissance de h_x.
Ainsi on a $h_x(z) \in h_x(y)$ par définition de $<$, et donc $u \in h_x(y)$.

Donc $\mathrm{im}\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big) \subseteq h_x(y)$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $\beta \in h_x(y)$.
Comme $h_x : E_{\prec x} \longrightarrow f(x)$ on a $h_x(y) \in f(x)$.
Ainsi on a $\beta \in h_x(y) \in f(x)$.
Or $f(x)$ est un ordinal par définition de f donc $f(x)$ est transitif.
On en déduit donc que $\beta \in f(x)$.
Or par définition h_x est surjectif dans $f(x)$.
Il existe donc $b \in E_{\prec x}$ tel que $h_x(b) = \beta$.
Or $(E, \preccurlyeq)$ est bien ordonné par définition.
Donc $(E, \preccurlyeq)$ est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.
On a donc $b \prec y$ ou $y \preccurlyeq b$.

Supposons par l'absurde que $y \preccurlyeq b$.
On a alors $h_x(y) \leq h_x(b)$ par croissance de h_x.
Comme $h_x(b) = \beta$ par définition de b, on a $h_x(y) \leq \beta$.
Or on a $\beta \in h_x(y)$ par définition de β, c'est-à-dire $\beta < h_x(y)$.
On vient donc de montrer $\beta < h_x(y) \leq \beta$, ce qui est absurde.

On a donc nécessairement l'autre option $b \prec y$ c'est-à-dire $b \in E_{\prec y}$.
Comme $\beta = h_x(b)$, on a donc $\beta \in h_x{}^{\rightarrow}\big(E_{\prec y}\big)$.
Autrement dit, on a $\beta \in \mathrm{im}\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big)$.

On a donc $\mathrm{im}\,\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big) \supseteq h_x(y)$ et donc $\mathrm{im}\big((h_x)_{|E_{\prec y}}\big) = h_x(y)$.
Ainsi $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est surjective sur $h_x(y)$.

On a donc $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est croissante, injective et surjective sur $h_x(y)$.

Or on a dit que $\preccurlyeq$ est total sur E, donc sur $E_{\prec y}$ le domaine de $(h_x)_{|E_{\prec y}}$.

Donc $(h_x)_{|E_{\prec y}}$ est un isomorphisme de $E_{\prec y}$ vers $h_x(y)$.

Ainsi $E_{\prec y}$ et $h_x(y)$ sont isomorphes.

Or on a dit que $h_x(y)$ est un ordinal puisqu'élément de $f(x)$.

Donc $E_{\prec y}$ est isomorphe à un ordinal, et donc $y \in G$.

On note au passage que par unicité de l'ordinal on a $f(y) = h_x(y)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ et } y \text{ dans } E, \text{ si } y \prec x \in G \text{ alors } y \in G \text{ avec } f(y) = h_x(y)}$ $(\star)$.

2. Montrons que f est un isomorphisme de $(G, \preccurlyeq)$ dans $\big(\operatorname{im}(f), \leq\big)$.

Pour cela, montrons que f est strictement croissante.

Soient x et y dans G.

Supposons que $y \prec x$.

D'après $(\star)$ on a alors $f(y) = h_x(y)$.

Or par définition h_x est à valeurs dans $f(x)$.

On a donc $h_x(y) \in f(x)$ et donc $f(y) \in f(x)$.

On a donc $f(y) < f(x)$ par définition de $<$.

Donc si $y \prec x$ alors $f(y) < f(x)$.

Donc f est strictement croissante.

En particulier f est croissante et injective, donc f est croissante et bijective sur $\operatorname{im}(f)$.

Or on a dit que $\preccurlyeq$ est total sur E donc $\preccurlyeq$ est total sur G puisque $G \subseteq E$.

Donc $\boxed{f \text{ est un isomorphisme de } (G, \preccurlyeq) \text{ dans } \big(\operatorname{im}(f), \leq\big)}$.

3. Montrons que $\operatorname{im}(f)$ est un ordinal.

► Montrons que $\operatorname{im}(f)$ est transitif.

Soit $a \in \operatorname{im}(f)$.

Il existe donc $x \in G$ tel que $a = f(x)$.

Soit $b \in a$.

Par définition h_x est un isomorphisme d'ordres de $E_{\prec x}$ dans $f(x)$.

En particulier h_x est surjectif sur $f(x)$.

Comme $a = f(x)$, on en déduit que h_x est surjectif sur a.

On a donc $\operatorname{im}(h_x) = a$ et donc $b \in \operatorname{im}(h_x)$.

Il existe donc $y \in E_{\prec x}$ tel que $b = h_x(y)$.

Comme $y \in E_{\prec x}$ on a $y \prec x$ et donc $h_x(y) = f(y)$ d'après $(\star)$.

Donc $b = f(y)$ et donc $b \in \operatorname{im}(f)$.

Donc $a \subseteq \mathrm{im}(f)$ par définition de l'inclusion.

Donc $\forall a \in \mathrm{im}(f), a \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Donc $\mathrm{im}(f)$ est transitif.

▶ Par définition de f, tous les éléments de $\mathrm{im}(f)$ sont des ordinaux.

Donc $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathrm{im}(f)$ d'après le théorème 1 page 27.

Ainsi, $\mathrm{im}(f)$ est transitif et $\in$ est un bon ordre strict sur $\mathrm{im}(f)$.

Donc $\boxed{\mathrm{im}(f) \text{ est un ordinal}}$.

4. Ainsi f est un isomorphisme de G vers l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Il ne reste plus qu'à prouver que $G = E$ pour conclure.

Supposons par l'absurde que $G \subsetneq E$.

Alors $E \backslash G$ est une partie non vide de l'ensemble bien ordonné E.

Elle admet donc un minimum e.

Montrons que $E_{\prec e} = G$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $x \in E_{\prec e}$.

Par définition on a $x \prec e$ donc $x \notin E \backslash G$ car e en est minimum.

On a donc $x \in G$.

Donc $E_{\prec e} \subseteq G$ par définition de l'inclusion.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $x \in G$.

On a dit que $\preccurlyeq$ est total sur E donc $x \prec e$ ou $x = e$ ou $e \prec x$.

- ▶ Si $x = e$ alors $e \in G$ puisque $x \in G$.
- ▶ Si $e \prec x$ alors $e \in G$ d'après $(\star)$.

Dans ces deux cas-là on a donc $e \in G$ ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc nécessairement $x < e$ et donc $x \in E_{\prec e}$.

Donc $E_{\prec e} \supseteq G$ et donc $E_{\prec e} = G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $E_{\prec e}$ est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$.

Donc $e \in G$ par définition de G, ce qui est absurde puisque $e \in E \backslash G$.

On a donc $E = G$.

Or G est isomorphe à l'ordinal $\mathrm{im}(f)$ d'après ce qui précède.

Donc $\boxed{E \text{ est isomorphe à l'ordinal } \mathrm{im}(f)}$.

L'unicité est garantie par la proposition 27 page 63.

CQFD.

Remarque :

1. Ainsi on note $\mathrm{type}(E, \preccurlyeq)$ l'unique ordinal isomorphe à l'ensemble bien ordonné $(E, \preccurlyeq)$. Comme nous avons déjà eu l'occasion de le faire, on omet parfois d'écrire $\preccurlyeq$ car l'ordre est sous-entendu, afin de simplifier et fluidifier le discours. On notera très donc très souvent $\mathrm{type}(E)$.
2. Soit α un ordinal : comme α est nécessairement isomorphe à lui-même, on a donc $\mathrm{type}(\alpha) = \alpha$.

Exemple :

1. Considérons un ensemble $E := \{a, b, c, d\}$ ordonné par $a \preceq b \preceq c \preceq d$. Alors on peut le mettre en bijection avec $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ en posant $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$ et $f(d) = 3$. Naturellement f est croissante et sa réciproque aussi, si bien que f est un isomorphisme d'ordres. On en conclut que E est bien ordonné, et comme il est isomorphe à l'ordinal 4, on en conclut que $\mathrm{type}(E) = 4$. On voit d'ailleurs commencer à poindre l'idée de nombres d'éléments à travers le type. Ce n'est pas parfaitement exact, mais nous reviendrons sur cela lors du chapitre 3.
2. Considérons $F := \{2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ordonné de manière usuelle. Alors on peut montrer que l'application $f : F \longrightarrow \mathbb{N}$ définie pour tout x dans F par $f(x) = x - 2$ est un isomorphisme d'ordres, si bien que F est bien ordonné et son type est $\omega = \mathbb{N}$.

Pour la proposition qui suit, rappelons qu'une partie d'un ensemble bien ordonné est elle aussi bien ordonnée en vertu de la proposition 4 page 16.

Proposition 28 (Ordinal associé et inclusion)

Soient $(A, \preccurlyeq)$ un ensemble **bien ordonné** et X une partie de A.
On a $\mathrm{type}\big(X, \preccurlyeq\big) \leq \mathrm{type}\big(A, \preccurlyeq\big)$.

Démonstration

• Commençons par supposer que A est un ordinal : la relation $\preccurlyeq$ est donc $\leq$.

Ainsi tous les éléments de A sont des ordinaux d'après la proposition 7 page 23.

Or X est une partie de A donc X est un ensemble d'ordinaux.

Posons alors $\delta := \mathrm{type}(X, \leq)$ et $f : X \longrightarrow \delta$ l'isomorphisme associé.

Rappelons que δ étant un ordinal, X et δ sont munis tous deux de $\leq$.

En particulier les éléments de X et les éléments de δ sont comparables pour $\leq$.

En particulier pour tout $\xi \in X$, $f(\xi)$ et ξ sont comparables pour $\leq$.

Montrons que $\forall \xi \in X, f(\xi) \leq \xi$.

Pour cela posons $E := \big\{\xi \in X \;\big|\; f(\xi) \leq \xi\big\}$ et montrons que $E = X$.

Supposons par l'absurde que $E \subsetneq X$.

Alors $X \backslash E$ est un ensemble non vide d'ordinaux.

Il admet donc un minimum ξ d'après le théorème 1 page 27.

Comme $\xi \in X \backslash E$, on a $\xi \notin E$ et donc $f(\xi) \not\leq \xi$ par définition de E.
Or $\leq$ est total chez les ordinaux donc on a $\xi < f(\xi)$.
Or $\mathrm{im}(f) = \delta$ par définition de f donc $f(\xi) \in \delta$ et donc $f(\xi) < \delta$.
Ainsi $\xi < f(\xi) < \delta$ donc $\xi < \delta$ par transitivité de $<$.
Comme $\mathrm{im}(f) = \delta$ on a donc $\xi < \mathrm{im}(f)$ et donc $\xi \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $\gamma \in E$ tel que $\xi = f(\gamma)$.
Comme $\xi < f(\xi)$ on a donc $f(\gamma) < f(\xi)$.
Comme f est un isomorphisme d'ordres, on a donc $\gamma < \xi$.
Comme ξ est le minimum de $X \backslash E$, on a donc $\gamma \notin X \backslash E$ donc $\gamma \in E$.
On a donc $f(\gamma) \leq \gamma$ par définition de E, c'est-à-dire $\xi \leq \gamma$ par définition de γ.
C'est absurde puisque l'on a dit que $\gamma < \xi$.

Par l'absurde, on a donc montré que $E = X$.
Ainsi, $\boxed{\forall \xi \in X, f(\xi) \leq \xi}$ $(\star_1)$.

Montrons que $\delta \leq A$.
Soit $\varepsilon \in \delta$.
Par définition de f on a $\mathrm{im}(f) = \delta$ donc $\varepsilon \in \mathrm{im}(f)$.
Il existe donc $\xi \in X$ tel que $\varepsilon = f(\xi)$.
D'après $(\star_1)$ on a $f(\xi) \leq \xi$ donc $\varepsilon \leq \xi$.
Or on a $\xi \in X \subseteq A$ donc $\xi \in A$ par définition de l'inclusion.
On a donc $\xi < A$ par définition de $<$, donc $\varepsilon \leq \xi < A$ et donc $\varepsilon < A$ par transitivité.
Ainsi on a $\varepsilon \in A$.

Donc $\delta \subseteq A$ par définition de l'inclusion, et donc $\delta \leq A$.
Or par définition $\delta = \mathrm{type}\big(X, \leq\big)$ donc $\mathrm{type}\big(X, \leq\big) \leq A$.
Or A est un ordinal donc en particulier est l'unique ordinal isomorphe à lui-même.
Autrement dit on a $A = \mathrm{type}\big(A, \leq\big)$.
On a donc bien $\boxed{\mathrm{type}\big(X, \leq\big) \leq \mathrm{type}\big(A, \leq\big)}$ $(\star_2)$.

• Plus généralement on ne suppose plus spécialement que A est un ordinal.
Soient alors $\alpha := \mathrm{type}(A, \preccurlyeq)$ et $g : A \longrightarrow \alpha$ l'isomorphisme associé.
Considérons $Y := g^{\rightarrow}(X)$, de telle que sorte que Y est une partie de α.
On se retrouve dans la situation précédente : d'après $(\star_2)$ on a $\mathrm{type}\big(Y, \leq\big) \leq \mathrm{type}\big(\alpha, \leq\big)$.

Or g est un isomorphisme d'ordres.

Donc en particulier g est croissant et injectif.

Donc $g_{|X}$ est croissant et injectif.

Donc $g_{|X}$ est croissant et une bijection de X dans $g^{\rightarrow}(X) = Y$.

Or X est bien ordonné donc en particulier est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15. Donc $g_{|X}$ est un isomorphisme d'ordres de X dans Y.

En particulier X et Y sont isomorphes.

Donc X et $\text{type}(Y, \leq)$ sont isomorphes par transitivité de l'isomorphie.

Donc $\text{type}(X, \preccurlyeq) = \text{type}(Y, \leq)$ par unicité de l'ordinal associé.

On a donc $\boxed{\text{type}\big(X, \preccurlyeq\big) \leq \text{type}\big(A, \preccurlyeq\big)}$.

CQFD.

La proposition qui suit peut prêter à confusion avec toutes les notations qu'elle utilise. Prenons un exemple pour mieux la comprendre. Pour la première partie, prenons $E := [2, 3]$ et $F := [6, 7]$ dans $\mathbb{R}$, ordonné de manière usuelle. Comme isomorphisme d'ordres, on peut par exemple considérer

$$f := \begin{pmatrix} [2,3] & \longrightarrow & [6,7] \\ x & \longmapsto & x+4 \end{pmatrix}$$

Ce que nous dit la première partie de la proposition, c'est que pour $x \in [2, 3]$ il y a un isomorphisme entre $E_{<x} = [2, x[$ et $F_{<f(x)} = \big[6, f(x)\big[$. Cet isomorphisme est simplement donné par la restriction de f à $[2, x[$: ainsi $f_{|E_{<x}} : E_{<x} \longrightarrow F_{<f(x)}$ est un isomorphisme d'ordres.

Pour la deuxième partie, reprenons comme dans un exemple précédent $E := \{a, b, c, d\}$ ordonné par $a \preceq b \preceq c \preceq d$, pour lequel on a montré que c'est un ensemble bien ordonné et que son type est 4 via l'isomorphisme $f : E \longrightarrow 4$ défini par $f(a) = 0$, $f(b) = 1$, $f(c) = 2$ et $f(d) = 3$. On a $E_{\prec a} = \varnothing$, $E_{\prec b} = \{a\}$, $E_{\prec c} = \{a, b\}$ et $E_{\prec d} = \{a, b, c\}$. D'après la proposition 4 page 16, chacun de ces segments initiaux est aussi bien ordonné. On a $\text{type}(E_{\prec a}) = 0 = f(a)$, $\text{type}(E_{\prec b}) = 1 = f(b)$, $\text{type}(E_{\prec c}) = 2 = f(c)$ et $\text{type}(E_{\prec d}) = 3 = f(d)$: autrement dit le type du segment initial $E_{\prec x}$ est simplement $f(x)$ et de plus l'isomorphisme entre les deux est simplement donné par la restriction de f à $E_{\prec x}$.

Proposition 29 (Segments initiaux et isomorphisme)

Soient E et F deux ensembles **totalement ordonnés**.
Notons $\prec$ l'ordre strict sur E et $\lhd$ l'ordre strict sur F.

1. Supposons qu'il existe $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'ordres.
   Alors pour tout $x \in E$, $f_{|E_{\prec x}} : E_{\prec x} \longrightarrow F_{\lhd f(x)}$ est un isomorphisme d'ordres.
2. En particulier supposons que E est un ensemble **bien ordonné**.
   Notons $f : E \longrightarrow \text{type}(E)$ l'isomorphisme associé.
   Alors pour tout $x \in E$, on a $f(x) = \text{type}(E_{\prec x})$ et $f_{|E_{\prec x}}$ est l'isomorphisme associé.

Démonstration

Notons $\preccurlyeq$ l'ordre sur E et $\trianglelefteq$ l'ordre sur F.

1. Soit $x \in E$.

Par hypothèse $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier f est injective donc $f_{|E_{\prec x}}$ est injective.

De même f est croissante donc $f_{|E_{\prec x}}$ est croissante.

Il reste à montrer que $\mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}}) = F_{\lhd f(x)}$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $y \in \mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}})$.

Il existe donc $z \in E_{\prec x}$ tel que $y = f_{|E_{\prec x}}(z) = f(z)$.

Comme $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'ordres, f est strictement croissante.

Comme $z \in E_{\prec x}$, on a $z \prec x$ et donc $f(z) \lhd f(x)$.

Autrement dit on a $y \lhd f(x)$ donc $y \in F_{\lhd f(x)}$.

Ainsi on a $\mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}}) \subseteq F_{\lhd f(x)}$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $y \in F_{\lhd f(x)}$.

En particulier on a $y \in F$.

Or $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme d'ordre donc f est surjective dans F.

Il existe donc $z \in E$ tel que $y = f(z)$.

Par hypothèse E est totalement ordonné donc on a $z \prec x$ ou $x \preccurlyeq z$.

Supposons par l'absurde que $x \preccurlyeq z$.

Comme f est croissante on a $f(x) \preccurlyeq f(z)$, donc $f(x) \trianglelefteq y$.

C'est absurde puisque par définition $y \in F_{\lhd f(x)}$ donc $y \lhd f(x)$.

On a donc nécessairement $z \prec x$, donc $z \in E_{\prec x}$.

Comme $y = f(z)$, on a $y \in f^{\rightarrow}(E_{\prec x}) = \mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}})$.

Ainsi on a $\mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}}) \supseteq F_{\lhd f(x)}$ et donc $\mathrm{im}(f_{|E_{\prec x}}) = F_{\lhd f(x)}$.

Ainsi $f_{|E_{\prec x}}$ est surjective dans $F_{\lhd f(x)}$.

Ainsi $f_{|E_{\prec x}}$ est croissante, injective et surjective dans $F_{\lhd f(x)}$.

Or par hypothèse E est totalement ordonné, donc $E_{\prec x}$ son domaine aussi.

Donc $\boxed{f_{|E_{\prec x}} : E_{\prec x} \longrightarrow F_{\lhd f(x)} \text{ est un isomorphisme d'ordres}}$.

2. Soit $x \in E$.

Un ensemble bien ordonné est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

On peut donc appliquer 1.

On a donc $f_{|E_{\prec x}} : E_{\prec x} \longrightarrow \mathrm{type}(E)_{<f(x)}$ est un isomorphisme d'ordres.

Or par définition $\mathrm{type}(E)$ est un ordinal, donc $f(x)$ aussi.

On a aussi $\mathrm{type}(E)_{<f(x)} = f(x)$ d'après la proposition 18 page 49.
Ainsi $f_{|E_{\prec x}} : E_{\prec x} \longrightarrow f(x)$ est un isomorphisme d'ordres et $f(x)$ un ordinal.
On a donc $\boxed{f(x) = \mathrm{type}(E_{\prec x})}$.
CQFD.

6 Récurrence : induction et récursion

Au lycée, nous découvrons la notion de récurrence. On la retrouve notamment à travers le **raisonnement par récurrence** qui, comme nous l'avons déjà explicité, permet de prouver qu'une propriété est vraie pour tous les entiers naturels :

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big[P(n) \implies P(n+1)\Big] \end{cases}$$
Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Dans le même temps, on retrouve aussi la récurrence à travers les **définitions par récurrence**, qui permettent de définir une suite à partir d'une donnée initiale et d'une règle pour passer d'un entier au suivant :

$$\begin{cases} u_0 := a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} := f(u_n) \end{cases}$$

Ces deux incarnations de la récurrence portent chacune un nom : le raisonnement par récurrence est aussi appelé **induction**, et la définition par récurrence est aussi appelée **récursion**.

6.1 Induction

L'induction chez les ordinaux est donc une généralisation de l'induction chez les nombres entiers : le principe est le même que pour le raisonnement par récurrence classique, c'est-à-dire prouver qu'une assertion est vraie à un certain ordinal et qu'elle se transmet de proche en proche par opération de successeur :

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall \alpha \in ON, \Big[P(\alpha) \implies P\big(S(\alpha)\big)\Big] \end{cases}$$
Alors on a $\forall \alpha \in ON, P(\alpha)$.

Cependant, nous l'avons dit : certains ordinaux ne sont le successeur de personne et donc il est impossible que l'assertion leur parvienne de cette façon (sauf pour 0 qui est déjà atteint au début). Autrement dit, la formulation qui précède n'est pas correcte.

Pour palier ce problème, on peut commencer par reformuler le raisonnement par récurrence sur les entiers naturels d'une autre manière. Pour démontrer qu'une assertion à paramètres P est vraie pour tout entier naturel n, on peut plutôt montrer :

$$\text{Supposons } \begin{cases} P(0) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\big[\forall m < n, P(m)\big] \implies P(n)\Big) \end{cases}$$
Alors on a $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

On retrouve ce que l'on appelle usuellement le raisonnement par récurrence **forte**. En réalité, il ne s'agit pas d'un raisonnement plus fort que le raisonnement par récurrence classique. Pour s'en convaincre, il suffit de poser $Q(n)$:« $\forall m < n, P(m)$ ». On peut alors remarquer que faire l'hypothèse de $Q(n)$, c'est faire l'hypothèse que P est vraie pour tout entier de 0 à $n-1$, et dire que cela implique alors $P(n)$ signifie désormais que P est vraie pour un entier de plus, c'est-à-dire pour tout entier précédent $n+1$, et donc que $Q(n+1)$ est vraie. Il s'agit donc tout simplement de l'implication $Q(n) \implies Q(n+1)$. C'est donc bel et bien une hérédité classique.

Remarquons au passage qu'on peut enfouir l'initialisation $P(0)$ dans l'implication $\Big[\forall m < 0, P(m)\Big] \implies P(0)$ puisque la prémisse étant toujours vraie, cette implication est équivalente à $P(0)$. Autrement dit, on peut reformuler le raisonnement par récurrence sur les entiers de la façon suivante :

$$\text{Supposons } \forall n \in \mathbb{N}, \Big(\big[\forall m < n, P(m)\big] \implies P(n)\Big).$$
$$\text{Alors on a } \forall n \in \mathbb{N}, P(n).$$

Or cette fois-ci il n'est pas question de successeur : cette formulation se généralise très bien aux ordinaux ! C'est l'objet du théorème qui suit.

Théorème 5 (Principe d'induction transfinie)

Soit P une assertion à paramètres.
Supposons que pour tout ordinal α, on a

$$\Big[\forall \beta < \alpha, P(\beta)\Big] \implies P(\alpha)$$

Alors pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$.

Démonstration

Supposons que pour tout ordinal α, on a $\Big[\forall \beta < \alpha, P(\beta)\Big] \implies P(\alpha)$.

Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un ordinal α tel que l'on n'a pas $P(\alpha)$.

Soit X l'ensemble des ordinaux plus petit ou égaux à α et qui ne vérifient pas P.

Par définition on a $\alpha \in X$ donc X est un ensemble non vide d'ordinaux.

Il admet donc un ordinal minimum ξ d'après le théorème 1 page 27.

Soit μ un ordinal tel que $\mu < \xi$.

Alors $\mu \notin X$ car ξ est minimum de X.

Or $\xi \in X$ donc $\xi \leq \alpha$ et donc $\mu < \xi \leq \alpha$.

On a donc $\mu \leq \alpha$ par transitivité.

Ainsi on a $\mu \notin X$ alors que $\mu \leq \alpha$.

Donc nécessairement on a $P(\mu)$ par définition de X.

Donc $\forall \mu < \xi, P(\mu)$.

On a donc $P(\xi)$ par hypothèse du théorème.

C'est absurde puisque $\xi \in X$ et donc $P(\xi)$ est faux.

Donc par l'absurde on a montré que $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } P(\alpha)}$.

CQFD.

On est cependant en droit de se demander : la formulation classique avec le passage de n à $n+1$ a-t-elle une généralisation chez les ordinaux ? La réponse est oui, à condition de traiter séparément le cas des ordinaux limites puisqu'ils ne sont pas successeurs. C'est donc au fond un mélange des deux formulations. À la manière de la récurrence classique et de la récurrence forte chez les entiers naturels, c'est une formulation équivalente à la précédente, on ne dit au fond rien de moins même si naïvement on peut en avoir l'impression.

Proposition 30 (Principe faible d'induction transfinie)

Soit P une assertion à paramètres.
Supposons que :

1. On a $P(0)$.
2. Pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P\big(S(\alpha)\big)$.
3. Pour tout ordinal limite α, si $\forall\beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Alors pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Démonstration

Appliquons le théorème 5 page 74.

Soit α un ordinal.

Supposons que $\forall\beta < \alpha, P(\beta)\ \ (\star)$.

- Si $\alpha = 0$, alors d'après l'hypothèse 1 on a $P(\alpha)$.
- Supposons que α est un successeur.
  Par définition il existe un ordinal β tel que $\alpha = S(\beta)$.
  Alors $\beta < \alpha$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $P(\beta)$ d'après l'hypothèse $(\star)$.
  On a donc $P\big(\alpha\big)$ d'après l'hypothèse 2.
- Supposons que α est un ordinal limite.
  On alors $P(\alpha)$ d'après les hypothèses $(\star)$ et 3.

Dans tous les cas on a donc $P(\alpha)$.

Donc si $\forall\beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal α, on l'implication $\Big(\forall\beta < \alpha, P(\beta)\Big) \implies P(\alpha)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{, on a } P(\alpha)}$ d'après le théorème 5 page 74.

CQFD.

Remarque :
0 étant un ordinal limite, il entre à la fois dans le cas 1 et le cas 3, mais comme $\forall\beta < 0, P(\beta)$ est nécessairement vraie, l'implication $\Big(\forall\beta < 0, P(\beta)\Big) \implies P(0)$ est équivalente à $P(0)$ et donc il y a seulement une redondance, pas de contradiction.

6.2 Récursion

Nous l'avons dit, la récursion chez les entiers naturels est aussi connue sous le nom de définition par récurrence, pour définir une suite : on définit la valeur de cette suite en un entier puis l'on se donne une règle pour déterminer la valeur de la suite sur l'entier suivant à partir du précédent, ce qui permet de proche en proche de définir la suite sur chaque entier. Par exemple on pourrait être amenés à définir la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 := 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n := 3u_{n-1} \end{cases}$$

qui va alors donner la suite des puissances de 3. On peut se retrouver dans le cas où l'étape de propagation nécessite en fait les deux termes précédents (auquel cas il faut déterminer la valeur de la suite sur deux entiers au début), comme c'est le cas avec **la suite de Fibonacci** :

$$\begin{cases} u_0 := 1 \\ u_1 := 1 \\ \forall n \geq 2, u_n := u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Plus généralement, on peut même vouloir définir un terme à partir de toutes les valeurs précédentes. La notion qui va permettre de donner une "*règle de construction*" en toute généralité pour se servir des valeurs précédentes est celle d'**assertion fonctionnelle** que nous avons rappelée au début de ce chapitre. Ainsi, si H est une assertion fonctionnelle, la forme la plus générale qu'on pourrait être amenés à utiliser pour définir une suite par récurrence sur les entiers est

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n := H\big(u_{|[\![0,n[\![}\big)$$

où $u_{|[\![0,n[\![}$ désigne la restriction de la suite u à tous les entiers de 0 à $n-1$. Ainsi, on tient bien compte des valeurs de u jusqu'à n (non compris). Remarquons bien que comme H est très générale, elle peut en particulier ne regarder que quelques valeurs parmi les précédentes et non toutes (par exemple seulement les deux précédentes comme dans le cas de Fibonacci), et aussi être constante en quelques entiers pour s'assurer d'avoir fixé les premières valeurs de la suite. Ainsi dans le cas de la suite de Fibonacci, H serait définie de telle sorte à avoir

$$\begin{cases} H\big(u_{|[\![0,n[\![}\big) := 1 & \text{si } n = 0 \\ H\big(u_{|[\![0,n[\![}\big) := 1 & \text{si } n = 1 \\ H\big(u_{|[\![0,n[\![}\big) := u_{n-1} + u_{n-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est ce cadre-là que nous allons désormais définir proprement pour le généraliser encore plus, c'est-à-dire à présent sur tous les ordinaux. Le principe va cependant rester le même : se donner une règle de propagation via les assertions fonctionnelles, et l'utiliser pour définir la valeur d'une suite à un ordinal à partir de la restriction de la suite aux ordinaux précédents.

On remarque que pour que u puisse être définie, il faut que ses restrictions respectives soient bien dans le domaine de H pour que l'étape de propagation ait du sens. C'est à travers la notion d'application inductive (une suite étant une application particulière) que nous allons faire cela.

Définition 12 (Application inductive)

Soient H une assertion fonctionnelle et u une application.
On dit que u est **H-inductive** si et seulement si :

1. $\mathrm{dom}(u)$ est un ordinal.
2. Pour tout $\beta \in \mathrm{dom}(u)$, on a $u_{|\beta} \in \mathrm{dom}(H)$ et $u(\beta) = H(u_{|\beta})$.

Ne perdons pas de vue qu'un ordinal est lui-même l'ensemble de tous les ordinaux qui le précèdent, autrement dit $u_{|\beta}$ est bien la restriction de u à tous les ordinaux qui viennent avant β, au même titre que $u_{|[\![0,n[\![}$ est la restriction de u à tous les entiers qui précèdent n. Dans le cadre conceptuel des ordinaux, on a d'ailleurs bien l'égalité : $n = [\![0, n[\![$, donc on retombe bien sur nos pieds.

À ce stade, nous avons déjà défini les notions utiles pour construire les différentes suites que nous avons évoquées : il suffit pour cela de bien choisir le H en question et les applications u qui sont H-inductives et concernées seront celles telles que $\mathrm{dom}(u) = \omega$ l'ensemble des entiers naturels.

Cependant nous avons exprimé le souhait d'aller au delà de ω à travers la théorie plus générale des ordinaux. On pourrait tout à fait se contenter pour cela de la définition que nous venons d'énoncer : si l'on souhaite se rendre jusqu'à un ordinal α, même très grand, il suffit de demander $\mathrm{dom}(u) = \alpha$ pour les applications H-inductives qui nous intéressent.

Il y a néanmoins des cas où nous ne voudrions pas particulièrement limiter l'ordinal jusqu'où construire l'application u. Typiquement, étant donnés deux ordinaux α et β, nous serons amenés à définir l'addition $\alpha + \beta$. Nous le ferons à l'aide d'une assertion fonctionnelle H bien choisie. En passant par une application u qui est H-inductive, on pourra faire en sorte que

$$\forall \beta \in \mathrm{dom}(u), \alpha + \beta := u(\beta)$$

en ayant fixé α au préalable. Le problème vient alors de savoir le sens à donner à $\alpha + \mathrm{dom}(u)$. En effet, $\mathrm{dom}(u)$ est lui-même un ordinal, que l'on devra en plus choisir arbitrairement. On peut se contenter de se limiter à $\mathrm{dom}(u)$ en l'ayant pris très grand, mais cela présente une inélégance que l'on peut corriger.

On aimerait pour cela ne pas limiter le domaine des applications : comment faire pour que le domaine soit ON la classe de tous les ordinaux ? En fait, il nous suffit de passer par la généralisation des applications dont nous avons déjà tant parlée : les assertions fonctionnelles. Ainsi, nous allons simplement étendre la définition précédente aux assertions fonctionnelles.

Définition 13 (Assertion fonctionnelle inductive)

Soient H et F deux assertions fonctionnelles.
On dit que F est **H-inductive** si et seulement si :

1. $\mathrm{dom}(F) \in ON$ ou $\mathrm{dom}(F) = ON$.
2. Pour tout $\beta \in \mathrm{dom}(F)$, on a $F_{|\beta} \in \mathrm{dom}(H)$ et $F(\beta) = H(F_{|\beta})$.

Le seul véritable cas nouveau est celui pour lequel $\mathrm{dom}(F) = ON$. En effet, si $\mathrm{dom}(F) \in ON$ alors $\mathrm{dom}(F)$ est un ordinal donc F est alors associée à une application et donc on confond sans problème les deux. On peut cependant se demander pourquoi le seul cas nouveau que l'on rajoute est celui où $\mathrm{dom}(F) = ON$. Au fond, tant qu'on est à généraliser, on pourrait demander plus largement $\mathrm{dom}(F) \subseteq ON$, non ? La réponse nous a déjà été fournie par la proposition 11 page 32 : ON est en quelque sorte la seule classe propre légitime à généraliser les ordinaux.

On peut remarquer la chose suivante : restreindre une assertion fonctionnelle (ou donc une application) qui est H-inductive à un ordinal de son domaine va nécessairement produire une application qui est encore H-inductive. En effet : *qui peut le plus peut le moins*.

Proposition 31 (Restriction d'une application inductive)

Soient H et F deux assertions fonctionnelles.
Si F est H-inductive alors pour tout $\beta \in \mathrm{dom}(F)$, l'application $F_{|\beta}$ est H-inductive.

Démonstration

Supposons que F est H-inductive.

Alors on a $\mathrm{dom}(F) \in ON$ ou $\mathrm{dom}(F) = ON$ par définition.

On a donc $\mathrm{dom}(F) \subseteq ON$ d'après la proposition 7 page 23.

Soit $\beta \in \mathrm{dom}(F)$.

Comme $\mathrm{dom}(F) \subseteq ON$, on en déduit que $\mathrm{dom}(F_{|\beta}) = \beta$ est un ordinal.

Soit $\gamma \in \beta$.

On a alors $\gamma \in \beta \in \mathrm{dom}(F)$ donc $\gamma \in \mathrm{dom}(F)$ par transitivité :

Si $\mathrm{dom}(F) \in ON$ alors c'est la transitivité de $\in$ sur ON qu'on applique.

Si $\mathrm{dom}(F) = ON$, c'est la transitivité de ON qu'on applique.

Or F est H-inductive par hypothèse.

Donc $F_{|\gamma}$ est dans le domaine de H et $F(\gamma) = H(F_{|\gamma})$.

Or $\gamma \in \beta$ donc $\gamma \subseteq \beta$ par transitivité.

Donc $(F_{|\beta})_{|\gamma} = F_{|\gamma}$ donc en particulier $(F_{|\beta})_{|\gamma}$ est dans le domaine de H.

De plus $F_{|\beta}(\gamma) = F(\gamma) = H(F_{|\gamma}) = H\Big((F_{|\beta})_{|\gamma}\Big)$.

Donc pour tout $\gamma \in \beta$, $(F_{|\beta})_{|\gamma}$ est dans le domaine de H et $F_{|\beta}(\gamma) = H\Big((F_{|\beta})_{|\gamma}\Big)$.

Donc $F_{|\beta}$ est H-inductive.

Donc $\boxed{\text{pour tout } \beta \in \mathrm{dom}(F),\ F_{|\beta} \text{ est } H\text{-inductive}}$.

CQFD.

Pour pouvoir dire qu'on souhaite définir une assertion fonctionnelle F par la relation

$$\forall \beta \in \mathrm{dom}(F), F(\beta) = H(F_{|\beta})$$

il faut s'assurer qu'une telle relation ne convient pas pour plusieurs assertions fonctionnelles : c'est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 32 (Au plus une application inductive)

Soit H une assertion fonctionnelle.
Soit C une classe telle que $C \in ON$ ou $C = ON$.
Il existe au plus une assertion fonctionnelle de domaine C qui est H-inductive.

Démonstration

Soient F et G deux assertions fonctionnelles qui sont toutes deux H-inductives et telles que $\mathrm{dom}(F) = C = \mathrm{dom}(F)$.

Montrons que $F = G$ par l'absurde.

Supposons par l'absurde que $F \neq G$.

Comme elles ont le même domaine C, il existe $\alpha \in C$ tel que $F(\alpha) \neq G(\alpha)$.

Considérons alors la classe $X := \{\beta \in C \mid F(\beta) \neq G(\beta)\}$.

Par définition on a $\alpha \in X$ donc X est non vide.

On a aussi $X \subseteq C$ par définition de X.

Or on a $(C \in ON$ ou $C = ON)$ par définition de C, donc $C \subseteq ON$ et donc $X \subseteq ON$.

Ainsi X est classe non vide telle que $X \subseteq ON$.

Donc X possède un ordinal minimum ξ d'après la proposition 10 page 30.

Remarquons que l'on a $\xi \in X$ et $X \subseteq C$ donc $\xi \in C$ par définition de l'inclusion.

Soit $\gamma \in \xi$.

On a dit que $\xi \in C$ donc $\gamma \in C$ par transitivité :

Si $C \in ON$ alors c'est la transitivité de $\in$ sur ON qu'on applique.

Si $C = ON$, c'est la transitivité de ON qu'on applique.

On a aussi $\gamma < \xi$ par définition de $<$.

Comme ξ est le minimum de X, on a donc $\gamma \notin X$.

Ainsi on a $\gamma \notin X$ alors que $\gamma \in C$.

Nécessairement on a donc $F(\gamma) = G(\gamma)$ par définition de X.

Donc $\forall \gamma \in \xi, F(\gamma) = G(\gamma)$ et donc $F_{|\xi} = G_{|\xi}$.

Or F et G sont H-inductives donc $F(\xi) = H(F_{|\xi}) = H(G_{|\xi}) = G(\xi)$.

C'est absurde puisque $\xi \in X$ donc $F(\xi) \neq G(\xi)$.

Donc par l'absurde on a $F = G$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

CQFD.

Remarque :
En particulier si F est H-inductive, alors pour tout $\alpha \in \mathrm{dom}(F)$, l'application $F_{|\alpha}$ est l'unique application H-inductive de domaine α.

Nous venons de voir qu'à domaine fixé, il existe au plus une assertion fonctionnelle qui est H-inductive. Mais en existe-t-il au moins une ? La réponse est oui, mais à une certaine condition sur H. En fait l'idée est de construire notre assertion fonctionnelle de proche en proche, donc par récurrence (plus précisément par récursion), puisque la valeur en un ordinal est fonction des valeurs en les ordinaux précédents.

Imaginons que l'on ait défini notre application/assertion fonctionnelle jusqu'à l'ordinal α. Cela revient à dire que nous avons à notre disposition une application $v : \alpha \longrightarrow ?$ qui est H-inductive. Pour pouvoir poursuivre à nouveau la construction, et faire en sorte que v ne soit en fait que la restriction à α de notre assertion fonctionnelle finale, il faut simplement s'assurer que v elle-même est dans le domaine de H, et non pas seulement ses restrictions. C'est pour cela que dans le théorème suivant, on a rajouté cette condition.

Théorème 6 (Principe de récursion transfinie)

Soit H une assertion fonctionnelle.
Soit C une classe telle que $C \in ON$ ou $C = ON$.
Supposons que pour tout $\alpha \in C$ et toute application $v : \alpha \longrightarrow ?$ on a

si v est H-inductive alors v est dans le domaine de H

Alors il existe une unique assertion fonctionnelle de domaine C qui est H-inductive.

Démonstration

Unicité

C'est exactement l'objet de la proposition 32 page 79.

Existence

Considérons T la classe des $\alpha \in C$ tel qu'il existe une application $\alpha \longrightarrow ?$ qui est H-inductive et dans le domaine de H. Une telle application est alors unique d'après la proposition 32 page 79. Ainsi T représente en quelque sorte le domaine maximal auquel on peut construire notre assertion fonctionnelle. Notre but va donc simplement être de montrer que $T = C$: on peut en fait aller jusqu'au bout.

Voici les différentes étapes de notre preuve :

1. On montre que comme pour C, on a $T \in ON$ ou $T = ON$
   Autrement dit T est un ordinal ou est la généralisation d'un ordinal.
   On s'assure ainsi que le domaine est pertinent pour une construction par récursion.
   (a) Cela passe d'abord par montrer que T est transitive.
   (b) Puis on conclut avec le fait que $(T, \in)$ est strictement bien ordonné.
2. On construit l'assertion fonctionnelle $U_T : T \longrightarrow ?$ qui est H-inductive.
   La construction va se faire par récursion : c'est justement notre objectif.
3. On montre que l'existence de U_T implique nécessairement que $T = C$.

1.(a) Montrons que T est transitive.

Soit $\alpha \in T$.

Comme $\alpha \in T$, par définition de T il existe une application $u : \alpha \longrightarrow ?$ qui est H-inductive et dans le domaine de H.

Soit $\beta \in \alpha$.

Comme u est H-inductive, $u_{|\beta}$ est dans le domaine de H.

De plus $u_{|\beta} : \beta \longrightarrow ?$ est H-inductive d'après la proposition 31 page 78.

Ainsi il existe une application $\beta \longrightarrow ?$ qui est H-inductive et dans le domaine de H. Pour prouver que $\beta \in T$, il reste donc à prouver que $\beta \in C$.

Or on a $\beta \in \alpha \in C$ donc $\beta \in C$ par transitivité.

Si $C \in ON$ alors c'est la transitivité de $\in$ sur ON qu'on applique.

Si $C = ON$, c'est la transitivité de ON qu'on applique.

Donc $\beta \in T$ par définition de T.

Donc pour tout $\beta \in \alpha$, on a $\beta \in T$, et donc $\alpha \subseteq T$ par définition de l'inclusion.

Ainsi $\forall \alpha \in T, \alpha \subseteq T$ donc $\boxed{T \text{ est transitive}}$.

1.(b) Montrons que $T \in ON$ ou $T = ON$.

On a $(C \in ON$ ou $C = ON)$ donc $C \subseteq ON$.

Comme $T \subseteq C$ on a donc $T \subseteq ON$.

Ainsi tous les éléments de T sont des ordinaux.

Donc $(T, \in)$ est strictement bien ordonnée d'après le théorème 1 page 27.

Or on vient de montrer que T est transitive.

- Si T est issue d'un ensemble alors T est un ordinal par définition d'être un ordinal.
- Si T est une classe propre, alors $T = ON$ d'après la proposition 11 page 32.

On a donc nécessairement $\boxed{T \in ON \text{ ou } T = ON}$.

2. Pour tout $\alpha \in T$, posons u_α l'unique application $\alpha \longrightarrow ?$ qui est H-inductive et dans le domaine de H. Construisons maintenant U_T l'unique assertion fonctionnelle $T \longrightarrow ?$ qui est H-inductive.

Pour cela, on peut raisonner par analyse synthèse : imaginons qu'on ait déjà à notre disposition l'unique assertion fonctionnelle $U_T : T \longrightarrow ?$ qui est H-inductive.

Le fait qu'elle est H-inductive signifie en particulier que pour tout $\alpha \in T$, on a

$$U_T(\alpha) = H\Big((U_T)_{|\alpha}\Big)$$

Autrement dit, pour connaître la valeur de $U_T(\alpha)$, il nous faut connaître $(U_T)_{|\alpha}$.

Mais comme U_T est H-inductive, on a forcément que $(U_T)_{|\alpha} : \alpha \longrightarrow ?$ est elle-même H-inductive d'après la proposition 31 page 78. Or justement on sait qu'une telle application est nécessairement u_α par définition de u_α. Autrement dit, on a nécessairement $(U_T)_{|\alpha} = u_\alpha$ et donc on a nécessairement $U_T(\alpha) = H(u_\alpha)$. Ainsi, notre candidat pour U_T est donné par

$$U_T := \left(\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & ? \\ \alpha & \longmapsto & H(u_\alpha) \end{array} \right)$$

Montrons que U_T ainsi définie est H-inductive.
On sait déjà que $\mathrm{dom}(U_T) = T$ est ou bien un ordinal ou bien ON toute entière.

Soit $\alpha \in T$.

Montrons que $(U_T)_{|\alpha} = u_\alpha$.

Soit $\beta \in \alpha$.

► On a alors $\beta \in \alpha \in T$ donc $\beta \in T$ par transitivité.

Si $T \in ON$ alors c'est la transitivité de $\in$ sur ON qu'on applique.

Si $T = ON$, c'est la transitivité de ON qu'on applique.

On a $(U_T)_{|\alpha}(\beta) = U_T(\beta)$ par définition d'une restriction.
Or $U_T(\beta) = H(u_\beta)$ par définition de U_T, donc $(U_T)_{|\alpha}(\beta) = H(u_\beta)$.

► D'un autre côté, on sait que u_α est par définition H-inductive.
Donc $u_\alpha(\beta) = H\Big((u_\alpha)_{|\beta}\Big)$ par définition de la H-inductivité.

► Enfin $(u_\alpha)_{|\beta}$ est H-inductive d'après la proposition 31 page 78.
Donc $(u_\alpha)_{|\beta} = u_\beta$ par unicité de l'application de domaine β qui est H-inductive.

On a donc montré que $\begin{cases} (U_T)_{|\alpha}(\beta) = H(u_\beta) \\ u_\alpha(\beta) = H\Big((u_\alpha)_{|\beta}\Big) \\ (u_\alpha)_{|\beta} = u_\beta \end{cases}$

Les deux dernières lignes nous disent que $u_\alpha(\beta) = H(u_\beta)$.
Combiné à la première ligne, on en déduit que $(U_T)_{|\alpha}(\beta) = u_\alpha(\beta)$.

Ainsi $\forall \beta \in \alpha, (U_T)_{|\alpha}(\beta) = u_\alpha(\beta)$.
Or $(U_T)_{|\alpha}$ et u_α ont le même domaine α donc $(U_T)_{|\alpha} = u_\alpha$.
Or par définitions u_α est dans le domaine de H et $U_T(\alpha) = H(u_\alpha)$.

Donc $(U_T)_{|\alpha}$ est dans le domaine de H et $U_T(\alpha) = H\Big((U_T)_{|\alpha}\Big)$.

Donc pour tout $\alpha \in T$, $(U_T)_{|\alpha}$ est dans le domaine de H et $U_T(\alpha) = H\Big((U_T)_{|\alpha}\Big)$.

Donc $\boxed{U_T \text{ est } H\text{-inductive}}$.

3. Enfin, montrons que $T = C$ pour conclure.

Supposons par l'absurde que $T \neq C$.

Par définition de T on a $T \subseteq C$ donc on a $T \subsetneq C$.

On a dit que $(T \in ON$ ou $T = ON)$ et $(C \in ON$ ou $C = ON)$.

- Si $T \in ON$ et $C \in ON$ alors $T \in C$ d'après la prop. 9 p. 25.
- Si $T \in ON$ et $C = ON$ alors immédiatement $T \in C$.
- Si $T = ON$ et $C \in ON$ c'est absurde puisque $T \subsetneq C$.
- Si $T = ON$ et $C = ON$ c'est absurde puisque $T \subsetneq C$.

On a donc nécessairement $T \in C$.

Comme $(C \in ON$ ou $C = ON)$ on a $C \subseteq ON$.

On a donc $T \in ON$ par définition de l'inclusion.

Donc T est un ordinal donc en particulier est un ensemble.

Donc U_T est une assertion fonctionnelle de domaine un ensemble.

Donc U_T est une application.

Ainsi U_T est une application H-inductive dont le domaine appartient à C.

Donc U_T est dans le domaine de H par hypothèse du théorème.

Ainsi T est un élément de C et le domaine d'une application H-inductive qui est elle-même dans le domaine de H.

Donc $T \in T$ par définition de T.

C'est absurde par antiréflexivité de $\in$ sur ON.

On a donc montré par l'absurde que $T = C$.

Or U_T est une assertion fonctionnelle de domaine T qui est H-inductive.

Donc $\boxed{U_T \text{ est une assertion fonctionnelle de domaine } C \text{ qui est } H\text{-inductive}}$.

CQFD.

Exemple :

Reprenons les exemples du début et éclairons-les de ce que l'on vient d'apprendre.

1. Si l'on souhaite définir proprement l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

il suffit de considérer l'assertion fonctionnelle H définie pour toute application f

telle que $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} H(f) := 1 & \text{si } \mathrm{dom}(f) = 0 \\ H(f) := 3f(n) & \text{si } \mathrm{dom}(f) = n+1 \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

En effet, on considère alors $C = \mathbb{N}$, qui vérifie bien $C \in ON$ d'après la proposition 19 page 50. Prenons alors $n \in \mathbb{N}$ et $f : n \longrightarrow ?$ quelconque : par définition de H, f est nécessairement dans le domaine de H. Cela reste donc vrai si en particulier f est H-inductive. Ainsi H et C vérifient les hypothèses du théorème précédent : il existe une unique suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est H-inductive. Cette suite vérifie alors

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = H(u_{|0}) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u(n+1) = H(u_{|n+1}) = 3u(n) = 3u_n \end{cases}$$

2. Si l'on souhaite définir proprement l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

il suffit de considérer l'assertion fonctionnelle H définie pour toute application f telle que $\mathrm{dom}(f) \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} H(f) := 1 & \text{si } \mathrm{dom}(f) = 0 \\ H(f) := 1 & \text{si } \mathrm{dom}(f) = 1 \\ H(f) := f(n+1) + f(n) & \text{si } \mathrm{dom}(f) = n+2 \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On considère ici encore $C = \mathbb{N}$. Pour les mêmes raisons que l'exemple précédent, H et C vérifient les hypothèses du théorème précédent : il existe une unique suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est H-inductive. Cette suite vérifie alors

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = H(u_{|0}) = 1 \\ u_1 = u(1) = H(u_{|1}) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u(n+2) = H(u_{|n+2}) = u(n+1) + u(n) = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

C'est la célèbre **suite de Fibonacci**.

Pour la petite histoire

Leonardo Fibonacci (vers 1170 – vers 1250), de son vrai nom Léonard De Pise, est le fils d'un commerçant toscan. Ce dernier émigre avec toute sa famille à Béjaïa dans l'actuelle Algérie et Leonardo est encouragé à maîtriser les comptes pour l'aider. Par la suite, Fibonacci parcourt l'Égypte, la Sicile, la Grèce et la Syrie. Il entre ainsi en contact avec les mathématiques arabes et grecques.

Convaincu de la supériorité du système d'écriture des nombres par les chiffres arabes, il écrit *Liber abaci* à son retour en Europe en 1202, ce qui les introduira en occident. Dans cet ouvrage, il explique la notation de position, les méthodes de calcul des opérations élémentaires, et des méthodes de résolutions d'équations.

Si la suite de Fibonacci était déjà connue au moins depuis 200 avant JC en Inde, c'est Fibonacci qui la rendra célèbre en occident dans *Liber abaci*.

6.3 Suites

Les exemples précédents parlent de suites, mais nous n'avons pas encore eu l'occasion de définir proprement ce que c'est. Intuitivement, une suite est une liste d'objets mathématiques, un pour chaque entier naturel. Autrement dit, c'est simplement une application $\mathbb{N} \longrightarrow ?$

Définition 14 (Suite)

On appelle **suite** toute application $u : \mathbb{N} \longrightarrow ?$.
Pour tout ensemble E, on appelle suite **à valeurs dans** E toute suite $u : \mathbb{N} \longrightarrow E$.

Remarque :

1. Nous avons vu dans le livre précédent que les familles ne sont qu'un autre nom donné aux applications, mais qu'il est associé à d'autres notations et usages. Les suites rentrent plutôt dans le cadre des familles : c'est pourquoi une suite u est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. L'ensemble des suites à valeurs dans E étant l'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N} \longrightarrow E)$ des applications de $\mathbb{N}$ dans E, il est aussi souvent noté $E^{\mathbb{N}}$.
3. Pour la fin de ce chapitre, notons $n+1$ à la place de $S(n)$, puisque c'est de toute manière l'intuition qui se cache derrière $S(n)$. Bien heureusement, au prochain chapitre nous définirons proprement l'addition, et nous verrons que l'on a bien $n+1 = S(n)$.

Dans les exemples précédents nous avons défini des suites par récurrence, plus précisément par récursion. Pour cela, nous avons invoqué une assertion fonctionnelle particulière et utilisé le théorème 6 page 80. Nous aimerions ne plus avoir à passer par une assertion fonctionnelle à chaque fois et pouvoir directement définir la suite en question. La proposition suivante se propose simplement de le faire une bonne fois pour toute.

Proposition 33 (Suites définies par récurrence)

Soient E un ensemble, $a \in E$ et $f : E \longrightarrow E$.
Alors il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E telle que

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Démonstration

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $g : m \longrightarrow E$, posons

$$\begin{cases} H(g) = a & \text{si } m = 0 \\ H(g) = f\big(g(n)\big) & \text{si } m = n+1 \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On vient ainsi de définir une assertion fonctionnelle H. Par définition, un ensemble g est dans le domaine de H si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $g : m \longrightarrow E$.

Nous allons utiliser le théorème 6 page 80 avec $C := \mathbb{N}$. On sait déjà que C est un ordinal d'après la proposition 19 page 50, donc vérifie $C \in ON$. Il reste donc à montrer que H et C vérifie l'hypothèse du théorème.

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $g : m \longrightarrow ?$ qui est H-inductive.

Montrons que $g : m \longrightarrow E$, c'est-à-dire $\mathrm{im}(g) \subseteq E$.

Soit $y \in \mathrm{im}(g)$.

Par définition il existe $n \in \mathrm{dom}(g)$ tel que $y = g(n)$.

Or g est H-inductive par définition.

On a donc $g_{|n} \in \mathrm{dom}(H)$ et $y = g(n) = H(g_{|n})$.

Remarquons deux choses : tout d'abord on a $g_{|n} : n \longrightarrow ?$ mais on vient de voir que $g_{|n} \in \mathrm{dom}(H)$ donc $g_{|n} : n \longrightarrow E$ par définition de H. Or $f : E \longrightarrow E$ donc pour tout $p < n$, on a $g_{|n}(p) \in \mathrm{dom}(f)$, si bien que l'on peut tout à fait parler de $f\big(g_{|n}(p)\big)$.

Deuxièmement, $n \in \mathrm{dom}(g)$ et $g : m \longrightarrow ?$ donc $n \in m$, c'est-à-dire $n < m$

par définition de $<$. Comme $m \in \mathbb{N}$, on a $n \in \mathbb{N}$ d'après la proposition 16 page 45. Donc n est ou bien 0, ou bien le successeur d'un entier naturel p par définition d'être un entier naturel.

- Plaçons-nous dans le cas où $n = 0$.
  Alors $\mathrm{dom}(g_{|n}) = 0$ donc $y = H(g_{|0}) = a$ par définition de H.
  Comme $a \in E$ par définition, on a $y \in E$.
- Plaçons-nous dans le cas où $n = p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{dom}(g_{|n}) = p+1$ donc $y = H(g_{|n}) = f\big(g_{|n}(p)\big)$ par définition de H. Or par définition on a $f : E \longrightarrow E$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq E$ et donc $y \in E$.

Dans les deux cas on a $y \in E$.

Ainsi on a $\mathrm{im}(g) \subseteq E$ par définition de l'inclusion, et donc $g : m \longrightarrow E$.

Donc pour tout $m \in \mathbb{N}$ et toute application $g : m \longrightarrow ?$, si g est H-inductive alors $g : m \longrightarrow E$ et donc g est dans le domaine de H.

Ainsi $C = \mathbb{N}$ et H vérifient les hypothèses du théorème 6 page 80.
Il existe donc une unique application $u : \mathbb{N} \longrightarrow ?$ qui est H-inductive.
En particulier u vérifie

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = H(u_{|0}) = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u(n+1) = H(u_{|n+1}) = f\big(u(n)\big) = f(u_n) \end{cases}$$

CQFD.

Remarque :
Dans la proposition précédente, nous avons explicité le cas où la valeur de u en un entier ne dépend que de la valeur de u à l'entier précédent, nous permettant de ne plus avoir à passer par une assertion fonctionnelle à chaque fois qu'une suite est définie par une récurrence. Cependant, nous n'avons pas décrit le cas où la valeur de u en un entier dépend des valeurs de u aux deux, trois, voire tous les entiers précédents.

Nous n'allons évidemment pas le faire : tenter de traiter tous les cas possibles reviendrait précisément à réénoncer le théorème 6 page 80. Autrement dit, nous allons désormais simplement considérer que le lecteur comprend comment le faire en toute généralité. Nous avons par exemple déjà donné la recette de cuisine pour la suite de Fibonacci.

Remarquons que cela nous permet par exemple de définir des suites vérifiant $u_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ (en ayant fixée la valeur en 0) puisque l'on a dit qu'on peut utiliser toutes les valeurs aux entiers précédents !

En tant qu'ordinal, $\mathbb{N} = \omega$ est muni d'une relation d'ordre. À ce titre, pour tout ensemble ordonné E, on a déjà donné du sens dans le livre précédent à la notion de suite (strictement) croissante, (strictement) décroissante et constante. Rajoutons une petite dernière : celle de stationnarité.

Définition 15 (Suite stationnaire)

Soient E un ensemble et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **stationnaire** si et seulement s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$$

Remarque :
Une suite constante est un cas particulier de suite stationnaire : elle l'est simplement depuis le début, c'est-à-dire qu'on peut prendre $n_0 = 0$.

La notion de successeurs chez les ordinaux et donc chez les entiers naturels offre une caractérisation intéressante de ces propriétés dont on a parlé juste avant : il suffit qu'elles soient vérifié entre un entier et le suivant pour se propager en fait à tous les entiers. C'est l'objet de la proposition suivante. On utilise ici la notation $n+1$ pour désigner $S(n)$, bien que nous verrons qu'elle coïncide bien avec l'addition quand nous l'aurons définie dans le prochain chapitre.

Proposition 34 (Suites croissantes, décroissantes, constantes)

Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E.
Soit $\prec$ l'ordre strict associé à $\preccurlyeq$.

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preccurlyeq u_{n+1}$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \prec u_{n+1}$.
3. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preccurlyeq u_n$.
4. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \prec u_n$.
5. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}$.
6. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire si et seulement si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$.

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $n < n+1$ d'après la proposition 14 page 40.

En particulier on a $n \leq n+1$.

On a donc $u_n \preccurlyeq u_{n+1}$ par croissance de u.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preccurlyeq u_{n+1}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preccurlyeq u_{n+1}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ l'assertion $m \leq n \implies u_m \preccurlyeq u_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$.

Initialisation

- Plaçons-nous dans le cas où $m = 0$.
  Dans ce cas-là on a $u_m = u_0$ donc $u_m \preccurlyeq u_0$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.
  L'implication $m \leq 0 \implies u_m \preccurlyeq u_0$ est donc vraie.
- Plaçons-nous dans le cas où $m \neq 0$.
  L'implication $m \leq 0 \implies u_m \preccurlyeq u_0$ est alors vraie car sa prémisse est fausse.

Dans les deux cas, on a $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.

Supposons que $m \leq n + 1$.

On a donc $m < n + 1$ ou $m = n + 1$.

- Plaçons-nous dans le cas où $m < n + 1$.
  On a alors $m \leq n$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $u_m \preccurlyeq u_n$ par $P(n)$.
  Or on a $u_n \preccurlyeq u_{n+1}$ par hypothèse.
  On a donc $u_m \preccurlyeq u_{n+1}$ par transitivité de $\preccurlyeq$.
- Plaçons-nous dans le cas où $m = n + 1$.
  On a alors $u_m = u_{n+1}$ donc $u_m \preccurlyeq u_{n+1}$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

Dans les deux cas on a $u_m \preccurlyeq u_{n+1}$.

Donc si $m \leq n + 1$ alors $u_m \preccurlyeq u_{n+1}$.

On a donc $P(n + 1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) \implies P(n + 1)$.

D'après le principe d'induction sur les entiers naturels, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n \Rightarrow u_m \preccurlyeq u_n)$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n \Rightarrow u_m \preccurlyeq u_n)$.

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

2. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $n < n+1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $u_n \prec u_{n+1}$ par stricte croissance de u.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \prec u_{n+1}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \prec u_{n+1}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ l'assertion $m < n \implies u_m \prec u_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$.

Initialisation

L'implication $m < 0 \implies u_m \prec u_0$ est vraie car sa prémisse est fausse.

On a donc $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on a $P(n)$.

Supposons que $m < n+1$.

On a donc $m \leq n$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $m < n$ ou $m = n$.

- Plaçons-nous dans le cas où $m < n$.
  On a alors $u_m \prec u_n$ d'après $P(n)$.
  Or on a $u_n \prec u_{n+1}$ par hypothèse.
  On a donc $u_m \prec u_{n+1}$ par transitivité de $\prec$.

- Plaçons-nous dans le cas où $m = n$.
  On a donc $u_m = u_n$.
  Or on a $u_n \prec u_{n+1}$ par hypothèse.
  On a donc $u_m \prec u_{n+1}$.

Dans les deux cas on a $u_m \prec u_{n+1}$.

Donc si $m < n+1$ alors $u_m \prec u_{n+1}$.

On a donc $P(n+1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n) \implies P(n+1)$.

D'après le principe d'induction sur les entiers naturels, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Autrement dit $\forall n \in \mathbb{N}, (m < n \Rightarrow u_m \prec u_n)$.

Donc $\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m < n \Rightarrow u_m \prec u_n)$.
Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

3. Considérons la relation $\succcurlyeq$ symétrique de $\preccurlyeq$, c'est-à-dire que pour tout x et y dans E, on a

$$x \succcurlyeq y \iff y \preccurlyeq x$$

On peut montrer que $\succcurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.
On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante pour } \preccurlyeq &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n \Rightarrow u_n \preccurlyeq u_m) \\
&\iff \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m \leq n \Rightarrow u_m \succcurlyeq u_n) \\
&\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante pour } \succcurlyeq \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \succcurlyeq u_{n+1} \text{ d'après 1.} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preccurlyeq u_n
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preccurlyeq u_n}$.

4. Considérons la relation $\succ$ symétrique de $\prec$, c'est-à-dire que pour tout x et y dans E, on a

$$x \succ y \iff y \prec x$$

On peut montrer que $\succ$ est une relation d'ordre strict sur E.
On a alors les équivalences :

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante pour } \prec &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m < n \Rightarrow u_n \prec u_m) \\
&\iff \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (m < n \Rightarrow u_m \succ u_n) \\
&\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante pour } \succ \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n \succ u_{n+1} \text{ d'après 2.} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \prec u_n
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \prec u_n}$.

5. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante} &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, u_n = u_m \\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (n \leq m \Rightarrow u_n = u_m)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \Big(n \leq m \Rightarrow (u_n \preccurlyeq u_m \text{ et } u_m \preccurlyeq u_n)\Big)\\
&\iff (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et décroissante}\\
&\iff (\forall n \in \mathbb{N}, u_n \preccurlyeq u_{n+1}) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \preccurlyeq u_n) \text{ d'après 1. et 3.}\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, (u_n \preccurlyeq u_{n+1} \text{ et } u_{n+1} \preccurlyeq u_n)\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1} \text{ par antisymétrie et réflexivité de } \preccurlyeq
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est constante si et seulement si } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{n+1}}$.

6. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Soit $n \geq n_0$.

On a donc $u_{n_0} = u_n$ par hypothèse.

Comme $n_0 \leq n$ on a aussi $n_0 < n + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

En particulier $n_0 \leq n + 1$ donc $u_{n_0} = u_{n+1}$ par hypothèse.

On a donc $u_n = u_{n+1}$.

Donc $\boxed{\forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n+1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $P(n)$ l'assertion $n_0 \leq n \implies u_{n_0} = u_n$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $P(n)$.

Initialisation

Supposons que $n_0 \leq 0$.

On a donc $n_0 \subseteq 0$ par définition de $\leq$.

On a donc $n_0 = 0$ puisque par définition $0 = \varnothing$.

Donc $u_{n_0} = u_0$.

On a donc $n_0 \leq 0 \implies u_{n_0} = u_0$, c'est-à-dire $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$.

Supposons que $n_0 \leq n + 1$.

On a donc $n_0 < n + 1$ ou $n_0 = n + 1$.

- Plaçons-nous dans le cas où $n_0 < n + 1$.

  On a donc $n_0 \leq n$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $u_{n_0} = u_n$ d'après $P(n)$.

Or on a $u_n = u_{n+1}$ par hypothèse.

Donc $u_{n_0} = u_{n+1}$.

- Plaçons-nous dans le cas où $n_0 = n + 1$.

  On donc $u_{n_0} = u_{n+1}$.

Dans les deux cas, on a donc $u_{n_0} = u_{n+1}$.

Donc si $n_0 \leq n + 1$ alors $u_{n_0} = u_{n+1}$, donc on a $P(n + 1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n + 1)$.

D'après le principe d'induction chez les entiers, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Autrement dit $\forall n \in \mathbb{N}, (n_0 \leq n \Rightarrow u_n = u_{n_0})$.

Dit encore autrement, $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire}}$.

CQFD.

Observons à présent un phénomène qui peut parfois se produire : pour certains ensembles ordonnés, une suite décroissante est forcément stationnaire. Autrement dit, c'est comme si toute suite décroissante était forcée de s'arrêter à un moment. On parle de la **condition de la chaîne descendante**.

Définition 16 (Condition de la chaîne descendante)

Soit E un ensemble ordonné.
On dit que E vérifie la **condition de la chaîne descendante** si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

En fait, nous allons montrer que les ensembles ordonnés qui vérifient la condition de la chaîne descendante sont exactement les ensembles munis d'un ordre bien fondé, c'est-à-dire les ensembles pour lesquels chaque partie non vide admet un élément minimal.

Proposition 35 (Cond. de la chaîne descendante et bon ordre)

Soit E un ensemble ordonné.

Ordre bien fondé
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est muni d'un ordre bien fondé.
2. E vérifie la condition de la chaîne descendante.

Bon ordre
Les assertions suivantes sont équivalentes :

3. E est bien ordonné.
4. E est totalement ordonné et vérifie la condition de la chaîne descendante.

Démonstration

Notons $\preccurlyeq$ l'ordre sur E et $\prec$ l'ordre strict.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que $\preccurlyeq$ est bien fondé.

Montrons que E vérifie la condition de la chaîne descendante.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à valeurs dans E.

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Considérons $X := \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, qui est donc une partie non vide de E.

Or $\preccurlyeq$ est bien fondé par hypothèse.

Donc X admet un élément minimal x.

Comme $x \in X$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_{n_0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Par décroissance de la suite on a $u_n \preccurlyeq u_{n_0}$ donc $u_n \preccurlyeq x$.

Or x est un élément minimal de X et $u_n \in X$ par définition de X.

On a donc $u_n = x$ par définition de la minimalité, et donc $u_n = u_{n_0}$.

Ainsi $\forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$ et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Donc toute suite décroissante de E est stationnaire.

Autrement dit, $\boxed{E \text{ vérifie la condition de la chaîne descendante}}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que E vérifie la condition de la chaîne descendante.

Supposons par l'absurde que $\preccurlyeq$ n'est pas bien fondé.

Il existe alors X une partie non vide de E qui n'admet pas d'élément minimal.

Pour tout $x \in X$, posons $X_{\prec x} := \{y \in X \mid y \prec x\}$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in X$ tel que $X_{\prec x} = \varnothing$.

Alors pour tout $y \in X$, on a $y \notin X_{\prec x}$.

Autrement dit pour tout $y \in X$ on n'a pas $y \prec x$.

Montrons que x est alors un élément minimal de X.

Soit $y \in X$ tel que $y \preccurlyeq x$.

On a alors $y \prec x$ ou $y = x$.

Or on a dit que justement on n'a pas $y \prec x$.

On a donc $y = x$.

Ainsi pour tout $y \in X$, on a $y \preccurlyeq x \implies y = x$.

Donc x est un élément minimal de X.

C'est absurde car on a fait l'hypothèse que X n'admet pas d'élément minimal.

Par l'absurde, on vient de montrer que pour tout $x \in X$, on a $X_{\prec x} \neq \varnothing$.

D'après l'**axiome du choix**, il existe une application $g : \mathscr{P}(X)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow ?$ telle que $\forall A \in \mathscr{P}(X)\backslash\{\varnothing\}, g(A) \in A$.
En particulier pour tout $x \in X$, on a $g(X_{\prec x}) \in X_{\prec x}$ donc $g(X_{\prec x}) \prec x$.
Pour tout $x \in X$, posons $f(x) := g(X_{\prec x})$ de sorte que $f(x) \prec x$.

Par définition X est non vide : il existe $a \in X$.
Considérons alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite à valeurs dans X définie par récurrence par :

$$\begin{cases} u_0 := a \\ u_{n+1} := f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Puisque $X \subseteq E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans E.
Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \prec u_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
En particulier $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Or E vérifie la condition de la chaîne descendante, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
C'est absurde puisqu'on vient de dire qu'elle est strictement décroissante.

Par l'absurde, on vient de montrer que toute partie non vide de E admet un élément minimal.
Donc $\boxed{\preccurlyeq \text{ est bien fondé}}$.

$\boxed{3 \Leftrightarrow 4}$

On a les équivalences suivantes :

$$\preccurlyeq \text{ est un bon ordre} \underset{3\text{ p. }15}{\iff} \begin{cases} \preccurlyeq \text{ est bien fondé} \\ \preccurlyeq \text{ est total sur } E \end{cases}$$

$$\underset{1\text{ et }2}{\iff} \begin{cases} E \text{ vérifie la condition de la chaîne descendante} \\ \preccurlyeq \text{ est total sur } E \end{cases}$$

CQFD.

Pour la petite histoire

Emmy Noether (23 mars 1882 – 14 avril 1935) est une mathématicienne allemande spécialiste d'algèbre abstraite et de physique théorique. Elle a révolutionné les théories des anneaux, des corps et des algèbres, notamment en développant la notion d'idéal. En physique, le théorème de Noether explique le lien fondamental entre la symétrie et les lois de conservation et est considéré comme aussi important que la théorie de la relativité.

Noether introduit la condition de la chaîne descendante dans son article de 1921 *Idealtheorie in Ringbereichen* mais précise que ce concept avait déjà été introduit précédemment par Dedekind (dans le cas des corps de nombres) et par Lasker (dans le cas des polynômes). Elle est la première à l'introduire dans un cadre aussi général que celui de son article : celui des anneaux commutatifs dont chaque idéal est finiment engendré.

Bien souvent, on souhaite itérer une application, c'est-à-dire considérer la suite x, $f(x)$, $f\big(f(x)\big)$, $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$, et ainsi de suite : on prend un élément, on le donne à manger à f, on redonne le résultat à manger à f, et ainsi de suite autant de fois que nécessaire. Cela conduit à la définition suivante, qui est donc tout naturellement récursive.

Définition 17 (Itérées d'une application)

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$.
On pose alors par récursion :

$$\begin{cases} f^0 := \mathrm{id}_E \\ f^{n+1} := f^n \circ f \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f^n est la $n^{\text{ème}}$ **itérée** de f.

Exemple :

- On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{id}_E^n = \mathrm{id}_E$.
- On a $f^1 = f^{0+1} = f^0 \circ f = \mathrm{id}_E \circ f = f$.
- On a $f^2 = f^{1+1} = f^1 \circ f = f \circ f$.

Proposition 36 (Itérées d'une application injective)

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$.
Si f est injective alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, f^n est injective.

Démonstration

Supposons que f est injective.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion « f^n *est injective* ».

Initialisation

$f^0 = \mathrm{id}_E$ par définition, qui est injective, donc on a $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on a $P(n)$, c'est-à-dire que f^n est injective.

Par hypothèse f est injective, si bien que $f^n \circ f$ est injective.

Or $f^{n+1} = f^n \circ f$, donc f^{n+1} est injective, et donc on a $P(n+1)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on a $P(n)$ alors on a $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$, c'est-à-dire que $\boxed{f^n \text{ est injective}}$.

CQFD.

Chapitre 2

Opérations sur les ordinaux

Note de l'auteur

Nous avons défini et étudié les ordinaux lors du chapitre précédent, en se munissant de toute une batterie d'outils pour cela. Il est temps maintenant d'agir sur ceux-ci via l'introduction d'opérations entre ordinaux. Nous allons voir comment les additionner, les multiplier et les élever à une puissance. L'outil de récursion développé à la fin du chapitre précédent nous sera pour cela d'une grande aide.

Notez que ce chapitre est un peu sec : il va consister concrètement à énumérer plein de propriétés sur les ordinaux et à les démontrer principalement avec des récurrences. Ce n'est pas forcément la grande joie. L'auteur conseille au lecteur de passer la plupart des démonstrations.

Sommaire

1 Généralités

Si nous avons déployé l'artillerie lourde avec la notion d'assertion fonctionnelle inductive, c'est pour avoir les mains libres au moment de la définition de trois opérations importantes chez les ordinaux : l'addition, la multiplication et l'exponentiation. Prenons pour exemple l'addition des ordinaux : nous aimerions donner du sens à l'addition $\alpha + \beta$ pour α et β deux ordinaux. On peut pour cela s'inspirer de l'addition chez les entiers naturels.

Comment allons-nous définir l'addition $2 + 7$ par exemple ? On considère que $2 + 6$ a déjà été définie et on pose simplement que $2 + 7$ est l'entier qui vient juste après $2 + 6$, c'est-à-dire $2 + 7 := S(2 + 6)$. Autrement dit, on pose $2 + S(6) := S(2 + 6)$. Pour définir l'addition de 2 par tous les entiers, on le fait simplement de la manière suivante en initialisant la valeur en 0 :

$$\begin{cases} 2 + 0 := 2 \\ 2 + S(m) := S(2 + m) \text{ pour tout entier naturel } m \end{cases}$$

Pour donner du sens à $2 + S(m)$, on considère que $2 + m$ a déjà du sens : c'est bien là une récursion. Cependant, comme ω n'est pas un successeur, quel sens donner alors à $2 + \omega$? On va simplement dire que c'est l'ordinal qui vient juste après tous les $2+n$ avec $n < \omega$. Autrement dit, on va dire que $2 + \omega$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{2 + n \mid n < \omega\}$. Plus généralement, on va poser

$$\begin{cases} 2 + 0 := 2 \\ 2 + S(\beta) := S(2 + \beta) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ 2 + \gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma}(2 + \delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Encore plus généralement, pour α un ordinal quelconque fixé à l'avance, on va poser

$$\begin{cases} \alpha + 0 := \alpha \\ \alpha + S(\beta) := S(\alpha + \beta) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ \alpha + \gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha + \delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Comment allons-nous procéder pour s'assurer qu'il s'agit d'une définition rigoureuse ? On souhaite en fait définir par récursion une assertion fonctionnelle F_α vérifiant :

$$\begin{cases} F_\alpha(0) := \alpha \\ F_\alpha\big(S(\beta)\big) := S\big(F_\alpha(\beta)\big) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F_\alpha(\gamma) := \sup\limits_{\delta<\gamma} F_\alpha(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

et on pose alors $\alpha + \beta := F_\alpha(\beta)$. Pour pouvoir justifier proprement qu'une telle construction est possible, et pouvoir de même définir la multiplication et l'exponentiation, énonçons la proposition suivante. L'ordinal μ_0 joue le rôle du résultat de l'initialisation, et l'assertion fonctionnelle G est là pour généraliser S.

Proposition 37 (Justification des opérations sur les ordinaux)

Soient μ_0 un ordinal et $G : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle.
Alors il existe une unique assertion fonctionnelle $F : ON \longrightarrow ON$ telle que

$$\begin{cases} F(0) = \mu_0 \\ F\big(S(\beta)\big) = G\big(F(\beta)\big) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F(\gamma) := \sup\limits_{\delta<\gamma} F(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Démonstration

Existence

Pour toute application f telle que $\operatorname{dom}(f)$ est un ordinal et tel que $\operatorname{im}(f) \subseteq ON$, on pose

$$\begin{cases} H(f) := \mu_0 & \text{si } \operatorname{dom}(f) = 0 \\ H(f) := G\big(f(\beta)\big) & \text{si } \operatorname{dom}(f) = S(\beta) \text{ avec } \beta \text{ un ordinal} \\ H(f) := \sup\limits_{\delta<\gamma} f(\delta) & \text{si } \operatorname{dom}(f) = \gamma \text{ est un ordinal limite non nul} \end{cases}$$

On obtient alors H une assertion fonctionnelle.

Remarquons que par définition de H, pour tout ensemble f on a

$$f \in \operatorname{dom}(H) \iff f \text{ est une application telle que } \operatorname{dom}(f) \in ON \text{ et } \operatorname{im}(f) \subseteq ON$$

• Montrons que $\operatorname{im}(H) \subseteq ON$.

Soit $y \in \operatorname{im}(H)$.

Il existe donc $f \in \operatorname{dom}(H)$ tel que $y = H(f)$.

Par définition de H, f est une application telle que $\operatorname{dom}(f) \in ON$ et $\operatorname{im}(f) \subseteq ON$.

- Si $\operatorname{dom}(f) = 0$ alors $y = H(f) = \mu_0 \in ON$.
- Si $\operatorname{dom}(f) = S(\beta)$ avec β un ordinal, alors $y = H(f) = G\big(f(\beta)\big) \in \operatorname{im}(G)$.
  Or par définition $G : ON \longrightarrow ON$ donc $\operatorname{im}(G) \subseteq ON$ et donc $y \in ON$.
- Si $\operatorname{dom}(f)$ est un ordinal limite non nul γ alors $y = H(f) = \sup\limits_{\delta<\gamma} f(\delta)$.
  Or $\operatorname{im}(f) \subseteq ON$ donc $\operatorname{im}(f) = \big\{f(\delta) \bigm| \delta \in \gamma\big\}$ est un ensemble d'ordinaux.
  Donc $\big\{f(\delta) \bigm| \delta < \gamma\big\}$ est un ensemble d'ordinaux par définition de $<$.
  Donc y sa borne supérieure est un ordinal.

Dans tous les cas, on a bien $y \in ON$.

Donc $\forall y \in \operatorname{im}(H), y \in ON$, si bien que $\operatorname{im}(H) \subseteq ON$.

• Montrons que H vérifie l'hypothèse du théorème 6 page 80.

Soient α un ordinal et $f : \alpha \longrightarrow ?$ une application H-inductive.

On sait déjà que $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ est un ordinal.

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{im}(f) \subseteq ON$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $\beta \in \alpha$ tel que $y = f(\beta)$.

Or f est H-inductive par définition.

On a donc $f_{|\beta} \in \mathrm{dom}(H)$ et $y = f(\beta) = H(f_{|\beta}) \in \mathrm{im}(H)$.

Or on a dit que $\mathrm{im}(H) \subseteq ON$ donc $y \in ON$.

On a donc $\forall y \in \mathrm{im}(f), y \in ON$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq ON$.

Ainsi on a $\mathrm{dom}(f) \in ON$ et $\mathrm{im}(f) \subseteq ON$ donc $f \in \mathrm{dom}(H)$.

Ainsi pour tout $\alpha \in ON$ et toute application $f : \alpha \longrightarrow ?$, si f est H-inductive alors $f \in \mathrm{dom}(H)$. Donc H et ON vérifient l'hypothèse du théorème 6 page 80.

• Il existe donc une unique assertion fonctionnelle $F : ON \longrightarrow ?$ qui est H-inductive. Par définition de la H-inductivité et par définition de H, on a alors

$$\begin{cases} F(0) = H(F_{|0}) = \mu_0 \\ F\big(S(\beta)\big) = H(F_{|S(\beta)}) = G\big(F_{|S(\beta)}(\beta)\big) = G\big(F(\beta)\big) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F(\gamma) = H(F_{|\gamma}) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F_{|\gamma}(\delta) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Ainsi $\boxed{F \text{ vérifie les conditions de l'énoncé}}$.

Remarquons que comme $\mathrm{im}(H) \subseteq ON$ et comme par définition on a $\mathrm{im}(F) \subseteq \mathrm{im}(H)$, on a donc $\mathrm{im}(F) \subseteq ON$ et donc on a bien $F : ON \longrightarrow ON$.

Unicité

Soit $F' : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle vérifiant les conditions de l'énoncé.

Montrons par induction transfinie que $F = F'$.

Considérons alors l'assertion à paramètres P définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff F(\alpha) = F'(\alpha)$$

► *Initialisation*

On a $F(0) = \mu_0 = F'(0)$ donc $P(0)$ est vraie.

► *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

On a donc $F(\alpha) = F'(\alpha)$.

Donc $F\big(S(\alpha)\big) = G\big(F(\alpha)\big) = G\big(F'(\alpha)\big) = F'\big(S(\alpha)\big)$.

On a donc $P\big(S(\alpha)\big)$.

Donc pour tout ordinal α, on a $P(\alpha) \implies P\big(S(\alpha)\big)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

On a donc $\forall \beta < \alpha, F(\beta) = F'(\beta)$.

Donc $F(\alpha) = \sup\limits_{\beta<\alpha} F(\beta) = \sup\limits_{\beta<\alpha} F'(\beta) = F'(\alpha)$.

On a donc $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, on a $\Big(\forall \beta < \alpha, P(\beta)\Big) \implies P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois hypothèses du principe faible d'induction transfinie.

Donc pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$, c'est-à-dire $F(\alpha) = F'(\alpha)$.

Ainsi on a $F = F'$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

CQFD.

2 Addition d'ordinaux

2.1 Définition et propriétés

Nous pouvons enfin définir l'addition sur les ordinaux.

Définition 18 (Addition d'ordinaux)

Soit α un ordinal.
On pose

$$\begin{cases} \alpha + 0 := \alpha \\ \alpha + S(\beta) := S(\alpha + \beta) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ \alpha + \gamma := \sup\limits_{\delta < \gamma}(\alpha + \delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Remarque :
Pour justifier proprement que cette définition a du sens, on utilise simplement la proposition 37 page 101 qui précède, en posant $\mu_0 := \alpha$ et $G(\xi) := S(\xi)$ pour tout ordinal ξ. La proposition nous donne alors une assertion fonctionnelle F_α telle que

$$\begin{cases} F_\alpha(0) := \alpha \\ F_\alpha\big(S(\beta)\big) := S\big(F_\alpha(\beta)\big) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F_\alpha(\gamma) := \sup\limits_{\delta < \gamma} F_\alpha(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

et on pose alors $\alpha + \beta := F_\alpha(\beta)$ pour tout ordinal β.

Exemple :

1. Nous allons voir juste après que pour tout ordinal α, on a $\alpha + 1 = S(\alpha)$.
   Ainsi par exemple $\omega + 1$ est le successeur de ω.
2. On a

   $$3 + \omega = \sup_{n<\omega}(3 + n) = \sup\{3 + 0, 3 + 1, 3 + 2, \dots\} = \sup\{3, 4, 5, 6, \dots\} = \omega$$

   En fait plus généralement pour tout entier naturel m, on a

   $$m + \omega = \sup\{m, m + 1, m + 2, \dots\} = \omega$$

   En particulier $1 + \omega = \omega$. Et pourtant, nous venons de dire que $\omega + 1 = S(\omega)$, si bien que $1 + \omega < \omega + 1$ et donc $1 + \omega \neq \omega + 1$. Et oui, l'addition des ordinaux n'est pas commutative en général. Heureusement nous verrons qu'elle l'est quand on se restreint aux entiers naturels !

Nous affirmons depuis des pages et des pages que pour un entier naturel n, on va définir $n + 1$ comme étant $S(n)$. En fait comme n et 1 sont des cas particuliers d'ordinaux, on a déjà donné du sens à $n + 1$, et on retombe bien sur $S(n)$. Plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 38 (Successeur et plus un)

Soit α un ordinal.
On a $S(\alpha) = \alpha + 1$.

Démonstration

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha + 1 &= \alpha + S(0) \text{ par définition de } 1 \\ &= S(\alpha + 0) \text{ par définition de l'addition} \\ &= S(\alpha) \text{ puisque } \alpha + 0 = \alpha \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{\alpha + 1 = S(\alpha)}$
CQFD.

Remarque :
De plus en plus, nous remplacerons la notation $S(\alpha)$ par $\alpha + 1$ car cela coïncide plus facilement avec notre intuition. Par exemple dans la définition de l'addition, l'étape intermédiaire peut se réécrire

$$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1 \text{ pour tout ordinal } \beta$$

De même, la condition d'hérédité du principe faible d'induction peut se réécrire

Pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha + 1)$.

Cependant, nous allons continuer pour l'instant à utiliser $S(\alpha)$ car nous travaillons encore sur l'addition et que des confusions entre définition et propriétés risquent d'émerger. Le changement de notation opérera surtout à partir de la multiplication.

Proposition 39 (0 est neutre pour l'addition des ordinaux)

Pour tout ordinal α, on a $\alpha + 0 = \alpha = 0 + \alpha$.
On dit que 0 est **neutre** pour l'addition des ordinaux.

Démonstration

Par définition de l'addition, on sait déjà que pour tout ordinal α on a $\alpha + 0 = \alpha$.

Montrons l'autre égalité par induction.

Considérons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff 0 + \alpha = \alpha$$

▶ *Initialisation*

Par définition de l'addition on a $0 + 0 = 0$ donc on a $P(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

Autrement dit on a $0 + \alpha = \alpha$.

On a alors par définition de l'addition $0 + S(\alpha) = S(0 + \alpha) = S(\alpha)$.

On a donc $P\big(S(\alpha)\big)$.

Donc pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P\big(S(\alpha)\big)$.

▶ *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

Autrement dit pour tout $\beta < \alpha$, on a $0 + \beta = \beta$.

On a alors par définition de l'addition $0 + \alpha = \sup\limits_{\beta<\alpha}(0 + \beta) = \sup\limits_{\beta<\alpha} \beta = \sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta$.

Or α est un ordinal limite donc $\sup\limits_{\beta\in\alpha} \beta = \sup(\alpha) = \alpha$ d'après la prop. 22 p. 54.

On a donc $0 + \alpha = \alpha$ et donc $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Autrement dit pour tout ordinal α on a $\boxed{0 + \alpha = \alpha}$.

CQFD.

On vient de définir une addition sur tous les ordinaux, et donc en particulier sur tous les entiers naturels. Comme on l'a vu en introduction de ce chapitre, il s'agit normalement de l'addition avec laquelle on est familière dans la vie de tous les jours. Une des règles de cette addition est évidemment qu'ajouter deux entiers naturels donne toujours un entier naturel.

Proposition 40 (Addition de deux entiers naturels)

Pour tout entiers naturels n et m, l'ordinal $n + m$ est un entier naturel.
On dit que $\mathbb{N} = \omega$ est **stable par addition**.

Démonstration

Fixons n un entier naturel.

Soit P l'assertion à paramètre définie pour tout entier naturel m par

$$P(m) \iff n + m \in \mathbb{N}$$

Raisonnons par induction sur les entiers naturels.

► *Initialisation*

Par définition de l'addition on a $n + 0 = n$.

Or n est un entier naturel par définition.

Donc $n + 0$ est un entier naturel et donc $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$.

Autrement dit $n + m$ est un entier naturel.

Donc $S(n + m)$ est un entier naturel d'après la proposition 16 page 45.

Or $n + S(m) = S(n + m)$ par définition de l'addition.

Donc $n + S(m)$ est un entier naturel : autrement dit on a $P\big(S(m)\big)$.

Donc pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P\big(S(m)\big)$.

Ainsi P vérifie les deux conditions de l'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel m, on a $P(m)$.

Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout entier naturel } m,\ n + m \text{ est un entier naturel}}$.

CQFD.

Proposition 41 (Croissance de l'addition des ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.
   On dit que l'addition à gauche est **strictement croissante**.
2. Si $\beta \leq \gamma$ alors $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$.
   On dit que l'addition à gauche est **croissante**.
3. Si $\beta \leq \gamma$ alors $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.
   On dit que l'addition à droite est **croissante**.

Démonstration

1. Fixons α et β.

Posons $P_{\alpha,\beta}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$P_{\alpha,\beta}(\gamma) \iff \Big(\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma\Big)$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

Il est toujours faux de dire $\beta \in \varnothing$ donc il est toujours faux de dire $\beta \in 0$.

Autrement dit la prémisse $\beta < 0$ est fausse, donc on a l'implication $\beta < 0 \Rightarrow \alpha+\beta < \alpha+0$.

Ainsi on a $P_{\alpha,\beta}(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi on a $\beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Supposons que $\beta < S(\gamma)$.

On a alors $\beta \leq \gamma$ d'après la proposition 14 page 40, donc $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.
  On a alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ d'après $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.
  Or on a $\alpha + \gamma < S(\alpha + \gamma)$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $\alpha + \beta < S(\alpha + \gamma)$ par transitivité de $<$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.
  On a donc $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.
  Or on a $\alpha + \gamma < S(\alpha + \gamma)$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $\alpha + \beta < S(\alpha + \gamma)$.

Ainsi dans les deux cas on a $\alpha + \beta < S(\alpha + \gamma)$.

Or par définition de l'addition on a $S(\alpha + \gamma) = \alpha + S(\gamma)$.

On a donc $\alpha + \beta < \alpha + S(\gamma)$.

Donc si $\beta < S(\gamma)$ alors $\alpha + \beta < \alpha + S(\gamma)$.

Ainsi on a $P_{\alpha,\beta}\big(S(\gamma)\big)$.

Donc pour tout ordinal γ on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma) \implies P_{\alpha,\beta}\big(S(\gamma)\big)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Supposons que $\beta < \gamma$.

On a alors $S(\beta) < \gamma$ d'après la proposition 15 page 44 car γ est limite.

On a donc $\alpha + S(\beta) \leq \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha + \delta)$ par définition de la borne supérieure.

Comme γ est limite non nul, on a $\alpha+\gamma = \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha+\delta)$ et donc $\alpha+S(\beta) \leq \alpha+\gamma$.

De plus par hypothèse on a $\forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Or on a dit que $S(\beta) < \gamma$ donc $P_{\alpha,\beta}\big(S(\beta)\big)$.

Autrement dit on a $\beta < S(\beta) \implies \alpha + \beta < \alpha + S(\beta)$.

Or on a $\beta < S(\beta)$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha + \beta < \alpha + S(\beta)$ par modus ponens.

Ainsi on a $\alpha + \beta < \alpha + S(\beta) \leq \alpha + \gamma$.

On a donc $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Donc si $\beta < \gamma$ alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi $P_{\alpha,\beta}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Autrement dit, $\boxed{\text{pour tout ordinal } \gamma \text{ on a } \beta < \gamma \Rightarrow \alpha + \beta < \alpha + \gamma}$.

2. Supposons que $\beta \leq \gamma$.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.

  On a donc $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ d'après 1.

  On a en particulier $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$ d'après la proposition 9 page 25.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.

  On a alors $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$.

  En particulier on a $\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma$ par réflexivité de $\leq$.

Dans les deux cas on a donc $\boxed{\alpha + \beta \leq \alpha + \gamma}$.

3. Fixons β et γ deux ordinaux tels que $\beta \leq \gamma$.

Posons $Q_{\beta,\gamma}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$Q_{\beta,\gamma}(\alpha) \iff \beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

On a $\beta + 0 = \beta$ et $\gamma + 0 = \gamma$ par définition de l'addition.

Or on a $\beta \leq \gamma$ par hypothèse, donc $\beta + 0 \leq \gamma + 0$.

Autrement dit on a $Q_{\beta,\gamma}(0)$.

► *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$, c'est-à-dire $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$.

On a donc $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$ ou $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta + \alpha < \gamma + \alpha$.
  Alors$S(\beta + \alpha) \leq \gamma + \alpha < S(\gamma + \alpha)$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $S(\beta + \alpha) < S(\gamma + \alpha)$ par transitivité.
  En particulier on a $S(\beta + \alpha) \leq S(\gamma + \alpha)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\beta + \alpha = \gamma + \alpha$.
  Alors $S(\beta + \alpha) = S(\gamma + \alpha)$.
  En particulier on a $S(\beta + \alpha) \leq S(\gamma + \alpha)$ par réflexivité de $\leq$.

Dans les deux cas on a $S(\beta + \alpha) \leq S(\gamma + \alpha)$.
On a donc $\beta + S(\alpha) \leq \gamma + S(\alpha)$ par définition de l'addition.
Autrement dit on a $Q_{\beta,\gamma}\big(S(\alpha)\big)$.

Donc pour tout ordinal α, si $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$ alors $Q_{\beta,\gamma}\big(S(\alpha)\big)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \alpha, Q_{\beta,\gamma}(\delta)$.
Autrement dit pour tout $\delta < \alpha$ on a $\beta + \delta \leq \gamma + \delta$.

Soit δ un ordinal tel que $\delta < \alpha$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\beta + \delta &\leq \gamma + \delta \text{ d'après ce qui précède} \\
&\leq \sup_{\varepsilon < \alpha}(\gamma + \varepsilon) \text{ car la borne supérieure est un majorant} \\
&= \gamma + \alpha \text{ car } \alpha \text{ est limite non nul}
\end{aligned}$$

On a donc $\beta + \delta \leq \gamma + \alpha$ par transitivité de $\leq$.

Donc pour tout $\delta < \alpha$ on a $\beta + \delta \leq \gamma + \alpha$.
On a donc $\sup\limits_{\delta<\alpha}(\beta + \delta) \leq \gamma + \alpha$ par minimalité de la borne supérieure.
On a donc $\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha$ car α est limite non nul. Autrement dit, on a $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \delta < \alpha, Q_{\beta,\gamma}(\delta)$ alors $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Ainsi $Q_{\beta,\gamma}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.
Donc pour tout ordinal α on a $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.
Autrement dit pour tout ordinal α on a $\boxed{\beta + \alpha \leq \gamma + \alpha}$.
CQFD.

Remarque :

1. En particulier supposons que $\beta \leq \gamma$.
   Alors $\beta + 1 \leq \gamma + 1$ donc $S(\beta) \leq S(\gamma)$ d'après la proposition 38 page 105.
2. Soit $n \in \omega$.
   Pour tout $m \in \omega$, on a $n + m \in \omega$ par stabilité de ω pour l'addition.

Donc pour tout ordinal $m < \omega$, on a $n + m < \omega$ par définition de $<$.
On a donc $\sup\limits_{m<\omega}(n+m) \leq \omega$ par minimalité de la borne supérieure.
On a donc :

$$\begin{aligned}
\omega &= 0 + \omega \text{ par neutralité de } 0 \text{ pour l'addition} \\
&\leq n + \omega \text{ par croissance de l'addition à droite} \\
&= \sup_{m<\omega}(n+m) \text{ par définition de l'addition} \\
&\leq \omega \text{ par ce qui précède}
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\omega \leq n + \omega \leq \omega$ et donc $n + \omega = \omega$.
On vient donc de montrer ce que nous avions constaté dans un exemple précédent.

Proposition 42 (Régularité de l'addition des ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.
Si $\alpha + \beta = \alpha + \gamma$ alors $\beta = \gamma$.
On dit que l'addition à gauche des ordinaux est **régulière**.

Démonstration

Montrons-le par contraposition.

Supposons que $\beta \neq \gamma$.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\gamma < \beta$ d'après le théorème 1 page 27.

Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ par stricte croissance de l'addition à gauche.

Si $\gamma < \beta$ alors $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$ par stricte croissance de l'addition à gauche.

Dans les deux cas on a $\alpha + \beta \neq \alpha + \gamma$ par antiréflexivité de $<$.

Donc si $\beta \neq \gamma$ alors $\alpha + \beta \neq \alpha + \gamma$.

Par contraposition $\boxed{\text{si } \alpha + \beta = \alpha + \gamma \text{ alors } \beta = \gamma}$.

CQFD.

Remarque :
Malheureusement l'addition à droite n'est pas régulière.
En effet on a montré lors d'une précédente remarque que

$$1 + \omega = \omega = 2 + \omega$$

alors que l'on n'a pas $1 = 2$.

Dans la définition de l'addition, si γ est un ordinal limite non nul alors

$$\alpha + \gamma = \sup_{\delta < \gamma} (\alpha + \delta)$$

Or un ordinal limite est lui-même sa propre borne supérieure d'après la proposition 22 page 54

$$\gamma = \sup_{\delta \in \gamma} \delta = \sup_{\delta < \gamma} \delta$$

si bien que l'on a en fait

$$\alpha + \sup_{\delta < \gamma} \delta = \sup_{\delta < \gamma} (\alpha + \delta)$$

Ainsi l'addition à gauche commute avec la borne supérieure. Nous verrons que c'est vrai même pour la borne supérieure d'un ensemble qui n'est pas lui-même un ordinal. Pour l'heure, généralisons ce concept avec la définition qui suit.

Définition 19 (Assertion fonctionnelle croissante continue)

Soient C et D deux classes d'**ordinaux**.
Soit $F : C \longrightarrow D$ une assertion fonctionnelle.

1. On dit que F est **croissante** si et seulement si pour α et β dans C on a ,

$$\alpha \leq \beta \implies F(\alpha) \leq F(\beta)$$

2. On se place dans le cas où $C = ON = D$, de sorte que $F : ON \longrightarrow ON$.
Supposons que F est **croissante**.
On dit que F est **continue** si et seulement si pour tout X ensemble **non vide** d'ordinaux, on a

$$F\big(\sup(X)\big) = \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$$

Remarque :
Le point 2 de cette définition est bien une généralisation de ce que nous avons vu juste avant :

$$F\left(\sup_{\xi \in X} \xi\right) = \sup_{\xi \in X} F(\xi)$$

Pourquoi cette propriété s'appelle-t-elle *continuité* ? Parce qu'elle rappelle ce qu'il se passe dans le cadre de l'analyse : par exemple pour $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application **croissante**, f est *continue* (à gauche) en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$f(a) = f\left(\sup_{x<a} x\right) = f\left(\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} x\right) = \lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \sup_{x<a} f(x)$$

Il s'avère qu'en fait on peut affaiblir cette condition et quand-même retrouver la continuité en question : en la demandant seulement sur les ordinaux limites, on la retrouve partout.

Proposition 43 (Caractérisation de continuité)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **croissante**.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est continue.
2. Pour tout ordinal limite non nul γ, on a $F(\gamma) = \sup_{\delta<\gamma} F(\delta)$.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que F est continue.

Par définition pour tout ensemble non vide d'ordinaux X, on a $F\left(\sup_{\xi\in X} \xi\right) = \sup_{\xi\in X} F(\xi)$.

Soit γ un ordinal limite non nul.

On a $\gamma = \sup_{\delta\in\gamma} \delta$ d'après la proposition 22 page 54.

En prenant $X := \gamma$ on a donc $F(\gamma) = F\left(\sup_{\delta\in\gamma} \delta\right) = \sup_{\delta\in\gamma} F(\delta) = \sup_{\delta<\gamma} F(\delta)$.

Donc $\boxed{\text{pour tout ordinal limite non nul } \gamma, \text{ on a } F(\gamma) = \sup_{\delta<\gamma} F(\delta)}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que pour tout ordinal limite non nul γ on a $F(\gamma) = \sup_{\delta<\gamma} F(\delta)$.

Soit X un ensemble non vide d'ordinaux.

Montrons que $F\big(\sup(X)\big) = \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$.

Rappelons-nous la chose suivante : comme X est un ensemble, $F^{\rightarrow}(X) = \big\{F(\xi) \bigm| \xi \in X\big\}$ est aussi un ensemble d'après le schéma d'axiome de remplacement.

C'est bien un ensemble d'ordinaux car F est à valeurs dans ON.

Raisonnons par double inégalités.

$\boxed{\leq}$

• Plaçons-nous dans le cas où $\sup(X) \in X$.

Alors $F\big(\sup(X)\big) \in F^{\rightarrow}(X)$ par définition de l'image directe.

On a donc $F\big(\sup(X)\big) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$ car la borne supérieure est un majorant.

• Plaçons-nous dans le cas où $\sup(X) \notin X$.

Alors $\sup(X)$ est un ordinal limite d'après la proposition 21 page 53.

Supposons par l'absurde que $\sup(X) = 0$.

Comme $\sup(X)$ est un majorant de X, on a $\forall \xi \in X, \xi \leq \sup(X)$.

Autrement dit on a $\forall \xi \in X, \xi \subseteq \sup(X)$.

Comme $\sup(X) = 0 = \varnothing$, on a $\forall \xi \in X, \xi = \sup(X)$.

Comme X est non vide, on a donc $X = \{\sup(X)\}$ et donc $\sup(X) \in X$.

C'est absurde puisqu'on a justement supposé que $\sup(X) \notin X$.

Donc $\sup(X)$ est un ordinal limite non nul.

Donc par hypothèse on a $F\big(\sup(X)\big) = \sup\limits_{\delta < \sup(X)} F(\delta)$.

Montrons donc que $\sup\limits_{\delta < \sup(X)} F(\delta) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$.

Soit δ un ordinal tel que $\delta < \sup(X)$.

Par définition $\sup(X)$ est le plus petit majorant de X.

Donc δ n'est pas un majorant de X.

Il existe donc $\xi \in X$ tel que $\delta \leq \xi$.

Par croissance de F on a donc $F(\delta) \leq F(\xi)$.

Or $\xi \in X$ donc $F(\xi) \in F^{\rightarrow}(X)$ et donc $F(\xi) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$.

On a donc $F(\delta) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$ par transitivité de $\leq$.

Donc $\forall \delta < \sup(X), F(\delta) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$.

Donc $\sup\limits_{\delta < \sup(X)} F(\delta) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$ par minimalité de la borne supérieure.

On a donc $F\big(\sup(X)\big) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)$ d'après ce qui précède.

Ainsi dans les deux cas on a $\boxed{F\big(\sup(X)\big) \leq \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)}$.

$\boxed{\geq}$

Soit $\mu \in F^{\rightarrow}(X)$.

Par définition il existe $\xi \in X$ tel que $\mu = F(\xi)$.

On a $\xi \leq \sup(X)$ car la borne supérieure est un majorant.

On a donc $F(\xi) \leq F\big(\sup(X)\big)$ par croissance de F.

On a donc $\mu \leq F\big(\sup(X)\big)$ par définition de ξ.

Donc pour tout $\mu \in F^{\rightarrow}(X)$, on a $\mu \leq F\big(\sup(X)\big)$.

Donc $\boxed{\sup(F^{\rightarrow}(X)) \leq F\big(\sup(X)\big)}$ par minimalité de la borne supérieure.

Finalement on a bien $\boxed{F\big(\sup(X)\big) = \sup\big(F^{\rightarrow}(X)\big)}$ par antiréflexivité de $\leq$.

CQFD.

Ce que l'on vient de dire s'applique en particulier à l'addition qui vérifie bien la condition sur les ordinaux limites non vides. Ainsi l'addition à gauche est continue.

Proposition 44 (Continuité de l'addition des ordinaux)

Soient α un ordinal et X un ensemble **non vide** d'ordinaux.
On a
$$\sup_{\xi\in X}(\alpha+\xi)=\alpha+\sup_{\xi\in X}\xi$$
Autrement dit l'addition à gauche est continue.

Démonstration

Par définition de l'addition, pour tout ordinal limite non nul γ, on a
$$\alpha+\gamma=\sup_{\delta<\gamma}(\alpha+\delta)$$
On peut alors appliquer la proposition 43 page 113 pour conclure.

CQFD.

Remarque :
Malheureusement l'addition à droite n'est pas continue.
En effet, prenons $X=\omega=\alpha$.
On sait que ω est un ordinal limite d'après la proposition 19 page 50.
On a donc $\sup\limits_{n\in\omega} n=\omega$ d'après la proposition 22 page 54.
Or on a montré dans une précédente remarque que pour tout $n\in\omega$, on a $n+\omega=\omega$.
On a donc $\sup\limits_{n\in\omega}(n+\omega)=\sup\limits_{n\in\omega}\omega=\omega$ tandis que $\left(\sup\limits_{n\in\omega} n\right)+\omega=\omega+\omega$.
Or $\omega \underset{14\text{ p. }40}{<} S(\omega) \underset{38\text{ p. }105}{=} \omega+1\leq\sup\limits_{n\in\omega}(\omega+n)=\omega+\omega$.
On a donc $\omega\neq\omega+\omega$ et donc $\sup\limits_{n\in\omega}(n+\omega)\neq\left(\sup\limits_{n\in\omega} n\right)+\omega$.

Proposition 45 (Associativité de l'addition des ordinaux)

Pour tout ordinaux α, β et γ, on a l'égalité
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$
On dit que l'addition des ordinaux est **associative**.

Démonstration

Montrons-le à l'aide du principe faible d'induction transfinie.

Fixons α et β deux ordinaux.

Posons $P_{\alpha,\beta}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par
$$P_{\alpha,\beta}(\gamma)\iff(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$$

► *Initialisation*

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+0 &= \alpha+\beta \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\ &= \alpha+(\beta+0) \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\end{aligned}$$

On a donc $(\alpha+\beta)+0 = \alpha+(\beta+0)$ et donc $P_{\alpha,\beta}(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+S(\gamma) &= S\big((\alpha+\beta)+\gamma\big) \text{ par définition de l'addition}\\ &= S\big(\alpha+(\beta+\gamma)\big) \text{ puisqu'on a } P_{\alpha,\beta}(\gamma)\\ &= \alpha+S(\beta+\gamma) \text{ par définition de l'addition}\\ &= \alpha+\big(\beta+S(\gamma)\big) \text{ par définition de l'addition}\end{aligned}$$

Ainsi on a $(\alpha+\beta)+S(\gamma) = \alpha+\big(\beta+S(\gamma)\big)$, c'est-à-dire $P_{\alpha,\beta}\big(S(\gamma)\big)$.
Donc pour tout ordinal γ, on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma) \implies P_{\alpha,\beta}\big(S(\gamma)\big)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Posons $X := \{\beta+\delta \mid \delta<\gamma\}$.

On a alors $\big\{\alpha+(\beta+\delta) \bigm| \delta<\gamma\big\} = \{\alpha+\xi \mid \xi\in X\}$.

En particulier $\sup\limits_{\delta<\gamma}\Big(\alpha+(\beta+\delta)\Big) = \sup\limits_{\xi\in X}(\alpha+\xi) \quad (\star)$.

On en déduit donc que :

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)+\gamma &= \sup_{\delta<\gamma}\Big((\alpha+\beta)+\delta\Big) \text{ par définition de l'addition}\\ &= \sup_{\delta<\gamma}\Big(\alpha+(\beta+\delta)\Big) \text{ puisque } \forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)\\ &= \sup_{\xi\in X}(\alpha+\xi) \text{ par } (\star)\\ &= \alpha+\sup_{\xi\in X}\xi \text{ par continuité de l'addition à gauche}\\ &= \alpha+\sup_{\delta<\gamma}(\beta+\delta) \text{ par définition de } X\\ &= \alpha+(\beta+\gamma) \text{ par définition de l'addition}\end{aligned}$$

On a donc $(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul γ, on a $\Big(\forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)\Big) \implies P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi $P_{\alpha,\beta}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ, on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$, c'est-à-dire $\boxed{(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)}$.

CQFD.

Remarque :
Désormais pour α, β et γ trois ordinaux, on notera $\alpha+\beta+\gamma$ pour désigner indifféremment $(\alpha+\beta)+\gamma$ et $\alpha+(\beta+\gamma)$, puisqu'il y a égalité.

On a vu plus tôt que l'addition chez les ordinaux n'est malheureusement pas commutative. Heureusement, elle l'est chez les entiers naturels : on retrouve donc bien un résultat qui nous semble évident avec l'addition de tous les jours. Ouf !

Pour le montrer, on commence par montrer que 1 commute avec tous les entiers naturels.

Proposition 46 (Commutativité de l'addition des entiers naturels)

Soient m et n deux entiers naturels.
Alors $m+n = n+m$.
On dit que l'addition des entiers naturels est **commutative**.

Démonstration

• On sait déjà que $m+1 = S(m)$ d'après la proposition 38 page 105.

Montrons que l'on a aussi $S(m) = 1+m$, de sorte que $m+1 = 1+m$.

Pour tout entier naturel m, posons $P(m)$ l'assertion « $S(m) = 1+m$ ».

Initialisation

On a $S(0) = 1$ par définition de 1.

Or $1 = 1+0$ par neutralité de 0 pour l'addition.

On a donc $S(0) = 1+0$ et donc on a $P(0)$.

Hérédité

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$.

On a alors

$$\begin{aligned} S\big(S(m)\big) &= S(m)+1 \text{ d'après la proposition 38 page 105} \\ &= (1+m)+1 \text{ d'après } P(m) \end{aligned}$$

$$= 1 + (m + 1) \text{ par associativité de l'addition}$$
$$= 1 + S(m) \text{ d'après la proposition 38 page 105}$$

Ainsi $S\big(S(m)\big) = 1 + S(m)$ et donc $P\big(S(m)\big)$.

Ainsi pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P\big(S(m)\big)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } m \text{, on a } P(m) \text{, c'est-à-dire } S(m) = 1 + m}$.

• Montrons le résultat attendu.

Fixons m un entier naturel.

Pour tout entier naturel n, posons $Q(n)$ l'assertion « $m + n = n + m$ ».

Initialisation

On a $m + 0 = m = 0 + m$ car 0 est neutre pour l'addition.

On a donc $Q(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $Q(n)$.

On a alors

$$\begin{aligned} m + S(n) &= m + (n + 1) \text{ d'après la proposition 38 page 105} \\ &= (m + n) + 1 \text{ par associativité de l'addition} \\ &= 1 + (m + n) \text{ d'après ce que l'on a montré plus haut} \\ &= 1 + (n + m) \text{ d'après } Q(n) \\ &= (1 + n) + m \text{ par associativité de l'addition} \\ &= S(n) + m \text{ d'après ce que l'on a montré plus haut} \end{aligned}$$

Ainsi $n + S(n) = S(n) + m$ et donc $Q\big(S(n)\big)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $Q(n)$ alors $Q\big(S(n)\big)$.

Finalement Q vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n \text{, on } Q(n) \text{, c'est-à-dire } m + n = n + m}$.

CQFD.

À la toute fin du précédent chapitre, nous avons défini par récursion les itérées d'une application, c'est-à-dire le fait de prendre un objet, de le donner à manger à une application, de donner le résultat à manger à l'application, et ainsi de suite autant de fois que désiré. Il s'avère bien heureusement que le faire $n + m$ fois, c'est là même chose que le faire m fois puis n fois : encore une fois l'intuition est préservée !

Proposition 47 (Itérées d'une application et addition)

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$.
Pour tout entiers naturels n et m, on a $f^{n+m} = f^n \circ f^m$.

Démonstration

Fixons n un entier naturel.

Pour tout entier naturel m, posons $P(m)$ l'assertion « $f^{n+m} = f^n \circ f^m$ ».

Initialisation

On a $f^{n+0} = f^n = f^n \circ \mathrm{id}_E = f^n \circ \mathrm{id}_E$ et donc $P(0)$.

Hérédité

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$, c'est-à-dire $f^{n+m} = f^n \circ f^m$.

On a alors

$$\begin{aligned}
f^{n+(m+1)} &= f^{(n+m)+1} \text{ par associativité de l'addition} \\
&= f^{n+m} \circ f \text{ par définition des itérées de } f \\
&= (f^n \circ f^m) \circ f \text{ d'après } P(m) \\
&= f^n \circ (f^m \circ f) \text{ par associativité de la composition} \\
&= f^n \circ f^{m+1} \text{ par définition des itérées de } f
\end{aligned}$$

Ainsi on a $f^{n+(m+1)} = f^n \circ f^{m+1}$ et donc $P(m+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P(m+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

On a donc pour tout $m \in \mathbb{N}$, $P(m)$, c'est-à-dire $\boxed{f^{n+m} = f^n \circ f^m}$.

CQFD.

Remarque :
En particulier pour tout entier naturel n, on a $f^n \circ f = f^{n+1} = f^{1+n} = f^1 \circ f^n = f \circ f^n$.
Plus généralement, comme l'addition des entiers naturels est commutative, les itérées de f commutent.

Que peut-on dire de l'image directe et de l'image réciproque par une itérée d'une application ? On a vu lors du précédent livre que $(g \circ f)^{\rightarrow} = g^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow}$ pour deux applications f et g. Autrement dit, on va par exemple avoir $(f^3)^{\rightarrow} = (f \circ f \circ f)^{\rightarrow} = f^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^3$. Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 48 (Images directes et réciproques d'une itérée)

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. On a $(f^n)^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^n$.
2. On a $(f^n)^{\leftarrow} = (f^{\leftarrow})^n$.

Démonstration

1. Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ l'assertion « $(f^n)^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^n$ ».

Initialisation

On a $(f^0)^{\rightarrow} = {\mathrm{id}_E}^{\rightarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)} = (f^{\rightarrow})^0$ donc on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

On a alors

$$\begin{aligned}(f^{n+1})^{\rightarrow} &= (f^n \circ f)^{\rightarrow} \text{ par définition des itérées de } f\\ &= (f^n)^{\rightarrow} \circ f^{\rightarrow} \text{ d'après le précédent livre}\\ &= (f^{\rightarrow})^n \circ f^{\rightarrow} \text{ d'après } P(n)\\ &= (f^{\rightarrow})^{n+1} \text{ par définition des itérées de } f^{\rightarrow}\end{aligned}$$

On a donc $(f^{n+1})^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^{n+1}$, c'est-à-dire $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

On a donc pour tout n entier naturel $P(n)$, c'est-à-dire $\boxed{(f^n)^{\rightarrow} = (f^{\rightarrow})^n}$.

2. Pour tout entier naturel n, posons $Q(n)$ l'assertion « $(f^n)^{\leftarrow} = (f^{\leftarrow})^n$ ».

Initialisation

On a $(f^0)^{\leftarrow} = {\mathrm{id}_E}^{\leftarrow} = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)} = (f^{\leftarrow})^0$ donc on a $Q(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $Q(n)$.

On a alors

$$(f^{n+1})^{\leftarrow} = (f^n \circ f)^{\leftarrow} \text{ par définition des itérées de } f$$

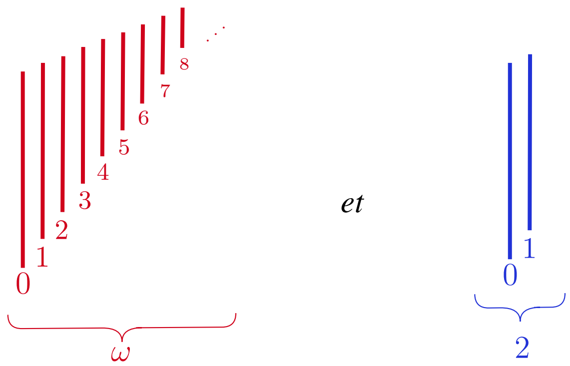
$$= (f \circ f^n)^{\leftarrow} \text{ car les itérées de } f \text{ commutent}$$
$$= (f^n)^{\leftarrow} \circ f^{\leftarrow} \text{ d'après le précédent livre}$$
$$= (f^{\leftarrow})^n \circ f^{\leftarrow} \text{ d'après } Q(n)$$
$$= (f^{\leftarrow})^{n+1} \text{ par définition des itérées de } f^{\leftarrow}$$

On a donc $(f^{n+1})^{\leftarrow} = (f^{\leftarrow})^{n+1}$, c'est-à-dire $Q(n+1)$.
Ainsi pour tout entier naturel n, si $Q(n)$ alors $Q(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.
On a donc pour tout n entier naturel $Q(n)$, c'est-à-dire $\boxed{(f^n)^{\leftarrow} = (f^{\leftarrow})^n}$.
CQFD.

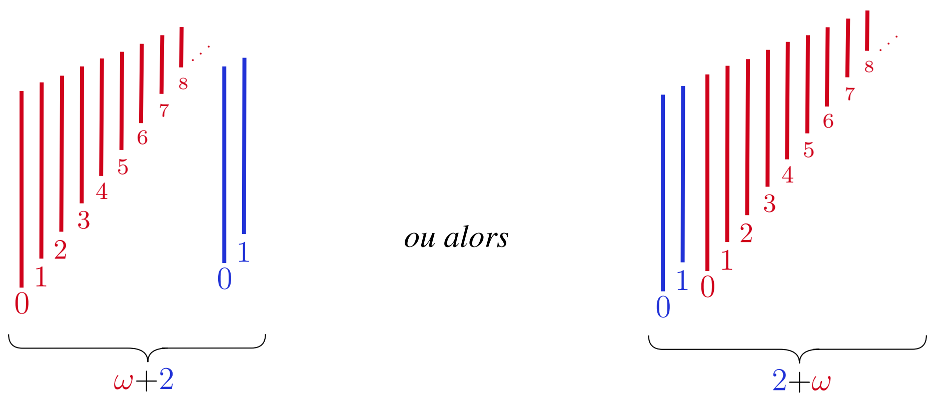
2.2 Interprétation graphique : la concaténation

L'addition des ordinaux a une interprétation graphique : visualisons par exemple l'addition des ordinaux ω et 2. Commençons par les représenter tous les deux avec des bâtons indépendemment l'un de l'autre, ω et ses éléments étant en **rouge** et 2 et ses éléments étant en **bleu** :

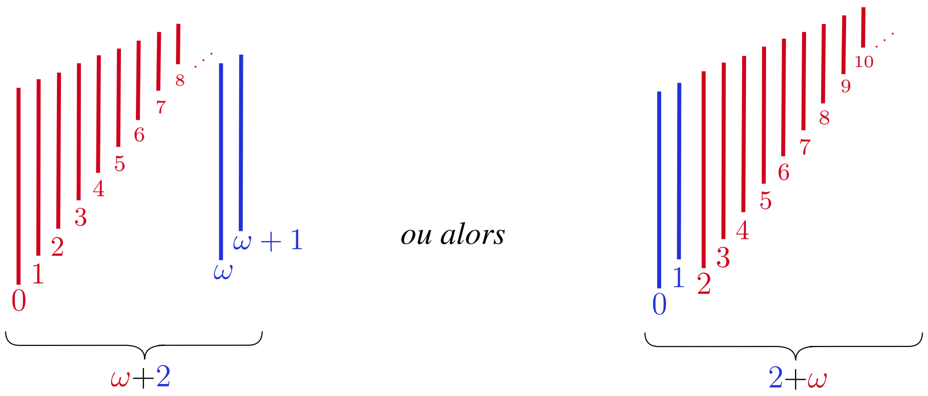


Rappelons qu'ici la taille des bâtons n'a aucune importante, seul leur agencement horizontal importe. Le fait de représenter des bâtons de plus en plus petits est seulement une astuce pour en faire tenir une infinité. L'interprétation visuelle consiste alors à concaténer les deux ordinaux à additionner, c'est-à-dire à les placer l'un derrière l'autre. Ainsi, on peut les disposer de deux manières :

- ► d'abord ω puis 2 à sa droite, ce qui donne la représentation graphique de $\omega + 2$
- ► d'abord 2 puis ω à sa droite, ce qui donne la représentation graphique de $2 + \omega$



On renumérote alors les bâtons en fonction de l'ordre dans lequel ils arrivent, de la gauche vers la droite,



ce qui permet ainsi de voir que

- $\omega + 2$ est égal à $\{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\}$ donc est l'ordinal qui vient juste après $\omega + 1$, c'est-à-dire son successeur.
- $2 + \omega$ est égal à $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, c'est-à-dire tout simplement ω lui-même.

On retrouve bien le fait démontré précédemment que $2 + \omega = \omega$ et que $2 + \omega \neq \omega + 2$.

Pour l'heure, cette illustration est là pour nous faire comprendre l'intuition derrière l'addition des ordinaux : cette idée de concaténation va se traduire formellement par la notion d'**union disjointe**. On va en fait associer les éléments de A aux couples de la forme $(0, a)$ avec $a \in A$, et les éléments de B aux couples de la forme $(1, b)$ avec $b \in B$. De cette façon, on pourra dire "*parmi ces couples-là, ceux avec une première composante nulle viennent avant ceux avec une première composante qui vaut* 1", et donc s'assurer que les éléments de A viennent avant les éléments de B.

Définition 20 (Union disjointe de deux ensembles)

Soient A et B deux ensembles.
On appelle **union disjointe** de A et B l'ensemble

$$A \amalg B := \big(\{0\} \times A\big) \cup \big(\{1\} \times B\big)$$

Dans le cas où A et B sont munit d'un ordre, voyons comment s'en servir pour construire un ordre sur $A \amalg B$.

— on souhaite que tout élément de A vienne nécessairement avant tout élément de B. On va donc dire que tout élément de première composante nulle est plus petit que tout élément de première composante 1.

— si les deux couples à comparer sont de première composante nulle, alors les deuxième composantes sont dans A et on peut donc les comparer dans A.

— si les deux couples à comparer sont de première composante 1, alors les deuxième composantes sont dans B et on peut donc les comparer dans B.

C'est en quelque sorte comme l'ordre lexicographique : on compare les premières composantes et si éventuellement elles sont égales, on compare les secondes. C'est l'objet de la définition qui suit.

Définition 21 (Ordre sur l'union disjointe de deux ensembles)

Soient $(A, \preccurlyeq)$ et $(B, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés.
On appelle **ordre de concaténation** sur $A \amalg B$ la relation binaire $\trianglelefteq$ définie pour tout (i, x) et (j, y) dans $A \amalg B$ par

$$(i,x) \trianglelefteq (j,y) \iff \begin{cases} i = 0 \text{ et } j = 1 \\ \text{ou} \\ i = 0 = j \text{ et } x \preccurlyeq y \\ \text{ou} \\ i = 1 = j \text{ et } x \sqsubseteq y \end{cases}$$

Bien évidemment, comme son nom l'indique, cette relation est une relation d'ordre.

Proposition 49 (Ordre de concaténation)

Soient $(A, \preccurlyeq)$ et $(B, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $\trianglelefteq$ l'ordre de concaténation associé sur $A \amalg B$.
Alors $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur $A \amalg B$.

Démonstration

Réflexivité

Soit $(i, x) \in A \amalg B$.

- Supposons que $i = 0$.
  Par définition de $A \amalg B$, on a alors $x \in A$.
  Par réflexivité de $\preccurlyeq$ sur A, on a $x \preccurlyeq x$.
  Ainsi $(i = 0 = i$ et $x \preccurlyeq x)$ donc $(i, x) \trianglelefteq (i, x)$ par définition de $\trianglelefteq$.
- On raisonne de la même manière si $i = 1$.

On a donc $(i, x) \trianglelefteq (i, x)$.

Donc $\trianglelefteq$ est réflexive sur $A \amalg B$.

Antisymétrie

Soient (i, x) et (j, y) dans $A \amalg B$.

Supposons que $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (i, x)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
  C'est impossible puisqu'on a $(j, y) \trianglelefteq (i, x)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$ et $j = 0$.

C'est impossible puisqu'on a $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0 = j$.
  Par définition de $A \amalg B$, on a alors $x \in A$ et $y \in A$.
  Comme $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$, on a $x \preccurlyeq y$.
  Comme $(j, y) \trianglelefteq (i, x)$, on a $y \preccurlyeq x$.
  On a donc $x = y$ par antisymétrie de $\preccurlyeq$.
  Ainsi $i = j$ et $x = y$ donc $(i, x) = (j, y)$.
- Le cas $i = 1 = j$ se traite de la même manière.

Ainsi dans les deux cas possibles on a $(i, x) = (j, y)$.

Donc si $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (i, x)$ alors $(i, x) = (j, y)$.

Donc $\trianglelefteq$ est antisymétrique.

Transitivité

Soient (i, x), (j, y) et (k, z) dans $A \amalg B$.

Supposons que $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (k, z)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = j = k = 0$.
  Par définition de $A \amalg B$, on a alors $x \in A$, $y \in A$ et $z \in A$.
  Comme $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (k, z)$, on a $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$.
  On a donc $x \preccurlyeq z$ par transitivité de $\preccurlyeq$.
  Comme $i = 0 = k$ et $x \preccurlyeq z$, on a $(i, x) \trianglelefteq (k, z)$.
- Le cas $i = j = k = 1$ se traite de la même manière.
- Si $i = 0 = j$ et $k = 1$ alors on a automatiquement $(i, x) \trianglelefteq (k, z)$.
- Si $i = 0$ et $j = 1 = k$ alors on a automatiquement $(i, x) \trianglelefteq (k, z)$.
- Les autres cas sur les valeurs de i, j et k sont impossibles puisque l'on a $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (k, z)$.

Dans tous les cas, on a nécessairement $(i, x) \trianglelefteq (k, z)$.

Donc si $(i, x) \trianglelefteq (j, y)$ et $(j, y) \trianglelefteq (k, z)$ alors $(i, x) \trianglelefteq (k, z)$.

Donc $\trianglelefteq$ est transitive.

Ainsi $\trianglelefteq$ est réflexive sur $A \amalg B$, est antisymétrique et transitive.

Donc $\boxed{\trianglelefteq \text{ est une relation d'ordre sur } A \amalg B}$.

CQFD.

Nous avons formalisé ce qu'était l'opération de concaténation de deux ensembles ordonnés : passer par leur union disjointe et associer à celle-ci l'ordre de concaténation. Il s'avère que si les deux ensembles en question sont bien ordonnés, il en va de même pour leur union disjointe.

Proposition 50 (Concaténation de bons ordres)

Soient $(A, \preccurlyeq)$ et $(B, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés.
Soit $\trianglelefteq$ l'ordre de concaténation associé sur $A \amalg B$.

Si $(A, \preccurlyeq)$ et $(B, \sqsubseteq)$ sont bien ordonnés alors $(A \amalg B, \trianglelefteq)$ est bien ordonné.

Démonstration

Supposons que $(A, \preccurlyeq)$ et $(B, \sqsubseteq)$ sont bien ordonnés.

Montrons que toute partie non vide de $A \amalg B$ admet un minimum.

Soit C une partie non vide $A \amalg B$.

- Supposons dans un premier temps qu'il existe $a \in A$ tel que $(0, a) \in C$.
  Considérons alors $E := \{a \in A \mid (0, a) \in C\}$.
  Alors E est donc une partie non vide de A.
  Comme A est bien ordonné, E admet un minimum a_0.
  Ainsi on a $(0, a_0) \in C$ par définition de E.
  Montrons que $(0, a_0)$ est le minimum de C.

  Soit $(i, x) \in C$.

  - Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$.
    Dans ce cas-là $x \in A$ par définition de $A \amalg B$.
    Donc $x \in A$ est tel que $(0, x) = (i, x) \in C$.
    Alors $x \in E$ par définition de E.
    Donc $a_0 \preccurlyeq x$ car a_0 est le minimum de E.
    Ainsi $(i = 0$ et $a_0 \preccurlyeq x)$ donc $(0, a_0) \trianglelefteq (i, x)$ par définition de $\trianglelefteq$.
  - Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$.
    On a alors $(0, a_0) \trianglelefteq (i, x)$ par définition de $\trianglelefteq$.

  Dans tous les cas on a $(0, a_0) \trianglelefteq (i, x)$.

  Donc $(0, a_0)$ est le minimum de C.

- Supposons à présent qu'il n'existe pas de $a \in A$ tel que $(0, a) \in C$.
  Donc pour tout $(i, x) \in C$, on a $i = 1$ et $x \in B$ par définition de $A \amalg B$.
  Posons alors $F := \{b \in B \mid (1, b) \in C\}$.
  Comme C est non vide, F est une partie non vide de B.
  Or B est bien ordonné donc F admet un minimum b_0.
  Ainsi on a $(1, b_0) \in C$ par définition de F.
  Montrons que $(1, b_0)$ est le minimum de C.

Soit $(i, x) \in C$.

D'après ce qui précède, on a nécessairement $i = 1$ et $x \in B$.

Ainsi $x \in B$ est tel que $(1, x) = (i, x) \in C$.

Donc $x \in F$ par définition de F.

Donc $b_0 \sqsubseteq x$ car b_0 est le minimum de F.

Ainsi ($i = 1$ et $b_0 \sqsubseteq x$) donc $(1, b_0) \trianglelefteq (i, x)$ par définition de $\trianglelefteq$.

Donc $(1, b_0)$ est le minimum de C.

Dans les deux cas C admet un minimum.

Donc toute partie non vide de $A \amalg B$ admet un minimum.

Donc $\boxed{A \amalg B \text{ est bien ordonné}}$.

CQFD.

Notation :
Soient E et F deux ensembles ordonnés.
On note $E \cong F$ si et seulement si E et F sont isomorphes.

La première partie de la proposition qui suit nous indique que la concaténation se comporte bien vis à vis de l'isomorphie d'ordres. La deuxième partie nous indique qu'étant donnés un ordinal α et un ordinal plus petit β, il est possible de simplement concaténer β et $\alpha \backslash \beta$ pour retrouver α. Le lecteur avisé pourra reconnaître les premiers jalons de la soustraction d'ordinaux !

Proposition 51 (Union disjointe et isomorphismes)

1. Soient A_0, A_1, B_0 et B_1 quatre ensembles ordonnés.
   Si $A_0 \cong B_0$ et $A_1 \cong B_1$ alors $A_0 \amalg A_1 \cong B_0 \amalg B_1$.
2. Soient α et β deux ordinaux.
   Si $\beta \leq \alpha$ alors $\alpha \cong \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

Démonstration

1\. Supposons que $A_0 \cong B_0$ et $A_1 \cong B_1$.

Pour tout $i \in \{0, 1\}$, il existe donc $f_i : A_i \longrightarrow B_i$ un isomorphisme d'ordre.

Considérons alors $\varphi := \begin{pmatrix} A_0 \amalg A_1 & \longrightarrow & B_0 \amalg B_1 \\ (i, x) & \longmapsto & (i, f_i(x)) \end{pmatrix}$.

Montrons que φ est un isomorphisme d'ordre de $A_0 \amalg A_1$ vers $B_0 \amalg B_1$.

• Montrons que φ est bijective de $A_0 \amalg A_1$ vers $B_0 \amalg B_1$.

Pour tout $i \in \{0, 1\}$, f_i est un isomorphisme d'ordre de A_i vers B_i.

Donc tout $i \in \{0, 1\}$, f_i est inversible, avec $f_i^{-1} : B_i \longrightarrow A_i$.

Considérons alors $\psi := \begin{pmatrix} B_0 \amalg B_1 & \longrightarrow & A_0 \amalg A_1 \\ (j,y) & \longmapsto & \big(j, f_j^{-1}(y)\big) \end{pmatrix}$.
Montrons que φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.
En effet, pour tout $(i,x) \in A_0 \amalg A_1$ on a

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(i,x) &= \psi\big(\varphi(i,x)\big) = \psi\big(i, f_i(x)\big) = \Big(i, f_i^{-1}\big(f_i(x)\big)\Big) = (i,x) \\ &= \mathrm{id}_{A_0 \amalg A_1}(i,x)\end{aligned}$$

si bien que $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{A_0 \amalg A_1}$.
De même pour tout $(j,y) \in B_0 \amalg B_1$ on a

$$\begin{aligned}(\varphi \circ \psi)(j,y) &= \varphi\big(\psi(j,y)\big) = \varphi\big(j, f_j^{-1}(y)\big) = \Big(j, f_j\big(f_j^{-1}(y)\big)\Big) = (j,y) \\ &= \mathrm{id}_{B_0 \amalg B_1}(j,y)\end{aligned}$$

si bien que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{B_0 \amalg B_1}$.
Ainsi φ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.
En particulier φ est bijective de $A_0 \amalg A_1$ vers $B_0 \amalg B_1$.

• Montrons que φ est croissante.
Pour tout $i \in \{0,1\}$, f_i est un isomorphisme de A_i vers B_i.
Donc pour tout $i \in \{0,1\}$, f_i est croissante.
Pour tout $i \in \{0,1\}$, notons $\preccurlyeq_i$ l'ordre sur A_i.
Notons $\trianglelefteq_A$ et $\trianglelefteq_B$ les ordres de concaténation associés sur $A_0 \amalg A_1$ et $B_0 \amalg B_1$.

Soient (i,x) et (j,y) dans $A_0 \amalg A_1$.

Supposons que $(i,x) \trianglelefteq_A (j,y)$.

► Plaçons-nous dans le cas où $i = j$.
On a $(i,x) \trianglelefteq_A (i,y)$ donc $x \preccurlyeq_i y$ par définition de $\trianglelefteq_A$.
Donc $f_i(x) \preccurlyeq_i f_i(y)$ par croissance de f_i.
Donc $\big(i, f_i(x)\big) \trianglelefteq_B \big(i, f_i(y)\big)$ par définition de $\trianglelefteq_B$.
Donc $\varphi(i,x) \trianglelefteq_B \varphi(i,y)$ par définition de φ.
On a donc $\varphi(i,x) \trianglelefteq_B \varphi(j,y)$ puisque $i = j$.

► Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
On a $\big(0, f_0(x)\big) \trianglelefteq_B \big(1, f_1(y)\big)$ par définition de $\trianglelefteq_B$.
Donc $\varphi(0,x) \trianglelefteq_B \varphi(1,y)$ par définition de φ.
On a donc $\varphi(i,x) \trianglelefteq_B \varphi(j,y)$ puisque $i = 0$ et $j = 1$.

► Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$ et $j = 0$.

C'est absurde puisque par hypothèse on a $(i, x) \trianglelefteq_A (j, y)$.

Donc dans tous les cas possibles, on a $\varphi(i, x) \trianglelefteq_B \varphi(j, y)$.

Donc si $(i, x) \trianglelefteq_A (j, y)$ alors $\varphi(i, x) \trianglelefteq_B \varphi(j, y)$.

Donc φ est croissante.

On montre de la même manière que ψ est croissante.

• Ainsi φ est bijective de $A_0 \amalg A_1$ vers $B_0 \amalg B_1$, et φ et sa réciproque ψ sont croissantes.

Donc φ est un isomorphisme d'ordre de $A_0 \amalg A_1$ vers $B_0 \amalg B_1$.

Donc $\boxed{A_0 \amalg A_1 \cong B_0 \amalg B_1}$.

2. Supposons que $\beta \leq \alpha$.

On a donc $\beta \subseteq \alpha$ par définition de $\leq$.

Pour tout $\gamma \in \beta$, on a donc $\gamma \in \alpha$ par définition de l'inclusion.

De même on a $\alpha \backslash \beta \subseteq \alpha$ donc pour tout $\gamma \in \alpha \backslash \beta$ on a $\gamma \in \alpha$.

Ainsi toute deuxième composante d'un élément de $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ est un élément de α.

On peut donc définir $\varphi := \begin{pmatrix} \beta \amalg (\alpha \backslash \beta) & \longrightarrow & \alpha \\ (i, \gamma) & \longmapsto & \gamma \end{pmatrix}$.

• Montrons que φ est injective.

Soient (i, γ) et (j, δ) dans $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ tels que $\varphi(i, \gamma) = \varphi(j, \delta)$.

Par définition de φ on a alors $\gamma = \delta$.

En particulier on a à la fois $(i, \gamma) \in \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ et à la fois $(j, \gamma) \in \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

Supposons par l'absurde que $i \neq j$.

On vient de voir que $(i, \gamma) \in \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ et $(j, \gamma) \in \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

Donc $\gamma \in \beta$ et $\gamma \in \alpha \backslash \beta$ par définition de $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

C'est absurde puisque β et $\alpha \backslash \beta$ sont disjoints par définition.

Par l'absurde on vient de montrer que $i = j$.

Comme $\gamma = \delta$ on a donc $(i, \gamma) = (j, \delta)$.

Donc pour tout (i, γ) et (j, δ) dans $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$, si $\varphi(i, \gamma) = \varphi(j, \delta)$ alors $(i, \gamma) = (j, \delta)$.

Donc φ est injective.

• Montrons que φ est surjective dans α.

Soit $\gamma \in \alpha$.

Comme $\beta \subseteq \alpha$, on a $\alpha = \beta \cup (\alpha \backslash \beta)$.

On a donc $\gamma \in \beta \cup (\alpha \backslash \beta)$ et donc $(\gamma \in \beta$ ou $\gamma \in \alpha \backslash \beta)$.

Si $\gamma \in \beta$ alors $\gamma = \varphi(0, \gamma)$ et si $\gamma \in \alpha \backslash \beta$ alors $\gamma = \varphi(1, \gamma)$ par définition de φ.

Dans les deux cas on a $\gamma \in \mathrm{im}(\varphi)$.

On a donc $\alpha \subseteq \mathrm{im}(\varphi)$.

Or par définition de φ on a $\alpha \supseteq \mathrm{im}(\varphi)$, et donc $\alpha = \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi φ est surjective dans α.

On en conclut donc que φ est bijective de $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ vers α.

• Montrons que φ est croissante.

Considérons $\trianglelefteq$ l'ordre de concaténation associé sur $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

Soient (i, γ) et (j, δ) dans $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.

Supposons que $(i, \gamma) \trianglelefteq (j, \delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = j$.
On a donc $\gamma \leq \delta$ par définition de $\trianglelefteq$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
On a donc $\gamma \in \beta$ et $\delta \in \alpha \backslash \beta$ par définition de $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$.
Comme $\delta \in \alpha \backslash \beta$, on a $\delta \notin \beta$ donc $\delta \not< \beta$ par définition de $<$.
Or $\leq$ est total chez les ordinaux donc $\beta \leq \delta$.
Comme $\gamma \in \beta$, on a $\gamma < \beta$ donc $\gamma < \delta$ et donc $\gamma \leq \delta$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$ et $j = 0$.
C'est absurde puisqu'on a fait l'hypothèse que $(i, \gamma) \trianglelefteq (j, \delta)$.

Donc dans les seuls cas possibles, on a nécessairement $\gamma \leq \delta$.

Or on a $\varphi(i, \gamma) = \gamma$ et $\varphi(j, \delta) = \delta$ par définition de φ, donc $\varphi(i, \gamma) \leq \varphi(j, \delta)$.

Donc si $(i, \gamma) \trianglelefteq (j, \delta)$ alors $\varphi(i, \gamma) \leq \varphi(j, \delta)$.

Donc φ est croissante.

Ainsi φ est bijective de $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ vers α et est croissante.

Or β et $\alpha \backslash \beta$ sont bien ordonnés d'après le théorème 1 page 27.

Donc $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ est bien ordonné d'après la proposition 50 page 125.

En particulier $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

Donc φ est un isomorphisme d'ordre $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ vers α.

En particulier on a $\boxed{\alpha \cong \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)}$.

CQFD.

Nous y voilà ! Prenons deux ordinaux α et β : ils sont bien ordonnés par $\leq$ donc $\alpha \amalg \beta$ est aussi bien ordonné par l'ordre de concaténation associé. Donc d'après le théorème 4 page 64, il existe un unique ordinal isomorphe à $\alpha \amalg \beta$, que l'on a noté $\mathrm{type}(\alpha \amalg \beta)$. L'intuition est confirmée par le théorème suivant : cet unique ordinal est en fait $\alpha + \beta$!

Au passage, remarquons que le fait de passer de $\alpha \amalg \beta$ à $\mathrm{type}(\alpha \amalg \beta)$ correspond à la renumérotation que l'on a fait dans l'exemple visuel de $2 + \omega$: c'était une étape nécessaire pour s'assurer d'avoir un ordinal à la fin.

Théorème 7 (Addition d'ordinaux et concaténation)

Soient α et β deux ordinaux.
On munit $\alpha \amalg \beta$ de l'ordre de concaténation associé.

Alors $\alpha + \beta = \text{type}(\alpha \amalg \beta)$.

Démonstration

Notons $\trianglelefteq$ l'ordre de concaténation associé à $\alpha \amalg \beta$.

Construisons un isomorphisme d'ordre entre $\alpha \amalg \beta$ et $\alpha + \beta$.

• Construction de l'application.

Remarquons que pour tout $(i, \gamma) \in \alpha \amalg \beta$, on a :

► Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$.
Alors par définition de $\alpha \amalg \beta$ on a $\gamma \in \alpha$.
On sait que $0 \subseteq \beta$ car le vide est inclus dans tout ensemble, donc $0 \leq \beta$.
Donc $\alpha + 0 \leq \alpha + \beta$ par croissance de l'addition à gauche.
Or $\alpha = \alpha + 0$ par définition de l'addition donc $\alpha \leq \alpha + \beta$.
On a donc $\alpha \subseteq \alpha + \beta$ par définition de $\leq$.
On a donc $\gamma \in \alpha + \beta$ par définition de l'inclusion.

► Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$.
Alors par définition de $\alpha \amalg \beta$ on a $\gamma \in \beta$ et donc $\gamma < \beta$.
On a donc $\alpha + \gamma < \alpha + \beta$ par stricte croissance de l'addition à gauche.
Donc $\alpha + \gamma \in \alpha + \beta$ par définition de $<$.

Ainsi, on peut poser $\varphi_\beta := \left(\begin{array}{ccc} \alpha \amalg \beta & \longrightarrow & \alpha + \beta \\ (i, \gamma) & \longmapsto & \begin{cases} \gamma & \text{si } i = 0 \\ \alpha + \gamma & \text{si } i = 1 \end{cases} \end{array} \right)$

Le fait d'avoir mis β en indice nous servira pour une preuve par induction sur β.

• Montrons que φ_β est croissante.

Soient (i, γ) et (j, δ) dans $\alpha \amalg \beta$.

Supposons que $(i, \gamma) \trianglelefteq (j, \delta)$.

► Plaçons-nous dans le cas où $i = 0 = j$.
Alors on a $\varphi_\beta(i, \gamma) = \gamma$ et $\varphi_\beta(j, \delta) = \delta$ par définition de φ_β.
Comme $(i, \gamma) \trianglelefteq (j, \delta)$ on a $\gamma \leq \delta$ par définition de $\trianglelefteq$.
On a donc $\varphi_\beta(i, \gamma) \leq \varphi_\beta(j, \delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 1 = j$.
Alors $\varphi_\beta(i,\gamma) = \alpha + \gamma$ et $\varphi_\beta(j,\delta) = \alpha + \delta$ par définition de φ_β.
Comme $(i,\gamma) \trianglelefteq (j,\delta)$ on a $\gamma \leq \delta$ par définition de $\trianglelefteq$.
On a donc $\alpha + \gamma \leq \alpha + \delta$ par croissance de l'addition à gauche.
On a donc $\varphi_\beta(i,\gamma) \leq \varphi_\beta(j,\delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
Alors $\gamma \in \alpha$ (et $\delta \in \beta$) par définition de $\alpha \amalg \beta$, donc $\gamma < \alpha$.
De plus $\varphi_\beta(i,\gamma) = \gamma$ et $\varphi_\beta(j,\delta) = \alpha + \delta$ par définition de φ_β.
Or on a $\gamma < \alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + \delta$.
On a donc $\gamma \leq \alpha + \delta$ par transitivité et donc $\varphi_\beta(i,\gamma) \leq \varphi_\beta(j,\delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$ et $j = 0$.
C'est absurde puisqu'on a fait l'hypothèse que $(i,\gamma) \trianglelefteq (j,\delta)$.

Dans tous les cas possibles on a $\varphi_\beta(i,\gamma) \leq \varphi_\beta(j,\delta)$.

Donc si $(i,\gamma) \trianglelefteq (j,\delta)$ alors $\varphi_\beta(i,\gamma) \leq \varphi_\beta(j,\delta)$.

Donc $\boxed{\varphi_\beta \text{ est croissante}}$.

• Montrons que φ_β est injective.

Soit (i,γ) et (j,δ) dans $\alpha \amalg \beta$.

Supposons que $\varphi_\beta(i,\gamma) = \varphi_\beta(j,\delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 0 = j$.
On a alors $\varphi_\beta(i,\gamma) = \gamma$ et $\varphi_\beta(j,\delta) = \delta$ par définition de φ_β.
Comme $\varphi_\beta(i,\gamma) = \varphi_\beta(j,\delta)$ on a donc $\gamma = \delta$.
Comme $i = j$ et $\gamma = \delta$ on a $(i,\gamma) = (j,\delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 1 = j$.
On a alors $\varphi_\beta(i,\gamma) = \alpha + \gamma$ et $\varphi_\beta(j,\delta) = \alpha + \delta$ par définition de φ_β.
Comme $\varphi_\beta(i,\gamma) = \varphi_\beta(j,\delta)$ on a donc $\alpha + \gamma = \alpha + \delta$.
On en déduit que $\gamma = \delta$ par régularité de l'addition à gauche.
Comme $i = j$ et $\gamma = \delta$ on a $(i,\gamma) = (j,\delta)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
On a alors $\gamma \in \alpha$ (et $\delta \in \beta$) par définition de $\alpha \amalg \beta$, donc $\gamma < \alpha$.
On a aussi $\varphi_\beta(i,\gamma) = \gamma$ et $\varphi_\beta(j,\delta) = \alpha + \delta$ par définition de φ_β.
Or on a $\gamma < \alpha = \alpha + 0 \leq \alpha + \delta$.
On a donc $\gamma < \alpha + \delta$ par transitivité, donc $\varphi_\beta(i,\gamma) < \varphi_\beta(j,\delta)$.
Or on a fait l'hypothèse que $\varphi_\beta(i,\gamma) = \varphi_\beta(j,\delta)$.
C'est absurde par antiréflexivité de $<$.

▶ Le cas où $i = 1$ et $j = 0$ est absurde pour la même raison.

Les deux seuls cas possibles conduisent alors à $(i, \gamma) = (j, \delta)$.

Donc si $\varphi_\beta(i, \gamma) = \varphi_\beta(j, \delta)$ alors $(i, \gamma) = (j, \delta)$.

Donc $\boxed{\varphi_\beta \text{ est injective}}$.

• Montrons que φ_β est surjective sur $\alpha + \beta$.

On sait déjà par définition de φ_β que $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \subseteq \alpha + \beta$.

Fixons un ordinal α et posons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal β par

$$P(\beta) \iff \mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha + \beta$$

Remarquons la chose suivante : soient β et β' deux ordinaux tels que $\beta \leq \beta'$.

On a alors $\beta \subseteq \beta'$ donc $\big(\{1\} \times \beta\big) \subseteq \big(\{1\} \times \beta'\big)$ et donc $\alpha \amalg \beta \subseteq \alpha \amalg \beta'$.

Or pour tout $(i, \gamma) \in \alpha \amalg \beta$ on a $\varphi_\beta(i, \gamma) = \varphi_{\beta'}(i, \gamma)$ par définition de φ_β et $\varphi_{\beta'}$.

Autrement dit on a alors $\varphi_\beta = (\varphi_{\beta'})_{|\alpha \amalg \beta}$. Notons $(\star)$ ce fait.

► *Initialisation*

On a alors $\alpha + 0 = \alpha$ par définition de l'addition.

Montrons que $\mathrm{im}(\varphi_0) \supseteq \alpha$.

Soit $\gamma \in \alpha$.

On a alors $\varphi_0(0, \gamma) = \gamma$ par définition de φ_0.

Donc $\gamma \in \mathrm{im}(\varphi_0)$.

On a donc $\mathrm{im}(\varphi_0) \supseteq \alpha$ et donc $\mathrm{im}(\varphi_0) = \alpha$.

Ainsi on a $\mathrm{im}(\varphi_0) = \alpha + 0$ et donc on a $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit β un ordinal tel que $P(\beta)$, c'est-à-dire $\mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha + \beta$.

On a $\alpha + S(\beta) = S(\alpha + \beta)$ par définition de l'addition.

Montrons que $\mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big) \supseteq S(\alpha + \beta)$.

Soit $\gamma \in S(\alpha + \beta)$.

On a donc $\gamma < S(\alpha + \beta)$ par définition de $<$.

On a donc $\gamma \leq \alpha + \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\gamma < \alpha + \beta$ ou $\gamma = \alpha + \beta$.

Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \alpha + \beta$.

On a donc $\gamma \in \alpha + \beta$ par définition de $<$.

Or par hypothèse on a $\mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha + \beta$ donc on a $\gamma \in \mathrm{im}(\varphi_\beta)$.

Or $\beta < S(\beta)$ d'après la proposition 14 page 40 donc $\beta \leq S(\beta)$.

On a donc $\varphi_\beta = \big(\varphi_{S(\beta)}\big)_{|\alpha\amalg\beta}$ d'après $(\star)$ et donc $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \subseteq \mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big)$.
Ainsi on a $\gamma \in \mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big)$ par définition de l'inclusion.

Plaçons-nous dans le cas où $\gamma = \alpha + \beta$.
On a $\beta < S(\beta)$ d'après la proposition 14 page 40 donc $\beta \in S(\beta)$.
Ainsi $\gamma = \alpha + \beta = \varphi_{S(\beta)}(1, \beta)$ par définition de $\varphi_{S(\beta)}$.
On a donc $\gamma \in \mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big)$.

Ainsi dans les deux cas on a $\gamma \in \mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big)$.
On a donc $\mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big) \supseteq S(\alpha+\beta)$ et donc $\mathrm{im}\big(\varphi_{S(\beta)}\big) = S(\alpha+\beta)$.
Autrement dit on a $P\big(S(\beta)\big)$.
Donc pour tout ordinal β, si $P(\beta)$ alors $P\big(S(\beta)\big)$.

► *Hérédité limite*
Soit β un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \beta, P(\delta)$.
Montrons que $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \supseteq \alpha + \beta$.
Soit $\gamma \in \alpha + \beta$.
On a donc $\gamma < \alpha + \beta$ par définition de $<$.
Par définition β est un ordinal limite non nul.
On a donc $\alpha + \beta = \sup\limits_{\delta<\beta}(\alpha+\delta)$ par définition de l'addition.
On a donc $\gamma < \sup\limits_{\delta<\beta}(\alpha+\delta)$ donc γ n'est pas un majorant de $\big\{\alpha+\delta \;\big|\; \delta < \beta\big\}$.
Il existe donc un ordinal $\delta < \beta$ tel que l'on a n'a pas $\alpha + \delta \leq \gamma$.
Comme $\leq$ est total chez les ordinaux, on a donc $\gamma < \alpha + \delta$ et donc $\gamma \in \alpha + \delta$.
Or $\delta < \beta$ donc par hypothèse on a $P(\delta)$ et donc $\alpha + \delta = \mathrm{im}(\varphi_\delta)$.
Comme $\gamma \in \alpha + \delta$ on a donc $\gamma \in \mathrm{im}(\varphi_\delta)$.
Comme $\delta < \beta$ on a $\delta \leq \beta$ donc $\varphi_\delta = (\varphi_\beta)_{|\alpha\amalg\delta}$ d'après $(\star)$.
En particulier on a $\mathrm{im}(\varphi_\delta) \subseteq \mathrm{im}(\varphi_\beta)$ et donc $\gamma \in \mathrm{im}(\varphi_\beta)$.
On a donc $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \supseteq \alpha + \beta$ et donc $\mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha + \beta$.
Autrement dit on a $P(\beta)$.
Donc pour tout ordinal limite non nul β, si $\forall \delta < \beta, P(\delta)$ alors $P(\beta)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.
Donc pour tout ordinal β on a $P(\beta)$.
Autrement dit pour tout ordinal β on a $\mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha + \beta$.
Autrement dit pour tout ordinal β, $\boxed{\varphi_\beta \text{ est surjective dans } \alpha + \beta}$.

• Conclusion.

Fixons à nouveau un ordinal β.

Alors l'application $\varphi_\beta : \alpha \amalg \beta \longrightarrow \alpha + \beta$ est croissante, injective et surjective dans $\alpha + \beta$.

Or α et β sont bien ordonnés d'après le théorème 1 page 27.

Donc $\alpha \amalg \beta$ est bien ordonné d'après la proposition 50 page 125.

Donc $\alpha \amalg \beta$ est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

Donc φ_β est un isomorphisme d'ordres de $\alpha \amalg \beta$ dans $\alpha + \beta$.

Or $\alpha + \beta$ est un ordinal par définition.

Donc $\boxed{\mathrm{type}(\alpha \amalg \beta) = \alpha + \beta}$ par définition du type d'un ensemble bien ordonné.

CQFD.

À l'école primaire, après l'addition vient rapidement la soustraction. Nous apprenons à cet âge-là qu'il n'est pas possible de soustraire un nombre par un nombre plus grand : la raison est simplement que cela produit un nombre négatif, notion qui n'est à ce moment-là pas abordée. C'est un peu le cas ici : il n'est pas encore temps de définir les nombres négatifs, et donc nous nous contenterons de ne pouvoir soustraire que les ordinaux plus grands par des ordinaux plus petits.

Comme remarqué plus haut, nous allons bien évidemment nous servir de la proposition 51 page 126 qui nous fournit au fond tout ce dont nous avons besoin.

Proposition 52 (Soustraction d'ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\beta \leq \alpha$
2. Il existe un ordinal σ tel que $\alpha = \beta + \sigma$.

Dans ce cas-là, un tel ordinal σ est unique, et vérifie $\sigma \leq \alpha$.
Plus précisément on a $\sigma = \mathrm{type}(\alpha \backslash \beta)$, et donc $\alpha = \beta + \mathrm{type}(\alpha \backslash \beta)$.

Démonstration

Commençons par montrer l'équivalence.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que $\beta \leq \alpha$.

On a alors $\alpha \cong \beta \amalg (\alpha \backslash \beta)$ d'après la proposition 51 page 126.

Par définition du type on a $\alpha \backslash \beta \cong \mathrm{type}(\alpha \backslash \beta)$.

On a aussi $\beta \cong \beta$ par réflexivité de l'isomorphie d'ordres.

On a donc $\beta \amalg (\alpha \backslash \beta) \cong \beta \amalg \mathrm{type}(\alpha \backslash \beta)$ d'après la proposition 51 page 126.

On a donc les isormophies d'ordres suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &\cong \beta \amalg (\alpha\backslash\beta)\\ &\cong \beta \amalg \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta) \text{ par ce qui précède}\\ &\cong \mathrm{type}\Big(\beta \amalg \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta)\Big) \text{ par définition du type}\\ &\cong \beta + \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta) \text{ d'après le théorème 7 page 130}\end{aligned}$$

Ainsi $\alpha \cong \beta + \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta)$ par transitivité de l'isomorphie d'ordres.

Or deux ordinaux isomorphes sont nécessairement égaux d'après la proposition 26 page 61.

On a donc $\boxed{\alpha = \beta + \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta)}$.

Remarquons que $\alpha\backslash\beta \subseteq \alpha$ par définition de la différence ensembliste.

On a donc $\mathrm{type}(\alpha\backslash\beta) \leq \mathrm{type}(\alpha)$ d'après la proposition 28 page 68.

Or α est un ordinal donc $\mathrm{type}(\alpha) = \alpha$, si bien que $\mathrm{type}(\alpha\backslash\beta) \leq \alpha$.

Autrement dit en notant $\sigma := \mathrm{type}(\alpha\backslash\beta)$, on a $\boxed{\alpha = \beta + \sigma \text{ et } \sigma \leq \alpha}$.

$\boxed{1\Leftarrow 2}$

Supposons qu'il existe un ordinal σ tel que $\alpha = \beta + \sigma$.

Ainsi on a $\beta = \beta + 0 \leq \beta + \sigma = \alpha$ donc $\boxed{\beta \leq \alpha}$.

Montrons l'unicité

On se place à présent dans le cas où effectivement $\beta \leq \alpha$.

Soit σ' un ordinal tel que $\alpha = \beta + \sigma'$.

On a $\sigma < \sigma'$ ou $\sigma' < \sigma$ ou $\sigma = \sigma'$ d'après le théorème 1 page 27.

Si $\sigma < \sigma'$ alors $\beta + \sigma < \beta + \sigma'$ par stricte croissance de l'addition à gauche.

De même si $\sigma' < \sigma$ alors $\beta + \sigma' < \beta + \sigma$.

Dans ces deux cas on a donc $\alpha < \alpha$, ce qui est absurde par antiréflexivité de $<$.

On a donc nécessairement $\sigma = \sigma'$.

On a donc $\boxed{\text{unicité d'un tel ordinal } \sigma}$.

CQFD.

3 Multiplication d'ordinaux

3.1 Définition et propriétés

Pour définir la multiplication chez les ordinaux, on peut à nouveau s'inspirer de la multiplication chez les entiers naturels. Comment définir 5×3 ? Intuitivement il s'agit de $5+5+5$, c'est-à-dire une répétition d'additions de 5, où le nombre 5 est répété 3 fois. Ce n'est cependant pas une définition très pratique ici, car on n'a pas particulièrement donné de sens à "*répéter* 3 *fois une addition*". Il nous faudrait plutôt une définition par récursion, puisqu'on a développé tous les outils pour cela précédemment. On peut remarquer que $5 \times 2 = 5 + 5$, si bien que $5 \times 3 = 5 + 5 + 5 = (5 + 5) + 5 = (5 \times 2) + 5$. En voilà une définition par récursion !

Ainsi, pour définir 5×3 on considère que 5×2 est déjà défini, puis on pose $5\times3 := (5\times2)+5$. Autrement dit, on a posé $5 \times (2 + 1) := (5 \times 2) + 5$. Cela nous guide donc vers la définition suivante.

Définition 22 (Multiplication d'ordinaux)

Soit α un ordinal.
On pose

$$\begin{cases} \alpha \cdot 0 := 0 \\ \alpha \cdot (\beta + 1) := (\alpha \cdot \beta) + \alpha \text{ pour tout ordinal } \beta \\ \alpha \cdot \gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha \cdot \delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Remarque :

1. Comme on peut le voir dans la définition, pour deux ordinaux α et β on note généralement $\alpha \cdot \beta$ plutôt que $\alpha \times \beta$. Cela évitera au passage la confusion avec le produit cartésien, même si nous verrons qu'il y a un lien entre les deux. Parfois même on n'écrira aucun symbole entre les deux : on notera $\alpha\beta$ à la place de $\alpha \cdot \beta$.
2. Afin de simplifier les expressions, on considère désormais que la multiplication des ordinaux est prioritaire sur l'addition des ordinaux. Ainsi, l'expression $\alpha \cdot \beta + \gamma$ désigne $(\alpha \cdot \beta) + \gamma$ et non $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$.
3. Pour justifier proprement cette définition, on utilise simplement la proposition 37 page 101, en posant $\mu_0 := 0$, et $G(\xi) := \xi + \alpha$ pour tout ordinal ξ. La proposition nous donne alors une unique assertion fonctionnelle F_α telle que

$$\begin{cases} F_\alpha(0) = 0 \\ F_\alpha(\beta + 1) = F_\alpha(\beta) + \alpha \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F_\alpha(\gamma) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F_\alpha(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

et on pose alors $\alpha \cdot \beta := F_\alpha(\beta)$ pour tout ordinal β.

Exemple :
On a $3\omega = \sup_{n<\omega}(3n) = \sup\{0, 3, 6, 9, 12, \dots\} = \omega$.
En fait plus généralement pour tout entier naturel m non nul on a

$$m\omega = \sup\{m \cdot 0, m \cdot 1, m \cdot 2, \dots\} = \omega$$

En particulier $2\omega = \omega$. Pourtant, on a $\omega 2 = \omega 1 + \omega = \omega + \omega$. Or on a vu dans un exemple précédent que $\omega < \omega + \omega$, si bien que $2\omega < \omega 2$ et donc $2\omega \neq \omega 2$. Et oui, la multiplication des ordinaux n'est elle non plus pas commutative ! Heureusement nous verrons qu'elle l'est quand on se restreint aux entiers naturels !

Proposition 53 (0 est absorbant pour la multiplication)

Pour tout ordinal α, on a $\alpha \cdot 0 = 0 = 0 \cdot \alpha$.
On dit que 0 est **absorbant** pour la multiplication des ordinaux.

Démonstration

On sait déjà que pour tout ordinal α, on a $\alpha \cdot 0 = \alpha$ par définition de la multiplication.

Montrons l'autre égalité par induction.

Considérons P l'assertion à paramètres définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff 0 \cdot \alpha = 0$$

► *Initialisation*

On a $0 \cdot 0 = 0$ par définition de la multiplication, et donc $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

On a donc

$$\begin{aligned} 0 \cdot (\alpha + 1) &= 0 \cdot \alpha + 0 \text{ par définition de la multiplication} \\ &= 0 \cdot \alpha \text{ par neutralité de } 0 \text{ pour l'addition} \\ &= 0 \text{ puisqu'on a } P(\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi on a $0 \cdot (\alpha + 1) = 0$ et donc $P(\alpha + 1)$.

Ainsi pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha + 1)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

Autrement dit pour tout $\beta < \alpha$, on a $0 \cdot \beta = 0$.

Par définition de la multiplication on a donc $0 \cdot \alpha = \sup_{\beta<\alpha}(0 \cdot \beta) = \sup_{\beta<\alpha} 0 = 0$.

Autrement dit on a $P(\alpha)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta \in \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } 0 \cdot \alpha = 0}$.

CQFD.

Proposition 54 (1 est neutre pour la multiplication)

Pour tout ordinal α, on a $\alpha \cdot 1 = \alpha = 1 \cdot \alpha$.
On dit que 1 est **neutre** pour la multiplication des ordinaux.

Démonstration

Pour tout ordinal α on a

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot 1 &= \alpha \cdot (0+1) \text{ par définition de } 1 \\
&= \alpha \cdot 0 + \alpha \text{ par définition de la multiplication} \\
&= 0 + \alpha \text{ par définition de la multiplication} \\
&= \alpha \text{ par neutralité de } 0 \text{ pour l'addition}
\end{aligned}$$

Ainsi on sait déjà que $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } \alpha \cdot 1 = \alpha}$.

Montrons l'autre égalité par induction.

Considérons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff 1 \cdot \alpha = \alpha$$

► *Initialisation*

On a $1 \cdot 0 = 0$ par définition de la multiplication, on a donc $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
1 \cdot (\alpha+1) &= 1 \cdot \alpha + 1 \text{ par définition de l'addition} \\
&= \alpha + 1 \text{ puisque l'on a } P(\alpha)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $1 \cdot (\alpha + 1) = \alpha + 1$.

Autrement dit on a $P(\alpha + 1)$.

Ainsi pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha + 1)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

Autrement dit pour tout $\beta < \alpha$ on a $1 \cdot \beta = \beta$.

Or α est un ordinal limite donc on a $\sup\limits_{\beta \in \alpha} \beta = \sup(\alpha) = \alpha$ d'après la prop. 22 p. 54.

On a donc $1 \cdot \alpha = \sup\limits_{\beta < \alpha}(1 \cdot \beta) = \sup\limits_{\beta \in \alpha} \beta = \alpha$ par définition de la multiplication.

Ainsi on a $1 \cdot \alpha = \alpha$, et donc on a $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } 1 \cdot \alpha = \alpha}$.

CQFD.

De même que l'addition de deux entiers naturels donne toujours un entier naturel, nous sommes bien heureux qu'il en soit de même pour la multiplication.

Proposition 55 (Multiplication de deux entiers naturels)

Pour tout entiers naturels n et m, l'ordinal nm est un entier naturel.
On dit que $\mathbb{N} = \omega$ est **stable** par multiplication.

Démonstration

Fixons n un entier naturel.

Soit P l'assertion à paramètre définie pour tout entier naturel m par

$$P(m) \iff nm \in \mathbb{N}$$

Raisonnons par induction sur les entiers naturels.

► *Initialisation*

On a $n \cdot 0 = 0$ par définition de la multiplication.

Or 0 est un entier naturel donc $n \cdot 0$ est un entier naturel : on a donc $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$.

Autrement dit nm est un entier naturel.

Donc $nm + n$ est un entier naturel d'après la proposition 40 page 106.

Or on a $n(m + 1) = nm + n$ par définition de la multiplication.

Donc $n(m + 1)$ est un entier naturel : on a donc $P(m + 1)$.

Donc pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P(m + 1)$.

Ainsi P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel m on a $P(m)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout entier naturel } m \text{, l'ordinal } nm \text{ est un entier naturel}}$.

CQFD.

Dans la proposition qui suit, la stricte croissance nécessite forcément que α soit non nul car 0 est absorbant pour la multiplication.

Proposition 56 (Croissance de la multiplication des ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Supposons ici que α est **non nul**.
   Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha\beta < \alpha\gamma$.
   On dit que la multiplication à gauche est **strictement croissante**.
2. Si $\beta \leq \gamma$ alors $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$.
   On dit que la multiplication à gauche est **croissante**.
3. Si $\beta \leq \gamma$ alors $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$.
   On dit que la multiplication à droite est **croissante**.

Démonstration

1. Fixons deux ordinaux α et β, avec α non nul.

Posons $P_{\alpha,\beta}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$P_{\alpha,\beta}(\gamma) \iff \Big(\beta < \gamma \Rightarrow \alpha\beta < \alpha\gamma\Big)$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

Il est faux de dire que $\beta \in \varnothing$ donc il est faux de dire que $\beta \in 0$ et donc de dire $\beta < 0$.

La prémisse $\beta < 0$ étant fausse, on a l'implication $\beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta < \alpha \cdot 0$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Commençons par remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned}\alpha\gamma &= \alpha\gamma + 0 \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\ &< \alpha\gamma + \alpha \text{ par stricte croissance de l'addition à gauche et } \alpha \neq 0\\ &= \alpha(\gamma+1) \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha\gamma < \alpha(\gamma + 1)$.

Supposons que $\beta < \gamma + 1$.

On a alors $\beta \leq \gamma$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.
  On a alors $\alpha\beta < \alpha\gamma$ d'après $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.
  Or on a dit que $\alpha\gamma < \alpha(\gamma + 1)$, donc $\alpha\beta < \alpha(\gamma + 1)$ par transitivité de $<$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.
  On a donc $\alpha\beta = \alpha\gamma$.
  Or on a dit que $\alpha\gamma < \alpha(\gamma + 1)$, donc $\alpha\beta < \alpha(\gamma + 1)$.

Dans les deux cas on a $\alpha\beta < \alpha(\gamma + 1)$.

Donc si $\beta < \gamma + 1$ alors $\alpha\beta < \alpha(\gamma + 1)$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma + 1)$.

Donc pour tout ordinal γ, si $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma + 1)$.

▶ *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall\delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Supposons que $\beta < \gamma$.

On a donc $\beta + 1 < \gamma$ d'après la proposition 15 page 44 car γ est limite.

On a donc $\alpha(\beta + 1) \leq \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha\delta)$ car la borne supérieure est un majorant.

Comme γ est limite, on a $\alpha\gamma = \sup\limits_{\delta<\gamma}(\alpha\delta)$ donc $\alpha(\beta + 1) \leq \alpha\gamma$.

De plus par hypothèse on a $\forall\delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

Or on a dit que $\beta + 1 < \gamma$ donc $P_{\alpha,\beta}(\beta + 1)$.

Autrement dit on a $\beta < \beta + 1 \Rightarrow \alpha\beta < \alpha(\beta + 1)$.

Or on a $\beta < \beta + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha\beta < \alpha(\beta + 1)$ par modus ponens.

Ainsi on a $\alpha\beta < \alpha(\beta + 1) \leq \alpha\gamma$ donc $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

Donc si $\beta < \gamma$ alors $\alpha\beta < \alpha\gamma$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall\delta < \gamma$, $P_{\alpha,\beta}(\delta)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi $P_{\alpha,\beta}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ, on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \gamma, \text{ si } \beta < \gamma \text{ alors } \alpha\beta < \alpha\gamma.}$

2. Fixons trois ordinaux α, β et γ.

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où $\alpha = 0$.

On a alors $\alpha\beta = 0 = \alpha\gamma$ car 0 est absorbant pour la multiplication.

On a donc $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$ par réflexivité de $\leq$.

En particulier on a l'implication $\boxed{\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha\beta \leq \alpha\gamma}$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où α est non nul.

Supposons que $\beta \leq \gamma$.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.
  Comme $\alpha \neq 0$, on a $\alpha\beta < \alpha\gamma$ d'après 1, donc $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.
  On a donc $\alpha\beta = \alpha\gamma$, donc $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$ par réflexivité de $\leq$.

Dans les deux cas on a $\alpha\beta \leq \alpha\gamma$.

Donc $\boxed{\text{si } \beta \leq \gamma \text{ alors } \alpha\beta \leq \alpha\gamma}$.

3. Fixons deux ordinaux β et γ.

Supposons que $\beta \leq \gamma$.

Posons $Q_{\beta,\gamma}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$Q_{\beta,\gamma}(\alpha) \iff \beta\alpha \leq \gamma\alpha$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

Par définition de la multiplication on a $\beta \cdot 0 = 0 = \gamma \cdot 0$.

En particulier on a $\beta \cdot 0 \leq \gamma \cdot 0$, c'est-à-dire $Q_{\beta,\gamma}(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Autrement dit on a $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$.

On a alors

$$\begin{aligned}\beta(\alpha+1) &= \beta\alpha+\beta \text{ par définition de la multiplication}\\ &\leq \gamma\alpha+\beta \text{ par croissance de l'addition à droite}\\ &\leq \gamma\alpha+\gamma \text{ par croissance de l'addition à gauche}\\ &= \gamma(\alpha+1) \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

On a donc $\beta(\alpha+1) \leq \gamma(\alpha+1)$, donc $Q_{\beta,\gamma}(\alpha+1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$ alors $Q_{\beta,\gamma}(\alpha+1)$..

▶ *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall\delta < \alpha, Q_{\beta,\gamma}(\delta)$.

Soit δ un ordinal tel que $\delta < \alpha$. On a alors

$$\begin{aligned}\beta\delta &\leq \gamma\delta \text{ d'après } Q_{\beta,\gamma}(\delta)\\ &\leq \sup_{\varepsilon<\alpha}(\gamma\varepsilon) \text{ car la borne supérieure est un majorant}\\ &= \gamma\alpha \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

On a donc $\beta\delta \leq \gamma\alpha$.

Donc pour tout ordinal δ tel que $\delta < \alpha$ on a $\beta\delta \leq \gamma\alpha$.

Donc $\sup_{\delta<\alpha}(\beta\delta) \leq \gamma\alpha$ par minimalité de la borne supérieure.

Donc $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$ par définition de la multiplication, donc $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall\delta < \alpha, Q_{\beta,\gamma}(\delta)$ alors $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Ainsi $Q_{\beta,\gamma}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $Q_{\beta,\gamma}(\alpha)$.

Autrement dit pour tout ordinal α, on a $\beta\alpha \leq \gamma\alpha$.

Donc pour tout ordinal α, $\boxed{\text{si } \beta \leq \gamma \text{ alors } \beta\alpha \leq \gamma\alpha}$.

CQFD.

Remarque :
Nous pouvons désormais montrer que $2\omega = \omega$ et que $2\omega \neq \omega \cdot 2$.
Pour tout $n \in \omega$ on a $2n \in \omega$ d'après la proposition 55 page 139.
Donc pour tout ordinal $n < \omega$ on a $2n < \omega$ par définition de $<$.

On a donc $2\omega = \sup_{n<\omega}(2n) \leq \omega$ par minimalité de la borne supérieure, donc $2\omega \leq \omega$.

Par définition de 2 on a $2 = S(1)$.
On a donc $1 < 2$ d'après la proposition 14 page 40, donc $1 \leq 2$.
On a donc $1\omega \leq 2\omega$ par croissance de la multiplication à droite.
Or on a $1\omega = \omega$ car 1 est neutre pour la multiplication.
On a donc $\omega \leq 2\omega$ et donc finalement $\boxed{\omega = 2\omega}$.

Mais on a dit que $1 < 2$ donc $\omega \cdot 1 < \omega \cdot 2$ par stricte croissance de la multiplication.
Or on a $\omega \cdot 1 = \omega$ car 1 est neutre pour la multiplication.
On a donc $\omega < \omega \cdot 2$, donc en particulier $\omega \neq \omega \cdot 2$.
On en déduit que $\boxed{2\omega \neq \omega \cdot 2}$ par ce qui précède.

Proposition 57 (Régularité de la multiplication à gauche)

Soient α, β et γ trois ordinaux, avec α **non nul**.
Si $\alpha\beta = \alpha\gamma$ alors $\beta = \gamma$.
On dit que la multiplication à gauche des ordinaux est **régulière**.

Démonstration

Montrons-le par contraposition.

Supposons que $\beta \neq \gamma$.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\gamma < \beta$ d'après le théorème 1 page 27.

Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha\beta < \alpha\gamma$ par stricte croissance de la multiplication à gauche.

Si $\gamma < \beta$ alors $\alpha\gamma < \alpha\beta$ par stricte croissance de la multiplication à gauche.

Dans les deux cas on a $\alpha\beta \neq \alpha\gamma$ par antiréflexivité de $<$.

Donc si $\beta \neq \gamma$ alors $\alpha\beta \neq \alpha\gamma$.

Donc par contraposition, $\boxed{\text{si } \alpha\beta = \alpha\gamma \text{ alors } \beta = \gamma}$.

CQFD.

Remarque :
Malheureusement la multiplication à droite n'est pas régulière.
En effet, on a vu que $1\omega = \omega = 2\omega$ alors que $1 \neq 2$.

Proposition 58 (Continuité à droite de la multiplication)

Soient α un ordinal et X un ensemble **non vide** d'ordinaux.
On a $\sup_{\xi\in X}(\alpha\xi) = \alpha \sup_{\xi\in X} \xi$.
Autrement dit la multiplication à gauche est continue.

Démonstration

Par définition de la multiplication des ordinaux, pour tout ordinal limite non nul γ, on a

$$\alpha\gamma = \sup_{\delta\in\gamma}(\alpha\delta)$$

On peut alors appliquer la proposition 43 page 113 pour conclure.

CQFD.

Remarque :
Malheureusement, la multiplication à droite des ordinaux n'est pas continue.
En effet, prenons $X = \omega = \alpha$. À la manière de la remarque où l'on a montré que $2\omega = \omega$, on peut montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $n\omega = \omega$.
On a donc $\sup\limits_{n<\omega}(n\omega) = \sup\limits_{n<\omega} \omega = \omega$.
Mais comme ω est un ordinal limite, on a $\sup\limits_{n<\omega} n = \omega$ donc $\left(\sup\limits_{n<\omega} n\right) \omega = \omega\omega$.
Or par définition de la multiplication on a $\omega\omega = \sup\limits_{n<\omega}(\omega n)$.
En particulier on a $\omega \cdot 2 \leq \sup\limits_{n<\omega}(\omega n)$ donc $\omega \cdot 2 \leq \omega\omega$.
Or on a montré plus tôt que $\omega < \omega \cdot 2$, donc $\omega < \omega\omega$ par transitivité de $<$.
En particulier $\omega \neq \omega\omega$ et donc $\sup\limits_{n<\omega}(n\omega) \neq \left(\sup\limits_{n<\omega} n\right) \omega$.

Proposition 59 (Distributivité de la multiplication sur l'addition)

Pour tout ordinaux α, β et γ, on a l'égalité

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

On dit que la multiplication à gauche est **distributive** sur l'addition.

Démonstration

Fixons deux ordinaux α et β.

Posons $P_{\alpha,\beta}$ l'assertion à paramètre définie pour tout γ par

$$P_{\alpha,\beta}(\gamma) \iff \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

On a

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+0) &= \alpha\beta \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\ &= \alpha\beta + 0 \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\ &= \alpha\beta + \alpha\cdot 0 \text{ car } 0 \text{ est absorbant pour la multiplication}\end{aligned}$$

On a donc $\alpha(\beta+0) = \alpha\beta + \alpha\cdot 0$, c'est-à-dire $P_{\alpha,\beta}(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\alpha\big(\beta+\gamma+1\big) &= \alpha(\beta+\gamma)+\alpha \text{ par définition de la multiplication}\\ &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha \text{ par } P_{\alpha,\beta}(\gamma)\\ &= \alpha\beta+\alpha(\gamma+1) \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha\big(\beta+\gamma+1\big) = \alpha\beta+\alpha(\gamma+1)$, c'est-à-dire $P_{\alpha,\beta}(\gamma+1)$.

Donc pour tout ordinal γ, si $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma+1)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

On a alors

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma) &= \alpha\sup_{\delta<\gamma}(\beta+\delta) \text{ par définition de l'addition}\\ &= \sup_{\delta<\gamma}\big(\alpha(\beta+\delta)\big) \text{ par continuité de la multiplication à gauche}\\ &= \sup_{\delta<\gamma}(\alpha\beta+\alpha\delta) \text{ puisque } \forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)\\ &= \alpha\beta+\sup_{\delta<\gamma}(\alpha\delta) \text{ par continuité de l'addition à gauche}\\ &= \alpha\beta+\alpha\gamma \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall\delta<\gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi $P_{\alpha,\beta}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$, c'est-à-dire $\boxed{\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma}$.

CQFD.

Remarque :
Malheureusement la multiplication à droite n'est pas distributive.
En effet, on a déjà vu que $(1+1)\omega = 2\omega = \omega$.
On a aussi vu que $1\omega + 1\omega = \omega + \omega$.
Comme $\omega \neq \omega + \omega$, on a $(1+1)\omega \neq 1\omega + 1\omega$.

Proposition 60 (Associativité de la multiplication)

Pour tout ordinaux α, β et γ, on a l'égalité

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

On dit que la multiplication des ordinaux est **associative**.

Démonstration

Fixons deux ordinaux α et β.

Posons $P_{\alpha,\beta}$ l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$P_{\alpha,\beta}(\gamma) \iff (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

On a $(\alpha\beta)\cdot 0 = 0 = \alpha \cdot 0 = \alpha(\beta \cdot 0)$ car 0 est absorbant pour la multiplication des ordinaux.

On a donc $P_{\alpha,\beta}(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)(\gamma+1) &= (\alpha\beta)\gamma + \alpha\beta \text{ par définition de la multiplication}\\ &= \alpha(\beta\gamma) + \alpha\beta \text{ par } P_{\alpha,\beta}(\gamma)\\ &= \alpha(\beta\gamma + \beta) \text{ par distributivité}\\ &= \alpha\big(\beta(\gamma+1)\big) \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $(\alpha\beta)(\gamma+1) = \alpha\big(\beta(\gamma+1)\big)$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma+1)$.

Donc pour tout ordinal γ, si $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma+1)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite tel que $\forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$.

On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)\gamma &= \sup_{\delta<\gamma}\big((\alpha\beta)\delta\big) \text{ par définition de la multiplication}\\ &= \sup_{\delta<\gamma}\big(\alpha(\beta\delta)\big) \text{ car } \forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)\\ &= \alpha \sup_{\delta<\gamma}(\beta\delta) \text{ par continuité de la multiplication à gauche}\\ &= \alpha(\beta\gamma) \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Autrement dit on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall \delta < \gamma, P_{\alpha,\beta}(\delta)$ alors $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Ainsi $P_{\alpha,\beta}$ vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $P_{\alpha,\beta}(\gamma)$.

Autrement dit pour tout ordinal γ, on a $\boxed{(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)}$.

CQFD.

Remarque :
Désormais pour trois ordinaux α, β et γ trois ordinaux on notera $\alpha\beta\gamma$ pour désigner indifféremment $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$, puisque l'on vient de voir qu'il s'agit du même ordinal.

On a vu lors de la proposition 53 page 137 que 0 est absorbant pour la multiplication. Autrement dit pour deux ordinaux, si au moins l'un des deux est nul alors leur produit sera nul. Mais la réciproque est-elle vraie ? Autrement dit, si le produit de deux ordinaux est nul, cela veut-il dire qu'au moins un des deux est nul ? La réponse est oui : on parle cette fois d'intégrité.

Proposition 61 (Intégrité de la multiplication des ordinaux)

Soient α et β deux ordinaux.
Si $\alpha\beta = 0$ alors $(\alpha = 0$ ou $\beta = 0)$.
On dit que la multiplication des ordinaux est **intègre**.

Démonstration

Supposons que $\alpha\beta = 0$ et que $\alpha \neq 0$.

On sait que $\alpha \cdot 0 = 0$ car 0 est absorbant pour la multiplication.

Ainsi on a $\alpha\beta = \alpha \cdot 0$.

Or α est non nul par hypothèse.

On a donc $\beta = 0$ par régularité de la multiplication à gauche.

Donc si $(\alpha\beta = 0$ et $\alpha \neq 0)$ alors $\beta = 0$.

Donc $\boxed{\text{si } \alpha\beta = 0 \text{ alors } (\alpha = 0 \text{ ou } \beta = 0)}$.

CQFD.

On a vu lors d'exemple précédents que la multiplication entre ordinaux n'est pas commutative. Heureusement, elle l'est chez les entiers naturels.

Proposition 62 (Commutativité de la multiplication des entiers)

Soient n et m deux entiers naturels.
Alors $mn = nm$.
On dit que la multiplication des entiers naturels est **commutative**.

Démonstration

• On a vu que la multiplication à gauche est distributive sur l'addition.

Montrons que chez les entiers naturels, la multiplication à droite l'est aussi.

Fixons p et q deux entiers naturels.

Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ l'assertion « $(p+q)n = pn + qn$ ».

Initialisation

On a

$$\begin{aligned}(p+q)\cdot 0 &= 0 \text{ car } 0 \text{ est absorbant pour la multiplication}\\ &= 0+0 \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\ &= p\cdot 0 + q\cdot 0 \text{ car } 0 \text{ est absorbant pour la multiplication}\end{aligned}$$

Ainsi on a $(p+q)\cdot 0 = p\cdot 0 + q \cdot 0$ et donc $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

On a alors

$$\begin{aligned}(p+q)(n+1) &= (p+q)n + (p+q)\cdot 1 \text{ par distributivité de la multiplication à gauche}\\ &= (p+q)n + (p+q) \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication}\\ &= (pn+qn) + (p+q) \text{ d'après } P(n)\\ &= pn + qn + p + q \text{ par associativité de l'addition}\\ &= pn + p + qn + q \text{ par commutativité de l'addition chez les entiers naturels}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= pn + p\cdot 1 + qn + q\cdot 1 \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \\ &= p(n+1) + q(n+1) \text{ par distributivité de la multiplication à gauche} \end{aligned}$$

Ainsi $(p+q)(n+1) = p(n+1) + q(n+1)$ et donc $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ on a } P(n), \text{ c'est-à-dire } (p+q)n = pn + qn}$.

• Montrons le résultat attendu.

Fixons un entier naturel m.

Pour tout entier naturel n, posons $Q(n)$ l'assertion « $mn = nm$ ».

Initialisation

On a $m\cdot 0 = 0 = 0m$ car 0 est absorbant pour la multiplication.

On a donc $Q(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $Q(n)$.

On a alors

$$\begin{aligned} m(n+1) &= mn + m\cdot 1 \text{ par distributivité de la multiplication à gauche} \\ &= nm + m\cdot 1 \text{ d'après } Q(n) \\ &= nm + 1m \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \\ &= (n+1)m \text{ par distributivité de la multiplication à droite} \end{aligned}$$

Ainsi $m(n+1) = (n+1)m$ et donc $Q(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $Q(n)$ alors $Q(n+1)$.

Finalement Q vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \text{ on a } Q(n), \text{ c'est-à-dire } mn = nm}$.

CQFD.

On peut remarquer que $f^{5\cdot 3} = f^{5+5+5} = f^5 \circ f^5 \circ f^5 = (f^5)^3$.
Plus généralement, on a la propriété suivante.

Proposition 63 (Itérées d'une application et multiplication)

Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$.
Pour tout entiers naturels n et m, on a $f^{nm} = (f^n)^m$.

Démonstration

Fixons n un entier naturel.

Pour tout entier naturel m, on pose $P(m)$ l'assertion « $f^{nm} = (f^n)^m$ ».

Initialisation

On a $f^{n \cdot 0} = f^0 = \mathrm{id}_E = (f^n)^0$ et donc on a $P(0)$.

Hérédité

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$, c'est-à-dire $f^{nm} = (f^n)^m$.

On a alors

$$\begin{aligned} f^{n(m+1)} &= f^{nm+n} \text{ par définition de la multiplication} \\ &= f^{nm} \circ f^n \text{ d'après la prop. 47 p. 119} \\ &= (f^n)^m \circ f^n \text{ d'après } P(m) \\ &= (f^n)^{m+1} \text{ par définition des itérées de } f^n \end{aligned}$$

On a donc $f^{n(m+1)} = (f^n)^{m+1}$ et donc $P(m+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P(m+1)$.

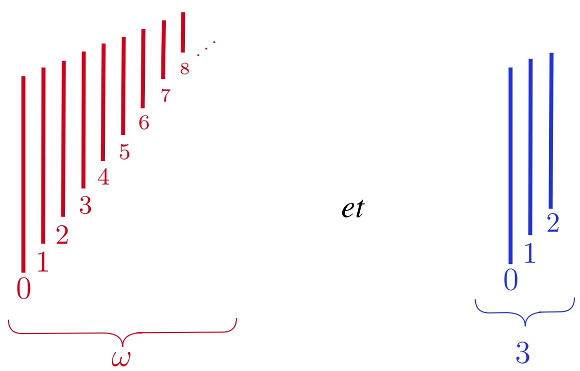
Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Pour tout entier naturel m, on a donc $P(m)$, c'est-à-dire $\boxed{f^{nm} = (f^n)^m}$.

CQFD.

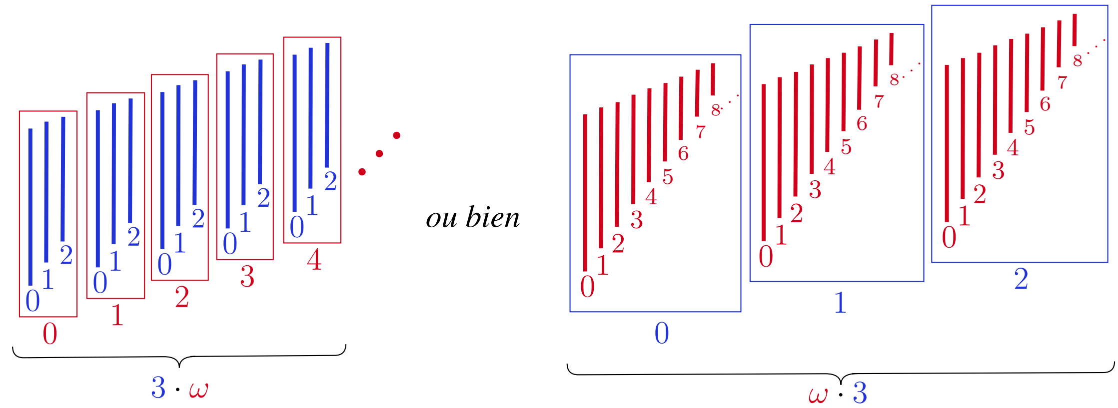
3.2 Interprétation graphique : le produit cartésien

La multiplication des ordinaux a aussi une interprétation graphique : visualisons par exemple la multiplication des ordinaux ω et 3. Comme précédemment, commençons par les représenter tous les deux avec des bâtons indépendemment l'un de l'autre, ω et ses éléments étant en **rouge** et 3 est ses éléments étant en **bleu**.

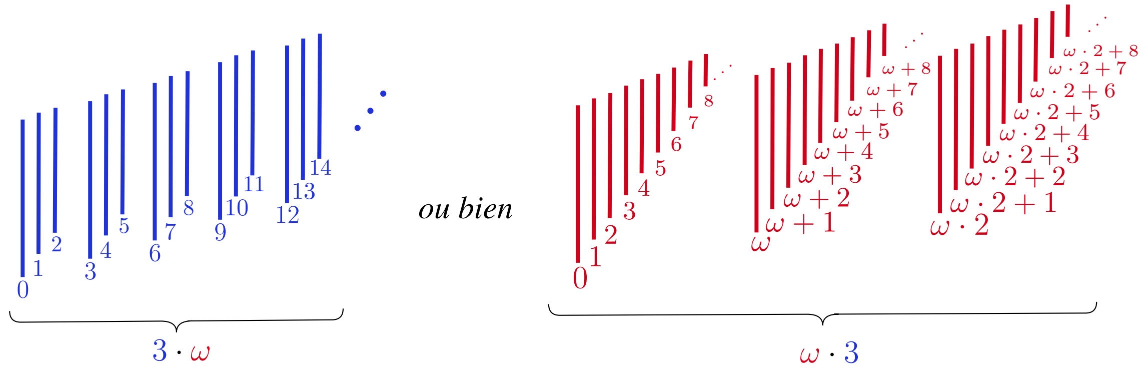


Rappelons à nouveau qu'ici seul l'ordre d'arrivée de la gauche vers la droite importe (pour traduire l'ordre sur les ordinaux), la taille verticale des bâtons n'est qu'une astuce pour visualiser une infinité de bâtons.

Pour représenter visuellement $\alpha\beta$, on vient remplacer chaque bâton de β par une copie de l'ensemble des bâtons constitutifs de α, ce qui dans notre cas donne

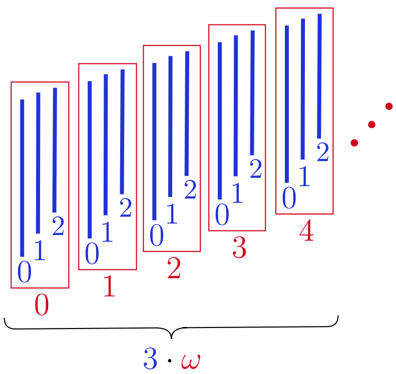


Enfin, comme pour l'addition on renumérote les bâtons en fonction de leur ordre d'arrivée de la gauche vers la droite, ce qui nous donne



On constate bien par exemple que $3\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \} = \omega$, comme nous l'avons explicité plus tôt.

Quand il a fallu formaliser l'interprétation graphique de l'addition, nous avons dû introduire une nouvelle notion : celle de l'union disjointe ainsi que de l'ordre de concaténation. En ce qui concerne la multiplication, nous avons déjà tous les outils pour cela, puisqu'il s'agit du **produit cartésien**. En effet, si l'on reprend ce dessin d'interprétation de 3ω :



Le premier rectangle rouge tout à gauche peut être vu comme l'ensemble $\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$, le deuxième comme l'ensemble $\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$, le troisième comme l'ensemble

$\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$, le quatrième comme l'ensemble $\{(3,0),(3,1),(3,2)\}$, et ainsi de suite, avec un rectangle pour chaque $n \in \omega$ de la forme $\{(n,0),(n,1),(n,2)\}$. En réunissant tous ces rectangles, on reconnaît précisément le produit cartésien $\omega \times \{0,1,2\} = \omega \times 3$. Oui, il faudra prendre garde au fait que la multiplication 3ω est associée au produit cartésien $\omega \times 3$, **il y a une inversion du sens**.

De quel ordre munir alors $\omega \times 3$? En fait, nous l'avons évoqué dans le premier livre et le premier chapitre : il s'agit de l'ordre lexicographique (en référence à l'ordre avec lequel fonctionne un dictionnaire). En effet, toujours avec le même dessin, on peut voir que tous les éléments du rectangle 1 sont situés avant tous les éléments du rectangle 2 : pour comparer les éléments du produit cartésien, il faut d'abord comparer les premières composantes de chaque couple et éventuellement si elles sont égales comparer les deuxièmes composantes. Nous avons déjà vu lors de la proposition 5 page 17 que si A et B sont munis de deux bons ordres, alors l'ordre lexicographique sur $A \times B$ est aussi un bon ordre. En particulier, si α et β sont deux ordinaux, alors $\alpha \times \beta$ est bien ordonné donc est associé à un unique ordinal (qu'on appelé son **type**). On retombe sur nos pieds : cet unique ordinal est précisément $\beta\alpha$.

Quel isomorphisme allons-nous construire ? Il s'agit sur l'illustration de trouver, étant donné un rectangle et la position du bâton au sein de ce rectangle, quel sera le numéro du bâton après renumérotation. Pour un couple (γ, δ) de $\alpha \times \beta$, on trouve le bon rectangle en prenant la $\gamma^{\text{ème}}$ copie de β, puis on se déplace de δ bâtons vers la droite, c'est-à-dire $\beta\gamma + \delta$. Par exemple le bâton 1 au sein du rectangle 2 a bien été renuméroté en $3 \cdot 2 + 1 = 7$ à la fin.

Théorème 8 (Multiplication d'ordinaux et produit cartésien)

Soient α et β deux ordinaux.
On munit $\alpha \times \beta$ de l'ordre lexicographique.
On a alors $\beta\alpha = \text{type}(\alpha \times \beta)$.

Démonstration

- **Construction de l'isomorphisme**

  Soit $(\gamma, \delta) \in \alpha \times \beta$.

  On a alors $\gamma \in \alpha$ et $\delta \in \beta$.

  Comme $\gamma \in \alpha$, on a $\gamma < \alpha$ donc $\gamma + 1 \leq \alpha$ d'après la proposition 14 page 40.

  De même $\delta \in \beta$ on a $\delta < \beta$, donc on a :

$$\begin{aligned} \beta\gamma + \delta &< \beta\gamma + \beta \text{ par stricte croissance de l'addition à gauche} \\ &= \beta\gamma + \beta \cdot 1 \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \\ &= \beta(\gamma + 1) \text{ par distributivité} \\ &\leq \beta\alpha \text{ par croissance de la multiplication à gauche} \end{aligned}$$

  On a donc $\beta\gamma + \delta < \beta\alpha$ et donc $\beta\gamma + \delta \in \beta\alpha$ par définition de $<$.

Ainsi pour tout $(\gamma, \delta) \in \alpha \times \beta$, on a $\beta\gamma + \delta \in \beta\alpha$.

On peut donc considérer l'application $\varphi_\alpha := \begin{pmatrix} \alpha \times \beta & \longrightarrow & \beta\alpha \\ (\gamma, \delta) & \longmapsto & \beta\gamma + \delta \end{pmatrix}$.

Le fait d'avoir mis α en indice nous servira pour une preuve par induction sur α.

Montrons que φ_α est un isomorphisme d'ordres.

• **Surjectivité**

Pour cette partie fixons β.

Montrons que pour tout ordinal α, l'application φ_α est surjective sur $\beta\alpha$.

Posons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff \mathrm{im}(\varphi_\alpha) = \beta\alpha$$

Remarquons que pour α et α' deux ordinaux, si $\alpha \leq \alpha'$ alors $\alpha \subseteq \alpha'$ donc $\alpha \times \beta \subseteq \alpha' \times \beta$ et pour tout $(\gamma, \delta) \in \alpha \times \beta$ on a $\varphi_\alpha(\gamma, \delta) = \beta \cdot \gamma + \delta = \varphi_{\alpha'}(\gamma, \delta)$, si bien que $\varphi_\alpha = (\varphi_{\alpha'})_{|\alpha \times \beta}$.

En particulier dans ce cas-là on a $\mathrm{im}(\varphi_\alpha) \subseteq \mathrm{im}(\varphi_{\alpha'})$. Notons cela $(\star)$

Remarquons aussi que pour tout ordinal α on a $\mathrm{im}(\varphi_\alpha) \subseteq \beta\alpha$ donc on doit seulement montrer l'inclusion réciproque.

▶ *Initialisation*

Par définition de la multiplication on a $\beta \cdot 0 = 0$.

On a donc $\mathrm{im}(\varphi_0) \subseteq 0$ et comme $0 = \varnothing$ on a donc $\mathrm{im}(\varphi_0) = 0$, c'est-à-dire $P(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$, c'est-à-dire $\beta\alpha = \mathrm{im}(\varphi_\alpha)$.

Soit $\varepsilon \in \beta(\alpha + 1)$.

On a donc $\varepsilon < \beta(\alpha + 1)$ par définition de $<$.

Comme $\leq$ est total sur les ordinaux, on a $\varepsilon < \beta\alpha$ ou $\beta\alpha \leq \varepsilon$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $\varepsilon < \beta\alpha$.

On a donc $\varepsilon \in \beta\alpha$, et comme $\beta\alpha = \mathrm{im}(\varphi_\alpha) \underset{(\star)}{\subseteq} \mathrm{im}(\varphi_{\alpha+1})$ on a $\varepsilon \in \mathrm{im}(\varphi_{\alpha+1})$.

▶ Plaçons-nous désormais dans le cas où $\beta\alpha \leq \varepsilon$.

Il existe un ordinal μ tel que $\varepsilon = \beta\alpha + \mu$ d'après la proposition 52 page 134.

Comme $\leq$ est total sur les ordinaux, on a $\mu < \beta$ ou $\beta \leq \mu$.

Supposons par l'absurde que $\beta \leq \mu$.

On a alors

$$\begin{aligned}\beta(\alpha+1) &= \beta\alpha + \beta \cdot 1 \text{ par distributivité}\\ &= \beta\alpha + \beta \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication}\\ &\leq \beta\alpha + \mu \text{ par croissance de l'addition à gauche}\\ &= \varepsilon \text{ par définition de } \mu\end{aligned}$$

On a donc $\beta(\alpha+1) \leq \varepsilon$.

C'est absurde puisqu'on a dit que $\varepsilon < \beta(\alpha+1)$.

Par l'absurde on vient de montrer que l'on n'a pas $\beta \leq \mu$, donc on a $\mu < \beta$.

Or on a $\alpha < \alpha + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

Ainsi on a $\mu \in \beta$ et $\alpha \in \alpha + 1$ donc $(\alpha, \mu) \in (\alpha+1) \times \beta$.

Donc $\varepsilon = \beta\alpha + \mu = \varphi_{\alpha+1}(\alpha, \mu)$ par définition de $\varphi_{\alpha+1}$.

On a donc $\varepsilon \in \operatorname{im}(\varphi_{\alpha+1})$.

On a donc $\operatorname{im}(\varphi_{\alpha+1}) \supseteq \beta(\alpha+1)$ et donc $\operatorname{im}(\varphi_{\alpha+1}) = \beta(\alpha+1)$.

Autrement dit on a $P(\alpha+1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha+1)$.

▶ *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \mu < \alpha, P(\mu)$.

Soit $\varepsilon \in \beta\alpha$.

On a donc $\varepsilon < \beta\alpha$ par définition de $<$.

Par définition α est un ordinal limite non nul.

Par définition de la multiplication on a donc $\beta\alpha = \sup\limits_{\mu<\alpha}(\beta\mu)$.

On a donc $\varepsilon < \sup\limits_{\mu<\alpha}(\beta\mu)$ donc ε n'est pas un majorant de $\{\beta\mu \mid \mu < \alpha\}$.

Il existe donc un ordinal $\mu < \alpha$ tel que l'on n'a pas $\beta\mu \leq \varepsilon$.

Comme $\leq$ est total chez les ordinaux, on a $\varepsilon < \beta\mu$ donc $\varepsilon \in \beta\mu$.

Or $\mu < \alpha$ donc par hypothèse on a $P(\mu)$ et donc $\operatorname{im}(\varphi_\mu) = \beta\mu$.

On a donc $\varepsilon \in \operatorname{im}(\varphi_\mu)$.

Or $\mu < \alpha$ donc on a $\operatorname{im}(\varphi_\mu) \subseteq \operatorname{im}(\varphi_\alpha)$ d'après $(\star)$.

On a donc $\varepsilon \in \operatorname{im}(\varphi_\alpha)$.

On a donc $\operatorname{im}(\varphi_\alpha) \supseteq \beta\alpha$ et donc $\operatorname{im}(\varphi_\alpha) = \beta\alpha$.

Autrement dit on a $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \mu < \alpha, P(\mu)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Autrement dit pour tout ordinal α, on a $\mathrm{im}(\varphi_\alpha) = \beta\alpha$.

Autrement dit pour tout ordinal α, $\boxed{\varphi_\alpha \text{ est surjective dans } \beta\alpha}$.

• Stricte croissance

Fixons à nouveau α et β.

Notons $\lhd$ l'ordre lexicographique strict associé sur $\alpha \times \beta$.

Soient (γ, δ) et (γ', δ') dans $\alpha \times \beta$ tels que $(\gamma, \delta) \lhd (\gamma', \delta')$.

On a donc $\gamma < \gamma'$ ou $(\gamma = \gamma'$ et $\delta < \delta')$ par définition de $\lhd$.

► Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \gamma'$.

On a donc $\gamma + 1 \leq \gamma'$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc

$$\begin{aligned}
\beta\gamma + \delta &< \beta\gamma + \beta \text{ par stricte croissance de l'addition à gauche}\\
&= \beta\gamma + \beta \cdot 1 \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication}\\
&= \beta(\gamma + 1) \text{ par distributivité}\\
&\leq \beta\gamma' \text{ par croissance de la multiplication à gauche}\\
&= \beta\gamma' + 0 \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition}\\
&\leq \beta\gamma' + \delta' \text{ par croissance de l'addition à gauche}
\end{aligned}$$

On a donc $\beta\gamma + \delta < \beta\gamma' + \delta'$ donc $\varphi_\alpha(\gamma, \delta) < \varphi_\alpha(\gamma', \delta')$.

► Plaçons-nous dans le cas où $\gamma = \gamma'$ et $\delta < \delta'$.

On a alors $\beta\gamma + \delta < \beta\gamma + \delta'$ par stricte croissance de l'addition à gauche.

Comme $\gamma = \gamma'$, on a donc $\beta\gamma + \delta < \beta\gamma' + \delta'$ et donc $\varphi_\alpha(\gamma, \delta) < \varphi_\alpha(\gamma', \delta')$.

Dans les deux cas on a donc $\varphi_\alpha(\gamma, \delta) < \varphi_\alpha(\gamma', \delta')$.

Donc pour tout (γ, δ) et (γ', δ') dans $\alpha \times \beta$, si $(\gamma, \delta) \lhd (\gamma', \delta')$ alors $\varphi_\alpha(\gamma, \delta) < \varphi_\alpha(\gamma', \delta')$.

Donc φ_α est strictement croissante.

Or $\mathrm{dom}(\varphi_\alpha) = \alpha \times \beta$ est bien ordonné d'après la proposition 5 page 17.

En particulier $\mathrm{dom}(\varphi_\alpha)$ est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

Donc $\boxed{\varphi_\alpha \text{ est injective et croissante}}$.

• Conclusion

Ainsi φ_α est croissante, injective et surjective sur $\beta\alpha$.

Or on vient de dire que $\mathrm{dom}(\varphi_\alpha) = \alpha \times \beta$ est totalement ordonné.

Donc φ_α est un isomorphisme d'ordres de $\alpha \times \beta$ vers $\beta\alpha$.

Ainsi $\alpha \times \beta$ et $\beta\alpha$ sont isomorphes, et donc $\boxed{\beta\alpha = \text{type}(\alpha \times \beta)}$.
CQFD.

On a vu à la suite de l'addition comment faire une espèce de soustraction via la proposition 52 page 134. Celle-ci nous explique que si $\beta \leq \alpha$, alors il existe un unique ordinal σ tel que $\alpha = \beta + \sigma$. On retrouve une propriété similaire avec le principe de division ordinale. Tout comme la division habituelle, celle-ci requiert qu'on ne divise par par zéro, c'est-à-dire que β soit non nul.

Proposition 64 (Division ordinale)

Soient α et β deux ordinaux, avec β **non nul**.
Il existe deux ordinaux δ et σ tels que $\alpha = \beta\delta + \sigma$ avec $\delta \leq \alpha$ et $\sigma < \beta$.
De plus, de tels ordinaux sont uniques.

Démonstration

Par définition β est non nul donc $0 < \beta$.

On a donc $1 = 0 + 1 \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

De même on a $\alpha < \alpha + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc

$$\begin{aligned} \alpha &= 1\alpha \text{ car 1 est neutre pour la multiplication} \\ &\leq \beta\alpha \text{ par croissance de la multiplication à droite} \\ &< \beta(\alpha+1) \text{ par stricte croissance de la multiplication à gauche} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha < \beta(\alpha + 1)$ et donc $\alpha \in \beta(\alpha + 1)$ par définition de $<$.

Or on a vu dans la preuve du théorème 8 page 153 que l'application

$\varphi := \left(\begin{array}{ccc} (\alpha+1) \times \beta & \longrightarrow & \beta(\alpha+1) \\ (\delta, \sigma) & \longmapsto & \beta\delta + \sigma \end{array} \right)$ est bijective de $(\alpha + 1) \times \beta$ dans $\beta(\alpha + 1)$.

Il existe donc un unique $(\delta, \sigma) \in (\alpha + 1) \times \beta$ tel que $\alpha = \varphi(\delta, \sigma) = \beta\delta + \sigma$.

Remarquons pour conclure que comme $(\delta, \sigma) \in (\alpha + 1) \times \beta$, on a $\delta \in (\alpha + 1)$ et $\sigma \in \beta$.

Autrement dit on a $\delta < \alpha + 1$ donc $\delta \leq \alpha$ d'après la proposition 14 page 40.

De même on a $\sigma < \beta$.

CQFD.

Remarque :
Bien que cette division ressemble à la division euclidienne, il faut prendre garde au fait que le quotient δ peut être égal au dividende α. Par exemple, si l'on prend $\alpha = \omega$ et $\beta = 2$, on a $\omega = 2\omega + 0$.

4 Exponentiation d'ordinaux

4.1 Définition et propriétés

Attaquons-nous à la dernière des trois opérations ordinales : l'exponentiation. Encore une fois, inspirons-nous de notre intuition sur les entiers. Intuitivement, 5^3 c'est $5 \cdot 5 \cdot 5$, avec le nombre 5 répété 3 fois, mais encore une fois le fait de répéter une opération un certain nombre de fois n'a pas été pleinement défini jusqu'à présent. Rattachons-nous une fois de plus aux définitions par récursion. On remarque simplement que $5^2 = 5 \cdot 5$ et donc $5^3 = (5 \cdot 5) \cdot 5 = 5^2 \cdot 5$. La récursion nous est donc encore donnée sur un plateau.

Ainsi pour définir 5^3 on considère que 5^2 est déjà défini puis on pose $5^3 := 5^2 \cdot 5$. Autrement dit on a posé $5^{2+1} := 5^2 \cdot 5$. Cela nous guide vers la définition suivante.

Définition 23 (Exponentiation d'ordinaux)

Soit α un ordinal **non nul**.
On pose

$$\begin{cases} \alpha^0 := 1 \\ \alpha^{\beta+1} := \alpha^\beta \alpha \text{ pour tout ordinal } \beta \\ \alpha^\gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma} \alpha^\delta \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Enfin, on pose $0^0 := 1$ et pour tout ordinal β non nul on pose $0^\beta := 0$.

Remarque :

1. Dans le livre précédent, nous avons indiqué que pour deux ensembles A et B, l'ensemble des applications de A vers B est noté $\mathcal{F}(A \to B)$ ou encore B^A.
Nous allons temporairement éviter cette dernière notation afin d'éviter la confusion avec l'exponentiation d'ordinaux. Cela dit, le fait qu'il y ait la même notation pour ces deux concepts n'est pas une coïncidence, comme nous aurons l'occasion de le voir dans le prochain chapitre, où nous pourrons la reprendre sereinement pour la suite de nos aventures.
2. Pour justifier proprement cette définition, on utilise simplement la proposition 37 page 101, en posant $\mu_0 := 1$ et $G(\xi) := \xi \cdot \alpha$ pour tout ordinal ξ. La proposition nous donne alors une unique assertion fonctionnelle $F_\alpha : ON \longrightarrow ON$ telle que

$$\begin{cases} F_\alpha(0) = 1 \\ F_\alpha(\beta+1) = F_\alpha(\beta) \cdot \alpha \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F_\alpha(\gamma) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F_\alpha(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

et on pose alors $\alpha^\beta := F_\alpha(\beta)$ pour tout ordinal β.
3. Pourquoi ce traitement à part pour $\alpha = 0$? Imaginons un instant ne pas avoir fait d'exception pour $\alpha = 0$. On a donc $0^0 = 1$ par définition, puis $0^1 = 0^0 \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0$ puis pour tout entier naturel n on a $0^n = 0$. On aimerait qu'à partir de là, $0^\beta = 0$

dès que β est non nul. Le soucis vient pour $\beta = \omega$ car $0^\beta = \sup_{n<\omega} 0^n = 1$ puisqu'on a aussi $n = 0$ dans le lot. Mais au fond pourquoi vouloir que $0^\omega = 0$ plutôt que $0^\omega = \sup_{n<\omega} 0^n = 1$? Cela vient du fait que l'assertion fonctionnelle F_0 n'est pas croissante, et donc cette histoire de borne supérieure et de continuité ne tient plus. En fait, à partir de 1 elle est bien croissante, et donc il semble naturel de simplement exclure 0 de la prise en compte dans la borne supérieure, afin de refaire fonctionner le fait que la borne supérieure représente *le passage à la limite au voisinage d'un ordinal limite*. On peut donc tout aussi bien poser $0^\gamma = \sup_{0<\delta<\gamma} 0^\delta$ pour tout ordinal limite non nul γ, et cela revient au même.

Proposition 65 (Exponentations avec 1)

Pour tout ordinal α, on a $\alpha^1 = \alpha$ et $1^\alpha = 1$.

Démonstration

• Pour tout ordinal α, on a

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= \alpha^{0+1} \text{ par définition de } 1 \\ &= \alpha^0\alpha \text{ par définition de l'exponentiation} \\ &= 1 \cdot \alpha \text{ par définition de l'exponentiation} \\ &= \alpha \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \end{aligned}$$

et donc $\boxed{\alpha^1 = \alpha}$.

• Posons P l'assertion à paramètres définie pour tout ordinal α par

$$P(\alpha) \iff 1^\alpha = 1$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

▶ *Initialisation*

Par définition de l'exponentiation on a $1^0 = 1$.

Autrement dit on a $P(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

On a alors

$$\begin{aligned} 1^{\alpha+1} &= 1^{\alpha} \cdot 1 \text{ par définition de l'exponentiation} \\ &= 1 \cdot 1 \text{ puisqu'on a } P(\alpha) \\ &= 1 \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \end{aligned}$$

On a donc $1^{\alpha+1} = 1$.

Autrement dit on a $P(\alpha + 1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha + 1)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

Autrement dit $\forall \beta < \alpha, 1^{\beta} = 1$.

Par définition de l'exponentiation on a donc $1^{\alpha} = \sup\limits_{\beta<\alpha} 1^{\beta} = \sup\limits_{\beta<\alpha} 1 = 1$.

Autrement dit on a $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha \text{ on a } 1^{\alpha} = 1}$.

CQFD.

Une fois n'est pas coutume, l'exponentiation de deux entiers naturels est encore un entier naturel.

Proposition 66 (Exponentiation de deux entiers naturels)

Pour tout entiers naturels n et m, l'ordinal n^m est un entier naturel.
On dit que $\mathbb{N} = \omega$ est **stable** par exponentiation.

Démonstration

Fixons n un entier naturel.

Posons P l'assertion à paramètre définie pour tout entier naturel m par

$$P(m) \iff n^m \in \mathbb{N}$$

Montrons le résultat par induction sur les entiers naturels.

▶ *Initialisation*

Par définition de l'exponentiation on a $n^0 = 1$ qui est un entier naturel.

On a donc $P(0)$.

▶ *Hérédité*

Soit m un entier naturel tel que $P(m)$.

On a alors $n^{m+1} = n^m n$ par définition de l'exponentiation.

Or n^m est un entier naturel d'après $P(m)$ et n l'est par définition.

Donc $n^m n$ est un entier naturel d'après la proposition 55 page 139 .

Donc n^{m+1} est un entier naturel, et donc $P(m+1)$.

Donc pour tout entier naturel m, si $P(m)$ alors $P(m+1)$.

Ainsi P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel m on a $P(m)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout entier naturel } m\text{, l'ordinal } n^m \text{ est un entier naturel}}$.

CQFD.

Pour la proposition qui suit, qui nous dit encore que l'opération du jour est croissante,

- on a exclut 0 dans les deux premiers cas $0^0 = 1$ est plus grand que tout $0^m = 0$ quand bien même $0 < m$,
- on a exclut 1 du premier cas car $1^\beta = 1$ est constant en β et donc on n'a pas de stricte croissance.

Proposition 67 (Croissance de l'exponentiation des ordinaux)

Soient α, β et γ trois ordinaux.

1. Supposons que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.
   Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$.
   On dit que l'exponentiation à gauche est **strictement croissante**.
2. Supposons que $\alpha \neq 0$.
   Si $\beta \leq \gamma$ alors $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$.
   On dit que l'exponentiation à gauche est **croissante**.
3. Si $\beta \leq \gamma$ alors $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.
   On dit que l'exponentiation à droite est **croissante**.

Démonstration

1. Fixons α et β deux ordinaux tels que $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.
Autrement dit on a $1 < \alpha$.
Posons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$P(\gamma) \iff \left(\beta < \gamma \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^\gamma\right)$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*
Il est faux de dire que $\beta \in \varnothing$ donc il est faux de dire que $\beta \in 0$ et donc de dire que $\beta < 0$.
Ainsi, la prémisse $\beta < 0$ étant fausse, on a nécessairement l'implication $\beta < 0 \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^0$.
Autrement dit on a $P(0)$.

► *Hérédité*
Soit γ un ordinal tel que $P(\gamma)$.
Supposons que $\beta < \gamma + 1$.
On a donc $\beta \leq \gamma$ d'après la proposition 14 page 40, donc $\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma$.
Rappelons que par hypothèse on a $1 < \alpha$, et donc on a

$$\begin{aligned} \alpha^\gamma &= \alpha^\gamma \cdot 1 \text{ car 1 est neutre pour la multiplication} \\ &< \alpha^\gamma \alpha \text{ par stricte croissance de la multiplication à gauche} \\ &= \alpha^{\gamma+1} \text{ par définition de l'exponentiation} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha^\gamma < \alpha^{\gamma+1}$.

► Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.
On a alors $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ d'après $P(\gamma)$.
On a donc $\alpha^\beta < \alpha^{\gamma+1}$ par transitivité de $<$.

► Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.
On a donc $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ et donc $\alpha^\beta < \alpha^{\gamma+1}$.

Dans les deux cas on a donc $\alpha^\beta < \alpha^{\gamma+1}$.
Donc si $\beta < \gamma + 1$ alors $\alpha^\beta < \alpha^{\gamma+1}$, donc on a $P(\gamma + 1)$.
Donc pour tout ordinal γ, si $P(\gamma)$ alors $P(\gamma + 1)$.

► *Hérédité limite*
Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$.

Supposons que $\beta < \gamma$.

On a donc $\beta + 1 < \gamma$ d'après la proposition 15 page 44 car γ est limite.

On a donc $P(\beta + 1)$ par hypothèse, c'est-à-dire $\beta < \beta + 1 \Rightarrow \alpha^\beta < \alpha^{\beta+1}$.

Or $\beta < \beta + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha^\beta < \alpha^{\beta+1}$ par modus ponens.

On a dit que $\beta + 1 < \gamma$.

On a donc $\alpha^{\beta+1} \leq \sup\limits_{\delta<\gamma} \alpha^\delta$ car la borne supérieure est un majorant.

Or on a $\alpha^\gamma = \sup\limits_{\delta<\gamma} \alpha^\delta$ par définition de l'exponentiation.

On a donc $\alpha^{\beta+1} \leq \alpha^\gamma$ et donc $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ par transitivité.

Donc si $\beta < \gamma$ alors $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$, donc on a $P(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite γ, si $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$ alors $P(\gamma)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $P(\gamma)$.

Autrement dit pour tout ordinal γ, $\boxed{\text{si } \beta < \gamma \text{ alors } \alpha^\beta < \alpha^\gamma}$.

2. Fixons α, β et γ trois ordinaux, avec $\alpha \neq 0$.

Autrement dit on a $0 < \alpha$.

Supposons que $\beta \leq \gamma$.

On a $0 < \alpha$ par hypothèse donc $0 + 1 \leq \alpha$ d'après la proposition 14 page 40.

Comme $1 = 0 + 1$ on a $1 \leq \alpha$ donc $(1 = \alpha$ ou $1 < \alpha)$.

Plaçons-nous dans le cas où $1 = \alpha$.

On a alors $\alpha^\beta = 1^\beta = 1 = 1^\gamma = \alpha^\gamma$ d'après la proposition 65 page 159.

En particulier on a $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ par réflexivité de $\leq$.

On se place à présent dans le cas où $1 < \alpha$.

On a fait l'hypothèse que $\beta \leq \gamma$ donc $(\beta < \gamma$ ou $\beta = \gamma)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\beta < \gamma$.
  Comme $1 < \alpha$ on a $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ d'après 1, donc en particulier $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$.
- Plaçons-nous dans le cas où $\beta = \gamma$.
  On a alors $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ et en particulier $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$ par réflexivité de $\leq$.

Dans tous les cas on a donc $\alpha^\beta \leq \alpha^\gamma$.

Donc $\boxed{\text{si } \beta \leq \gamma \text{ alors } \alpha^\beta \leq \alpha^\gamma}$.

3. Fixons β et γ deux ordinaux.

Supposons que $\beta \leq \gamma$.

Posons Q l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal α par

$$Q(\alpha) \iff \beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

On a $\beta^0 = 1 = \gamma^0$ par définition de l'exponentiation.

On a donc $\beta^0 \leq \gamma^0$ par réflexivité de $\leq$, et donc $Q(0)$.

► *Hérédité*

Soit α un ordinal tel que $Q(\alpha)$, c'est-à-dire $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\beta^{\alpha+1} &= \beta^\alpha \beta \text{ par définition de l'exponentiation} \\
&\leq \gamma^\alpha \beta \text{ par croissance de la multiplication à droite} \\
&\leq \gamma^\alpha \gamma \text{ par croissance de la multiplication à gauche} \\
&= \gamma^{\alpha+1} \text{ par définition de l'exponentiation}
\end{aligned}$$

On a donc $\beta^{\alpha+1} \leq \gamma^{\alpha+1}$ et donc $Q(\alpha+1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $Q(\alpha)$ alors $Q(\alpha+1)$.

► *Hérédité limite*

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \alpha, Q(\delta)$.

Soit δ un ordinal tel que $\delta < \alpha$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\beta^\delta &\leq \gamma^\delta \text{ d'après } Q(\delta) \\
&\leq \sup_{\varepsilon<\alpha} \gamma^\varepsilon \text{ car la borne supérieure est un majorant} \\
&= \gamma^\alpha \text{ par définition de l'exponentiation}
\end{aligned}$$

On a donc $\beta^\delta \leq \gamma^\alpha$.

On a donc $\forall \delta < \alpha, \beta^\delta \leq \gamma^\alpha$.

Donc $\sup_{\delta<\alpha} \beta^\delta \leq \gamma^\alpha$ par minimalité de la borne supérieure.

Ainsi on a $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$ par définition de l'exponentiation, et donc $Q(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \delta < \alpha, Q(\delta)$ alors $Q(\alpha)$.

Ainsi Q vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $Q(\alpha)$.

Autrement dit pour tout ordinal α on a $\beta^\alpha \leq \gamma^\alpha$.

Donc pour tout ordinal α, $\boxed{\text{si } \beta \leq \gamma \text{ alors } \beta^\alpha \leq \gamma^\alpha}$.

CQFD.

Remarque :
Prenons α un ordinal non nul et β un ordinal quelconque non nul.
On a alors $0 < \alpha^\beta$. En effet, comme $\leq$ est total chez les ordinaux, on a $\beta \leq 0$ ou $0 < \beta$.
Mais $\beta \leq 0 \iff \beta \subseteq \varnothing \iff \beta = \varnothing \iff \beta = 0$.
Donc comme β est non nul, on a $0 < \beta$ donc $0 + 1 \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.
Comme $0 + 1 = 1$, on a donc $1 \leq \beta$.
En particulier par croissance de l'exponentiation on a $0 < \alpha = \alpha^1 \leq \alpha^\beta$.

Proposition 68 (Régularité de l'exponentiation des ordinaux)

Soient α, β et γ des ordinaux, avec $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$.
Si $\alpha^\beta = \alpha^\gamma$ alors $\beta = \gamma$.
On dit que l'exponentiation à gauche est **régulière**.

Démonstration

Montrons-le par contraposition.

Supposons que $\beta \neq \gamma$.

On a donc $\beta < \gamma$ ou $\gamma < \beta$ d'après le théorème 1 page 27.

Si $\beta < \gamma$ alors $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$ par stricte croissance de l'exponentiation à gauche.

Si $\gamma < \beta$ alors $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$ par stricte croissance de l'exponentiation à gauche.

Dans les deux cas on a $\alpha^\gamma \neq \alpha^\beta$ par antiréflexivité de $<$.

Donc si $\beta \neq \gamma$ alors $\alpha^\gamma \neq \alpha^\beta$.

Donc par contraposition, $\boxed{\text{si } \alpha^\beta = \alpha^\gamma \text{ alors } \beta = \gamma}$.

CQFD.

Proposition 69 (Continuité de l'exponentiation des ordinaux)

Soient α un ordinal **non nul** et X un ensemble **non vide** d'ordinaux.
On a $\sup\limits_{\xi \in X} \alpha^\xi = \alpha^{\sup(X)}$.
Autrement dit l'exponentiation à gauche est continue.

Démonstration

Par définition de l'exponentiation, pour tout ordinal limite non nul γ, on a

$$\alpha^\gamma = \sup_{\delta<\gamma} \alpha^\delta$$

On peut donc appliquer la proposition 43 page 113 pour conclure.

Notons que cette définition ne tient que parce que α est non nul.

CQFD.

Proposition 70 (Exponentiation, addition et multiplication)

Soient trois ordinaux α, β et γ.

1. On a $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$.
2. On a $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$

Démonstration

1.

Réglons tout d'abord le cas $\alpha = 0$.

On a $0^{0+0} = 0^0 = 1 = 1 \cdot 1 = 0^0 \cdot 0^0$.

Pour tout ordinal non nul γ on a $0^{0+\gamma} = 0^\gamma = 0 = 1 \cdot 0 = 0^0 \cdot 0^\gamma$.

Pour tout ordinal non nul γ on a $0^{\gamma+0} = 0^\gamma = 0 = 0 \cdot 1 = 0^\gamma \cdot 0^0$.

Pour tout ordinaux non nuls γ et δ on a $0^{\gamma+\delta} = 0 = 0 \cdot 0 = 0^\gamma \cdot 0^\delta$.

Fixons deux ordinaux α et β, avec α **non nul**.

Posons P l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$P(\gamma) \iff \alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*

On a

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+0} &= \alpha^\beta \text{ car } 0 \text{ est neutre pour l'addition} \\ &= \alpha^\beta \cdot 1 \text{ car } 1 \text{ est neutre pour la multiplication} \\ &= \alpha^\beta \alpha^0 \text{ par définition de l'exponentiation} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha^{\beta+0} = \alpha^\beta \alpha^0$, c'est-à-dire $P(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $P(\gamma)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+\gamma+1} &= \alpha^{\beta+\gamma}\alpha \text{ par définition de l'exponentiation} \\ &= \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}\alpha \text{ par } P(\gamma) \\ &= \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma+1} \text{ par définition de l'exponentiation} \end{aligned}$$

Ainsi on a $\alpha^{\beta+\gamma+1} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma+1}$ et donc $P(\gamma+1)$.

Donc pour tout ordinal γ, si $P(\gamma)$ alors $P(\gamma+1)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+\gamma} &= \alpha^{\sup\limits_{\delta<\gamma}(\beta+\delta)} \text{ par définition de l'addition} \\ &= \sup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta+\delta} \text{ par continuité de l'exponentiation à gauche car } \alpha \neq 0 \\ &= \sup_{\delta<\gamma} \alpha^{\beta}\alpha^{\delta} \text{ puisque } \forall \delta < \gamma, P(\delta) \\ &= \alpha^{\beta} \sup_{\delta<\gamma} \alpha^{\delta} \text{ par continuité de la multiplication à gauche} \\ &= \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma} \text{ par définition de l'exponentiation car } \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

On a donc $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}$, c'est-à-dire $P(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$ alors $P(\gamma)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $P(\gamma)$.

Autrement dit pour tout ordinal γ, on a $\boxed{\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^{\beta}\alpha^{\gamma}}$.

2.

Commençons par traiter le cas $\alpha = 0$.

Pour tout ordinal γ on a $(0^0)^{\gamma} = 1^{\gamma} = 1 = 0^0 = 0^{0\cdot\gamma}$.

Pour tout ordinal β non nul on a $(0^{\beta})^0 = 0^0 = 0^{\beta\cdot 0}$.

Pour tout ordinal β et γ non nuls, $\beta\gamma$ est aussi non nul car la multiplication des ordinaux est intègre. On a donc $(0^{\beta})^{\gamma} = 0^{\gamma} = 0 = 0^{\beta\gamma}$.

Fixons α et β deux ordinaux, avec α **non nul**.
Notons qu'alors α^β est non nul car $\alpha \neq 0$.
Posons Q l'assertion à paramètre définie pour tout ordinal γ par

$$Q(\gamma) \iff (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$$

Montrons le résultat par le principe faible d'induction.

► *Initialisation*
On a

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^0 &= 1 \text{ par définition de l'exponentiation}\\ &= \alpha^0 \text{ par définition de l'exponentiation}\\ &= \alpha^{\beta\cdot 0} \text{ car } 0 \text{ est absorbant pour la multiplication}\end{aligned}$$

On a donc $(\alpha^\beta)^0 = \alpha^{\beta\cdot 0}$.
Autrement dit on a $Q(0)$.

► *Hérédité*

Soit γ un ordinal tel que $Q(\gamma)$.
On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^{\gamma+1} &= (\alpha^\beta)^\gamma\alpha^\beta \text{ par définition de l'exponentiation}\\ &= \alpha^{\beta\gamma}\alpha^\beta \text{ puisqu'on a } Q(\gamma)\\ &= \alpha^{\beta\gamma+\beta} \text{ d'après 1}\\ &= \alpha^{\beta(\gamma+1)} \text{ par définition de la multiplication}\end{aligned}$$

On a donc $(\alpha^\beta)^{\gamma+1} = \alpha^{\beta(\gamma+1)}$, c'est-à-dire $Q(\gamma+1)$.

Donc pour tout ordinal γ, si $Q(\gamma)$ alors $Q(\gamma+1)$.

► *Hérédité limite*

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall\delta < \gamma, Q(\delta)$.
On a alors

$$\begin{aligned}(\alpha^\beta)^\gamma &= \sup_{\delta<\gamma}(\alpha^\beta)^\delta \text{ par définition de l'exponentiation car } \alpha^\beta \neq 0\\ &= \sup_{\delta<\gamma}(\alpha^\beta\alpha^\delta) \text{ puisque } \forall\delta < \gamma, Q(\delta)\end{aligned}$$

$= \alpha^\beta \sup_{\delta<\gamma} \alpha^\delta$ par continuité de la multiplication à gauche

$= \alpha^\beta \alpha^\gamma$ par définition de l'exponentiation car $\alpha \neq 0$

On a donc $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^\beta\alpha^\gamma$, c'est-à-dire $Q(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul γ, si $\forall \delta < \gamma, Q(\delta)$ alors $Q(\gamma)$.

Ainsi Q vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal γ on a $Q(\gamma)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \gamma \text{ on a } (\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^\beta\alpha^\gamma}$.

CQFD.

Quand nous avons vu l'addition des ordinaux, nous avons au passage vu la soustraction : étant donnés deux ordinaux α et β tels que $\beta \leq \alpha$, il existe un ordinal σ tel que $\alpha = \beta + \sigma$, et cet ordinal est unique et vérifie $\sigma \leq \alpha$. De même, quand nous avons vu la multiplication des ordinaux, nous avons au passage vu la division : étant donnés deux ordinaux α et β, avec β non nul, il existe deux ordinaux δ et σ tels que $\alpha = \beta\delta + \sigma$ avec $\delta \leq \alpha$ et $\sigma < \beta$, et ces deux ordinaux sont uniques. L'exponentiation ne déroge pas à la règle : il y a une généralisation du logarithme chez les ordinaux. Nous n'allons cependant par la voir tout de suite, mais dans la prochaine section sur la forme normale de Cantor.

4.2 Applications à support fini

Nous n'allons pas ici fournir à proprement parler d'interprétation géométrique dans le cas de l'exponentiation, mais établir plutôt un isomorphisme d'ordre entre l'ordinal α^β et un autre ensemble bien ordonné, avec l'idée que cela pourra nous éclairer un peu mieux sur l'ordre fournit par cet ordinal.

Pour comprendre la direction dans laquelle nous partons, revenons à la définition de α^β. En ayant en tête que $\alpha^2 = \alpha\alpha$, ou encore que $\alpha^3 = \alpha\alpha\alpha$, d'une manière générale on a intuitivement l'égalité α^β est $\alpha\alpha\ldots\alpha$ où α est répété β fois. Or l'interprétation graphique de $\alpha\alpha$ est le produit cartésien $\alpha \times \alpha$ munit de l'ordre lexicographique. Ne peut-on pas partir de cet ordre lexicographique, mais le généraliser à 3, voir une infinité de composantes (par exemple si β n'est pas un entier naturel) ? Pour trois composantes, ce n'est pas compliqué : on compare les premières, si elles sont égales on compare les deuxièmes, et si elles sont aussi égales on compare alors les troisièmes. Comment faire dans le cas d'une infinité de composantes ?

Rappelons-nous que dans le précédent livre :

1. Nous avons défini le produit cartésien de deux ensembles A et B comme étant l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.
2. Nous avons ensuite remarqué que le couple (a, b) peut être vu comme l'application $f : \{0, 1\} \longrightarrow ?$ définie par $f(0) = a \in A$ et $f(1) = b \in B$. En particulier en notant $A_0 := A$ et $A_1 := B$, on a $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in \{0, 1\}$.
3. Cette approche nous a permis de généraliser la notion de produit cartésien à toute une famille d'ensembles $(A_i)_{i\in I}$. Nous avons donc défini $\prod_{i\in I} A_i$ comme l'ensemble de toutes

les applications $f : I \longrightarrow ?$ telles que $\forall i \in I, f(i) \in A_i$.

4. En particulier, en prenant $\forall i \in I, A_i := E$ pour E un ensemble quelconque fixé à l'avance, on obtient $\prod_{i \in I} E$ qui est l'ensemble des applications $f : I \longrightarrow ?$ telles que $\forall i \in I, f(i) \in E$, c'est-à-dire simplement l'ensemble $\mathcal{F}(I \to E)$ des applications $I \longrightarrow E$, que l'on a d'ailleurs aussi noté E^I.

Autrement dit, pour généraliser le produit cartésien de α par lui-même β fois, il suffit de regarder l'ensemble $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a choisi la notation exponentielle pour l'ensemble des applications : il semble intuitivement que $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$ et α^β sont isomorphes. **Ce n'est en général pas vrai**, mais pour comprendre cela réfléchissons tout d'abord à voir comment généraliser l'ordre lexicographique.

Si l'on se souvient bien, pour γ et δ deux ordinaux, le produit ordinal $\gamma\delta$ est isomorphe au produit cartésien $\delta \times \gamma$ muni de l'ordre lexicographique. On a ainsi une inversion entre la gauche et la droite. Cela a des conséquences sur l'exponentiation : en effet on a $\gamma^3 = (\gamma\gamma)\gamma$ qui est donc isomorphe à $\gamma \times (\gamma \times \gamma)$ muni de l'ordre lexicographique. Là où les γ supplémentaires s'accumulent sur la droite pour la multiplication, ils s'accumulent sur la gauche pour le produit cartésien.

Si l'on souhaite conserver la gauche et la droite, il faut donc non pas munir $\gamma \times \delta$ de l'ordre lexicographique, mais de l'ordre anti-lexicographique, c'est-à-dire que pour (ε, ζ) et (ε', ζ') dans $\gamma \times \delta$, on pose

$$(\varepsilon, \zeta) \sqsubseteq (\varepsilon', \zeta') \iff \begin{cases} \zeta < \zeta' \\ \text{ou} \\ \zeta = \zeta' \text{ et } \varepsilon \leq \varepsilon' \end{cases}$$

Dans ce cas-là, on peut montrer que $\gamma\delta$ est bien isomorphe à $\gamma \times \delta$ muni de cet ordre anti-lexicographique, le sens est donc bien conservé. Pour reprendre l'analogie avec le dictionnaire, cela veut dire que cette fois on compare les mots en commençant par les dernières lettres : dès qu'il y a une lettre de différence (en partant de la fin du mot), celle-ci nous dit quel est mot se trouve avant quel autre. La preuve n'est pas difficile : $\gamma \times \delta$ et $\delta \times \gamma$ sont isomorphes munit respectivement de l'ordre anti-lexicographique et lexicographique (et ça se voit tout de suite si on écrit les définitions des deux !).

Généralisons donc l'ordre anti-lexicographique à l'ensemble $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$.

Proposition 71 (Ordre anti-lexicographique sur les applications)

Soient α et β deux ordinaux.
Pour tout $f : \beta \longrightarrow \alpha$ et $g : \beta \longrightarrow \alpha$, posons

$$f \prec g \iff \exists \gamma \in \beta, \begin{cases} \forall \delta \in \beta, \Big(\gamma < \delta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta)\Big) \\ \text{et } f(\gamma) < g(\gamma) \end{cases}$$

Alors $\prec$ est un ordre strict sur $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$.
Son ordre (large) associé est appelé **ordre anti-lexicographique** sur $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$.

Démonstration

Antiréflexivité

Soit $f : \beta \longrightarrow \alpha$.

Pour tout $\gamma \in \beta$, on ne peut pas avoir $f(\gamma) < f(\gamma)$ par antiréflexivité de $<$.

Il n'existe donc pas de $\gamma \in \beta$ qui remplit la deuxième condition de la définition de $f \prec f$, donc en particulier on n'a pas $f \prec f$.

Donc pour tout $f : \beta \longrightarrow \alpha$, on n'a pas $f \prec f$.

Donc $\prec$ est antiréflexive sur $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$.

Transitivité

Soient $f : \beta \longrightarrow \alpha$, $g : \beta \longrightarrow \alpha$ et $h : \beta \longrightarrow \alpha$.

Supposons que $f \prec g \prec h$.

Il existe donc γ_1 et γ_2 dans β tels que

$$\begin{cases} \forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_1 < \delta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta)\Big) \\ \text{et } f(\gamma_1) < g(\gamma_1) \end{cases} \text{et} \begin{cases} \forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_2 < \delta \Rightarrow g(\delta) = h(\delta)\Big) \\ \text{et } g(\gamma_2) < h(\gamma_2) \end{cases}$$

Comme $\leq$ est total chez les ordinaux, on a $\gamma_1 < \gamma_2$ ou $\gamma_1 = \gamma_2$ ou $\gamma_2 < \gamma_1$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\gamma_1 < \gamma_2$.

  Soit $\delta \in \beta$.

  Supposons que $\gamma_2 < \delta$.

  Par définition de γ_2 on a $g(\delta) = h(\delta)$.

  Mais on a aussi $\gamma_1 < \delta$ par transitivité de $<$.

  Donc par définition de γ_1 on a $f(\delta) = g(\delta)$.

  On a donc $f(\delta) = h(\delta)$.

  Donc si $\gamma_2 < \delta$ alors $f(\delta) = h(\delta)$.

  Donc $\forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_2 < \delta \Rightarrow f(\delta) = h(\delta)\Big)$.

  Comme $\gamma_1 < \gamma_2$, on a $f(\gamma_2) = g(\gamma_2)$ par définition de γ_1.

  De plus $g(\gamma_2) < h(\gamma_2)$ par définition de γ_2, et donc $f(\gamma_2) < h(\gamma_2)$.

  Ainsi γ_2 vérifie les deux conditions de la définition de $f \prec h$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\gamma_1 = \gamma_2$.

  Alors $\forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_1 < \delta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta) = h(\delta)\Big)$ par définition de γ_1 et γ_2.

  On a donc $\forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_1 < \delta \Rightarrow f(\delta) = h(\delta)\Big)$.

  De même, on a $f(\gamma_1) < g(\gamma_1) < h(\gamma_1)$ par définition de γ_1 et γ_2.

  On a donc $f(\gamma_1) < h(\gamma_1)$ par transitivité de $<$.

  Ainsi γ_1 vérifie les deux conditions de la définition de $f \prec h$.

► Plaçons-nous dans le cas où $\gamma_2 < \gamma_1$.

Soit $\delta \in \beta$.

Supposons que $\gamma_1 < \delta$.
Par définition de γ_1 on a $f(\delta) = g(\delta)$.
Mais on a aussi $\gamma_2 < \delta$ par transitivité de $<$.
Donc par définition de γ_2 on a $g(\delta) = h(\delta)$.
On a donc $f(\delta) = h(\delta)$.

Donc si $\gamma_1 < \delta$ alors $f(\delta) = h(\delta)$.

Donc $\forall \delta \in \beta, \Big(\gamma_1 < \delta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta)\Big)$.
Comme $\gamma_2 < \gamma_1$, on a $g(\gamma_1) = h(\gamma_1)$ par définition de γ_2.
De plus $f(\gamma_1) < g(\gamma_1)$ par définition de γ_1, et donc $f(\gamma_1) < h(\gamma_1)$.
Ainsi γ_1 vérifie les deux conditions de la définition de $f \prec h$.

Dans les trois cas, on a donc $f \prec h$.

Donc si $f \prec g \prec h$ alors $f \prec h$.

Donc $\prec$ est transitive.

Finalement $\boxed{\prec \text{ est une relation d'ordre strict sur } \mathcal{F}(\beta \to \alpha)}$.
CQFD.

Malheureusement, bien que α et β soient bien ordonnés car des ordinaux, cela ne suffit pas à rendre $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$ bien ordonné, muni de l'ordre anti-lexicographique. En effet, cet ordre n'a même pas de raison d'être total ! Par exemple, prenons $\alpha := 2 = \{0, 1\}$ et $\beta := \omega$ puis $f : \omega \longrightarrow \{0, 1\}$ qui vaut 0 sur les entiers pairs et 1 sur les entiers impairs, et enfin $g : \omega \longrightarrow \{0, 1\}$ qui fait le contraire, c'est-à-dire qui vaut 1 sur les entiers pairs et 0 sur les entiers impairs.

$f = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ et $g = (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$.
En partant de la droite, à partir de quand peut-on comparer f et g ?

Il n'existe alors pas d'entier n tel que pour tout $m \in \omega$, on ait $n < m \Rightarrow f(m) = g(m)$ si bien que l'on ne peut avoir ni $f \preccurlyeq g$ ni $g \preccurlyeq f$: ainsi f et g ne sont pas comparables. Autrement dit, comme 2^ω est un ordinal, il est totalement ordonné donc **n'est pas isomorphe** à $\mathcal{F}(\omega \to 2)$.

C'est un peu comme vouloir comparer des mots infinis en commençant par la fin (puisqu'on utilise l'ordre anti-lexicographique), cela n'a pas de sens. Une solution est en fait de ne pas chercher à comparer toutes les applications $\mathcal{F}(\beta \to \alpha)$, mais seulement celles qui finissent par « *s'arrêter* » à un moment, c'est-à-dire qui finissent par prendre uniquement la valeur 0 à partir d'un moment. Autrement dit, il s'agit des applications $f : \beta \longrightarrow \alpha$ telles que l'ensemble $\big\{\gamma \in \beta \bigm| f(\gamma) \neq 0\big\}$ admet un maximum, qui jouera alors le rôle de « *dernière position* ». Cet ensemble porte d'ailleurs un nom : c'est le **support** de f.

Définition 24 (Support d'une application ordinale)

Soient β et α deux ordinaux, et $f : \beta \longrightarrow \alpha$.
On appelle **support** de f l'ensemble $\mathrm{supp}(f) := \{\gamma \in \beta \mid f(\gamma) \neq 0\}$.

Ainsi si l'on ne regarde que les applications dont le support admet un maximum, les deux applications de tout à l'heure ne sont pas concernées, car elles alternent sans arrêt entre 0 et 1.

Malheureusement, cela ne suffit toujours pas. Prenons encore $\alpha := 2 = \{0, 1\}$ mais cette fois $\beta := \omega + 1$, et reprenons les mêmes applications f et g que tout à l'heure en rajoutant la valeur 0 en ω. Les supports $\mathrm{supp}(f)$ et $\mathrm{supp}(g)$ admettent bien ω pour maximum, mais pourtant il n'existe toujours pas d'élément de β en lequel f et g diffèrent mais au delà duquel f et g sont égales : ce n'est pas ω puisque $f(\omega) = 0 = g(\omega)$, et pour tous les autres éléments de β on retombe sur le même problème que tout à l'heure puisque ω est limite.

En vérité nous allons restreindre encore plus les applications de notre intérêt. Nous n'allons pas demander uniquement au support d'avoir un maximum, mais carrément à toutes ses parties non vides ! Qu'est-ce que cela implique sur le support ? La proposition qui suit va nous éclairer, en se rappelant que pour un ordinal, être fini veut dire la même chose qu'être un entier naturel.

Proposition 72 (Ordinaux finis et maximum)

Soit α un ordinal.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. α est un ordinal fini.
2. Toute partie non vide de α admet un maximum.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que α est un ordinal fini.

Soit X une partie non vide de α.

On a évidemment $\forall \gamma \in \alpha, \gamma \in \alpha$ donc $\forall \gamma \in \alpha, \gamma < \alpha$ par définition de $<$.

Donc $\sup(\alpha) \leq \alpha$ par minimalité de la borne supérieure.

Or $X \subseteq \alpha$ donc $\sup(X) \leq \sup(\alpha)$ et donc $\sup(X) \leq \alpha$.

Or α est un ordinal fini par hypothèse.

Donc $\sup(X) = 0$ ou $\sup(X)$ est un successeur par définition.

Supposons par l'absurde que $\sup(X) \notin X$.

Alors $\sup(X)$ est un ordinal limite d'après la proposition 21 page 53.

On a donc nécessairement $\sup(X) = 0$ par ce qui précède.

On a donc en particulier $\forall \xi \in X, \xi \leq 0$ donc $\forall \xi \in X, \xi \subseteq 0$.

Comme $0 = \varnothing$, on a donc $\forall \xi \in X, \xi = 0$.

Comme X est non vide, on a donc $0 \in X$ et donc $\sup(X) \in X$.

C'est absurde puisqu'on a justement supposé $\sup(X) \notin X$.

Par l'absurde on vient de montrer que $\sup(X) \in X$.

Autrement dit X admet un maximum.

Donc toutes les parties non vides de α admettent un maximum.

Donc $\boxed{\text{si } \alpha \text{ est fini alors toutes les parties non vides de } \alpha \text{ admettent un maximum}}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Supposons que toutes les parties non vides de α admettent un maximum.

Supposons par l'absurde que α n'est pas fini.

Il existe donc un ordinal $\beta \leq \alpha$ tel que $\beta \neq 0$ et β n'est pas un successeur.

Autrement dit β est un ordinal limite non nul donc non vide.

En particulier on a $\sup(\beta) = \beta$ d'après la proposition 22 page 54.

On a donc $\sup(\beta) \not< \beta$ par antiréflexivité de $<$.

Autrement dit on a $\sup(\beta) \notin \beta$ par définition de $<$.

Donc β n'admet pas de maximum.

C'est absurde puisque β est une partie non vide de α.

Par l'absurde, on vient de montrer que α est fini.

Donc $\boxed{\text{si toutes les parties non vides de } \alpha \text{ admettent un maximum alors } \alpha \text{ est fini}}$.

CQFD.

Ainsi, chez les ordinaux avoir toutes ses parties non vides qui ont un maximum revient à être fini. Remarquons alors que pour $f : \beta \longrightarrow \alpha$, comme $\mathrm{supp}(f)$ est une partie de l'ordinal β, c'est une partie d'un ensemble bien ordonné, si bien que $\mathrm{supp}(f)$ est lui-même bien ordonné, et donc isomorphe à un ordinal, son type ! Autrement dit, la condition qui nous intéresse chez le support est simplement que son type soit fini.

Définition 25 (Application ordinale à support fini)

Soient β et α deux ordinaux et $f : \beta \longrightarrow \alpha$.
On dit que f est **à support fini** si et seulement si $\mathrm{type}\big(\mathrm{supp}(f)\big)$ est un ordinal fini.

On note $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ l'ensemble des applications $\beta \longrightarrow \alpha$ à support fini.

Remarque :
Certains auteurs notent $a^{(\beta)}$ l'ensemble $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

Exemple :
Essayons de voir à travers deux exemples comment comparer dans les faits deux éléments de $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

1. Prenons $\beta = \omega = \mathbb{N}$ et $\alpha = 2 = \{0, 1\}$, de sorte qu'une application $f : \beta \longrightarrow \alpha$ est simplement une application qui à un entier renvoie 0 ou 1. C'est en soi le principe d'une fonction indicatrice : on renvoie 1 si l'entier est dans la partie, et 0 sinon.

   Autrement dit, on peut voir $\mathcal{F}(\omega \to 2)$ comme l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, et $\mathrm{sf}(\omega \to 2)$ comme l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ (puisqu'alors on finit par ne plus valoir que 0, dont on finit par ne plus prendre aucun élément).

   Comment alors comparer A et B deux parties finies de $\mathbb{N}$? Si les deux sont vides, alors elles sont égales. Si l'une des deux est vide et l'autre non, alors la partie vide est strictement plus petite que la non vide. Sinon A et B sont toutes les deux non vides, on peut donc regarder le dernier élément de chacune, c'est-à-dire $\max(A)$ et $\max(B)$:

   - si $\max(A) < \max(B)$ alors $A \prec B$,
   - si $\max(A) > \max(B)$ alors $A \succ B$,
   - si $\max(A) = \max(B)$ alors on considère A' et B', qui sont A et B desquelles on a retiré ce maximum, et on réitère le procédé de comparaison sur A' et B'.

   On est sûr que l'on va pouvoir s'arrêter car A et B sont finies ! C'est précisément pour ça que la notion de support fini est intéressante : on finira forcément par avoir épuisé tout A ou tout B à force de retirer un élément à chaque étape, et donc par pouvoir dire laquelle des deux parties est la plus grande !

   2. Plus généralement, si l'on prend deux applications f et g dans $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$, comment les comparer ? Considérons $\mathrm{supp}(f)$ et $\mathrm{supp}(g)$. Si les deux sont vides alors $f = g$. Si l'un des deux est vide et l'autre non, alors l'application dont le support est vide est strictement plus petite que l'autre. Sinon par définition les supports sont finis donc ont un maximum :

   - si $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \max\big(\mathrm{supp}(g)\big)$ alors $f \prec g$,
   - si $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) > \max\big(\mathrm{supp}(g)\big)$ alors $f \succ g$,
   - si $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) = \max\big(\mathrm{supp}(g)\big)$, notons γ ce maximum :
     - si $f(\gamma) < g(\gamma)$ alors $f \prec g$,
     - si $f(\gamma) > g(\gamma)$ alors $f \succ g$,
     - si $f(\gamma) = g(\gamma)$ alors on recommence le procédé de comparaison entre $f_{|<\gamma}$ et $g_{|<\gamma}$.

Les exemples précédents laissent entrevoir pourquoi nous avons en fait là un ensemble bien ordonné : disposant de X une partie non vide de $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$, on va pouvoir suivre la procédure de comparaison pour exhiber le minimum de X. Cette procédure de comparaison est basée sur une récursion : on vide peu à peu des ensembles finis de leur contenu jusqu'à épuisement, et la procédure s'arrête alors.

La proposition qui suit sera démontrée avec moins de rigueur que d'ordinaire : initialement j'ai souhaité la démontrer proprement, mais cela devenait rapidement fastidieux, pour un gain négligeable. Heureusement, celle-ci réussi sans aucun doute le test de rigueur de n'importe quel cursus mathématique, elle manque un peu de rigueur seulement selon le standard que l'on s'est imposé dans le Barbuki

Proposition 73 (Support fini bien ordonné)

Soient α et β deux ordinaux.
Alors $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ muni de l'ordre anti-lexicographique est bien ordonné.

Idée de preuve

1. On s'intéresse aux parties finies de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire comme décrit dans l'exemple ci-dessus au cas $\beta := \omega = \mathbb{N}$ et $\alpha := 2 = \{0, 1\}$. Considérons X un ensemble non vide de parties finies de $\mathbb{N}$. On regarde alors l'ensemble

$$M := \{ \max(A) \mid A \in X \}$$

des maximums de chaque éléments de X. En effet, cela revient à regarder le dernier élément de chaque $A \in X$: comme avec l'ordre anti-lexicographique la comparaison commence par la fin, c'est par là qu'il faut commencer à regarder. Le minimum de X se trouve alors parmi les $A \in X$ dont le dernier élément est le plus petit, c'est-à-dire les $A \in X$ tels que $\max(A) = \min(M)$.

On considère donc tout naturellement l'ensemble :

$$X_M := \{ A \in X \mid \max(A) = \min(M) \}$$

Le minimum de X se trouve parmi les éléments de X_M. Si X_M est un singleton, alors son unique élément est par définition (de l'ordre anti-lexicographique) le minimum de X. Sinon, on va s'intéresser plus spécifiquement aux éléments de X_M et opérer la comparaison sur eux. Pour cela, on leur retire ce maximum commun, c'est-à-dire que l'on regarde

$$X' := \{ A \backslash \{\min(M)\} \mid A \in X_M \}$$

et on recommence alors tout le processus décrit jusqu'ici, avec X' cette fois. On est sûr que cela va s'arrêter à un moment car tous les éléments de X sont finis : le fait de retirer à chaque fois leur maximum va finir par les épuiser. Pour formaliser cela, on construit cette suite des maximums, qui va être alors une suite décroissante d'ordinaux et donc va finir par stationner d'après la condition de la chaîne descendante.

2. On s'intéresse aux triplets d'ordinaux, c'est-à-dire au cas où $\beta := 3 = \{0, 1, 2\}$ et α est quelconque. Dans ce cas-là, comme β est lui-même fini, cela correspond à tous les triplets possibles. On va cette fois spécifier X afin de fixer les idées.

Prenons

$$X := \Big\{(45,8,1),(\omega^2,12,0),(145,12,89),(0,999,0),(1,1,1),(78,12,0)\Big\}$$

Chacun de ces triplets a une dernière position non nulle : on note M l'ensemble de toutes les dernières positions non nulles : ici $M = \{1,2\}$ (on commence à numéroter avec 0 !). On ne va alors conserver que les triplets dont la dernière composante non nulle est en position $\min(M) = 1$. On considère alors

$$X_M := \Big\{(\omega^2,12,0),(0,999,0),(78,12,0)\Big\}$$

Par définition de l'ordre anti-lexicographique, le minimum de X se trouve forcément parmi les éléments de X_M. On regarde ensuite V l'ensemble des valeurs en cette position $\min(M) = 1$. Cela donne $V := \{12,999\}$, et on considère alors la plus petite de ces valeurs : $\min(V) = 12$. On ne conserve alors plus que ceux de X_M qui ont cette plus plus petite valeur 12 en position 1, ce qui donne

$$X_V := \Big\{(\omega^2,12,0),(78,12,0)\Big\}$$

Par définition de l'ordre anti-lexicographique, le minimum de X se trouve forcément parmi les éléments de X_V. On considère alors X' l'ensemble des triplets de X_V mais restreints jusqu'à leur position avant 1, ce qui donne simplement $X' := \Big\{\omega^2, 78\Big\}$. On recommence alors la procédure sur X', pour trouver 78 et donc en revenant à X le minimum est $(78,12,0)$.

3. Enfin, décrivons le cas général où α et β sont quelconques. On considère X un ensemble non vide d'applications $\beta \longrightarrow \alpha$ à support finis. On considère alors

$$M := \Big\{ \max\big(\mathrm{supp}(f)\big) \;\Big|\; f \in X\Big\}$$

c'est l'ensemble de toutes les dernières positions non nulles de chaque $f \in X$. On s'intéresse à la plus petite de ces dernières positions $m := \min(M)$. On ne conserve de X que

$$X_M := \big\{f \in X \;\big|\; \max\big(\mathrm{supp}(f)\big) = m\big\}$$

c'est-à-dire les applications de X dont le support se termine le plus tôt. Par définition de l'ordre anti-lexicographique, le minimum de X se trouve forcément dans X_M. On regarde alors parmi toutes ces applications la valeur qu'elles prennent en cette dernière position :

$$V = \{f(m) \mid f \in X_M\}$$

puis la plus petite de ces valeurs $v := \min(V)$. On ne conserve de X_M que celles qui prennent la valeur v en la position m, pour considérer

$$X_V := \{f \in X_M \mid f(m) = v\}$$

Le minimum de X se trouve forcément parmi les éléments de X_V, par définition de l'ordre anti-lexicographique. Si X_V est un singleton, alors son unique élément est forcément le minimum de X et donc on s'arrête là. Sinon, on restreint tous les éléments de X_V jusqu'à m (non compris), c'est-à-dire que l'on considère

$$X' := \{f_{|<m} \mid f \in X_V\}$$

et on recommence alors toute la procédure sur X'. On est sûr que cela va s'arrêter car on épuise à chaque étape peu à peu le support des applications, que l'on sait sont finis. Plus rigoureusement, on construit la suite des minimum des dernières positions m qui va être décroissante, et donc finir par stationner d'après la condition de la chaîne descendante. Comme le fait de restreindre aux positions avant m fait que la prochaine dernière position est strictement plus petite que m, cette suite est strictement décroissante, sauf si l'on a totalement épuisé le plus petit des supports. C'est donc juste avant de stationner que la suite des m va nous indiquer qui est le minimum. ■

De même que la proposition précédente n'a pas été démontrée rigoureusement, nous n'allons pas démontrer rigoureusement le théorème suivant, mais simplement en donner une idée de preuve. Redisons-le, cette preuve remplit haut la main les critères de rigueur de l'université : ce n'est que du point de vue de nos standard barbukiens qu'elle est moins rigoureuse.

Théorème 9 (Exponentiation d'ordinaux et supports finis)

Soient α et β deux ordinaux.
On munit $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ de l'ordre anti-lexicographique.
On a alors $\mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)\big) = \alpha^\beta$.

Démonstration

• **Cas où** $\alpha = 0$

Dans ce premier cas, on fixe un ordinal quelconque β.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $\beta = 0$.
Il existe un unique application $\varnothing \longrightarrow \varnothing$, c'est-à-dire $\varnothing$ lui-même.
Cette application est évidemment à support fini.
On en déduit que $\mathrm{sf}(0 \to 0) = \mathrm{sf}(\varnothing \to \varnothing) = \{\varnothing\} = \{0\} = 1 = 0^0$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $\beta \neq 0$.
Il n'existe aucune application $\beta \to \varnothing$, en particulier aucune à support fini.
On en déduit que $\mathrm{sf}(\beta \to 0) = \mathrm{sf}(\beta \to \varnothing) = \varnothing = 0 = 0^\beta$.

Dans les deux cas, on a $\mathrm{sf}(\beta \to 0) = 0^\beta$, donc $\mathrm{sf}(\beta \to 0) \cong 0^\beta$ par réflexivité de $\cong$.

• **Cas où** $\alpha \neq 0$.
Ici on ne fixe plus β et on montre la propriété par le principe faible d'induction.
Pour tout ordinal β, posons $P(\beta)$ l'assertion $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \cong \alpha^\beta$.

Initialisation
Il existe une unique application $\varnothing \to \alpha$, c'est-à-dire $\varnothing$ lui-même, et elle est évidemment à support fini, si bien que $\mathrm{sf}(0 \to \alpha) = \mathrm{sf}(\varnothing \to \alpha) = \{\varnothing\} = \{0\} = 1 = \alpha^0$.
En particulier on a $\mathrm{sf}(0 \to \alpha) \cong \alpha^0$ par réflexivité de $\cong$, et donc $P(0)$.

Hérédité
Soit β un ordinal tel que $P(\beta)$.
Commençons par remarquer que

$$\begin{aligned} \alpha^{\beta+1} &= \alpha^\beta \alpha \text{ par définition de l'exponentiation} \\ &\cong \alpha \times \alpha^\beta \text{ d'après le théorème 8 page 153} \\ &\cong \alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \text{ d'après } P(\beta) \end{aligned}$$

Ainsi montrer que $\alpha^{\beta+1} \cong \mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$ revient à montrer que $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \cong \mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$. Pour cela, on introduit l'application suivante :

$$\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha) & \longrightarrow & \alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \\ f & \longmapsto & (f(\beta), f_{|\beta}) \end{array} \right)$$

▶ Montrons que φ est surjective sur $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.
Soit $(\gamma, g) \in \alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.
En posant $f : \beta + 1 \longrightarrow \alpha$ définie par $f(\beta) = \gamma$ et $f_{|\beta} = g$, on peut montrer que f est à support fini, et par définition de φ on a $\varphi(f) = (\gamma, g)$.
Le fait que f est à support fini vient du fait que g l'est :

— ou bien $f(\beta) = 0$ auquel cas $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g)$,

— ou bien $f(\beta) \neq 0$ auquel cas $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g) \cup \{\beta\}$ qui est fini car $\mathrm{supp}(g)$ l'est.

Ainsi φ est surjective sur $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

► Montrons que φ est strictement croissante.

On note $\prec$ l'ordre anti-lexicographique strict sur $\mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$ et $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

On note $\sqsubset$ l'ordre lexicographique strict sur $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

Soient f et g dans $\mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$ telles que $f \prec g$.

Il existe donc $\gamma < \beta + 1$ tel que $\begin{cases} \forall \delta < \beta + 1, \Big(\gamma < \delta \Rightarrow f(\delta) = g(\delta)\Big) \\ f(\gamma) < g(\gamma) \end{cases}$

On a $\gamma < \beta + 1$ donc $\gamma \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

Si $\gamma = \beta$ alors $f(\beta) < g(\beta)$ donc $\big(f(\beta), f_{|\beta}\big) \sqsubset \big(g(\beta), g_{|\beta}\big)$.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $\gamma < \beta$.

En prenant $\delta := \beta$ dans l'accolade ci-dessus, on obtient $f(\beta) = g(\beta)$.

Toujours dans l'accolade ci-dessus, on obtient en particulier

$$\begin{cases} \forall \delta < \beta, \Big(\gamma < \delta \Rightarrow f_{|\beta}(\delta) = f(\delta) = g(\delta) = g_{|\beta}(\delta)\Big) \\ f_{|\beta}(\gamma) = f(\gamma) < g(\gamma) = g_{|\beta}(\gamma) \end{cases}$$

si bien que $f_{|\beta} \prec g_{|\beta}$, et donc $\big(f(\beta), f_{|\beta}\big) \sqsubset \big(g(\beta), g_{|\beta}\big)$.

Dans les deux cas, on a $\big(f(\beta), f_{|\beta}\big) \sqsubset \big(g(\beta), g_{|\beta}\big)$, c'est-à-dire $\varphi(f) \sqsubset \varphi(g)$.

Ainsi φ est strictement croissante.

Or on a dit lors de la proposition 73 page 176 que $\mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$ est bien ordonné.

En particulier $\mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$ est totalement ordonné.

Donc le domaine de φ est totalement ordonné.

Donc φ est croissante et injective, donc φ est croissante et bijective sur $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

Toujours parce que le domaine de φ est totalement ordonné, on en déduit que φ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier $\alpha \times \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \cong \mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$, et donc $\alpha^{\beta+1} \cong \mathrm{sf}(\beta + 1 \to \alpha)$.

On a donc $P(\beta + 1)$.

Ainsi pour tout ordinal β, si $P(\beta)$ alors $P(\beta + 1)$.

Hérédité limite

Soit β un ordinal limite non nul tel que $\forall \gamma < \beta, P(\gamma)$.

Autrement dit, pour tout $\gamma < \beta$, $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)$ est isomorphe à α^γ.

Donc pour tout $\gamma < \beta$, il y a un isomorphisme $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha) \longrightarrow \alpha^\gamma$, qui est en fait unique d'après la proposition 27 page 63 : notons-le φ_γ.

► Commençons par remarquer la chose suivante.

Soit $f \in \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

Soit $\gamma < \beta$ un ordinal tel que $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$.

Considérons alors $\iota := \begin{pmatrix} \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f} & \longrightarrow & \mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}} \\ g & \longmapsto & g_{|\gamma} \end{pmatrix}$.

Remarquons que ι est un isomorphisme d'ordres.

En effet, ι est surjective dans $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}$.

Soit $h \in \mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}$.

On prolonge h à β en complétant par des 0 : l'application g obtenue vérifie par définition $\iota(g) = g_{|\gamma} = h$. Par définition $h \prec f_{|\gamma}$ donc il existe $\delta < \gamma$ tel qu'au delà de δ, h et $f_{|\gamma}$ sont égales et tel que $h(\delta) < f_{|\gamma}(\delta)$. Mais g au delà de γ vaut 0 par définition, et il en va de même pour f puisque $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$. Donc on obtient bien $g \prec f$ si bien que $g \in \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}$ puisque le support de h étant fini, il en va de même pour g qui n'a pu prendre que des valeurs nulles en plus.

De plus, ι est strictement croissante.

Soient g et g' dans $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}$ telles que $g \prec g'$.

Il existe donc $\delta < \beta$ tel que g et g' coïncident au delà de δ et telles que $g(\delta) < g'(\delta)$. Comme $g \prec f$, $g' \prec f$ et $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$, on a aussi $\max\big(\mathrm{supp}(g)\big) < \gamma$ et $\max\big(\mathrm{supp}(g')\big) < \gamma$ par définition de l'ordre anti-lexicographique. Autrement dit, on a nécessairement $\delta < \gamma$ (sinon on aurait $g(\delta) = 0 = g'(\delta)$), si bien qu'on a $g_{|\gamma} \prec g'_{|\gamma}$ par définition de l'ordre anti-lexicographique, et donc $\iota(g) \prec \iota(g')$.

Or $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ est bien ordonné d'après la proposition 73 page 176, donc $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}$ l'est aussi, donc en particulier est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15. Ainsi le domaine de ι est totalement ordonné, donc ι est croissante, injective et surjective dans $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}$, et donc toujours car son domaine est totalement ordonné, ι est un isomorphisme d'ordres de $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}$ dans $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}$.

Ainsi on a $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f} \cong \mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}$.

En particulier on a $\mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}\big) = \mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}\big)$.

Or par définition φ_γ est l'isomorphisme d'ordres entre $\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)$ et son type, à savoir l'ordinal α^γ.

Donc $\varphi_\gamma(f_{|\gamma}) = \mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)_{\prec f_{|\gamma}}\big)$ d'après la proposition 29 page 70.

On a donc $\varphi_\gamma(f_{|\gamma}) = \mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}\big)$ par ce qui précède.

Ainsi on vient de voir que pour tout $\gamma < \beta$ tel que $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$, on a $\varphi_\gamma(f_{|\gamma}) = \mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)_{\prec f}\big)$.

Cela veut en particulier dire que pour peu que $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$, la valeur de $\varphi_\gamma(f_{|\gamma})$ est indépendante de γ.

► On peut désormais construire l'isomorphisme $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \longrightarrow \alpha^\beta$.

Posons l'application suivante :

$$\varphi_\beta := \left(\begin{array}{rcl} \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) & \longrightarrow & \alpha^\beta \\ f & \longmapsto & \varphi_\gamma(f_{|\gamma}) \text{ où } \gamma < \beta \text{ est quelconque tel que } \max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma \end{array} \right)$$

Cette application est bien définie :

— Tout d'abord un tel γ existe nécessairement : pour $f \in \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$, si l'on pose $\delta := \max\big(\mathrm{supp}(f)\big)$ alors on a par définition $\delta < \beta$, et comme β est limite on a $\delta + 1 < \beta$ d'après la proposition 15 page 44. On peut donc par exemple prendre $\gamma := \delta + 1$. Gardons bien à l'esprit le fait que pour $\gamma < \beta$ tel que $\delta < \gamma$, la valeur de $\varphi_\gamma(f_{|\gamma})$ ne dépend pas de γ.

— Pour tout $\gamma < \beta$, on a $\alpha^\gamma < \alpha^\beta$ par stricte croissante de l'exponentiation à droite, car β est limite non nul, donc $\alpha^\gamma \leq \alpha^\beta$ et donc $\alpha^\gamma \subseteq \alpha^\beta$ par définition de $\leq$. Comme φ_γ est à valeurs dans α^γ, il est donc en particulier à valeurs dans α^β, et donc l'application φ_β est bien à valeurs dans α^β.

Montrons que φ_β est strictement croissante.

Soient f et g dans $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ telles $f \prec g$.

Considérons $\gamma < \beta$ tel que $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$ et $\max\big(\mathrm{supp}(g)\big) < \gamma$ (par exemple le max des deux, ajouté de 1).

Alors on a toujours $f_{|\gamma} \prec g_{|\gamma}$ (car on ne fait qu'enlever des termes où les deux applications valent 0).

On a donc $\varphi_\gamma(f_{|\gamma}) < \varphi_\gamma(g_{|\gamma})$ par stricte croissance de φ_γ.

Or par définition de φ_β on a $\varphi_\beta(f) = \varphi_\gamma(f_{|\gamma})$ et $\varphi_\beta(g) = \varphi_\gamma(g_{|\gamma})$.

On a donc $\varphi_\beta(f) < \varphi_\beta(g)$.

Donc φ_β est strictement croissante.

Or son domaine $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ est bien ordonné d'après la proposition 73 page 176.

Donc le domaine de φ_β est totalement ordonné d'après la proposition 3 page 15.

Donc φ_β est croissante et injective.

Montrons que φ_β est surjective dans α^β.

Par définition de φ_β on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \subseteq \alpha^\beta$.

Montrons que $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \supseteq \alpha^\beta$.

Soit $\delta \in \alpha^\beta$.

On a donc $\delta < \alpha^\beta$ par définition de $<$.

Or on a $\alpha^\beta = \sup\limits_{\gamma<\beta} \alpha^\gamma$ par définition de l'exponentiation.

Il existe donc $\gamma < \beta$ tel que $\delta < \alpha^\gamma$ et donc $\delta \in \alpha^\gamma$ par définition de $<$.

Or par définition $\varphi_\gamma : \mathrm{sf}(\gamma \to \alpha) \longrightarrow \alpha^\gamma$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier φ_γ est surjectif dans α^γ.

Il existe donc $g \in \mathrm{sf}(\gamma \to \alpha)$ tel que $\varphi_\gamma(g) = \delta$.

Posons alors $f : \beta \longrightarrow \alpha$ définie par $f_{|\gamma} = g$ et que l'on complète à β par des 0. Par définition on a alors $\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}(g)$.

En particulier comme g est à support fini, f l'est aussi donc $f \in \mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$.

De plus par définition $\max\big(\mathrm{supp}(g)\big) < \gamma$ donc $\max\big(\mathrm{supp}(f)\big) < \gamma$.

En particulier $\varphi_\beta(f) = \varphi_\gamma(f_{|\gamma}) = \varphi_\gamma(g) = \delta$.

Donc $\delta \in \mathrm{im}(\varphi_\beta)$.

Ainsi on a $\mathrm{im}(\varphi_\beta) \supseteq \alpha^\beta$ et donc $\mathrm{im}(\varphi_\beta) = \alpha^\beta$.

Ainsi φ_β est surjective dans α^β.

Finalement, $\varphi_\beta : \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \longrightarrow \alpha^\beta$ est croissante, injective et surjective dans α^β.

Or on a déjà dit que son domaine $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)$ est totalement ordonné.

Donc $\varphi_\beta : \mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \longrightarrow \alpha^\beta$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \cong \alpha^\beta$ et donc $P(\beta)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul β, si $\forall \gamma < \beta, P(\gamma)$ alors $P(\beta)$.

Finalement, P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal β, on a $P(\beta)$.

Autrement dit pour tout ordinal β, on a $\mathrm{sf}(\beta \to \alpha) \cong \alpha^\beta$ et donc $\boxed{\mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(\beta \to \alpha)\big) = \alpha^\beta}$.

CQFD.

5 Forme normale de Cantor et ε_0

5.1 Logarithme ordinal et forme normale de Cantor

On l'a dit plus tôt, nous allons évoquer l'opération "contraire" de l'exponentiation, à savoir la généralisation de la notion de **logarithme** aux ordinaux. Cela permettra alors de déboucher sur une généralisation de la décomposition d'un entier dans une base donnée (par exemple décomposer un entier en base 10), généralisation qui s'appelle la **forme normale de Cantor**.

Pour l'heure, commençons par revenir un peu sur les assertions fonctionnelles. Nous avons déjà donné du sens à la notion d'assertion fonctionnelle croissante et continue lors de la définition 19 page 112. Intéressons-nous cette fois à la stricte croissance.

Définition 26 (Assertion fonctionnelle strictement croissante)

Soient C et D deux classes d'**ordinaux**, et $F : C \longrightarrow D$ une assertion fonctionnelle.
On dit que F est **strictement croissante** si et seulement si pour tout α et β dans C, on a

$$\alpha < \beta \implies F(\alpha) < F(\beta)$$

Premier fait remarquable : une assertion fonctionnelle qui est strictement croissante n'est pas bornée, c'est-à-dire qu'elle finit par dépasser n'importe quel ordinal donné.

Proposition 74 (Stricte croissance et absence de borne)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **strictement croissante**.

1. Pour toute ordinal α, on a $F(\alpha) \geq \alpha$.
2. Pour tout ordinal β, il existe un ordinal α tel que $\beta < F(\alpha)$.
   On dit que F est **non bornée**.

Démonstration

1.Montrons ce résultat par induction.

Pour tout ordinal α, on pose $P(\alpha)$ l'assertion « $\alpha \leq F(\alpha)$ ».

Initialisation

Par définition F est à valeurs dans les ordinaux donc $F(0)$ est un ordinal.

Or 0 est le plus petit des ordinaux donc $0 \leq F(0)$ et donc $P(0)$.

Hérédité

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$.

On a $\alpha < \alpha + 1$ donc $F(\alpha) < F(\alpha + 1)$ par stricte croissance de F.

Or on a $\alpha \leq F(\alpha)$ d'après $P(\alpha)$.

On a donc $\alpha < F(\alpha + 1)$ par transitivité.

On a donc $\alpha + 1 \leq F(\alpha + 1)$ d'après la proposition 14 page 40.

Autrement dit on a $P(\alpha + 1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $P(\alpha)$ alors $P(\alpha + 1)$.

Hérédité limite

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

Soit β un ordinal tel que $\beta < \alpha$.

On a alors $F(\beta) < F(\alpha)$ par stricte croissance de F.

Or on a aussi $\beta \leq F(\beta)$ d'après $P(\beta)$.

On a donc $\beta < F(\alpha)$ par transitivité.

Ainsi $\forall \beta < \alpha, \beta < F(\alpha)$.

En particulier $\sup\limits_{\beta < \alpha} \beta \leq F(\alpha)$ par minimalité de la borne supérieure.

Or on a $\alpha = \sup(\alpha) = \sup\limits_{\beta \in \alpha} \beta = \sup\limits_{\beta < \alpha} \beta$ d'après la proposition 22 page 54.

On a donc $\alpha \leq F(\alpha)$ et donc $P(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal α on a $P(\alpha)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha\text{, on a } \alpha \leq F(\alpha)}$.

2. En particulier pour tout ordinal β, on a $\beta < \beta + 1 \leq F(\beta + 1)$.

Donc $\boxed{F \text{ est non bornée}}$.

CQFD.

Le fait que l'on vient de voir va pouvoir nous servir ici : pour α et β deux ordinaux donnés, si $\beta > 1$ alors il y a forcément un moment où β^γ dépassera α,puisque $\gamma \longmapsto \beta^\gamma$ est strictement croissance donc n'est pas bornée. On se place juste avant de dépasser α pour trouver la puissance de β juste en dessous de α. Il ne reste alors plus qu'à effectuer la division ordinal de α par cette puissance pour conclure.

Proposition 75 (Logarithme ordinal)

Soient α et β deux ordinaux tels que $\alpha > 0$ et $\beta > 1$.
Il existe des ordinaux λ, δ et σ tels que $\alpha = \beta^\lambda \delta + \sigma$, avec $0 < \delta < \beta$ et $\sigma < \beta^\lambda$.
De plus, de tels ordinaux sont uniques.

Démonstration

Existence

Considérons l'assertion fonctionnelle $F : \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \gamma & \longmapsto & \beta^\gamma \end{pmatrix}$.

Comme $\beta > 1$, F est strictement croissante d'après la proposition 67 page 161.

En particulier F est non bornée d'après la proposition 74 page 184.

Il existe donc un ordinal γ tel que $\alpha < F(\gamma) = \beta^\gamma$.

Considérons la classe $A := \{\varepsilon \in ON \mid \beta^\varepsilon \leq \alpha\}$.

Montrons que A est majorée par γ.

Supposons par l'absurde que γ ne majore pas A.

Il existe donc $\varepsilon \in A$ tel que $\varepsilon \not\leq \gamma$.

Or les ordinaux sont totalement ordonnés donc on a $\gamma < \varepsilon$.

Comme $\beta > 1$, on a donc $\beta^\gamma < \beta^\varepsilon$ par stricte croissance de l'exponentiation à gauche.

Or on a $\alpha < \beta^\gamma$ par définition de γ, donc $\alpha < \beta^\varepsilon$ par transitivité de $<$.

C'est absurde puisque $\varepsilon \in A$.

Ainsi A est majorée par γ.

En particulier A est un ensemble d'après la proposition 13 page 38.

En particulier A admet une borne supérieure d'après la proposition 12 page 35.

Considérons donc $\lambda := \sup(A)$.

On a alors $\beta^\lambda = \beta^{\sup(A)} = \sup\limits_{\varepsilon \in A} \beta^\varepsilon$ par continuité de l'exponentiation à gauche.

Or pour tout $\varepsilon \in A$, on a justement $\beta^\varepsilon \leq \alpha$ par définition de A.

Donc $\sup\limits_{\varepsilon \in A} \beta^\varepsilon \leq \alpha$ par minimalité de la borne supérieure, et donc $\beta^\lambda \leq \alpha$.

Il existe deux ordinaux δ et σ tels que $\boxed{\alpha = \beta^\lambda \delta + \sigma}$ d'après la proposition 64 page 157.

De plus ceux-ci vérifient $\delta \leq \alpha$ et $\boxed{\sigma < \beta^\lambda}$, et sont uniques.

Supposons par l'absurde que $\delta = 0$.

On a alors $\alpha = \beta^\lambda \delta + \sigma = \beta^\lambda \cdot 0 + \sigma = 0 + \sigma = \sigma$.

Or on a dit que $\sigma < \beta^\lambda$ donc $\alpha < \beta^\lambda$.

C'est absurde puisqu'on a justement montré que $\beta^\lambda \leq \alpha$.

On a donc montré par l'absurde que $\boxed{0 < \delta}$.

Supposons par l'absurde que $\beta \leq \delta$.

Il existe deux ordinaux μ et ν tels que $\delta = \beta\mu + \nu$ avec $\mu \leq \delta$ et $\nu < \beta$ d'après la proposition 64 page 157.

On a alors $\alpha = \beta^\lambda \delta + \sigma = \beta^\lambda(\beta\mu + \nu) + \sigma = \beta^\lambda\beta\mu + \beta^\lambda\nu + \sigma = \beta^{\lambda+1}\mu + \beta^\lambda\nu + \sigma$.

Supposons par l'absurde que $\mu = 0$.

On a alors $\delta = \beta\mu + \nu = \beta \cdot 0 + \nu = 0 + \nu = \nu$.

Or on a dit que $\nu < \beta$ donc $\delta < \beta$, ce qui est absurde puisque $\beta \leq \delta$.

Ainsi on a montré par l'absurde que $\mu > 0$, et donc $\mu \geq 1$.

De plus $\beta^\lambda \nu + \sigma$ est un ordinal donc $\beta^\lambda \nu + \sigma \geq 0$.

Autrement dit on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta^{\lambda+1}\mu + \beta^\lambda \nu + \sigma \\ &\geq \beta^{\lambda+1}\mu + 0 \text{ par croissance de l'addition à gauche} \\ &= \beta^{\lambda+1}\mu \\ &\geq \beta^{\lambda+1} \cdot 1 \text{ par croissance de la multiplication à gauche} \\ &= \beta^{\lambda+1} \end{aligned}$$

Autrement dit on a $\beta^{\lambda+1} \leq \alpha$.

En particulier $\lambda + 1 \in A$: c'est absurde puisque $\lambda = \sup(A)$.

Ainsi on a montré par l'absurde que $\boxed{\beta \leq \delta}$.

Unicité

Soient λ', δ' et σ' des ordinaux tels que $\alpha = \beta^{\lambda'}\delta' + \sigma'$, avec $0 < \delta' < \beta$ et $\sigma' < \beta^{\lambda'}$.

Comme tout à l'heure on a $\delta' \geq 1$ et $\sigma' \geq 0$, si bien que

$$\alpha = \beta^{\lambda'}\delta' + \sigma' \geq \beta^{\lambda'}\delta' + 0 = \beta^{\lambda'}\delta' \geq \beta^{\lambda'} \cdot 1 = \beta^{\lambda'}$$

Ainsi $\beta^{\lambda'} \leq \alpha$ et donc $\lambda' \in A$ donc $\lambda' \leq \sup(A) = \lambda$.

On a donc $\lambda' = \lambda$ ou $\lambda' < \lambda$.

Supposons par l'absurde que $\lambda' < \lambda$.

En particulier on a $\lambda' + 1 \leq \lambda$ d'après la proposition 14 page 40.

Par définition on a $\delta' < \beta$ donc $\delta' + 1 \leq \beta$ toujours d'après la même proposition.

On a donc

$$\begin{aligned} \beta^{\lambda'}\delta' + \sigma' &< \beta^{\lambda'}\delta' + \beta^{\lambda'} \text{ car par définition } \sigma' < \beta^{\lambda'} \\ &= \beta^{\lambda'}\delta' + \beta^{\lambda'} \cdot 1 = \beta^{\lambda'}(\delta' + 1) \\ &\leq \beta^{\lambda'}\beta \text{ car on a } \delta' + 1 \leq \beta \\ &= \beta^{\lambda'+1} \leq \beta^\lambda \text{ car on a } \lambda' + 1 \leq \lambda \\ &= \beta^\lambda \cdot 1 \leq \beta^\lambda \delta \text{ car } 1 \leq \delta \\ &= \beta^\lambda \delta + 0 \leq \beta^\lambda \delta + \sigma \\ &= \alpha \end{aligned}$$

On a donc $\beta^{\lambda'}\delta' + \sigma' < \alpha$, ce qui est absurde.

Par l'absurde on vient de montrer que $\lambda' = \lambda$.

Ainsi on a $\beta^{\lambda}\delta + \sigma = \alpha = \beta^{\lambda}\delta' + \sigma'$.

On a donc $\delta = \delta'$ et $\sigma = \sigma'$ par unicité dans la division ordinale.

D'où l'unicité voulue.

CQFD.

Abordons à présent la notion de **forme normale de Cantor**. Nous n'allons pas lui donner de démonstration rigoureuse : il s'agit plutôt d'un aperçu de ce qui existe chez les ordinaux pour le lecteur qui serait intéressé pour aller plus loin. Cette discussion est en grande partie inspirée du billet de blog de David Madore, intitulé "*Nombres ordinaux : une (longue) introduction*", daté du 18 septembre 2011.

L'idée est de généraliser la notion de décomposition dans une base donnée que l'on retrouve chez les entiers. Par exemple la base la plus commune est la base 10 : le nombre 734 s'écrit alors $7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$, et on peut voir que chaque facteur dans cette décomposition (chaque chiffre donc) est un entier strictement inférieur à 10. Plus généralement, un entier a s'écrira dans la base b sous la forme

$$a = d_0 b^{\ell_0} + d_1 b^{\ell_1} + \cdots + d_n b^{\ell_n}$$

avec un nombre n de termes fini. Les d_i sont tous des entiers strictement inférieurs à b et les ℓ_i sont strictement décroissants : $\ell_0 > \ell_1 > \cdots > \ell_n$. Ici la base n'est plus forcément un entier mais un ordinal β (généralement ω). Ainsi, pour un ordinal quelconque α, on pourra écrire

$$\alpha = \beta^{\lambda_0}\delta_0 + \beta^{\lambda_1}\delta_1 + \cdots + \beta^{\lambda_\nu}\delta_\nu$$

avec un nombre ν de termes potentiellement transfini ! Les δ_i sont tous des ordinaux strictement inférieurs à β, et les λ_i sont strictement décroissants : $\lambda_0 > \lambda_1 > \cdots > \lambda_\nu$. On interdit généralement aux δ_i d'être nuls (sauf pour $\alpha = 0$).

Cette décomposition est alors unique, si bien qu'elle fournit une façon standard de comparer deux ordinaux, la comparaison s'effectuant à nouveau via l'ordre lexicographique. Supposons par exemple que l'on veuille comparer les ordinaux $\alpha = \beta^{\lambda_0}\delta_0 + \beta^{\lambda_1}\delta_1 + \cdots + \beta^{\lambda_\nu}\delta_\nu$ et $\alpha' = \beta^{\kappa_0}\varepsilon_0 + \beta^{\kappa_1}\varepsilon_1 + \cdots + \beta^{\lambda_\mu}\varepsilon_\mu$:

1. On commence par comparer les premiers exposants λ_0 et κ_0 : si $\lambda_0 < \kappa_0$ alors $\alpha < \alpha'$, si $\lambda_0 > \kappa_0$ alors $\alpha > \alpha'$ et dans ces deux cas on s'arrête-là. Sinon, on continue à l'étape suivante.
2. On compare alors les premiers facteurs δ_0 et ε_0 : si $\delta_0 < \varepsilon_0$ alors $\alpha < \alpha'$, si $\delta_0 > \varepsilon_0$ alors $\alpha > \alpha'$ et dans ces deux cas on s'arrête-là. Sinon, on continue à l'étape suivante.
3. On considère alors $\pi := \beta^{\lambda_1}\delta_1 + \cdots + \beta^{\lambda_\nu}\delta_\nu$ et $\pi' := \beta^{\kappa_1}\varepsilon_1 + \cdots + \beta^{\kappa_\mu}\varepsilon_\mu$ puis on recommence l'étape 1 avec π et π'.

L'existence et l'unicité de la décomposition en base β repose simplement sur l'existence et l'unicité du logarithme ordinal. En effet, pour décomposer α dans la base β :

1. On utilise une première fois le logarithme ordinal entre α et β. Il existe des ordinaux λ_0, δ_0 et α_1 tels que $\alpha = \beta^{\lambda_0}\delta_0 + \alpha_1$. Ces trois ordinaux sont uniques et vérifient en particulier $\alpha_1 < \beta^{\lambda_0}$ et $0 < \delta_0 < \beta$.

2. On recommence alors le logarithme ordinal entre α_1 et β : il existe trois ordinaux λ_1, δ_1 et α_2 tels que $\alpha_1 = \beta^{\lambda_1}\delta_1 + \alpha_2$. Ces trois ordinaux sont uniques et vérifient en particulier $\alpha_2 < \beta^{\lambda_1}$ et $0 < \delta_1 < \beta$.
3. On a donc $\alpha = \beta^{\lambda_0}\delta_0 + \beta^{\lambda_1}\delta_1 + \alpha_2$. On recommence encore à nouveau avec α_2.

On remarque alors plusieurs choses :

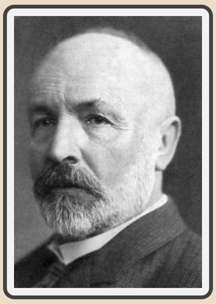
— Pour chaque i, on a $0 < \delta_i < \beta$, donc les facteurs sont tous non nuls et plus petits que la base, comme demandé.

— Pour chaque i, on a $\alpha_{i+1} < \beta^{\lambda_i}$, et on a vu dans la démonstration du logarithme ordinal que $\beta^{\lambda_{i+1}} \leq \alpha_{i+1}$, si bien que $\beta^{\lambda_{i+1}} < \beta^{\lambda_i}$, et donc $\lambda_{i+1} < \lambda_i$, donc la suite des exposants est bien strictement décroissante, comme demandé.

— Justement, la suite des exposants λ_i est une suite d'ordinaux strictement décroissante : elle finit par s'arrêter au vu de la proposition 35 page 93, ce qui prouve que l'algorithme de décomposition en base β s'arrête à un moment.

Une autre remarque à présent : la forme véritablement normale de Cantor demande en réalité aux exposants λ_i d'être eux-mêmes décomposés sous cette forme : une fois l'algorithme précédent déployé, on recommence celui-ci pour chacun des λ_i. Malheureusement cette nouvelle étape sur les exposants n'est pas garantie de s'arrêter, et nous allons justement voir pourquoi avec l'introduction d'un nouvel ordinal noté ε_0.

Pour la petite histoire



Georg Cantor (3 mars 1845 – 6 janvier 1918) est un mathématicien allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés. Il prouva également que les nombres réels sont « *plus nombreux* » que les entiers naturels. En fait, il démontra même l'existence d'une « *infinité d'infinis* ». C'est aussi à lui que l'on doit la théorie des ordinaux, mais aussi des cardinaux que l'on va voir dans le prochain chapitre. Nous verrons dans quel contexte tout ceci s'est présenté à lui à la toute fin de ce livre.

Cantor a été confronté à la résistance de la part des mathématiciens de son époque, en particulier Kronecker. Poincaré, bien qu'il connût et appréciât les travaux de Cantor, avait de profondes réserves sur son maniement de l'infini en tant que totalité achevée. Dans le but de contrer les détracteurs de Cantor, Hilbert a affirmé : « *Nul ne doit nous exclure du Paradis que Cantor a créé.* »

On peut ainsi dire qu'il est le père des théories abordées dans ces deux premiers ouvrages !

5.2 L'ordinal ε_0 et la classe des points fixes

L'ordinal ε_0 peut être vu comme étant $\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$ avec ω fois l'exponentiation (une infinité donc !). Le problème dont nous venons de parler vient quand on essaie de décomposer ε_0 dans la base ω :

$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = \omega^{\varepsilon_0}$$

Ainsi $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$ est lui-même son premier (et dernier) exposant dans la décomposition en base ω. Autrement dit, maintenant qu'ε_0 est décomposé, l'étape suivant est de décomposer tous ses exposants, à savoir à nouveau ε_0. On se retrouve donc à écrire

$$\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}} \text{ puis à l'étape d'après } \varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}} = \omega^{\omega^{\omega^{\varepsilon_0}}}$$

et cela n'en finit jamais ! On voit donc bien qu'il y a un problème : pour palier celui-ci on considère généralement qu'ε_0 est **un exposant** correctement décomposé, et qu'il n'y a plus rien à faire. On peut donc par exemple dire que les nombres

$$\omega^{\varepsilon_0} \cdot 2 + \omega^3 + 5 \text{ et } \omega^{\varepsilon_0^2} + \omega^2 \cdot 7$$

sont correctement décomposés. Cependant, le problème va de nouveau se présenter avec

$$\varepsilon_1 := \varepsilon_0^{\varepsilon_0^{\varepsilon_0^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

exactement pour les mêmes raisons. De la même manière, on va pouvoir définir l'ordinal ε_2 et ainsi de suite. Mais tout d'abord, comment définit les ε_i rigoureusement parlant ?

L'idée est de se dire "on a itéré ω fois des puissances pour définir ε_0". De la même manière que l'addition est une itération de successeurs, la multiplication une itération d'additions, et l'exponentiation une itération de multiplication, on pourrait imaginer une opération, la **tétration**, qui serait une itération de l'exponentiation. Par exemple $T(2,3) = 2^{2^2}$ et plus généralement par récursion on poserait

$$\begin{cases} T(\alpha, 0) := 1 \\ T(\alpha, \beta+1) := \alpha^{T(\alpha,\beta)} \text{ pour tout ordinal } \beta \\ T(\alpha, \gamma) := \sup\limits_{\delta<\gamma} T(\alpha, \delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

puis il ne reste plus qu'à poser $\varepsilon_0 := T(\omega, \omega)$. Ainsi, ε_0 est la limite de la suite $1, \omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$.

On peut se contenter à nouveau d'itérer cette construction, encore et encore pour définir ε_1, ε_2 et ainsi de suite, mais le fait que $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0}$ nous laisse entrevoir qu'il peut être intéressant de creuser du côté des points fixes de l'assertion fonctionnelle $\alpha \longmapsto \omega^\alpha$. Pour l'heure, revenons un peu plus longuement sur les assertions fonctionnelles pour justement nous munir de tous les outils nécessaires. Plus précisément, nous allons généraliser et montrer des résultats que nous connaissons bien sur les applications : rien ne devrait nous surprendre, au moins au début.

Retour sur les assertions fonctionnelles

Définition 27 (Assertion fonctionnelle bijective)

Soient F une assertion fonctionnelle et D une classe.

1. On dit que F est **injective** si et seulement si pour tout x et x' dans $\operatorname{dom}(F)$, on a
$$F(x) = F(x') \implies x = x'$$
2. On dit que F est **surjective** sur D si et seulement si $\operatorname{im}(F) = D$.
3. On dit que F est **bijective** de $\operatorname{dom}(F)$ dans D si et seulement si F est injective et surjective sur D.

Exemple :

Pour une classe C donnée, l'assertion fonctionnelle **identité** $\mathrm{id}_C := \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & x \end{pmatrix}$ est évidemment bijective de C dans C.

Définition 28 (Assertion fonctionnelle réciproque)

Soit F une assertion fonctionnelle **injective**.

On appelle **réciproque** de F l'assertion fonctionnelle $F^{-1} : \operatorname{im}(F) \longrightarrow \operatorname{dom}(F)$ définie pour tout $y \in \operatorname{im}(F)$ par $F^{-1}(y)$ est l'unique $x \in \operatorname{dom}(F)$ tel que $y = F(x)$.

Autrement dit pour tout $x \in \operatorname{dom}(F)$ et $y \in \operatorname{im}(F)$, on a l'équivalence
$$y = F(x) \iff F^{-1}(y) = x$$

Exemple :
Pour une classe C donnée, l'assertion fonctionnelle id_C est sa propre réciproque.

Proposition 76 (Propriétés de la réciproque)

Soit F une assertion fonctionnelle **injective**.

1. Pour tout $x \in \operatorname{dom}(F)$, on a $F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.
2. Pour tout $y \in \operatorname{im}(F)$, on a $F\big(F^{-1}(y)\big) = y$.
3. F^{-1} est injective et on a $(F^{-1})^{-1} = F$.

Démonstration

1. Soit $x \in \mathrm{dom}(F)$.
Posons $z := F^{-1}\big(F(x)\big)$.
Par définition de F^{-1}, on a $F(z) = F(x)$.
Par injectivité de F, on a $z = x$.
On a dont $\boxed{F^{-1}\big(F(x)\big) = x}$.

2. Soit $y \in \mathrm{im}(F)$.
Par définition de $\mathrm{im}(F)$, il existe $x \in \mathrm{dom}(F)$ tel que $y = F(x)$.
Par définition de F^{-1}, on a alors $x = F^{-1}(y)$.
Ainsi on a $\boxed{F\big(F^{-1}(y)\big) = F(x) = y}$.

3. Montrons que F^{-1}.
   Soient y et y' dans $\mathrm{im}(F)$ tels que $F^{-1}(y) = F^{-1}(y')$.
   On a donc $F\big(F^{-1}(y)\big) = F\big(F^{-1}(y')$ et donc $y = y'$ d'après 2.
Donc $\boxed{F^{-1} \text{ est injective}}$.
De plus par définition de F^{-1} et de $(F^{-1})^{-1}$, pour tout $x \in \mathrm{dom}(F)$ et $y \in \mathrm{im}(F)$, on a

$$y = (F^{-1})^{-1}(x) \iff F^{-1}(y) = x \iff y = F(x)$$

et donc $\boxed{(F^{-1})^{-1} = F}$.
CQFD.

Ce qui suit pourrait être vu dans le cadre de classes ordonnés, mais cela demanderait de généraliser la notion de relation d'ordres aux classes. Ce ne serait pas spécialement difficile à faire, mais cela ne nous intéresserait pas particulièrement, car les classes ne nous servent ici que dans le cas particulier des classes d'ordinaux. L'avantage est que l'on gagne automatiquement le fait que ce sont des classes totalement ordonnées, si bien que l'on a par exemple le résultat suivant. Rappelons-nous que dans le cas des ensembles ordonnées, l'implication 1⇒2 n'a pas de raison d'être vraie si l'ensemble de départ n'est pas totalement ordonné.

Proposition 77 (Stricte croissance et injectivité)

Soient C et D deux classes d'ordinaux et $F : C \longrightarrow D$ une assertion fonctionnelle.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est strictement croissante.
2. F est croissante et injective.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que F est strictement croissante.

Soient α et β dans C tels que $\alpha \leq \beta$.

On a donc $\alpha = \beta$ ou $\alpha < \beta$.

Si $\alpha = \beta$ alors $F(\alpha) = F(\beta)$.

Si $\alpha < \beta$ alors $F(\alpha) < F(\beta)$ par stricte croissance de F.

Dans les deux cas on a en particulier $F(\alpha) \leq F(\beta)$.

Donc $\boxed{F \text{ est croissante}}$.

Soient α et β dans C tels que $F(\alpha) = F(\beta)$.

Comme α et β sont des ordinaux, on a $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Supposons par l'absurde que $\alpha \neq \beta$.

On a donc $\alpha < \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Si $\alpha < \beta$ alors $F(\alpha) < F(\beta)$ par stricte croissance de F.

Si $\beta < \alpha$ alors $F(\beta) < F(\alpha)$ par stricte croissance de F.

Dans les deux cas on a en particulier $F(\alpha) \neq F(\beta)$.

C'est absurde puisqu'on a justement fait l'hypothèse que $F(\alpha) = F(\beta)$.

Par l'absurde on vient de montrer que $\alpha = \beta$.

Donc $\boxed{F \text{ est injective}}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que F est croissante et injective.

Soient α et β dans C tels que $\alpha < \beta$.

En particulier on a $\alpha \leq \beta$ donc $F(\alpha) \leq F(\beta)$ par croissance de F.

On a donc $F(\alpha) < F(\beta)$ ou $F(\alpha) = F(\beta)$.

Supposons par l'absurde que $F(\alpha) = F(\beta)$.

On a alors $\alpha = \beta$ par injectivité de F.

C'est absurde puisqu'on a $\alpha < \beta$ par hypothèse, et $<$ est anti-réfléxive.

Par l'absurde on vient de montrer que l'on a $F(\alpha) \neq F(\beta)$ et donc $F(\alpha) < F(\beta)$.

Donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante}}$.

CQFD.

Définition 29 (Isomorphisme entre classes d'ordinaux)

Soient C et D deux classes d'ordinaux, et $F : C \longrightarrow D$ une assertion fonctionnelle.
On dit que F est un **isomorphisme d'ordres** si et seulement si :

1. F est bijective de C dans D.
2. F est croissante.
3. F^{-1} est croissante.

On dit alors que C et D sont **isomorphes**, et on note $C \cong D$.

Proposition 78 (Propriétés de l'isomorphie d'ordres)

Soient C et D deux classes d'ordinaux.

1. $\mathrm{id}_C : C \longrightarrow C$ est un isomorphisme d'ordres.
   En particulier on a $C \cong C$: on dit que l'isomorphie d'ordres est **réflexive**.
2. Supposons qu'il existe $F : C \to D$ un isomorphisme d'ordres.
   Alors $F^{-1} : D \longrightarrow C$ est un isomorphisme d'ordres.
   En particulier si $C \cong D$ alors $D \cong C$.
   On dit que l'isomorphie d'ordres est **symétrique**.

Démonstration

1. On a déjà vu lors de précédents exemples que id_C est injective, et est sa propre réciproque.

Elle est de plus évidemment surjective dans C.

Elle est aussi évidemment croissante : si $\alpha \leq \beta$ alors par $\mathrm{id}_C(\alpha) = \alpha \leq \beta = \mathrm{id}_C(\beta)$.

Ainsi id_C répond à toutes les conditions d'un isomorphisme d'ordres de C vers C.

2. Supposons qu'il existe $F : C \longrightarrow D$ un isomorphisme d'ordres.

Par définition, F est bijective de C vers D.

Toujours par définition, F et F^{-1} sont croissantes.

Par définition de F^{-1}, F^{-1} est bijective de D vers C.

De plus $(F^{-1})^{-1} = F$ d'après la proposition 76 page 191.

Donc F^{-1} et $(F^{-1})^{-1} = F$ sont croissantes.

Donc F^{-1} est un isomorphisme d'ordres de D dans C.

CQFD.

Remarque :
On a aussi la transitivité de $\cong$, mais nous n'en parlons pas ici car il faudrait d'abord définir la composition d'assertions fonctionnelles. Ce n'est pas compliqué à faire, mais nous n'en avons pas besoin pour la suite et nous ne faisons ici que développer des outils pour les ordinaux, pas développer une théorie sur les assertions fonctionnelles en elles-mêmes. En soi $\cong$ est donc en quelque sorte une relation d'équivalence, en tout cas en un sens généralisé.

Encore une fois, le fait d'avoir des classes uniquement d'ordinaux nous offre d'office le fait que l'ordre soit total. En particulier on a la sympathique caractérisation suivante, qui sinon demanderait la totalité de l'ordre pour passer de 3 à 2 et de 2 à 1.

Proposition 79 (Caractérisation d'un isomorphisme)

Soient C et D deux classes d'ordinaux et $F : C \longrightarrow D$ une assertion fonctionnelle.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un isomorphisme d'ordres de C vers D.
2. F est croissante et bijective de C vers D.
3. F est strictement croissante et surjective dans D.

Démonstration

On va montrer 1 $\iff$ 2 $\iff$ 3.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que F est un isomorphisme d'ordres de C vers D.

En particulier par définition $\boxed{F \text{ est croissante et bijective de } C \text{ vers } D}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons que F est croissante et bijective de C vers D.

Il reste à montrer que F^{-1} est croissante.

Soients γ et δ dans $\mathrm{im}(F)$ tels que $\gamma \leq \delta$.

Par définition il existe α et β dans $\mathrm{dom}(F)$ tels que $\gamma = F(\alpha)$ et $\delta = F(\beta)$.

Par définition de F^{-1} on a donc $\alpha = F^{-1}(\gamma)$ et $\beta = F^{-1}(\delta)$.

Comme α et β sont des ordinaux, on a $\alpha \leq \beta$ ou $\beta < \alpha$.

Supposons par l'absurde que $\beta < \alpha$.

Par hypothèse F est croissante et bijective de C vers D.

En particulier F est croissante et injective par définition.

Donc F est strictement croissante d'après la proposition 77 page 192.

On a donc $F(\beta) < F(\alpha)$ par stricte croissance, c'est-à-dire $\delta < \gamma$.

C'est absurde puisque $\gamma \leq \delta$.

Par l'absurde on vient donc de montrer que $\alpha \leq \beta$, c'est-à-dire $F^{-1}(\gamma) \leq F^{-1}(\delta)$.

Ainsi F^{-1} est croissante, et finalement $\boxed{F \text{ est un isomorphisme d'ordres de } C \text{ vers } D}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$

Supposons que F est croissante et bijective de C vers D.

En particulier F est croissante, injective et surjective dans D par définition.

Donc $\boxed{F \text{ est strictement croissante}}$ d'après la proposition 77 page 192.

$\boxed{2 \Leftarrow 3}$

Supposons que F est strictement croissante et surjective dans D.

Alors F est croissante et injective d'après la proposition 77 page 192.

Ainsi $\boxed{F \text{ est croissante et bijective de } C \text{ vers } D}$ par définition.

CQFD.

Si les propositions précédentes généralisent ce que l'on a vu dans le précédent livre, celle qui suit est une généralisation de la proposition 25 page 59. La preuve est d'ailleurs la même, avec quelques modifications de circonstances liées au fait qu'on a des classes d'ordinaux.

Proposition 80 (Unicité d'un isomorphisme de classes)

Soient C et D deux classes **d'ordinaux**.
Il y a au plus un seul isomorphisme d'ordres de C vers D.

Démonstration

Supposons qu'il existe un isomorphisme d'ordres $F : C \longrightarrow D$.

Soit $G : C \longrightarrow D$ un autre isomorphisme d'ordres.

Montrons que $F = G$.

Supposons par l'absurde que $F \neq G$.

Considérons alors la classe $A := \{\gamma \in C \mid F(\gamma) \neq G(\gamma)\}$.

Par hypothèse A est donc une classe non vide de C donc de ON.

Donc A admet un ordinal minimum α d'après la proposition 10 page 30.

Comme $\alpha = \min(A)$, pour tout $\beta \in C$ tel que $\beta < \alpha$ on a $\beta \notin A$ donc $F(\beta) = G(\beta)$.

De plus $\alpha \in A$ donc $F(\alpha) \neq G(\alpha)$.

Or D est une classe d'ordinaux, donc $F(\alpha) < G(\alpha)$ ou $G(\alpha) < F(\alpha)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $F(\alpha) < G(\alpha)$.

  Soit $\beta \in C$.

  Comme C est une classe d'ordinaux, on a $\beta < \alpha$ ou $\alpha \leq \beta$.

  Si $\beta < \alpha$ alors $G(\beta) = F(\beta) < F(\alpha)$ par stricte croissance de F.

  Si $\alpha \leq \beta$ alors $F(\alpha) < G(\alpha) \leq G(\beta)$ par croissance de G.

  Dans les deux cas on a $G(\beta) \neq F(\alpha)$.

  Ainsi pour tout $\beta \in C$ on a $G(\beta) \neq F(\alpha)$.

  Ainsi $F(\alpha)$ est un élément de D que G n'atteint pas.

  C'est absurde puisque G est surjective dans D.

- Plaçons-nous dans le cas où $G(\alpha) < F(\alpha)$.
  On montre de la même manière que dans ce cas-là $G(\alpha)$ est un élément de D que F n'atteint pas. C'est absurde puisque F est surjective dans D.

Dans les deux cas on aboutit une absurdité concernant la surjectivité d'une des deux assertions fonctionnelles.

Par l'absurde on vient de montrer que $\boxed{F = G}$, d'où l'unicité.

CQFD.

Un fait assez remarquable et nouveau à présent : quand on prend une classe d'ordinaux, si celle-ci est propre (c'est-à-dire n'est pas associée à un ensemble) alors elle est automatiquement isomorphe à ON tout entier ! C'est assez puissant, mais finalement pas si étonnant : l'isomorphisme consiste simplement à énumerer dans l'ordre tous les éléments de la classe, un pour chaque ordinal de ON.

Proposition 81 (Classes propres de ON et isomorphie avec ON)

Soit C une classe propre de ON.
Alors C et ON sont isomorphes.

Démonstration

Construction de l'assertion fonctionnelle

Construisons un isomorphisme d'ordres $F : ON \longrightarrow C$.

L'idée va être pour F d'énumérer dans l'ordre tous les éléments de C.

Autrement dit, notre objectif est de faire en sorte que $F(\alpha)$ soit le premier des $\gamma \in C$ qui n'a pas déjà été dépassé pas l'un des $F(\beta)$ pour $\beta < \alpha$.

D'après la proposition 10 page 30, toute classe non vide de ON admet un minimum.

Pour tout ordinal α, on va poser $F(\alpha) := \min\left(\left\{\gamma \in C \mid \forall \beta < \alpha, F(\beta) < \gamma\right\}\right)$.

Justification de la définition de F

Pour cela, nous allons utiliser le théorème 6 page 80.

Définissons l'assertion fonctionnelle H pour toute application f tel que $\mathrm{dom}(f)$ est un ordinal et à valeurs dans les ordinaux par

$$H(f) := \min\left(\left\{\gamma \in C \mid \forall \beta < \mathrm{dom}(f), f(\beta) < \gamma\right\}\right)$$

Montrons que H vérifie les conditions du théorème.

Soit α un ordinal et $f : \alpha \longrightarrow ?$ tels que f est H-inductive.

On sait déjà que le domaine de f est un ordinal.

Il suffit donc de montrer que f ne prend que des valeurs ordinales pour conclure que

f est dans le domaine de H.

Soit $\beta < \alpha$.

Par définition f est H-inductive donc $f(\beta) = H(f_{|\beta})$.

Or par définition $H(f_{|\beta})$ est un minimum d'une classe d'ordinaux.

Donc $H(f_{|\beta})$ est un ordinal et donc $f(\beta)$ est un ordinal.

Donc pour tout $\beta < \alpha$, $f(\beta)$ est un ordinal, et donc f est à valeurs dans les ordinaux.

Finalement, f est dans le domaine de H.

Ainsi H vérifie les conditions du théorème.

D'après celui-ci, il existe une unique assertion fonctionnelle F de domaine ON qui est H-inductive. Autrement dit pour tout ordinal α, on a

$$\begin{aligned} F(\alpha) = H(F_{|\alpha}) &= \min\left(\left\{\gamma \in C \;\middle|\; \forall \beta < \alpha, F_{|\alpha}(\beta) < \gamma\right\}\right) \\ &= \min\left(\left\{\gamma \in C \;\middle|\; \forall \beta < \alpha, F(\beta) < \gamma\right\}\right) \end{aligned}$$

F est un isomorphisme d'ordres

F est définie sur tout ON et à valeurs dans C par définition.

Montrons que F est strictement croissante.

Soient α et α' deux ordinaux tels que $\alpha < \alpha'$.

Considérons $B := \left\{\gamma \in C \;\middle|\; \forall \beta < \alpha', F(\beta) < \gamma\right\}$.

Par définition $F(\alpha') = \min(B)$ donc en particulier $F(\alpha') \in B$.

Donc $\forall \beta < \alpha', F(\beta) < F(\alpha')$.

En particulier en prenant $\beta := \alpha$, on trouve $F(\alpha) < F(\alpha')$.

Donc F est strictement croissante.

Montrons que F est surjective dans C.

Supposons par l'absurde que F n'est pas surjective dans C.

Il existe alors au moins un $\gamma \in C$ tel que pour tout ordinal, $F(\alpha) \neq \gamma$.

Considérons $B := \left\{\gamma \in C \;\middle|\; \forall \alpha \in ON, F(\alpha) \neq \gamma\right\}$.

Alors B est une sous-classe non vide de C donc une sous-classe non vide de ON.

B admet donc un ordinal minimum γ_0 d'après la proposition 10 page 30.

Considérons $A := \left\{\alpha \in ON \;\middle|\; F(\alpha) < \gamma_0\right\}$.

Par définition $F : ON \longrightarrow C$ donc comme $C \subseteq ON$ on a $F : ON \longrightarrow ON$.

Or on a montré que F est strictement croissante.

Donc F n'est pas bornée : il existe $\varepsilon \in ON$ tel que $\gamma_0 < F(\varepsilon)$.

Soit $\alpha \in A$.

On a alors $F(\alpha) < \gamma_0 < F(\varepsilon)$.

Si $\varepsilon < \alpha$ alors $F(\varepsilon) < F(\alpha)$ par strictement croissance de F.

Par contraposition on a donc $\alpha \leq \varepsilon$.

Donc A est bornée par ε, donc A est un ensemble d'après la proposition 13 page 38.

En particulier A admet une borne supérieure d'après la proposition 12 page 35.

Considérons alors $\alpha_0 := \sup(A)$ et montrons que $F(\alpha_0) = \gamma_0$.

Posons $D := \{\gamma \in C \mid \forall \beta < \alpha_0, F(\beta) < \gamma\}$.

Par définition de F, on a $F(\alpha_0) = \min(D)$.

Montrons que $\gamma_0 \in D$.

En effet, soit $\beta < \alpha_0$.

Comme $\alpha_0 = \sup(A)$, il existe $\alpha \in A$ tel que $\beta \leq \alpha$.

Comme $\alpha \in A$, on a $F(\alpha) < \gamma_0$ par définition de A.

Par croissance de F on a alors $F(\beta) \leq F(\alpha) < \gamma_0$ et donc $F(\beta) < \gamma_0$.

Ainsi $\forall \beta < \alpha_0, F(\beta) < \gamma_0$ donc $\gamma_0 \in D$.

De plus, montrons que γ_0 minore D.

En effet, soit $\gamma \in D$.

Comme ce sont des ordinaux, on a $\gamma_0 \leq \gamma$ ou $\gamma < \gamma_0$.

Supposons par l'absurde que $\gamma < \gamma_0$.

Par définition $\gamma_0 = \min(B)$ donc $\gamma \notin B$.

Par définition de B il existe donc $\alpha \in ON$ tel que $F(\alpha) = \gamma$.

En particulier on a $F(\alpha) < \gamma_0$ donc $\alpha \in A$ par définition de A.

On a donc $\alpha \leq \alpha_0$ car $\alpha_0 = \sup(A)$ par définition.

Ainsi $\alpha \leq \alpha_0$ vérifie $F(\alpha) = \gamma$.

C'est absurde par définition de D puisque $\gamma \in D$ par définition.

Par l'absurde on vient de montrer que $\gamma_0 \leq \gamma$.

Ainsi γ_0 minore D, et comme $\gamma_0 \in D$, on a $\gamma_0 = \min(D)$.

Or on a dit que $F(\alpha_0) = \min(D)$ donc $F(\alpha_0) = \gamma_0$.

C'est absurde car par définition γ_0 n'est pas atteint car $\gamma_0 \in B$.

Par l'absurde on vient de montrer que F est surjective dans C.

Ainsi F est strictement croissante et surjective dans C.

Donc $\boxed{F \text{ est un isomorphisme d'ordres de } ON \text{ dans } C}$.

CQFD.

Fixation d'une assertion fonctionnelle

Étant donné un ensemble E et une application $f : E \longrightarrow E$, nous avons vu à la fin du chapitre 1 via la définition 17 page 96 la notion d'itérées de f : intuitivement on prend $x \in E$ et on considère la suite
$$x, f(x), f\big(f(x)\big), f\Big(f\big(f(x)\big)\Big), \ldots$$
en itérant f autant de fois que souhaité. Ici on va faire de même pour les assertions fonctionnelles $F : ON \longrightarrow ON$. L'avantage d'être chez les ordinaux est de disposer systématiquement d'une borne supérieure et donc il est possible d'itérer un nombre ordinal de fois !

Définition 30 (Itérées d'une assertion fonctionnelle)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle.
Pour tout ordinal α, on pose

$$\begin{cases} F^0(\alpha) := \alpha \\ F^{\beta+1}(\alpha) := F\big(F^\beta(\alpha)\big) \text{ pour tout ordinal } \beta \\ F^\gamma(\alpha) := \sup\limits_{\delta<\gamma} F^\delta(\alpha) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Pour tout ordinal β, on obtient ainsi une assertion fonctionnelle $F^\beta : ON \longrightarrow ON$.

Remarque :
Pour justifier cette construction, on peut encore et toujours se reporter à la proposition 37 page 101, en prenant cette fois $\mu_0 := \alpha$ et $G(\xi) := F(\xi)$ pour tout ordinal ξ (on rappelle qu'ici α et F sont fixés à l'avance). On obtient alors une assertion fonctionnelle $\mathfrak{F}_\alpha$, et pour tout ordinal β on pose $F^\beta(\alpha) := \mathfrak{F}_\alpha(\beta)$.

Imaginons qu'un ordinal γ soit un point fixe de F : on a alors

$$\gamma = F(\gamma) = F\big(F(\gamma)\big) = F\Big(F\big(F(\gamma)\big)\Big) = \ldots$$

si bien que γ est un point fixe de toutes les itérées de F. Ainsi les notions de points fixes et d'itérées sont très liées. Un habitué de topologie pourrait même faire la remarque que le théorème du point fixe de Banach-Picard construit un point fixe précisément en itérant une application, et en prenant la limite du procédé. En quelque sorte, itérer un nombre infini de fois une application (ou plus généralement une assertion fonctionnelle) va produire un point fixe ! Fascinant !

Proposition 82 (Point fixe à l'infini)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **strictement croissante et continue**.
Pour tout ordinal α, on a :

1. $F^\omega(\alpha)$ est un point fixe de F vérifiant $\alpha \leq F^\omega(\alpha)$.
2. Pour tout γ point fixe de F tel que $\alpha \leq \gamma$, on a $F^\omega(\alpha) \leq \gamma$.

Ainsi $F^\omega(\alpha)$ est le plus petit de ces points fixes de F.

Démonstration

1.

• Commençons par montrer une première égalité.

Pour tout $n < \omega$, on a $n+1 < \omega$ d'après 16 page 45.

Donc pour tout $n < \omega$, on a $F^{n+1}(\alpha) \leq \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$.

Donc $\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) \leq \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$.

Supposons par l'absurde que $\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) \neq \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$.

On a donc $\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) < \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$ par ce qui précède.

Il existe donc $m < \omega$ tel que $\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) < F^m(\alpha)$.

En particulier $F\big(F^m(\alpha)\big) = F^{m+1}(\alpha) \leq \sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) < F^m(\alpha)$.

Or F est strictement croissante.

On a donc $F^m(\alpha) \leq F\big(F^m(\alpha)\big)$ d'après la proposition 74 page 184.

C'est absurde puisqu'on vient justement de dire que $F\big(F^m(\alpha)\big) < F^m(\alpha)$.

Par l'absurde on vient de montrer que $\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) = \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$.

Or $F^\omega(\alpha) = \sup\limits_{m<\omega} F^m(\alpha)$ par définition de F^ω, donc $\boxed{\sup\limits_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) = F^\omega(\alpha)}$.

Notons $(\star)$ cette égalité.

• On peut en conclure que $F^\omega(\alpha)$ est un point fixe de F.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
F\big(F^\omega(\alpha)\big) &= F\left(\sup_{n<\omega} F^n(\alpha)\right) \text{ par définition de } F^\omega \\
&= \sup_{n<\omega} F\big(F^n(\alpha)\big) \text{ par continuité de } F \\
&= \sup_{n<\omega} F^{n+1}(\alpha) \text{ par définition de } F^{n+1} \\
&= F^\omega(\alpha) \text{ d'après } (\star)
\end{aligned}$$

Ainsi on a $F\big(F^\omega(\alpha)\big) = F^\omega(\alpha)$ donc $\boxed{F^\omega(\alpha) \text{ est un point fixe de } F}$.

• De plus $\alpha = F^0(\alpha) \leq \sup\limits_{n<\omega} F^n(\alpha) = F^\omega(\alpha)$, donc $\boxed{\alpha \leq F^\omega(\alpha)}$.

2. Montrons que $F^\omega(\alpha)$ est le plus petit de tels points fixes.

Soit γ un point fixe de F tel que $\alpha \leq \gamma$.

Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ l'assertion « $F^n(\alpha) \leq \gamma$ ».

Initialisation

Par définition de F^0, on a $F^0(\alpha) = \alpha \leq \gamma$ donc $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$, c'est-à-dire $F^n(\alpha) \leq \gamma$.

F est strictement croissante donc F est croissante d'après la prop. 77 p. 192.

On a donc $F\big(F^n(\alpha)\big) \leq F(\gamma)$ par croissance.

Or $F^{n+1}(\alpha) = F\big(F^n(\alpha)\big)$ par définition de F^{n+1}.

De plus $F(\gamma) = \gamma$ car γ est un point fixe de F.

On a donc $F^{n+1}(\alpha) \leq \gamma$, c'est-à-dire $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Ainsi P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$, c'est-à-dire $F^n(\alpha) \leq \gamma$.

En particulier on a $F^\omega(\alpha) = \sup\limits_{n<\omega} F^n(\alpha) \leq \gamma$.

Ainsi $\boxed{F^\omega(\alpha) \text{ est plus petit que tout point fixe } \gamma \text{ de } F \text{ tel que } \alpha \leq \gamma}$.

CQFD.

Ainsi si l'on prend une assertion fonctionnelle strictement croissante et continue, alors elle admet des points fixes. Mieux, ceux-ci forment une classe propre, comme le montre le théorème suivant. En particulier en les énumérant on obtient un isomorphisme de ON vers cette classe d'après la proposition 81 page 197. De plus, c'est le seul isomorphisme d'après la proposition 80 page 196. On peut donc lui donner un petit nom, et c'est lui qui va nous permettre de définir les ε_α.

Théorème 10 (Fixation d'une assertion fonctionnelle)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle.
Notons $\text{fix}(F)$ la classe des points fixes de F.

Si F est strictement croissante et continue alors $\text{fix}(F)$ est une classe propre de ON.
On appelle **fixation** de F l'unique isomorphisme d'ordres $ON \longrightarrow \text{fix}(F)$.
On le note F°.

Démonstration

Supposons que F est strictement croissante et continue.

Pour prouver que $\text{fix}(F)$ est une classe propre, nous allons montré qu'elle n'est pas bornée : comme tout ensemble d'ordinaux doit admettre une borne supérieure (donc être majorée), $\text{fix}(F)$ n'est pas un ensemble donc une classe propre. Autrement dit nous allons montrer que pour tout ordinal α, il existe $\beta \in \text{fix}(F)$ tel que $\alpha < \beta$.

Soit α un ordinal.

Considérons $\beta := F^{\omega}(\alpha + 1)$.

D'après la proposition 82 page 200, on a $\beta \in \text{fix}(F)$, et $\alpha + 1 \leq \beta$.

Or on a $\alpha < \alpha + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha < \beta$ par transitivité.

Donc $\text{fix}(F)$ n'est pas bornée et est donc une classe propre.

CQFD.

Remarque :
Dans la littérature, le nom que l'on retrouve le plus est celui de **dérivée** et non fixation, que l'on note alors F' plutôt que F°. L'auteur a préféré éviter de conserver cela pour ne pas donner de faux espoirs aux lecteurs férus d'analyse !

Exemple :
Nous avons donc à notre disposition une autre façon d'envisager ε_0, puis ε_1 et ainsi de suite ! En effet, comme annoncé dans l'introduction, il suffit de considérer l'assertion fonctionnelle $F := \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \gamma & \longmapsto & \omega^{\gamma} \end{pmatrix}$. Comme on l'avait vu, ε_0 est le premier point fixe de F, ε_1 le deuxième, et ainsi de suite.

D'après la proposition 67 page 161, F est strictement croissante. D'après la proposition 69 page 165, F est continue. Autrement dit on peut considérer sa fixation F° qui énumère tous les points fixes de F, et donc pour tout ordinal α on peut simplement poser $\varepsilon_{\alpha} := F^{\circ}(\alpha)$.

On peut donc grâce au concept de fixation commencer à aborder des ordinaux démesurés. Cela ne fait pourtant que commencer. Pour cela, remarquons avec la proposition qui suit que la fixation admet elle-même une fixation !

Proposition 83 (Fixation de la fixation)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **strictement croissante et continue**. Alors sa fixation F° est elle-même strictement croissante et continue.

Démonstration

• Supposons que F est croissante et continue.

Elle admet donc une fixation F° d'après le théorème 10 page 202.

Par définition F° est l'isomorphisme d'ordres $ON \longrightarrow \text{fix}(F)$.

En particulier $\boxed{F^{\circ} \text{ est strictement croissante}}$ d'après la proposition 79 page 195.

• Montrons que $\mathrm{fix}(F)$ est stable par passage à la borne supérieure.

Soit X un ensemble d'éléments de $\mathrm{fix}(F)$.

Autrement dit pour tout $\xi \in X$, on a $F(\xi) = \xi$.

Considérons $\sigma := \sup(X)$.

Par continuité de F, on a $F(\sigma) = F\left(\sup_{\xi \in X} \xi\right) = \sup_{\xi \in X} F(\xi) = \sup_{\xi \in X} \xi = \sigma$.

Donc σ est un point fixe de F et donc $\sigma \in \mathrm{fix}(F)$.

Ainsi pour tout ensemble $X \subseteq \mathrm{fix}(F)$, on a $\sup(X) \in \mathrm{fix}(F)$.

• Montrons que F° est continue.

Supposons par l'absurde que F° n'est pas continue.

Utilisons la proposition 43 page 113.

Il existe donc γ un ordinal limite non nul tel que $F^\circ(\gamma) \neq \sup_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta)$.

Or par stricte croissance de F°, pour tout $\delta < \gamma$ on a $F^\circ(\delta) < F^\circ(\gamma)$.

On a donc $\sup_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta) \leq F^\circ(\gamma)$ et donc $\sup_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta) < F^\circ(\gamma)$ par ce qui précède.

Posons alors $\alpha := \sup_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta)$: on vient donc de voir que $\alpha < F^\circ(\gamma)$.

F° est à valeurs dans $\mathrm{fix}(F)$ donc pour tout $\delta < \gamma$, $F^\circ(\delta) \in \mathrm{fix}(F)$.

Donc $\alpha \in \mathrm{fix}(F)$ par la stabilité de la borne supérieure que l'on a montrée plus tôt.

Par définition F° est surjective dans $\mathrm{fix}(F)$.

Il existe donc β un ordinal tel que $F^\circ(\beta) = \alpha$.

Or on a dit que $\alpha < F^\circ(\gamma)$, si bien que $F^\circ(\beta) < F^\circ(\gamma)$.

On a donc $\beta < \gamma$ car F° est un isomorphisme d'ordres.

Mais γ est limite non nul donc on a $\beta + 1 < \gamma$ d'après la proposition 15 page 44.

On a donc $\alpha = F^\circ(\beta) < F^\circ(\beta+1) \leq \sup_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta) = \alpha$.

Ainsi $\alpha < \alpha$, ce qui est absurde.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{F^\circ \text{ est continue}}$.

CQFD.

Exemple :

Reprenons $F := \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \gamma & \longmapsto & \omega^\gamma \end{pmatrix}$ dont nous avons parlé juste au-dessus.

On l'a dit, on a alors $F^\circ = \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \gamma & \longmapsto & \varepsilon_\gamma \end{pmatrix}$. On vient de le voir, F° admet elle-même une fixation : on peut donc considérer $F^{\circ\circ}$. On pose alors $\zeta_0 := F^{\circ\circ}(0)$. Mais que représente ζ_0 au juste ? C'est le premier point fixe de $\gamma \longmapsto \varepsilon_\gamma$. Autrement dit on a $\zeta_0 = \varepsilon_{\zeta_0}$. On se rend donc compte que l'on a $\zeta_0 = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\dots}}}}}}$!

Avant de conclure ce chapitre, qui avouons-le était un peu fastidieux, essayons d'obtenir une expression un peu plus explicite de F° en fonction de F. Celle-ci passe par les itérées de F, comme on l'a pressenti avec la proposition 82 page 200, et se fait par récursion. Prenons bien garde à ne pas confondre F^β pour un ordinal β, qui signifie l'itération β fois de F, et F° qui signifie sa fixation.

Proposition 84 (Expression explicite de la fixation)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **strictement croissante et continue**. On a alors :

$$\begin{cases} F^\circ(0) = F^\omega(0) \\ F^\circ(\alpha+1) = F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) \text{ pour tout ordinal } \alpha \\ F^\circ(\gamma) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Démonstration

D'après la proposition 37 page 101, en prenant $\mu_0 := F^\omega(0)$ et $G(\xi) := F^\omega(\xi+1)$ pour tout ordinal ξ, il existe une unique assertion fonctionnelle $\mathfrak{F} : ON \longrightarrow ON$ telle que

$$\begin{cases} \mathfrak{F}(0) = F^\omega(0) \\ \mathfrak{F}(\alpha+1) = F^\omega\big(\mathfrak{F}(\alpha)+1\big) \text{ pour tout ordinal } \alpha \\ \mathfrak{F}(\gamma) = \sup\limits_{\delta<\gamma} \mathfrak{F}(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Montrons que $F^\circ = \mathfrak{F}$ par induction transfinie.

Pour tout ordinal α, on pose $P(\alpha)$ l'assertion « $F^\circ(\alpha) = \mathfrak{F}(\alpha)$ ».

Initialisation

Par définition, F° est à valeurs dans les points fixes de F.

En particulier $F^\circ(0)$ est un point fixe de F.

De plus comme 0 est le plus petit des ordinaux, on a nécessairement $0 \leq F^\circ(0)$.

Ainsi $F^\circ(0)$ est un point fixe γ de F tel que $0 \leq \gamma$.

On a donc $F^\omega(0) \leq F^\circ(0)$ par minimalité de $F^\omega(0)$, d'après la proposition 82 page 200.

Mais $F^\omega(0)$ est un point fixe de F d'après cette même proposition, donc $F^\omega(0) \in \text{fix}(F)$.

Or par définition de F°, on a $F^\circ(0) = \min\big(\text{fix}(F)\big)$ et donc $F^\circ(0) \leq F^\omega(0)$.

On en conclut que $F^\omega(0) = F^\circ(0)$ par antisymétrie de $\leq$.

Autrement dit on a $F^\circ(0) = \mathfrak{F}(0)$, c'est-à-dire $P(0)$.

Hérédité

Soit α un ordinal tel que $P(\alpha)$, c'est-à-dire $F^\circ(\alpha) = \mathfrak{F}(\alpha)$.

En particulier on a $\mathfrak{F}(\alpha+1) = F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$ par définition de $\mathfrak{F}$.

On a $\alpha < \alpha + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

Donc $F^\circ(\alpha) < F^\circ(\alpha+1)$ par stricte croissance de F°.

On a donc $F^\circ(\alpha)+1 \leq F^\circ(\alpha+1)$ d'après la proposition 14 page 40.

Or par définition $\mathrm{im}(F^\circ) \subseteq \mathrm{fix}(F)$ donc $F^\circ(\alpha+1) \in \mathrm{fix}(F)$.

Ainsi $F^\circ(\alpha+1)$ est un point fixe γ de F tel que $F^\circ(\alpha)+1 \leq \gamma$.

On a donc $F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) \leq F^\circ(\alpha+1)$ d'après la proposition 82 page 200.

Autrement dit on a $\mathfrak{F}(\alpha+1) \leq F^\circ(\alpha+1)$.

On applique à nouveau la proposition 82 page 200.

D'après celle-ci $F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$ est un point fixe γ de F tel que $F^\circ(\alpha)+1 \leq \gamma$.

Ainsi $F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) \in \mathrm{fix}(F)$ et $F^\circ(\alpha)+1 \leq F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$.

Il existe donc $\beta \in \mathit{ON}$ tel que $F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) = F^\circ(\beta)$ par surjectivité de F°.

De plus $F^\circ(\alpha) < F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$ d'après la proposition 14 page 40.

Ainsi $F^\circ(\alpha) < F^\circ(\beta)$ donc $\alpha < \beta$ car F° est un isomorphisme d'ordres.

On a donc $\alpha+1 \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $F^\circ(\alpha+1) \leq F^\circ(\beta)$ par croissance de F.

Or on a dit que $F^\circ(\beta) = F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) = \mathfrak{F}(\alpha+1)$.

On a donc $F^\circ(\alpha+1) \leq \mathfrak{F}(\alpha+1)$.

On en conclut que $F^\circ(\alpha+1) = \mathfrak{F}(\alpha+1)$ par antisymétrie de $\leq$, c'est-à-dire $P(\alpha+1)$. Ainsi pour tout ordinal α, si l'on a $P(\alpha)$ alors on a $P(\alpha+1)$.

Hérédité limite

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall \beta < \alpha, P(\beta)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(\alpha) &= \sup_{\beta<\alpha} \mathfrak{F}(\beta) \text{ par définition de } \mathfrak{F} \\
&= \sup_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta) \text{ car } \forall \beta < \alpha, P(\beta) \\
&= F^\circ\left(\sup_{\beta<\alpha} \beta\right) \text{ par continuité de } F^\circ \\
&= F^\circ\left(\sup_{\beta\in\alpha} \beta\right) \text{ par définition de } <
\end{aligned}$$

$$= F^\circ\big(\sup(\alpha)\big) = F^\circ(\alpha) \text{ d'après la prop. 22 p. 54}$$

On a donc $\mathfrak{F}(\alpha) = F^\circ(\alpha)$, c'est-à-dire $P(\alpha)$.
Donc pour tout ordinal limite non nul α, si $\forall\beta < \alpha, P(\beta)$ alors $P(\alpha)$.

Finalement P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction transfinie.
Donc pour tout ordinal α, on a $P(\alpha)$, c'est-à-dire $\mathfrak{F}(\alpha) = F^\circ(\alpha)$.
CQFD.

Ainsi on vient de se donner la possibilité de désigner des ordinaux démesurément grands, on fait face à l'immensité du monde des ordinaux. On s'en doute au vu du chemin parcouru, il est toujours possible d'aller plus loin, mais ce dont on ne se rend pas forcément bien compte à ce stade, c'est que dans le monde merveilleux des ordinaux, on n'a fait qu'effleurer la surface.

Le prochain chapitre va nous montrer des ordinaux immensément plus grands que tous ceux que l'on a pu aborder jusqu'à présent, de sorte que même ζ_0 n'est rien comparaison de ce qui nous attend. Il est temps d'aborder enfin les **cardinaux**, notion qui sera sans doute une des plus utiles de tout ce livre pour la suite de nos aventures !

Chapitre 3

Cardinaux

Note de l'auteur

Poursuivons avec sans doute l'application la plus utile de la théorie des ordinaux : la notion de cardinal. Intuitivement, il s'agit de compter le nombre d'éléments d'un ensemble, et ce nombre est alors appelé **cardinal de l'ensemble**. Nous l'avons vu, les nombres entiers naturels, qui nous permettent de compter au quotidien, sont des cas particuliers d'ordinaux : il n'est donc pas si étonnant que les ordinaux permettent aussi de définir la notion de cardinal d'un ensemble.

Ce chapitre va commencer par revenir plus en détails sur la notion d'injection et de bijections, qui sont au cœur comme nous le verrons de l'idée de *compter le nombre d'éléments d'un ensemble*. Cela permettra alors de distinguer certains ordinaux jouant un rôle particulier : on les appellera **nombres cardinaux**. Étant donné un ensemble E, si jamais il existe un bon ordre sur E, alors nous verrons comme associer à E un unique cardinal, appelé naturellement cardinal de E.

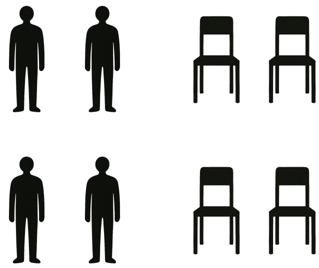
Grâce à l'**axiome du choix** et deux grands théorèmes équivalents, nous verrons comment faire pour que tout ensemble admette un cardinal. Nous aurons alors l'occasion d'effectuer des opérations sur les cardinaux. On finira enfin par définir la notion d'ensembles finis et infinis, et d'ensembles dénombrables et indénombrables.

Sommaire

1 Équipotence et subpotence

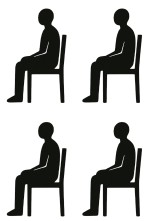
1.1 Équipotence et subpotence

Quand nous voyons deux ensembles d'objets, par exemple des personnes et des chaises, comment savoir qu'il y a autant d'objets dans un ensemble et dans l'autre ? On peut bien évidemment compter le nombre d'éléments dans chacun des deux ensembles, et ensuite comparer les nombres obtenus. Ici la démarche est d'essayer de formaliser rigoureusement le fait de compter, et donc on va pour commencer s'en passer.



Comment sait-on qu'il y autant de personnes que de chaises ?

Une façon de faire dans ce cas précis consiste à demander aux personnes d'aller s'assoir chacun sur une chaise. Si après cela tous les chaises sont occupées et tout le monde est assis, on peut en conclure qu'il y autant de personnes que de chaises, sans même avoir eu besoin de compter.



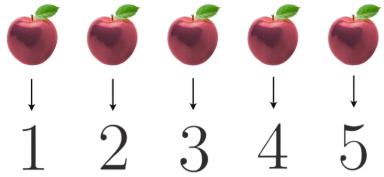
Il y a autant de personnes que de chaises.

On a en quelque sorte réalisé une **bijection** de l'ensemble des personnes dans l'ensemble des chaises :

- chaque personne s'est vu attribuer une et une seule chaise. On a donc bien affaire à une application.
- une même chaise n'a pas été attribuée à deux personnes différents. L'application est donc injective.
- toutes les chaises ont été attribuées. L'application est donc surjective dans l'ensemble des chaises.

On voit ainsi que l'idée de bijection entre deux ensembles E et F est centrale pour pouvoir conclure que E et F ont le même nombre d'éléments. On a d'ailleurs là de quoi donner du sens au fait de compter.

Après tout, qu'est-ce que compter le nombre d'éléments d'un ensemble ? Quand nous avons appris à compter, nous avons commencé par apprendre une *comptine*, c'est-à-dire la liste des noms des premiers entiers naturels. Pour alors compter le nombre de pommes devant nous, il suffit de pointer tour à tour chacune des pommes en récitant à chaque fois un élément de plus de la comptine. Si par exemple on a dit « *un deux trois quatre cinq* » en ayant pointé une et une seule fois chaque pomme, on sait qu'il y a 5 pommes devant nous. Ainsi, on a mis en bijection l'ensemble des pommes avec l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.



On a réalisé une bijection : il y a donc 5 pommes.

Nous donnerons un sens rigoureux au fait de compter un petit peu plus tard, car il y a notamment des choses à dire dans le cas où l'ensemble en question est infini. Pour l'heure, contentons-nous d'étudier plus en profondeur la notion de bijection, qui comme nous l'avons dit est centrale pour comparer les quantités d'éléments de deux ensembles.

Définition 31 (Équipotence)

Soient E et F deux ensembles.
On dit que E et F sont **équipotents** si et seulement s'il existe une bijection de E vers F.
On note alors $E \approx F$.

Ainsi au vu de ce que l'on a dit plus haut, dire que deux ensembles sont équipotents, c'est dire qu'ils ont le même nombre d'éléments. C'est d'une certaine manière une relation d'équivalence, en tout cas en un sens généralisé aux classes et non au ensembles, puisqu'on a l'a dit l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas.

Proposition 85 (Propriétés de l'équipotence)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. On a $E \approx E$. On dit que l'équipotence est **réflexive**.
2. Si $E \approx F$ alors $F \approx E$. On dit que l'équipotence est **symétrique**
3. Si $E \approx F \approx G$ alors $E \approx G$. On dit que l'équipotence est **transitive**.

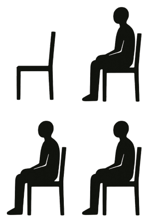
Démonstration

1. On sait que $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ est une bijection.
On a donc $\boxed{E \approx E}$.

2. Supposons que $E \approx F$.
Il existe alors $f : E \longrightarrow F$ une bijection.
Alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection.
Donc $\boxed{F \approx E}$.

3. Supposons que $E \approx F \approx G$.
Il existe alors $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux bijections.
Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une bijection.
Donc $\boxed{E \approx G}$.
CQFD

Reprenons l'exemple des personnes et des chaises. Que peut-on dire dans le cas où même quand tout le monde est assis, il reste au moins une chaise de libre ? Tout simplement qu'il y a moins de personnes que de chaises.



Il y a moins de personnes que de chaises.

Dans ce cas-là, on a simplement réalisé une **injection** de l'ensemble des personnes dans l'ensemble des chaises :

- chaque personne s'est vu attribuée une et une seule chaise. On est donc toujours en présence d'une application.
- une même chaise n'a pas été attribuée à plus d'une seule personne. On est donc toujours en présence d'une injection.

En revanche ici en particulier toutes les chaises n'ont pas été attribuées, et donc l'application n'est pas surjective dans l'ensemble des chaises. On a donc strictement moins de personnes que de chaises.

On voit donc que pour qualifier le fait d'avoir ***moins*** d'éléments dans un ensemble E que dans un ensemble F, on va utiliser l'existence d'une injection de E dans F. Notons qu'une injection peut tout aussi bien être une bijection : on s'intéresse ici au cas où E a ***moins ou autant*** d'éléments que F. On verra peu après le cas où il y a ***strictement moins*** d'éléments dans E que dans F, c'est-à-dire avec l'existence d'injection et l'inexistence de bijection, comme c'est le cas ici avec les personnes et les chaises.

Définition 32 (Subpotence)

Soient E et F deux ensembles.
On dit que E est **subpotent** à F si et seulement s'il existe une injection $E \longrightarrow F$.
On note alors $E \preccurlyeq F$.

Remarque :
On a vu dans le précédent livre que c'est équivalent à l'existence d'une **surjection** $F \longrightarrow E$. Cela nécessite cependant l'**axiome du choix**. Cela revient donc à dire que F a plus d'éléments que E.

De la même manière que l'équipotence est une relation d'équivalence généralisée aux classes, la subpotence peut être vu comme une relation d'ordre généralisée au classes. En réalité pas tout à fait, car on n'a malheureusement pas l'antisymétrie : en effet, ce n'est pas parce que deux ensembles ont le même nombre d'éléments qu'ils sont égaux.

Proposition 86 (Propriétés de la subpotence)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. On a $E \preccurlyeq E$: on dit que la subpotence est **réflexive**.
2. Si $E \preccurlyeq F \preccurlyeq G$ alors $E \preccurlyeq G$: on dit que la subpotence est **transitive**.

Démonstration

1. L'application $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ est injective donc $\boxed{E \preccurlyeq E}$.

2. Supposons que $E \preccurlyeq F \preccurlyeq G$.
Il existe donc deux injections $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.
Alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une injection et donc $\boxed{E \preccurlyeq G}$.
CQFD.

La propriété qui suit est en quelque sorte une généralisation de la réflexivité. Si deux ensembles sont équipotents, alors ils sont subpotents l'un par rapport à l'autre.

Proposition 87 (Équipotence implique double subpotence)

Soient E et F deux ensembles.
Si $E \approx F$ alors $E \preccurlyeq F \preccurlyeq E$.

Démonstration

Supposons que $E \approx F$.
Il existe donc $f : E \longrightarrow F$ une bijection.
En particulier f est injection et donc $\boxed{E \preccurlyeq F}$.
De plus $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi une bijection donc une injection, et donc $\boxed{F \preccurlyeq E}$.
CQFD.

On l'a dit, nous n'avons pas d'antisymétrie de la subpotence.
Autrement dit, on n'a pas l'implication $(E \preccurlyeq F \preccurlyeq E) \Rightarrow E = F$.
Ok très bien, mais peut-on au moins dire que l'on a $(E \preccurlyeq F \preccurlyeq E) \Rightarrow E \approx F$?
La réponse est oui, mais pour pouvoir le montrer, nous allons tout d'abord nous intéresser à une version plus faible, c'est-à-dire $(E \preccurlyeq F \subseteq E) \Rightarrow E \approx F$.
C'est l'objet de la proposition qui suit.

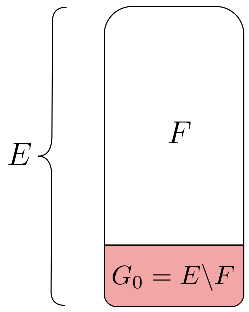
Proposition 88 (Subpotence et inclusion)

Soient E et F deux ensembles.

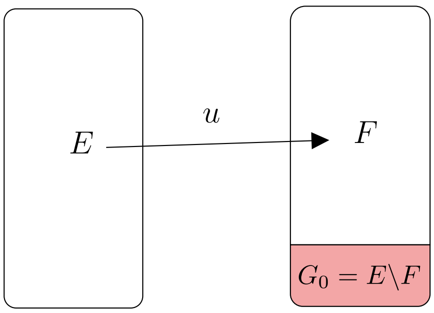
1. Si $F \subseteq E$ alors $F \preccurlyeq E$.
2. Si $E \preccurlyeq F \subseteq E$ alors $E \approx F$.

Idée de preuve

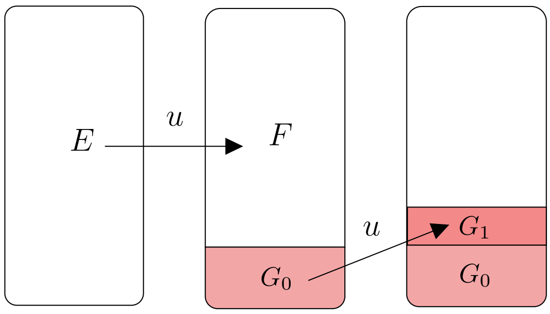
Pour essayer de comprendre l'intuition derrière la preuve qui suit, représentons la situation avec les dessins suivants : on a un ensemble E et une partie F de E, on note $G_0 = E \backslash F$ le complémentaire de F dans E.



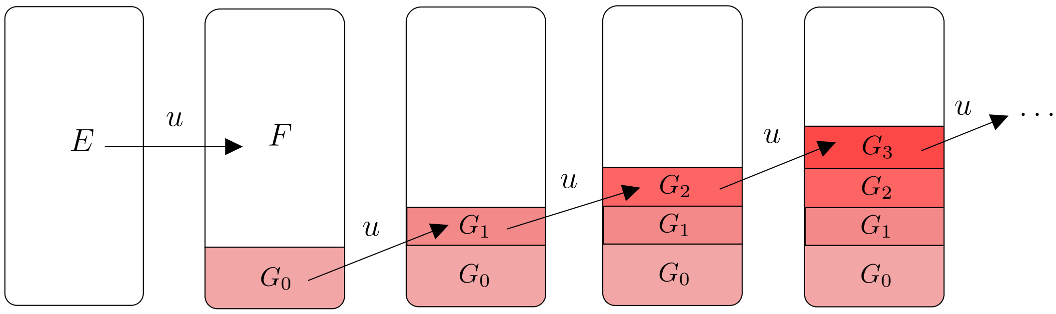
On a une implication injective $u : E \longrightarrow F$, ce que l'on peut représenter ainsi :



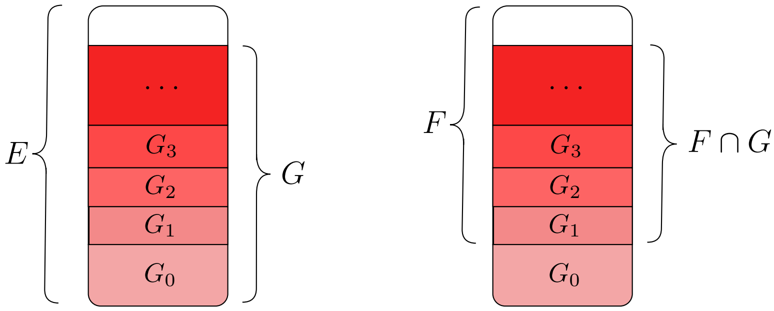
La partie G_0 n'est évidemment pas atteinte puisque complémentaire de F dans E. En revanche, étant une partie de E, on peut s'intéresser à son image par u, si bien que l'on pose $G_1 := u^{\rightarrow}(G_0)$ et on a le dessin suivant :



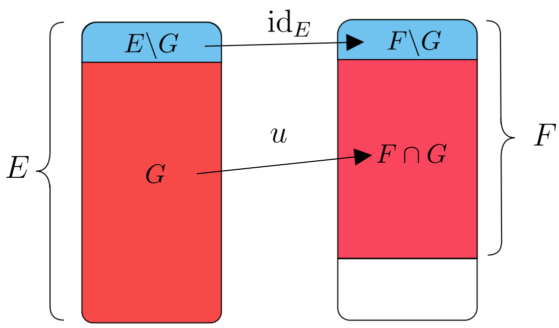
Notons que G_1 est une partie de $\mathrm{im}(u)$ et donc une partie de F. On peut alors répéter le processus : on pose $G_2 = u^{\rightarrow}(G_1)$ puis $G_3 = u^{\rightarrow}(G_2)$ et ainsi de suite.



On réunit alors tous les G_n en un seul ensemble $G := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$. On peut voir qu'alors E est partagé entre G et $E\backslash G$, et de même F est partagée entre $F \cap G$ et $F\backslash G$:



L'idée pour construire la bijection $v : E \longrightarrow F$ va être d'envoyer G sur $F \cap G$ via u et d'envoyer $E\backslash G$ sur $F\backslash G$ via l'identité (puisque $E\backslash G = F\backslash G$) :



On est sûr que v définie ainsi va atteindre tout $y \in F$:

- ou bien $y \in F\backslash G$, auquel cas puisque $E\backslash G = F\backslash G$ on a $y = \mathrm{id}_E(y) = v(y)$.
- ou bien $y \in F \cap G$, auquel cas $y \in G$ donc y est dans l'un des G_n, et comme $y \in F$ on sait que ce G_n n'est pas G_0 puisque $G_0 = E\backslash F$, donc $G_n = u^{\rightarrow}(G_{n-1})$ et donc y est l'image d'un certain $x \in G_{n-1}$.

De cette manière, v est surjective dans F, et est injective car définie par id_E et u qui le sont.

■

Démonstration

1. Supposons que $F \subseteq E$.

On a $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow F$ donc $\mathrm{id}_F : F \longrightarrow E$.

Or id_F est injective donc $\boxed{F \preccurlyeq E}$.

2.

• Supposons que $E \preccurlyeq F \subseteq E$.

Comme $E \preccurlyeq F$, il existe une injection $u : E \longrightarrow F$.

On construit la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} G_0 := E \backslash F \\ G_{n+1} := u^{\rightarrow}(G_n) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On pose alors $G := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Remarquons que pour tout $x \in E$, comme u est à valeurs dans F on a $u(x) \in F$.

De plus pour tout $x \in E$, si $x \notin G$ alors en particulier $x \notin G_0 = E\backslash F$ donc $x \in F$.

On peut donc définir l'application

$$v := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in G \\ x & \text{si } x \notin G \end{cases} \end{array} \right)$$

• Montrons que v est injective.

Soient x et x' tels que $v(x) = v(x')$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \in G$ et $x' \in G$.
On a donc $u(x) = v(x) = v(x') = u(x')$ donc $u(x) = u(x')$.
Or u est injective par définition donc $x = x'$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \notin G$ et $x' \notin G$.
On a donc $x = v(x) = v(x') = x'$ et donc $x = x'$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \in G$ et $x' \notin G$.
On a donc $u(x) = v(x) = v(x') = x'$ donc $u(x) = x'$.
Or $x \in G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in G_n$.
On a donc $x' = u(x) \in u^{\rightarrow}(G_n) = G_{n+1} \subseteq G$.
Ainsi $x' \in G$, ce qui est absurde puisque par hypothèse $x' \notin G$.

Ce cas est donc impossible.

- Pour exactement la même raison, le cas $x \notin G$ et $x' \in G$ est impossible.

Ainsi dans les deux cas possibles, on a $x = x'$.

Donc v est injective.

• Montrons que v est surjective dans F.

Par définition de v on sait déjà que $\mathrm{im}(v) \subseteq F$.

Soit $y \in F$.

- Plaçons-nous dans le cas où $y \in G$.
  On a $G = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in G_n$.
  Si $n = 0$ alors $y \in G_0 = E \backslash F$ donc $y \notin F$, ce qui est absurde.
  On est donc forcément dans le cas où $n > 0$.
  Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m + 1$ et donc $y \in G_{m+1} = u^{\rightarrow}(G_m)$.
  Il existe donc $x \in G_m$ tel que $y = u(x)$.
  Comme $x \in G_m$, on a $x \in G$ donc $v(x) = u(x) = y$, et donc $y \in \mathrm{im}(v)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $y \notin C$.
  On a alors $v(y) = y$ donc $y \in \mathrm{im}(v)$.

Dans les deux cas on a $y \in \mathrm{im}(v)$.

Ainsi $\mathrm{im}(v) \supseteq F$ et donc $\mathrm{im}(v) = F$.

Ainsi v est surjective dans F.

Finalement v est injective et surjective dans F.

Donc $v : E \longrightarrow F$ est une bijection, et donc $\boxed{E \approx F}$.

CQFD.

Voilà, nous sommes désormais en mesure de montrer l'implication $(E \preccurlyeq F \preccurlyeq E) \Rightarrow E \approx F$. Elle porte le nom de théorème de Cantor-(Schröder-)Bernstein.

Théorème 11 (de Cantor-Schröder-Bernstein)

Soient E et F deux ensembles.
Si $(E \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq E)$, alors $E \approx F$.

On se propose de donner deux démonstrations de ce résultat.

Démonstration

Première démonstration

C'est celle qui fait intervenir la proposition 88 page 214.

Supposons que $E \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq E$.

Il existe donc $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections.

Alors $g \circ f : E \longrightarrow E$ est injective, et $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq \mathrm{im}(g)$.

Posons ensuite $G := \mathrm{im}(g)$, de sorte que $\mathrm{im}(g \circ f) \subseteq G$ et donc $g \circ f : E \longrightarrow G$.

Comme $g \circ f$ est injective, on a donc $E \preccurlyeq G$.

Or g est à valeurs dans E donc $G = \mathrm{im}(g) \subseteq E$.

Ainsi on a $G \subseteq E \preccurlyeq G$ donc $E \approx G$ d'après la proposition 88 page 214.

Il existe donc $v : E \longrightarrow G$ une bijection.

De plus $g : F \longrightarrow E$ est injective et $\mathrm{im}(g) = G$ donc $g : F \longrightarrow G$ est bijective.

Donc $g^{-1} : G \longrightarrow F$ est une bijection.

Alors $g^{-1} \circ v : E \longrightarrow F$ est une bijection, et donc $\boxed{E \approx F}$.

CQFD.

Démonstration

Deuxième démonstration

C'est celle qui fait intervenir le **théorème de Knaster-Tarski** abordé dans le précédent livre.

Supposons que $E \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq E$.

Il existe donc $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux injections.

Posons $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ G & \longmapsto & E \backslash g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(G)\big) \end{array} \right)$

En munissant $\mathscr{P}(E)$ de l'inclusion, montrons que φ est croissante.

> Soient G et G' deux parties de E telles que $G \subseteq G'$.
>
> On a alors $f^{\rightarrow}(G) \subseteq f^{\rightarrow}(G')$ par croissance l'image directe.
>
> On a donc $F \backslash f^{\rightarrow}(G) \supseteq F \backslash f^{\rightarrow}(G')$ par décroissance de la différence.
>
> Donc $g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(G)\big) \supseteq g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(G')\big)$ par croissance de l'image directe.
>
> Donc $E \backslash g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(G)\big) \subseteq E \backslash g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(G')\big)$ par décroissance de la différence.
>
> Autrement dit on a $\varphi(G) \subseteq \varphi(G')$.

Ainsi φ est croissante.

D'après le théorème de Knaster-Tarski, φ admet un point fixe M, c'est-à-dire $\varphi(M) = M$.
On a donc $E \backslash g^{\to}\big(F \backslash f^{\to}(M)\big) = M$ et donc $E \backslash M = g^{\to}\big(F \backslash f^{\to}(M)\big)$.
Autrement dit, pour tout $x \in E$, si $x \notin M$ alors $x \in g^{\to}\big(F \backslash f^{\to}(M)\big)$ et donc $x \in \mathrm{im}(g)$.

On a dit $g : F \longrightarrow E$ est injective par définition donc $g : F \longrightarrow \mathrm{im}(g)$ est bijective.
On peut donc considérer sa réciproque $g^{-1} : \mathrm{im}(g) \longrightarrow F$.
On peut donc poser

$$h := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in M \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \notin M \end{cases} \end{array} \right)$$

• Montrons que h est injective.

Soit x et x' tels que $h(x) = h(x')$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \in M$ et $x' \in M$.
On a alors $f(x) = h(x) = h(x') = f(x')$ donc $f(x) = f(x')$.
Or f est injective par définition donc $x = x'$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \notin M$ et $x' \notin M$.
On a alors $g^{-1}(x) = h(x) = h(x') = g^{-1}(x')$ donc $g^{-1}(x) = g^{-1}(x')$.
Or g^{-1} est injective donc $x = x'$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $x \in M$ et $x' \notin M$.
On a donc $f(x) = h(x) = h(x') = g^{-1}(x')$ et donc $f(x) = g^{-1}(x')$.
Comme $x \in M$ on a donc $f(x) \in f^{\to}(M)$ et donc $g^{-1}(x') \in f^{\to}(M)$.
Or $x' \notin M$ et $E \backslash M = g^{\to}\big(F \backslash f^{\to}(M)\big)$ donc $x' \in g^{\to}\big(F \backslash f^{\to}(M)\big)$.
On a donc $g^{-1}(x') \in F \backslash f^{\to}(M)$ et donc $g^{-1}(x') \notin f^{\to}(M)$.
C'est impossible puisqu'on a justement dit que $g^{-1}(x') \in f^{\to}(M)$.
Ce cas est donc impossible.

▶ Le cas où $x \notin M$ et $x' \in M$ est impossible pour la même raison.

Dans les deux cas possibles on a donc $x = x'$.

Donc h est injective.

• Montrons que h est surjective dans F.
Par définition de h on sait déjà que $\mathrm{im}(h) \subseteq F$.

Soit $y \in F$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $y \in f^{\to}(M)$.

Il existe donc $x \in M$ tel que $y = f(x)$.
Mais on a $h(x) = f(x)$ donc $h(x) = y$ et donc $y \in \mathrm{im}(h)$.

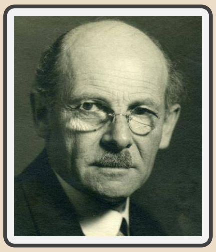
▶ Plaçons-nous dans le cas où $y \notin f^{\rightarrow}(M)$.
Ainsi on a $y \in F \backslash f^{\rightarrow}(M)$.
Considérons $x := g(y)$, de sorte que $x \in g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(M)\big)$.
Or on a dit que $M = E \backslash g^{\rightarrow}\big(F \backslash f^{\rightarrow}(M)\big)$ donc $x \notin M$.
On a donc $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}\big(g(y)\big) = y$ et donc $y \in \mathrm{im}(h)$.

Dans les deux cas on a donc $y \in \mathrm{im}(h)$.
Ainsi $\mathrm{im}(h) \supseteq F$ et donc $\mathrm{im}(h) = F$.
Ainsi h est surjective dans F.

Finalement h est injective et surjective dans F.
Donc $h : E \longrightarrow F$ est bijective, et donc $\boxed{E \approx F}$.
CQFD.

Remarque :
Ce théorème est souvent simplement nommé théorème de Cantor-Bernstein, du fait que la démonstration donnée par Schröder comportait une erreur.

Pour la petite histoire



Felix Bernstein (24 février 1878 – 3 décembre 1956) est un mathématicien allemand.

Il a été l'élève de Cantor puis a soutenu sa thèse sur la théorie des ensembles sous la direction de Hilbert. Ses centres d'intérêt passent des ensembles aux probabilités et statistiques. À Gottingen en 1918 il fonde un institut de statistiques, où il traitera notamment de biostatistiques et mathématiques sur les assurances. Il fait des découvertes sur les transmissions génétiques des groupes sanguins.

Cantor énonce sans démonstration en 1887 le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein. Felix Bernstein en produit une démonstration à l'âge de 18 ans en 1896, qui sera publiée deux ans plus tard par Borel, soit la même année que Schröder.

Pour la petite histoire

Ernst Schröder (25 novembre 1841 – 16 juin 1902) est un mathématicien allemand.

Son travail porte sur la logique et l'algèbre de Boole. C'est un personnage majeur de l'histoire de la logique mathématique, car il fit une synthèse des œuvres de Boole, De Morgan, MacColl, et particulièrement Sanders Peirce, et poursuivit leurs travaux. Il est connu en particulier pour son œuvre monumentale, les *Vorlesungen über die Algebra der Logik* (leçons sur l'algèbre de la logique), qui a aidé au développement de la logique mathématique en tant que discipline autonome au cours du 20$^{\text{ème}}$ siècle.

En 1898 il propose une démonstration du théorème de Cantor-Schröder-Bernstein mais qui malheureusement comporte une erreur qui ne sera décelée par lui-même que 3 ans plus tard. Il reconnaîtra donc la paternité de la démonstration à Bernstein.

1.2 Théorème de Cantor

Il est évidemment possible qu'un ensemble ait strictement moins d'éléments qu'un autre. On parle alors de **stricte subpotence**.

Définition 33 (Stricte subpotence)

Soient A et B deux ensembles.
On dit que A est **strictement subpotent** à B si et seulement si $A \preccurlyeq B$ et $A \not\approx B$.
On note alors $A \prec B$.

Il faut bien comprendre que si $A \prec B$, alors il existe une injection de A dans B mais aucune bijection de A dans B : autrement dit il n'existe aucune application de A dans B qui soit surjective dans B. Peu importe la façon de distribuer les éléments de A sur ceux de B, il existera systématiquement des éléments de B qui ne seront pas atteints. On verra dans un prochain livre que par exemple $\mathbb{N} \prec \mathbb{R}$, ce qui peut fortement dérouter au premier abord. Il existe donc des ensembles infinis strictement plus grands que d'autres, et nous en verrons un exemple tout à l'heure avec le théorème de Cantor.

Ainsi, la strict subpotence est un peu une version généralisée de l'ordre strict associé à une relation d'ordre. En particulier on retrouve la même idée de transitivité croisée. Passons en revue tous les cas possibles, car bien souvent ces situations se présenteront à nous.

Proposition 89 (Transitivité croisée de la subpotence)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. Supposons avoir l'une des assertions suivantes :
   (a) $E \preccurlyeq F \approx G$
   (b) $E \approx F \preccurlyeq G$

   alors $E \preccurlyeq G$.
2. Supposons avoir l'une des assertions suivantes :
   (a) $E \preccurlyeq F \prec G$
   (b) $E \approx F \prec G$
   (c) $E \prec F \preccurlyeq G$
   (d) $E \prec F \approx G$

   alors on a $E \prec G$.

Démonstration

1. Supposons avoir $E \preccurlyeq F \approx G$ ou $E \approx F \preccurlyeq G$.

On a en particulier $E \preccurlyeq F \preccurlyeq G$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $\boxed{E \preccurlyeq G}$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

2. (a) Supposons avoir $E \preccurlyeq F \prec G$.

Comme $F \prec G$, on a $F \preccurlyeq G$ et $F \not\approx G$ par définition de $\prec$.

Ainsi on a $E \preccurlyeq F \preccurlyeq G$ et donc $E \preccurlyeq G$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Supposons par l'absurde avoir $E \approx G$.

On a en particulier $G \preccurlyeq E$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $G \preccurlyeq E \preccurlyeq F$ donc $G \preccurlyeq F$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Comme $F \preccurlyeq G$, on a $F \approx G$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

C'est absurde puisqu'on a justement dit que $F \not\approx G$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $E \not\approx G$.

Comme on a $E \preccurlyeq G$, on en conclut que $\boxed{E \prec G}$ par définition de $\prec$.

(b) Supposons avoir $E \approx F \prec G$.

On a en particulier $E \preccurlyeq F \prec G$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $\boxed{E \prec G}$ d'après (a).

(c) Supposons avoir $E \prec F \preccurlyeq G$.

Comme $E \prec F$, on a $E \preccurlyeq F$ et $E \not\approx F$ par définition de $\prec$.

Ainsi on a $E \preccurlyeq F \preccurlyeq G$ et donc $E \preccurlyeq G$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Supposons par l'absurde avoir $E \approx G$.

On a en particulier $G \preccurlyeq E$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $F \preccurlyeq G \preccurlyeq E$ donc $F \preccurlyeq E$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Comme $E \preccurlyeq F$, on a $E \approx F$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

C'est absurde puisqu'on a justement dit que $E \not\approx F$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $E \not\approx G$.

Comme on a $E \preccurlyeq G$, on en conclut que $\boxed{E \prec G}$ par définition de $\prec$.

(d) Supposons avoir $E \prec F \approx G$.

On a en particulier $E \prec F \preccurlyeq G$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $\boxed{E \prec G}$ d'après (c).

CQFD.

On l'a dit, la strict subpotence se comporte comme un ordre strict vis à vis de la subpotence. C'est d'autant plus vrai que l'on a les deux propriétés suivantes.

Proposition 90 (Strict subpotence et ordre strict)

Soient E, F et G trois ensembles.

1. On a $E \not\prec E$. La strict subpotence est **antiréflexive**.
2. Si $E \prec F \prec G$ alors $E \prec G$. La strict subpotence est **transitive**.

Démonstration

1. On a $E \approx E$ par réflexivité de $\approx$.

En particulier on a $\mathrm{non}(E \not\approx E)$.

En particulier on a $\mathrm{non}(E \preccurlyeq E \text{ et } E \not\approx E)$.

On a donc $\boxed{E \not\prec E}$ par définition de $\prec$.

2. Supposons avoir $E \prec F \prec G$.

On a en particulier $E \preccurlyeq F \prec G$ par définition de $\prec$.

On a donc $\boxed{E \prec G}$ d'après la proposition 89 page 222.

CQFD.

La proposition qui suit est très importante : étant donné une application, il existe toujours un ensemble qui n'est pas dans l'image de celle-ci. Son principe n'est pas sans rappeler celui du paradoxe de Russell, avec l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas, ou le barbier qui ne rase que ceux qui ne se rasent pas.

Proposition 91 (Argument diagonal de Cantor)

Soit f une application.
Considérons $D := \{x \in \mathrm{dom}(f) \mid x \notin f(x)\}$.
Alors $D \notin \mathrm{im}(f)$.

Démonstration

Supposons par l'absurde que $D \in \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $x \in \mathrm{dom}(f)$ tel que $D = f(x)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $x \in D$.
  Alors par définition de D on a $x \notin f(x)$.
  Mais par définition de x on a $f(x) = D$, si bien que $x \notin D$.
  C'est absurde puisqu'on est justement dans le cas où $x \in D$.
- Plaçons-nous dans le cas où $x \notin D$.
  Alors par définition de D on a $x \in f(x)$.
  Mais par définition de x on a $f(x) = D$, si bien que $x \in D$.
  C'est absurde puisqu'on est justement dans le cas où $x \notin D$.

Dans les deux cas on aboutit à une absurdité.

Par l'absurde on vient de montrer que $\boxed{D \notin \mathrm{im}(f)}$.

CQFD.

On l'appelle **argument diagonal de Cantor** parce qu'il est possible de visualiser l'argument dans le cas où $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$, pour montrer que f ne peut pas être surjective dans $\mathscr{P}(E)$, ce qui est l'idée sous-jacente du théorème de Cantor qui va suivre. En effet, f va prendre chaque élément de E et lui associé une partie de E. Prenons par exemple le cas où $E = \{a, b, c, d\}$, et donnons un exemple d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$. Chaque ligne représente l'image d'un élément de E, et chaque colonne indique si un élément est dans la partie (la case est alors noire), ou non (la case est laissée blanche).

	$a \in$	$b \in$	$c \in$	$d \in$
$f(a)$	■		■	■
$f(b)$			■	■
$f(c)$		■	■	
$f(d)$	■			

Ainsi en lisant la première ligne, on peut voir que $a \in f(a)$, que $b \notin f(a)$, que $c \in f(a)$ et $d \in f(a)$, et donc $f(a) = \{a, c, d\}$. De même, on peut voir en lisant la deuxième ligne que $f(b) = \{c, d\}$, en lisant la troisième ligne que $f(c) = \{b, c\}$ et en lisant la quatrième ligne que $f(d) = \{a\}$.

L'argument diagonal consiste alors à former la partie donnée par la diagonale de ce tableau (celle qui part d'en haut à gauche pour aller en bas à droite), c'est-à-dire ■□■□ Comment interpréter cette diagonale ? Par exemple, le fait que sa première case soit noire indique que

$a \in f(a)$, le fait que sa deuxième case soit blanche indique que $b \notin f(b)$, et de même $c \in f(c)$ et $d \notin f(d)$. Autrement dit, la diagonale nous donne la partie $\{a, c\}$, qui sont les éléments x de E vérifiant $x \in f(x)$. Il suffit alors de considérer son complémentaire, c'est-à-dire $\{b, d\}$, qui s'obtient en inversant les couleurs des cases, c'est-à-dire . Par définition, il s'agit justement des éléments x de E tels que $x \notin f(x)$, qui est bien la partie D que nous avons considérée dans l'énoncé.

Cette partie D ne peut pas être dans l'image de f. En effet, cela reviendrait à dire que D serait l'une des lignes du tableau, mais justement elle ne peut pas être la première ligne puisqu'elles ont leurs premières cases différentes, elle ne peut être la deuxième ligne car elles ont leurs deuxièmes cases différentes, et ainsi de suite elle ne peut ni être la troisième ni la quatrième ligne. D a été construite justement pour différer de chaque ligne du tableau, donc n'est pas dans l'image de f.

On peut donc se servir de cet argument pour démontrer le théorème suivant, qui est plus important qu'il n'y paraît au premier abord.

Théorème 12 (de Cantor)

Soit E un ensemble.
On a alors $E \prec \mathscr{P}(E)$.

Démonstration

• Montrons que $E \preccurlyeq \mathscr{P}(E)$.

Pour cela, considérons $f := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ x & \longmapsto & \{x\} \end{array}\right)$.

Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$.

On a donc $\{x\} = \{x'\}$ et donc $x = x'$.

Ainsi $f : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$ est injective et donc $E \preccurlyeq \mathscr{P}(E)$.

• Montrons que $E \not\approx \mathscr{P}(E)$.

Supposons par l'absurde que $E \approx \mathscr{P}(E)$.

Il existe donc une bijection $g : E \longrightarrow \mathscr{P}(E)$.

En particulier g est surjective dans $\mathscr{P}(E)$ donc $\operatorname{im}(g) = \mathscr{P}(E)$.

Considérons alors $D := \left\{x \in E \;\middle|\; x \notin g(x)\right\}$.

Ainsi $D \in \mathscr{P}(E) = \operatorname{im}(g)$.

C'est absurde car d'après l'argument diagonal de Cantor, $D \notin \operatorname{im}(g)$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $E \not\approx \mathscr{P}(E)$.

Finalement on a $E \preccurlyeq \mathscr{P}(E)$ et $E \not\approx \mathscr{P}(E)$ donc $\boxed{E \prec \mathscr{P}(E)}$.

CQFD.

Le théorème de Cantor est évident dans le cas fini, mais sa conclusion est étonnante dans le cas infini : en effet, cela veut dire que $\mathbb{N}$ a strictement moins d'éléments que $\mathscr{P}(\mathbb{N})$! Il y a donc différentes tailles d'infinis ! C'était déjà annoncé dans la partie sur les ordinaux (par exemple $\omega < \omega + 1$), mais cela provenait simplement de la façon d'ordonner les éléments, de disposer les bâtons devant soi. Ici ce qui est étonnant, c'est que cela se moque de la façon de présenter les éléments en quantité infini : il y a dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ beaucoup plus d'éléments que dans $\mathbb{N}$, et ce de manière intrinsèque.

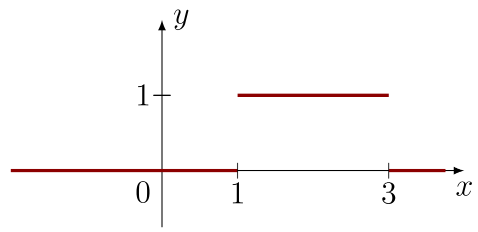
Dans l'illustration que nous avons donnée de l'argument de la diagonale de Cantor, nous avons représenté chaque partie de E comme une ligne ayant plusieurs cases, chaque case pouvant être ou bien noire, ou bien blanche. Cela revient donc à associer une partie de E à une application $E \longrightarrow \{0,1\}$: la valeur 0 représentant les cases blanches, et la valeur 1 les cases noires. On tombe sur le principe des indicatrices, dont voici la définition.

Définition 34 (Indicatrice d'une partie)

Soient E un ensemble et F une partie de E.
On appelle **indicatrice** de F (au sein de E) l'application

$$\mathbb{1}_F := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in F \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases} \end{array} \right)$$

Exemple :
Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on peut parfois représenter graphiquement une indicatrice, par exemple ci-dessous l'indicatrice du segment $[1,3]$.



Nous l'avons dit, avec l'illustration du tableau de tout à l'heure, chaque partie peut être associée à une ligne de cases noires ou blanches, et donc d'indicatrices. Mais cela fonctionne aussi dans l'autre sens, de sorte qu'on peut en fait réaliser une bijection entre les parties de E et les indicatrices de ces parties, c'est-à-dire l'ensemble des applications $E \longrightarrow \{0,1\}$. Rappelons que par définition $2 = S(1) = 1 \cup \{1\} = \{0\} \cup \{1\} = \{0,1\}$.

Proposition 92 (Applications à valeurs dans 2 et parties)

Soit E un ensemble.
Alors $\mathcal{F}(E \to 2) \approx \mathscr{P}(E)$.

Démonstration

Pour rappel, $2 = \{0,1\}$.

Montrons qu'il existe une bijection $\mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Considérons $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big) \\ F & \longmapsto & \mathbb{1}_F \end{array}\right)$.

• Montrons que φ est injective.

Soient F et F' des parties de E telles que $\varphi(F) = \varphi(F')$.

On a donc $\mathbb{1}_F = \mathbb{1}_{F'}$.

Donc pour tout $x \in E, \mathbb{1}_F(x) = \mathbb{1}_{F'}(x)$.

Soit $z \in F$.

On a alors $\mathbb{1}_{F'}(z) = \mathbb{1}_F(z) = 1$ donc $z \in F'$.

Ainsi $F \subseteq F'$.

Par le même argument on montre que $F \supseteq F'$ et donc $F = F'$.

Ainsi φ est injective.

• Montrons que φ est surjective dans $\mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Par définition de φ on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Soit $f : E \longrightarrow \{0,1\}$.

Considérons $F := \big\{x \in E \bigm| f(x) = 1\big\}$.

Montrons que $\mathbb{1}_F = f$.

Par définition $\mathrm{dom}(\mathbb{1}_F) = E = \mathrm{dom}(f)$.

Soit $x \in E$.

On a l'équivalence $\mathbb{1}_F(x) = 1 \iff x \in F \iff f(x) = 1$.

De même $\mathbb{1}_F(x) = 0 \iff x \notin F \iff f(x) = 0$.

Comme $\mathbb{1}_F$ et f sont à valeurs dans $\{0,1\}$, on a donc $\mathbb{1}_F(x) = f(x)$.

Donc $\forall x \in E, \mathbb{1}_F(x) = f(x)$ et donc $\mathbb{1}_F = f$.

Autrement dit $f = \varphi(F)$ et donc $f \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi) \supseteq \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$ et donc $\mathrm{im}(\varphi) = \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Autrement dit φ est surjective dans $\mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Finalement φ est injective et surjective dans $\mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$.

Donc $\varphi : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}\big(E \to \{0,1\}\big)$ est bijective, et donc $\boxed{\mathcal{F}(E \to 2) \approx \mathscr{P}(E)}$.

CQFD.

1.3 Équipotence et opérations

Cette partie 1.3 va présenter beaucoup de preuves techniques qui ne sont pas fondamentalement intéressantes. L'auteur du livre conseil aux lecteurs de passer les preuves et ne s'intéresser qu'aux résultats en eux-mêmes.

Nous allons observer le comportement de l'équipotence et de la subpotence vis à vis des opérations ensemblistes. Commençons par le produit cartésien.

Proposition 93 (Produit cartésien, équipotence et subpotence)

Soient A, B, E et F quatre ensembles.

1. Si B est **non vide** alors $A \preccurlyeq A \times B$.
2. Si $A \preccurlyeq E$ et $B \preccurlyeq F$ alors $A \times B \preccurlyeq E \times F$.
3. Si $A \approx E$ et $B \approx F$ alors $A \times B \approx E \times F$.

Démonstration

1. Supposons que B est non vide.

Il existe donc $b_0 \in B$.

Considérons $f := \begin{pmatrix} A & \longrightarrow & A \times B \\ a & \longmapsto & (a, b_0) \end{pmatrix}$.

Montrons que f est injective.

Soient a et a' tels que $f(a) = f(a')$.

On a donc $(a, b_0) = (a', b_0)$ donc $a = a'$.

Donc $f : A \longrightarrow A \times B$ est injective et donc $\boxed{A \preccurlyeq A \times B}$.

2. Supposons que $A \preccurlyeq E$ et $B \preccurlyeq F$.

Il existe donc $f : A \longrightarrow E$ et $g : B \longrightarrow F$ deux injections.

Posons alors $\varphi := \begin{pmatrix} A \times B & \longrightarrow & E \times F \\ (a, b) & \longmapsto & \big(f(a), g(b)\big) \end{pmatrix}$.

Montrons que φ est injective.

Soient (a, b) et (a', b') dans $A \times B$ tels que $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$.

On a donc $\big(f(a), g(b)\big) = \big(f(a'), g(b')\big)$.

On a donc $f(a) = f(a')$ et $g(b) = g(b')$.

Or f et g sont injectives par définition.

Donc $a = a'$ et $b = b'$, et donc $(a, b) = (a', b')$.

Donc $\varphi : A \times B \longrightarrow E \times F$ est injective et donc $\boxed{A \times B \preccurlyeq E \times F}$.

3. Supposons que $A \approx E$ et $B \approx F$.

On a donc $A \preccurlyeq E$ et $E \preccurlyeq A$ et $B \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq B$ d'après la proposition 87 page 213.

D'après 2, on a $A \times B \preccurlyeq E \times F$ et $E \times F \preccurlyeq A \times B$.
On a donc $\boxed{A \times B \approx E \times F}$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
CQFD.

Quand on fait l'union de deux ensembles A et B, si jamais A et B ont des éléments en communs (donc ne sont pas disjoints), ceux-ci ne se retrouveront qu'en un seul exemplaire dans $A \cup B$ puisqu'il est impossible d'avoir plusieurs fois le même élément dans un ensemble. C'est pour cette raison que nous avons introduit l'union disjointe $A \amalg B$, qui s'assure d'avoir deux exemplaires de chaque élément en commun de A et de B. On retrouve donc naturellement le résultat suivant.

Proposition 94 (Équipotence entre union et union disjointe)

Soient A et B deux ensembles.

1. On a $A \cup B \preccurlyeq A \amalg B$.
2. Si A et B sont disjoints alors $A \cup B \approx A \amalg B$.

Démonstration

1. Remarquons que pour $x \in A \cup B$:

— si $x \in A$ alors par définition $(0, x) \in A \amalg B$,

— et si $x \notin A$ alors $x \in B$ donc $(1, x) \in A \amalg B$.

On peut donc considérer l'application $f := \left(\begin{array}{ccc} A \cup B & \longrightarrow & A \amalg B \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (0, x) & \text{si } x \in A \\ (1, x) & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que f est injective.

Soient x et x' dans $A \cup B$ tels que $f(x) = f(x')$.

- Plaçons-nous dans le cas où $x \in A$ et $x' \in A$.
  On a alors $(0, x) = f(x) = f(x') = (0, x')$ donc $(0, x) = (0, x')$.
  On a donc $x = x'$.
- Plaçons-nous dans le cas où $x \notin A$ et $x' \notin A$.
  On a alors $(1, x) = f(x) = f(x') = (1, x')$ donc $(1, x) = (1, x')$.
  On a donc $x = x'$.
- Plaçons-nous dans le cas où $x \in A$ et $x \notin A$.
  On a alors $(0, x) = f(x) = f(x') = (1, x')$ donc $(0, x) = (1, x')$.
  On a donc $0 = 1$, ce qui est absurde, donc ce cas est impossible.
- Le cas où $x \notin A$ et $x' \in A$ est impossible pour la même raison.

Donc dans les deux cas possibles on a $x = x'$.

Donc f est injective.

Or $f : A \cup B \longrightarrow A \amalg B$ donc $\boxed{A \cup B \preccurlyeq A \amalg B}$.

2. Supposons que A et B sont disjoints.

Montrons que f est surjective dans $A \amalg B$.

Par définition de f on sait déjà que $\mathrm{im}(f) \subseteq A \amalg B$.

Soit $(i, x) \in A \amalg B$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$.
  On a alors $x \in A$ par définition de $A \amalg B$.
  On a donc $f(x) = (0, x) = (i, x)$ donc $(i, x) \in \mathrm{im}(f)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 1$.
  On a alors $x \in B$ par définition de $A \amalg B$.
  Comme A et B sont **disjoints**, on a $x \notin A$.
  On a donc $f(x) = (1, x) = (i, x)$ et donc $(i, x) \in \mathrm{im}(f)$.

Dans les deux cas on a $(i, x) \in \mathrm{im}(f)$.

Ainsi $\mathrm{im}(f) \supseteq A \amalg B$ et donc $\mathrm{im}(f) = A \amalg B$.

Ainsi f est surjective dans $A \amalg B$.

Finalement f injective et surjective dans $A \amalg B$.

Donc $f : A \cup B \longrightarrow A \amalg B$ est bijective, et donc $\boxed{A \cup B \approx A \amalg B}$.

CQFD.

On retrouve la même propriété pour l'union disjointe que pour le produit cartésien que l'on a vu plus tôt.

Proposition 95 (Équipotence et union disjointe)

Soient A, B, E et F quatre ensemble.

1. Si $A \preccurlyeq E$ et $B \preccurlyeq F$ alors $A \amalg B \preccurlyeq E \amalg F$.
2. Si $A \approx E$ et $B \approx F$ alors $A \amalg B \approx E \amalg F$.

Démonstration

1. Supposons que $A \preccurlyeq E$ et $B \preccurlyeq F$.

Il existe donc $f : A \longrightarrow E$ et $g : B \longrightarrow F$ deux injections.

Posons alors $\varphi := \left(\begin{array}{rclc} A \amalg B & \longrightarrow & E \amalg F & \\ (0, a) & \longmapsto & (0, f(a)) & \text{pour tout } a \in A \\ (1, b) & \longmapsto & (1, g(b)) & \text{pour tout } b \in B \end{array} \right)$.

Montrons que φ est injective.

Soient (i,x) et (j,y) dans $A \amalg B$ tels que $\varphi(i,x) = \varphi(j,y)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0 = j$.
  Alors $x \in A$ et $y \in A$.
  On a donc $\big(0, f(x)\big) = \varphi(0,x) = \varphi(i,x) = \varphi(j,y) = \varphi(0,y) = \big(0, f(y)\big)$.
  Ainsi $\big(0, f(x)\big) = \big(0, f(y)\big)$ donc $f(x) = f(y)$.
  Mais f est injective par définition, donc $x = y$.
  Comme $i = 0 = j$, on donc $(i,x) = (j,y)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 1 = j$.
  Alors $x \in B$ et $y \in B$.
  On a donc $\big(1, g(x)\big) = \varphi(1,x) = \varphi(i,x) = \varphi(j,y) = \varphi(1,y) = \big(1, g(y)\big)$.
  Ainsi $\big(1, g(x)\big) = \big(1, g(y)\big)$ donc $g(x) = g(y)$.
  Mais g est injective par définition, donc $x = y$.
  Comme $i = 1 = j$, on donc $(i,x) = (j,y)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
  Alors $x \in A$ et $y \in B$.
  On a donc $\big(0, f(x)\big) = \varphi(0,x) = \varphi(i,x) = \varphi(j,y) = \varphi(1,y) = \big(1, g(y)\big)$.
  Ainsi $\big(0, f(x)\big) = \big(1, g(y)\big)$, ce qui est impossible puisqu'alors $0 = 1$.
- Le cas où $i = 1$ et $j = 0$ est impossible pour la même raison.

Ainsi dans les deux cas possibles, on a $(i,x) = (j,y)$.

Ainsi $\varphi : A \amalg B \longrightarrow E \amalg F$ est injective, et donc $\boxed{A \amalg B \preccurlyeq E \amalg F}$.

2. Supposons que $A \approx E$ et $B \approx F$.
On a alors $A \preccurlyeq E$ et $E \preccurlyeq A$ d'après la proposition 87 page 213.
De même on a $B \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq B$.
On a donc $A \amalg B \preccurlyeq E \amalg F$ et $E \amalg F \preccurlyeq A \amalg B$ d'après 1.
On a donc $\boxed{A \amalg B \approx E \amalg F}$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
CQFD.

Vis à vis de l'équipotence (plutôt que de l'égalité), l'union disjointe et le produit cartésien entretiennent le même rapport que l'addition et la multiplication, comme l'indique la proposition suivante. Les propriétés 1 et 3 rappellent la commutativité, les propriétés 2 et 4 rappellent l'associativité, et la propriété 5 rappelle la distributivité.

Proposition 96 (Union disjointe, produit cartésien, équipotence)

Soient A, B et C trois ensembles.
On a alors :

1. $A \amalg B \approx B \amalg A$.
2. $(A \amalg B) \amalg C \approx A \amalg (B \amalg C)$.
3. $A \times B \approx B \times A$.
4. $(A \times B) \times C \approx A \times (B \times C)$.
5. $A \times (B \amalg C) \approx (A \times B) \amalg (A \times C)$.

Démonstration

1.
Considérons $\tau : \{0, 1\} \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $\tau(0) := 1$ et $\tau(1) := 0$.
Remarquons que $\tau\big(\tau(0)\big) = \tau(1) = 0$ et $\tau\big(\tau(1)\big) = \tau(0) = 1$.
Considérons $f := \begin{pmatrix} A \amalg B & \longrightarrow & B \amalg A \\ (i, x) & \longmapsto & (\tau(i), x) \end{pmatrix}$ et $g := \begin{pmatrix} B \amalg A & \longrightarrow & A \amalg B \\ (i, x) & \longmapsto & (\tau(i), x) \end{pmatrix}$.
Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $(i, x) \in A \amalg B$.

On a $(g \circ f)(i, x) = g\big(f(i, x)\big) = g\big(\tau(i), x\big) = \Big(\tau\big(\tau(i)\big), x\Big) = (i, x) = \mathrm{id}_{A\amalg B}(i, x)$.

Ainsi $g \circ f = \mathrm{id}_{A\amalg B}$, et on montre de même que $f \circ g = \mathrm{id}_{B\amalg A}$.
En particulier $f : A \amalg B \longrightarrow B \amalg A$ est bijective, et donc $\boxed{A \amalg B \approx B \amalg A}$.

2. Commençons par observer à quoi ressemblent les éléments de $(A\amalg B)\amalg C$ et $A\amalg(B\amalg C)$.

Soit $x \in (A \amalg B) \amalg C$.

Trois cas se présentent à nous, par définition de l'union disjointe :

- ou bien il existe $a \in A$ tel que $x = \big(0, (0, a)\big)$
- ou bien il existe $b \in B$ tel que $x = \big(0, (1, b)\big)$
- ou bien il existe $c \in C$ tel que $x = (1, c)$

De même, soit $y \in A \amalg (B \amalg C)$.

Trois cas se présentent à nous, par définition de l'union disjointe :

- ou bien il existe $a \in A$ tel que $y = (0, a)$
- ou bien il existe $b \in B$ tel que $y = \big(1, (0, b)\big)$

▶ ou bien il existe $c \in C$ tel que $y = \big(1, (1, c)\big)$

Considérons $f := \begin{pmatrix} (A \amalg B) \amalg C & \longrightarrow & A \amalg (B \amalg C) & \\ \big(0, (0, a)\big) & \longmapsto & (0, a) & \text{pour } a \in A \\ \big(0, (1, b)\big) & \longmapsto & \big(1, (0, b)\big) & \text{pour } b \in B \\ (1, c) & \longmapsto & \big(1, (1, c)\big) & \text{pour } c \in C \end{pmatrix}$.

Considérons aussi $g := \begin{pmatrix} A \amalg (B \amalg C) & \longrightarrow & (A \amalg B) \amalg C & \\ (0, a) & \longmapsto & \big(0, (0, a)\big) & \text{pour } a \in A \\ \big(1, (0, b)\big) & \longmapsto & \big(0, (1, b)\big) & \text{pour } b \in B \\ \big(1, (1, c)\big) & \longmapsto & (1, c) & \text{pour } c \in C \end{pmatrix}$.

Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $x \in (A \amalg B) \amalg C$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $a \in A$ tel que $x = \big(0, (0, a)\big)$.

Alors $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(f\big(0, (0, a)\big)\Big) = g(0, a) = \big(0, (0, a)\big) = x$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $b \in B$ tel que $x = \big(0, (1, b)\big)$.

Alors $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\Big(f\big(0, (1, b)\big)\Big) = g\big(1, (0, b)\big) = \big(0, (1, b)\big) = x$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $c \in C$ tel que $x = (1, c)$.

Alors $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(f(1, c)\big) = g\big(1, (1, c)\big) = (1, c) = x$.

Dans tous les cas on a donc $(g \circ f)(x) = x = \mathrm{id}_{(A \amalg B) \amalg C}(x)$.

On a donc $g \circ f = \mathrm{id}_{(A \amalg B) \amalg C}$.

Soit $y \in A \amalg (B \amalg C)$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $a \in A$ tel que $y = (0, a)$.

Alors $(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f\big(g(0, a)\big) = f\big(0, (0, a)\big) = (0, a) = y$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $b \in B$ tel que $y = \big(1, (0, b)\big)$.

Alors $(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f\Big(g\big(1, (0, b)\big)\Big) = f\big(0, (1, b)\big) = \big(1, (0, b)\big) = y$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où il existe $c \in C$ tel que $y = \big(1, (1, c)\big)$.

Alors $(f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big) = f\Big(g\big(1, (0, b)\big)\Big) = f(1, c) = \big(1, (0, b)\big) = y$.

Dans tous les cas on a $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{A \amalg (B \amalg C)}(y)$.

On a donc $f \circ g = \mathrm{id}_{A \amalg (B \amalg C)}$.

Finalement f et g sont réciproques l'une de l'autre.

En particulier $f : (A \amalg B) \amalg C \longrightarrow A \amalg (B \amalg C)$ est bijective, et donc $\boxed{(A \amalg B) \amalg C \approx A \amalg (B \amalg C)}$.

3. Commençons par remarquer la chose suivante.

Soient x et y deux ensembles.

On a alors $(x, y) \in A \times B \iff (x \in A \text{ et } y \in B) \iff (y, x) \in B \times A$.

Posons alors $f := \left(\begin{array}{ccc} A\times B & \longrightarrow & B\times A \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x)\end{array}\right)$ et $g := \left(\begin{array}{ccc} B\times A & \longrightarrow & A\times B \\ (y,x) & \longmapsto & (x,y)\end{array}\right)$.

Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $(x,y) \in A\times B$.

On a alors $(g\circ f)(x,y) = g\big(f(x,y)\big) = g(y,x) = (x,y) = \mathrm{id}_{A\times B}(x,y)$.

Ainsi $g\circ f = \mathrm{id}_{A\times B}$.

Soit $(y,x) \in B\times A$.

On a alors $(f\circ g)(y,x) = f\big(g(y,x)\big) = f(x,y) = (y,x) = \mathrm{id}_{B\times A}(y,x)$.

Ainsi $f\circ g = \mathrm{id}_{B\times A}$.

Finalement f et g sont réciproques l'une de l'autre.

En particulier $f : A\times B \longrightarrow B\times A$ est bijective, et donc $\boxed{A\times B \approx B\times A}$.

4. Commençons par observer à quoi ressemblent leurs éléments.

Pour tout $x \in (A\times B)\times C$, il existe $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$ tel que $x = \big((a,b),c\big)$.

Pour tout $y \in A\times (B\times C)$, il existe $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$ tel que $y = \big(a,(b,c)\big)$.

Considérons alors $f := \left(\begin{array}{ccc} (A\times B)\times C & \longrightarrow & A\times(B\times C) \\ \big((a,b),c\big) & \longmapsto & \big(a,(b,c)\big)\end{array}\right)$.

Considérons aussi $g := \left(\begin{array}{ccc} A\times(B\times C) & \longrightarrow & (A\times B)\times C \\ \big(a,(b,c)\big) & \longmapsto & \big((a,b),c\big)\end{array}\right)$.

Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre.

Soit $x \in (A\times B)\times C$: il existe $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$ tels que $x = \big((a,b),c\big)$.

Alors $g\big(f(x)\big) = g\Big(f\big((a,b),c\big)\Big) = g\big(a,(b,c)\big) = \big((a,b),c\big) = x$.

Ainsi $(g\circ f)(x) = \mathrm{id}_{(A\times B)\times C}(x)$.

On a donc $g\circ f = \mathrm{id}_{(A\times B)\times C}$.

Soit $y \in A\times(B\times C)$: il existe $a\in A$, $b\in B$ et $c\in C$ tels que $y = \big(a,(b,c)\big)$.

Alors $f\big(g(y)\big) = f\Big(g\big(a,(b,c)\big)\Big) = f\big((a,b),c\big) = \big(a,(b,c)\big) = y$.

Ainsi $(f\circ g)(y) = \mathrm{id}_{A\times(B\times C)}(y)$.

On a donc $f\circ g = \mathrm{id}_{A\times(B\times C)}$.

Finalement f et g sont réciproques l'une de l'autre.

En particulier $f : (A\times B)\times C \longrightarrow A\times(B\times C)$ est une bijection.

On a donc $\boxed{(A\times B)\times C \approx A\times(B\times C)}$.

5. Commençons par observer à quoi ressemblent leurs éléments.

Soit $x \in A\times(B \amalg C)$.

Il existe alors $a\in A$ et $z \in B\amalg C$ tel que $x = (a,z)$.

Il existe donc $i \in \{0,1\}$ et $u \in B \cup C$ tel que $z = (i,u)$.
Si $i = 0$ alors $u \in B$ et si $i = 1$ alors $u \in C$.
Finalement $x = (a,z) = \big(a,(i,u)\big)$.

Soit $y \in (A \times B) \amalg (A \times C)$.
Il existe alors $j \in \{0,1\}$ et un ensemble v tel que $y = (j,v)$.
Si $j = 0$ alors $v \in A \times B$ donc il existe $s \in A$ et $t \in B$ tel que $v = (s,t)$.
Si $j = 1$ alors $v \in A \times C$ donc il existe $s \in A$ et $t \in C$ tel que $v = (s,t)$.
Ainsi $y = \big(j,(s,t)\big)$, avec $s \in A$, si $j = 0$ alors $t \in B$ et si $j = 1$ alors $t \in C$.
Remarquons en particulier que $(j,t) \in B \amalg C$.

Considérons alors $f := \left(\begin{array}{ccc} A \times (B \amalg C) & \longrightarrow & (A \times B) \amalg (A \times C) \\ \big(a,(i,u)\big) & \longmapsto & \big(i,(a,u)\big) \end{array}\right)$.

Considérons aussi $g := \left(\begin{array}{ccc} (A \times B) \amalg (A \times C) & \longrightarrow & A \times (B \amalg C) \\ \big(j,(s,t)\big) & \longmapsto & \big(s,(j,t)\big) \end{array}\right)$.

Montrons que f et g sont réciproques l'une de l'autre.
Soit $x \in A \times (B \amalg C)$.
Il existe alors $a \in A$, $i \in \{0,1\}$ et $u \in B \cup C$ tel que $x = \big(a,(i,u)\big)$.
Alors $g\big(f(x)\big) = g\Big(f\big(a,(i,u)\big)\Big) = g\big(i,(a,u)\big) = \big(a,(i,u)\big) = x$.
On a donc $(g \circ f)(x) = \mathrm{id}_{A \times (B \amalg C)}$.
Ainsi $g \circ f = \mathrm{id}_{A \times (B \amalg C)}$.
Soit $y \in (A \times B) \amalg (A \times C)$.
Il existe donc $s \in A$ et $(j,t) \in B \amalg C$ tel que $y = \big(j,(s,t)\big)$.
Alors $f\big(g(y)\big) = f\Big(g\big(j,(s,t)\big)\Big) = f\big(s,(j,t)\big) = \big(j,(s,t)\big) = y$.
On a donc $(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_{(A \times B) \amalg (A \times C)}(y)$.
Ainsi $f \circ g = \mathrm{id}_{(A \times B) \amalg (A \times C)}(y)$.
Finalement f et g sont réciproques l'une de l'autre.
En particulier $f : A \times (B \amalg C) \longrightarrow (A \times B) \amalg (A \times C)$ est bijective.
On a donc $\boxed{A \times (B \amalg C) \approx (A \times B) \amalg (A \times C)}$.
CQFD.

Vis à vis de la subpotence et de l'équipotence, le vide joue un rôle particulier : être plus grand qu'un non vide fait de nous un non vide, être plus petit que le vide fait de nous le vide, et la seule façon d'être aussi grand que le vide, c'est d'être soi-même vide.

Proposition 97 (Vide, subpotence et équipotence)

Soient E et F deux ensembles.

1. On suppose que $E \preccurlyeq F$.
   (a) Si E est non vide alors F est non vide.
   (b) Si F est vide alors E est vide.
2. On suppose que $E \approx F$.
   Alors E est vide si et seulement si F est vide.

Démonstration

1. Supposons que $E \preccurlyeq F$.

Il existe donc une injection $f : E \longrightarrow F$.

(a) Supposons que E est non vide.

Il existe donc $x_0 \in E$.

Alors $f(x_0) \in F$ et donc $\boxed{F \text{ est non vide}}$.

(b) C'est simplement la contraposée de (a).

2. Supposons que $E \approx F$.

On a alors $E \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq E$ d'après la proposition 87 page 213.

Comme $E \preccurlyeq F$, si F est vide alors E est vide d'après 1.(b).

Comme $F \preccurlyeq E$, si E est vide alors F est vide d'apès 1.(b).

On a donc l'équivalence $\boxed{E \text{ est vide si et seulement si } F \text{ est vide}}$.

CQFD.

L'ensemble des applications se comporte lui aussi bien vis à vis de la subpotence et de l'équipotence.

Proposition 98 (Ensembles d'applications et équipotence)

Soient A, B, E et F quatre ensembles.

1. Si $E \preccurlyeq F$ alors $\mathcal{F}(B \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)$.
2. Supposons que parmi E ou A, au moins l'un des deux est **non vide**.
   (a) Si $A \preccurlyeq B$ alors $\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to E)$.
   (b) En particulier si $A \preccurlyeq B$ et $E \preccurlyeq F$ alors $\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)$.
3. Si $A \approx B$ et $E \approx F$ alors $\mathcal{F}(A \to E) \approx \mathcal{F}(B \to F)$.

Démonstration

1. Supposons que $E \preccurlyeq F$.

Par hypothèse on sait que $E \preccurlyeq F$ donc il existe $\phi : E \longrightarrow F$ une injection.

Pour tout $f : B \longrightarrow E$, on a alors $\phi \circ f : B \longrightarrow F$.

On peut donc poser $\Phi := \begin{pmatrix} \mathcal{F}(B \to E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(B \to F) \\ f & \longmapsto & \phi \circ f \end{pmatrix}$.

Montrons que Φ est injective.

Soient f et g deux applications $B \longrightarrow E$ telles que $\Phi(f) = \Phi(g)$.

On sait que $\phi : E \longrightarrow F$ est injective donc $\phi : E \longrightarrow \mathrm{im}(\phi)$ est bijective.

Donc $\phi^{-1} : \mathrm{im}(\phi) \longrightarrow E$ est bijective et vérifie $\phi^{-1} \circ \phi = \mathrm{id}_E$.

On a donc

$$\begin{aligned} f &= \mathrm{id}_E \circ f = (\phi^{-1} \circ \phi) \circ f = \phi^{-1} \circ (\phi \circ f) = \phi^{-1} \circ \Phi(f) \\ &= \phi^{-1} \circ \Phi(g) = \phi^{-1} \circ (\phi \circ g) = (\phi^{-1} \circ \phi) \circ g = \mathrm{id}_E \circ g \\ &= g \end{aligned}$$

et donc $f = g$.

Ainsi $\Phi : \mathcal{F}(B \to E) \longrightarrow \mathcal{F}(B \to F)$ est injective, et donc $\boxed{\mathcal{F}(B \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)}$.

2. On suppose ici que parmi E et A, au moins l'un des deux est non vide.

On a donc $E \neq \varnothing$ ou ($E = \varnothing$ et $A \neq \varnothing$).

On suppose aussi que $A \preccurlyeq B$: il existe $\varphi : A \longrightarrow B$ une injection.

(a) Montrons que $\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to E)$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E = \varnothing$ et $A \neq \varnothing$.

Alors il n'existe aucune application $A \longrightarrow E$ donc $\mathcal{F}(A \to E) = \varnothing$.

Mais $A \preccurlyeq B$ et $A \neq \varnothing$,donc $B \neq \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.

On a donc pour la même raison $\mathcal{F}(B \to E) = \varnothing$.

Ainsi $\mathcal{F}(A \to E) = \mathcal{F}(B \to E)$, donc $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to E)}$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E \neq \varnothing$.

On a dit que $\varphi : A \longrightarrow B$ est une injection, donc $\varphi : A \longrightarrow \mathrm{im}(\varphi)$ est une bijection.

Donc $\varphi^{-1} : \mathrm{im}(\varphi) \longrightarrow A$ est une bijection.

Or E est **non vide** par hypothèse, donc il existe $y_0 \in E$.

Soit $f : A \longrightarrow E$.

Construisons une application $B \longrightarrow E$.

Autrement dit, on veut à $b \in B$ associer un élément de E.

Pour cela deux possibilités : ou bien $b \in \mathrm{im}(\varphi)$, ou bien $b \notin \mathrm{im}(\varphi)$.

Si $b \in \mathrm{im}(\varphi)$ alors $\varphi^{-1}(b) \in A$ et donc on peut considérer $f\big(\varphi^{-1}(b)\big) \in E$.

Si $b \notin \mathrm{im}(\varphi)$, on peut simplement associer y_0.

Autrement dit, on peut considérer l'application

$$\psi_f := \left(\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & E \\ b & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} f\big(\varphi^{-1}(b)\big) & \text{si } b \in \mathrm{im}(\varphi) \\ y_0 & \text{si } b \notin \mathrm{im}(\varphi) \end{array} \right. \end{array} \right)$$

On peut alors poser $\psi := \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A \to E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(B \to E) \\ f & \longmapsto & \psi_f \end{array} \right)$.

Montrons que ψ est injective.

Soient f et g deux applications $A \longrightarrow E$ telles que $\psi(f) = \psi(g)$.

Donc pour tout $b \in B$, on a $\psi_f(b) = \psi_g(b)$.

En particulier pour tout $b \in \mathrm{im}(\varphi)$, on a $\psi_f(b) = \psi_g(b)$.

Autrement dit pour tout $b \in \mathrm{im}(\varphi)$, $f\big(\varphi^{-1}(b)\big) = g\big(\varphi^{-1}(b)\big)$.

Soit $a \in A$.

Posons $b := \varphi(a)$ de sorte que $a = \varphi^{-1}(b)$.

On a alors $f(a) = f\big(\varphi^{-1}(b)\big) = g\big(\varphi^{-1}(b)\big) = g(a)$.

Donc pour tout $a \in A$, on a $f(a) = g(a)$ et donc $f = g$.

Donc $\psi : \mathcal{F}(A \to E) \longrightarrow \mathcal{F}(B \to E)$, et donc $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to E)}$.

(b) On suppose de plus que $E \preccurlyeq F$.

D'après 1, on a alors $\mathcal{F}(B \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)$.

Or on vient de montrer que $\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to E)$.

On a donc $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)}$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

3. Ici on ne suppose pas particulier que parmi E ou A, au moins l'un des deux est non vide.

Quatre cas s'offrent alors à nous :

- $E = \varnothing$ et $A = \varnothing$.
- $E = \varnothing$ et $A \neq \varnothing$.
- $E \neq \varnothing$ et $A = \varnothing$.
- $E \neq \varnothing$ et $A \neq \varnothing$.

On suppose de plus que $A \approx B$ et $E \approx F$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E = \varnothing$ et $A = \varnothing$.
Comme $E \approx F$ et $A \approx B$, on a $F = \varnothing$ et $B = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.
On a donc $\mathcal{F}(A \to E) = \mathcal{F}(\varnothing \to \varnothing) = \mathcal{F}(B \to F)$.
En particulier $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \approx \mathcal{F}(B \to F)}$ par réflexivité de $\approx$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E = \varnothing$ et $A \neq \varnothing$.
Comme $E \approx F$ et $A \approx B$, on a $F = \varnothing$ et $B \neq \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.
Il n'existe aucune application $A \longrightarrow \varnothing$ et $B \longrightarrow \varnothing$.
On a donc $\mathcal{F}(A \to E) = \mathcal{F}(A \to \varnothing) = \varnothing = \mathcal{F}(B \to \varnothing) = \mathcal{F}(B \to F)$.
En particulier $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \approx \mathcal{F}(B \to F)}$ par réflexivité de $\approx$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E \neq \varnothing$ et $A = \varnothing$.
Comme $E \approx F$ et $A \approx B$, on a $F \neq \varnothing$ et $B = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.
Il existe une unique application $\varnothing \longrightarrow E$ et $\varnothing \longrightarrow F$, c'est $\varnothing$ lui-même.
On a donc $\mathcal{F}(A \to E) = \mathcal{F}(\varnothing \to E) = \{\varnothing\} = \mathcal{F}(\varnothing \to F) = \mathcal{F}(B \to F)$.
En particulier $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \approx \mathcal{F}(B \to F)}$ par réflexivité de $\approx$.

• Plaçons-nous dans le cas où $E \neq \varnothing$ et $A \neq \varnothing$.
Comme $E \approx F$ et $A \approx B$, on a $F \neq \varnothing$ et $B \neq \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.
On a $E \approx F$ donc $E \preccurlyeq F$ et $F \preccurlyeq E$ d'après la proposition 87 page 213.
On a $A \approx B$ donc $A \preccurlyeq B$ et $B \preccurlyeq A$ d'après la proposition 87 page 213.

Ainsi parmi E et A, au moins l'un des deux est non vide (les deux le sont).
Or $A \preccurlyeq B$ et $E \preccurlyeq F$ donc $\mathcal{F}(A \to E) \preccurlyeq \mathcal{F}(B \to F)$ d'après 2.(b).
De même, parmi F et B, au moins l'un des deux est non vide (les deux le sont).
Or $B \preccurlyeq$ et $F \preccurlyeq E$ donc $\mathcal{F}(B \to F) \preccurlyeq \mathcal{F}(A \to E)$ d'après 2.(b).
On a donc $\boxed{\mathcal{F}(A \to E) \approx \mathcal{F}(B \to F)}$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
CQFD.

La proposition qui suit est analogue aux propriétés de l'exponentiation. En effet, si l'on se rappelle que $\mathcal{F}(B \to A)$ se note parfois A^B alors on va avoir

$$(A^B)^C \approx A^{B\times C} \text{ et } A^B \times A^C \approx A^{B \amalg C}$$

le produit cartésien remplaçant la multiplication et l'union disjointe l'addition.

Proposition 99 (Ensembles d'applications, union et produit)

Soient A, B et C trois ensembles.

1. On a $\mathcal{F}\big(C \to \mathcal{F}(B \to A)\big) \approx \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.
2. On a $\mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) \approx \mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.
3. Si B et C sont disjoints alors $\mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) \approx \mathcal{F}(B \cup C \to A)$.

Démonstration

1.

Soit $f : C \longrightarrow \mathcal{F}(B \to A)$.

Ainsi pour tout $c \in C$, $f(c) : B \longrightarrow A$.

Ainsi pour tout $c \in C$ et tout $b \in B$, $f(c)(b) \in A$.

Posons alors $\varphi_f := \begin{pmatrix} C \times B & \longrightarrow & A \\ (c,b) & \longmapsto & f(c)(b) \end{pmatrix}$.

Considérons alors l'application

$$\varphi := \begin{pmatrix} \mathcal{F}\big(C \to \mathcal{F}(B \to A)\big) & \longrightarrow & \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big) \\ f & \longmapsto & \varphi_f \end{pmatrix}$$

Montrons que φ est injective.

Soient f et g deux applications $C \longrightarrow \mathcal{F}(B \to A)$ telles que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

Ainsi pour tout $(c,b) \in C \times B$, on a $\varphi_f(c,b) = \varphi_g(c,b)$.

Donc pour tout $c \in C$ et $b \in B$ on a $f(c)(b) = g(c)(b)$.

Donc pour tout $c \in C$, on a $f(c) = g(c)$, et donc $f = g$.

Donc φ est injective.

Montrons que φ est surjective dans $\mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.

Par définition de φ on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.

Soit $g : (C \times B) \longrightarrow A$.

Pour tout $c \in C$, posons $g_c := \begin{pmatrix} B & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & g(c,b) \end{pmatrix}$ et $f := \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & \mathcal{F}(B \to A) \\ c & \longmapsto & g_c \end{pmatrix}$.

Montrons que $\varphi(f) = g$.

Soit $(c, b) \in C \times B$.

On a $\varphi(f)(c, b) = \varphi_f(c, b) = f(c)(b) = g_c(b) = g(c, b)$.

Ainsi pour tout (c, b) on a $\varphi(f)(c, b) = g(c, b)$ donc $\varphi(f) = g$ et donc $g \in \operatorname{im}(\varphi)$.

Ainsi $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$ et donc $\operatorname{im}(\varphi) = \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.

Ainsi φ est surjective dans $\mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.

Finalement φ est injective et surjective dans $\mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$.

Donc $\varphi : \mathcal{F}\big(C \to \mathcal{F}(B \to A)\big) \longrightarrow \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)$ est bijective.

On a donc $\boxed{\mathcal{F}\big(C \to \mathcal{F}(B \to A)\big) \approx \mathcal{F}\big((C \times B) \to A\big)}$.

2. Commençons par remarquer ceci.

Soit $(f, g) \in \mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A)$.

Ainsi $f : B \longrightarrow A$ et $g : C \longrightarrow A$.

Soit $(i, x) \in B \amalg C$.

Si $i = 0$ alors $x \in B$ et donc $f(x) \in A$.

Si $i = 1$ alors $x \in C$ et donc $g(x) \in A$.

Posons alors $\varphi_{f,g} := \left(\begin{array}{ccc} B \amalg C & \longrightarrow & A \\ (i, x) & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } i = 0 \\ g(x) & \text{si } i = 1 \end{cases} \end{array} \right)$.

Considérons alors $\varphi := \left(\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) & \longrightarrow & \mathcal{F}(B \amalg C \to A) \\ (f, g) & \longmapsto & \varphi_{f,g} \end{array} \right)$.

Montrons que φ est injective.

Soient (f, g) et (f', g') dans $\mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A)$ tels que $\varphi(f, g) = \varphi(f', g')$.

Ainsi pour tout $(i, x) \in B \amalg C$ on a $\varphi_{f,g}(i, x) = \varphi_{f',g'}(i, x)$.

Montrons que $f = f'$.

Soit $x \in B$.

On a alors $f(x) = \varphi_{f,g}(0, x) = \varphi_{f',g'}(0, x) = f'(x)$.

Donc pour tout $x \in B$ on a $f(x) = f'(x)$ et donc $f = f'$.

Montrons que $g = g'$.

Soit $x \in C$.

On a alors $g(x) = \varphi_{f,g}(1, x) = \varphi_{f',g'}(1, x) = g(x)$.

Donc pour tout $x \in C$, on a $g(x) = g'(x)$ et donc $g = g'$.

Ainsi $f = f'$ et $g = g'$ donc $(f, g) = (f', g')$.

Donc φ est injective.

Montrons que φ est surjective dans $\mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.

Par définition de φ on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.

Soit $h : B \amalg C \longrightarrow A$.

Considérons $f := \begin{pmatrix} B & \longrightarrow & A \\ b & \longmapsto & h(0,b) \end{pmatrix}$ et $g := \begin{pmatrix} C & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & h(1,c) \end{pmatrix}$.

Montrons que $\varphi(f,g) = h$.

Soit $(i,x) \in B \amalg C$.

Si $i = 0$ alors $\varphi(f,g)(i,x) = \varphi_{f,g}(i,x) = f(x) = h(i,x)$.

Si $i = 1$ alors $\varphi(f,g)(i,x) = \varphi_{f,g}(i,x) = g(x) = h(i,x)$.

Dans les deux cas on a $\varphi(f,g)(i,x) = h(i,x)$.

Ainsi pour tout $(i,x) \in B \amalg C$ on a $\varphi(f,g)(i,x) = h(i,x)$.

On a donc $\varphi(f,g) = h$ et donc $h \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi) \supseteq \mathcal{F}(B \amalg C \to A)$ et donc $\mathrm{im}(\varphi) = \mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.

Donc φ est surjective dans $\mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.

Finalement φ est injective et surjective dans $\mathcal{F}(B \amalg C \to A)$.

Donc $\varphi : \mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) \longrightarrow \mathcal{F}(B \amalg C \to A)$ est bijective.

On a donc $\boxed{\mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) \approx \mathcal{F}(B \amalg C \to A)}$.

3. Supposons que B et C sont disjoints.

On a alors $B \amalg C \approx B \cup C$ d'après la proposition 94 page 229.

De plus on sait que $A \approx A$ par réflexivité de $\approx$.

On a donc $\mathcal{F}(B \amalg C \to A) \approx \mathcal{F}(B \cup C \to A)$ d'après la proposition 98 page 236.

Finalement, on a $\boxed{\mathcal{F}(B \to A) \times \mathcal{F}(C \to A) \approx \mathcal{F}(B \cup C \to A)}$ par transitivité de $\approx$.

CQFD.

2 Nombres cardinaux

2.1 Les cardinaux

Maintenant que nous en savons un peu plus sur l'équipotence et la subpotence, observons quelques propriétés qu'entretiennent les ordinaux vis à vis de celles-ci.

Proposition 100 (Ordinaux, équipotence et subpotence)

Soient E un ensemble, et α, β et γ trois ordinaux.

1. Si $\alpha \leq \beta$ alors $\alpha \preccurlyeq \beta$.
2. Si $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ et $\alpha \approx \gamma$ alors $\alpha \approx \beta \approx \gamma$.
3. Si $E \preccurlyeq \alpha$ alors il existe un ordinal $\delta \leq \alpha$ tel que $E \approx \delta$.

Démonstration

1. Supposons que $\alpha \leq \beta$.

Par définition de $\leq$ on a $\alpha \subseteq \beta$, donc $\boxed{\alpha \preccurlyeq \beta}$ d'après la prop. 88 p. 214.

2. Supposons que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ et $\alpha \approx \gamma$.

D'après 1, on a alors $\alpha \preccurlyeq \beta \preccurlyeq \gamma$.

Mais $\alpha \approx \gamma$ donc $\gamma \preccurlyeq \alpha$ d'après la proposition 87 page 213.

Ainsi on a $\gamma \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \beta \preccurlyeq \gamma$.

On a donc $\boxed{\alpha \approx \beta \approx \gamma}$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Benrstein.

3. Supposons que $E \preccurlyeq \alpha$.

Il existe donc $f : E \longrightarrow \alpha$ une application injective.

Donc $f : E \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ est bijective.

Or f est à valeurs dans l'ordinal α donc $\mathrm{im}(f)$ est une partie de α.

En particulier $\mathrm{im}(f)$ est un ensemble d'ordinaux.

Donc $\mathrm{im}(f)$ est totalement ordonné d'après le théorème 1 page 27.

Posons alors $\delta := \mathrm{type}\big(\mathrm{im}(f), \leq\big)$.

Comme $\mathrm{im}(f) \subseteq \alpha$ on a $\mathrm{type}\big(\mathrm{im}(f)\big) \leq \mathrm{type}(\alpha)$ d'après la proposition 28 page 68.

Or α est un ordinal, et donc on a $\boxed{\delta \leq \alpha}$

Par définition du type, $\mathrm{im}(f)$ est isomorphe à δ.

Il existe donc $\varphi : \mathrm{im}(f) \longrightarrow \delta$ un isomorphisme d'ordres.

En particulier $\varphi : \mathrm{im}(f) \longrightarrow \delta$ est une bijection, si bien que $\mathrm{im}(f) \approx \delta$.

Or on a dit que $f : E \longrightarrow \mathrm{im}(f)$ est une bijection, si bien que $E \approx \mathrm{im}(f)$.

Finalement on a $\boxed{E \approx \delta}$ par transitivité de $\approx$.

CQFD.

Il est temps de définir ce que l'on appelle les nombres cardinaux. On l'a vu lors de la proposition 85 page 211, l'équipotence est une sorte de relation d'équivalence. En cela, elle possède des classes d'équivalence : les éléments d'une même classe sont tous ceux qui sont équipotents deux à deux, donc tous ceux qui ont intuitivement le même nombre d'éléments. L'idée est de dire qu'au sein de chaque classe d'équivalence se trouve au moins un ordinal. Cependant, il n'y a pas de raisons qu'il n'y ait qu'un seul ordinal dans toute la classe, c'est-à-dire qu'il est possible que deux ordinaux différents soient pourtant équipotents.

En effet, observons un phénomène troublant. Pour l'illustrer, intéressons-nous à la célèbre expérience de l'hôtel infini que David Hilbert imagina en 1925 pour illustrer le phénomène.

Pour la petite histoire

David Hilbert (23 janvier 1862 – 14 février 1943) est un mathématicien allemand qui est souvent considéré comme un des plus grands mathématiciens du 20ème siècle. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales, que ce soit la théorie des invariants, l'axiomatisation de la géométrie ou les fondements de l'analyse fonctionnelle (avec les espaces de Hilbert).

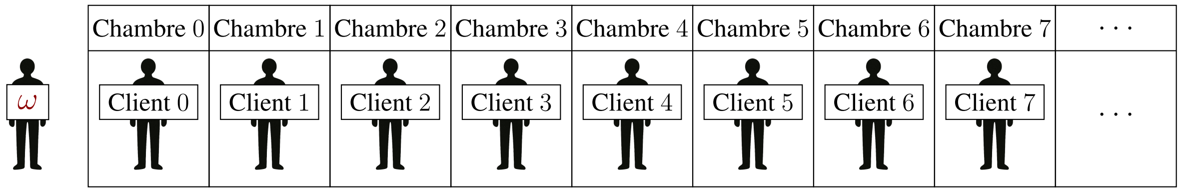
L'un des exemples les mieux connus de sa position de chef de file est sa présentation, en 1900, de ses fameux problèmes qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du 20ème siècle. Hilbert et ses étudiants ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale.

Il a adopté et défendu avec vigueur les idées de Georg Cantor en théorie des ensembles et sur les nombres transfinis. Il est aussi connu comme l'un des fondateurs de la théorie de la démonstration, de la logique mathématique et a clairement distingué les mathématiques des métamathématiques.

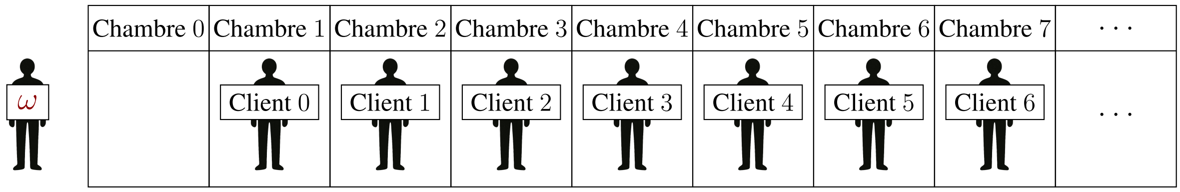
L'expérience de pensée de l'hôtel de Hilbert est la suivante : on imagine un hôtel avec une chambre pour chaque entier naturel, représentant $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ donc. On part du principe que l'hôtel est complet, c'est-à-dire qu'il y a un client dans chacune des chambres :

Chambre 0	Chambre 1	Chambre 2	Chambre 3	Chambre 4	Chambre 5	Chambre 6	Chambre 7	$\cdots$
Client 0	Client 1	Client 2	Client 3	Client 4	Client 5	Client 6	Client 7	$\cdots$

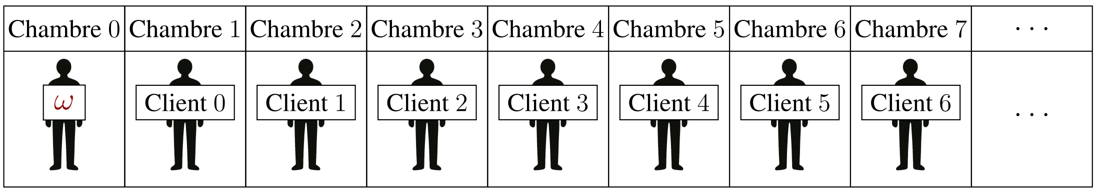
Une nouvelle personne appelée ω arrive et souhaite prendre une chambre malgré le fait que l'hôtel soit complet :



Le gérant de l'hôtel demande alors à chaque client de se rendre dans la chambre à sa droite : le client 0 va dans la chambre 1, le client 1 va dans la chambre 2, et ainsi de suite le client n se rendant dans la chambre $n+1$:



Tous les clients ont une chambre et le chambre 0 est désormais libre, le client ω peut donc s'y loger :



De cette manière, on a mis en bijection l'ensemble $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ avec l'ensemble $\omega + 1 = \{\omega, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$, et donc on a $\omega \approx \omega + 1$, alors que pourtant $\omega < \omega + 1$.

Ainsi, ω et $\omega + 1$ ont beau être différents, ils sont équipotents. Si l'on veut choisir un ordinal qui va représenter toute la classe, on va simplement se souvenir que parmi toutes les ordinaux de la classe, il y en a forcément un qui est plus petit que tous les autres : c'est lui que nous appelons **cardinal** de la classe. Autrement dit, un cardinal est un ordinal qui n'est pas équipotent à un ordinal plus petit, c'est le tout premier de sa classe.

Définition 35 (Cardinaux)

Soit α un ordinal.
On dit que α est un **cardinal** si et seulement si $\forall \beta < \alpha, \beta \prec \alpha$.

Proposition 101 (Ne pas être un cardinal)

Soit α un ordinal.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. α n'est pas un cardinal.
2. Il existe un ordinal β tel que $\beta < \alpha$ et $\beta \approx \alpha$.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que α n'est pas un cardinal.

Il existe donc un ordinal β tel que $\boxed{\beta < \alpha}$ et $\beta \not\prec \alpha$.

On a $\beta < \alpha$ donc en particulier $\beta \leq \alpha$.

On a donc $\beta \preccurlyeq \alpha$ d'après la proposition 100 page 243.

Ainsi on a $\beta \preccurlyeq \alpha$ et $\beta \not\prec \alpha$.

On a donc $\beta \preccurlyeq \alpha$ et non$(\beta \preccurlyeq \alpha$ et $\beta \not\approx \alpha)$.

On en conclut donc que $\boxed{\beta \approx \alpha}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons qu'il existe un ordinal β tel que $\beta < \alpha$ et $\beta \approx \alpha$.

En particulier $\beta < \alpha$ et non$(\beta \preccurlyeq \alpha$ et $\beta \not\approx \alpha)$.

Donc $\beta < \alpha$ et $\beta \not\prec \alpha$.

Donc $\boxed{\alpha \text{ n'est pas un cardinal}}$.

CQFD.

Ainsi avec cette notion de cardinal, on est assuré qu'il n'y en a qu'un seul par classe d'équivalence. C'est ce que précise la proposition suivante.

Proposition 102 (Égalité entre deux cardinaux)

Soient κ et λ deux cardinaux.
On a l'équivalence $\kappa = \lambda \iff \kappa \approx \lambda$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\kappa = \lambda$.

Alors $\boxed{\kappa \approx \lambda}$ par réflexivité de $\approx$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\kappa \approx \lambda$.

Supposons par l'absurde que $\kappa \neq \lambda$.

Les cardinaux sont des ordinaux, et tous les ordinaux sont comparables.

On a donc $\kappa < \lambda$ ou $\lambda < \kappa$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\kappa < \lambda$.

  On a donc $\kappa \prec \lambda$ par λ est un cardinal.

  En particulier $\kappa \not\approx \lambda$ par définition de $\prec$.

C'est absurde puisqu'on a justement supposé que $\kappa \approx \lambda$.

▶ Le cas où $\lambda < \kappa$ est absurde pour la même raison.

Dans les deux cas on about à une absurdité.

Par l'absurde, on vient de prouver que $\boxed{\kappa = \lambda}$.

CQFD.

Le théorème qui suit nous dit plusieurs choses, notamment le lien qu'entretiennent ω et les entiers naturels avec la notion de cardinal. Premièrement, les cardinaux à partir de ω sont tous limites : en effet pour la même raison que $\omega \approx \omega + 1$, un ordinal après ω est toujours équipotent à son successeur, ce qui empêche ce successeur d'être un cardinal.

Le théorème nous dit aussi ce que l'on sait depuis l'enfance : les entiers naturels sont aussi bien des ordinaux que des cardinaux, c'est-à-dire que l'on peut s'en servir pour donner des positions (le premier, le deuxième, etc) mais aussi pour compter.

Théorème 13 (Propriétés des cardinaux)

1. Pour tout cardinal α, si $\omega \leq \alpha$ alors α est limite.
2. Tout entier naturel est un cardinal.
3. Pour tout ensemble A de cardinaux, $\sup(A)$ est un cardinal.
4. ω est un cardinal.

Démonstration

1. Soit α un ordinal tel que $\omega \leq \alpha$.

Supposons que α n'est pas limite.

Il existe donc un ordinal β tel que $\alpha = \beta + 1$.

Comme $\omega \leq \alpha$ et ω est limite, on a $\omega \neq \alpha$ donc $\omega < \alpha$.

Ainsi $\omega < \beta + 1$ donc $\omega \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

Ainsi on a $\omega \subseteq \beta \subseteq \alpha$ par définition de $\leq$.

On peut donc définir l'application $\alpha \longrightarrow \beta$ suivante :

$$f := \left(\begin{array}{ccl} \alpha & \longrightarrow & \beta \\ \gamma & \longmapsto & \begin{cases} \gamma + 1 & \text{si } \gamma < \omega \\ \gamma & \text{si } \omega \leq \gamma < \beta \\ 0 & \text{si } \gamma = \beta \end{cases} \end{array} \right)$$

Montrons que f est injective.

Soient γ et γ' dans α tels que $f(\gamma) = f(\gamma')$.

▶ Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \omega$ et $\gamma' < \omega$.

Alors $\gamma + 1 = f(\gamma) = f(\gamma') = \gamma' + 1$ et donc $\gamma = \gamma$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\omega \leq \gamma < \beta$ et $\omega \leq \gamma' < \beta$.
  On a alors $\gamma = f(\gamma) = f(\gamma') = \gamma$ et donc $\gamma = \gamma'$.
- Le cas où $\gamma = \beta = \gamma'$ donne directement $\gamma = \gamma'$.
- Les autres cas sont impossibles : l'image d'un entier naturel donne un entier naturel non nul donc différent d'un γ tel que $\omega \leq \gamma < \beta$ et différent de l'image nulle de β.

Dans les trois cas possibles, on a donc $\gamma = \gamma'$.

Donc $f : \alpha \longrightarrow \beta$ est injective, et donc $\alpha \preccurlyeq \beta$.

Comme $\beta \subseteq \alpha$, on a $\beta \preccurlyeq \alpha$ d'après la proposition 88 page 214.

Finalement on a $\alpha \approx \beta$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

En particulier on n'a pas $\beta \prec \alpha$.

Comme $\beta < \alpha$, on en conclut que α n'est pas un cardinal.

Donc si α n'est pas limite alors α n'est pas un cardinal.

Par contraposition, si α est un cardinal alors $\boxed{\alpha \text{ est limite}}$.

2. Démontrons-le par induction.

Pour tout entier naturel n, on pose $P(n)$ l'assertion « *n est un cardinal* ».

Initialisation

Pour tout ordinal β, l'implication $\beta < 0 \Rightarrow \beta \prec 0$ est vraie car sa prémisse est fausse.

Autrement dit on a $\forall \beta < 0, \beta \prec 0$ donc 0 est un cardinal et donc $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

Ainsi n est un cardinal.

Supposons par l'absurde que $n+1$ n'est pas un cardinal.

Il existe donc un ordinal $\beta < n+1$ tel que $\beta \approx n+1$ d'après la prop. 101 p. 245. Il existe donc une bijection $f : \beta \longrightarrow n+1$.

Il est impossible que f soit surjective dans $n+1$ si $\beta = 0 = \varnothing$.

On a donc $\beta > 0$.

n est un entier naturel donc $n+1$ aussi d'après la proposition 16 page 45.

Or $\beta < n+1$, donc β est un entier naturel d'après la proposition 16 page 45.

Étant non nul, il existe un entier naturel m tel que $\beta = m+1$.

Ainsi $f : m+1 \longrightarrow n+1$ est une bijection.

- Plaçons-nous dans le cas où $f(m) = n$.

Alors $f_{|m}$ est injective comme restriction d'une application injective.

Donc $\mathrm{im}(f_{|m}) = \mathrm{im}(f)\backslash\{f(m)\} = (n+1)\backslash\{n\} = n$.

Donc $f_{|m} : m \longrightarrow n$ est une bijection.

► Plaçons-nous dans le cas où $f(m) < n$.

Considérons alors $i < m$ l'antécédent de n par f.

Dans ce cas-là, considérons $g : m+1 \longrightarrow n+1$ définie par

$$\begin{cases} g(j) = f(j) \text{ pour tout } j \neq i \text{ et } j \neq m \\ g(i) = f(m) \\ g(m) = f(i) = n \end{cases}$$

Alors $g : m+1 \longrightarrow n+1$ est une bijection car f l'est.

De plus elle vérifie $g(m) = n$ donc on est de nouveau dans le cas précédent.

Autrement dit $g_{|m} : m \longrightarrow n$ est une bijection.

Dans les deux cas on a construit une bijection $m \longrightarrow n$.

Ainsi $m \approx n$.

Mais on a dit que $m+1 < n+1$ donc $m < n$.

C'est en contradiction avec le fait que n est un cardinal.

Par l'absurde on vient de montrer que $n+1$ est un cardinal, c'est-à-dire $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Ainsi P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(n)$.

Autrement dit $\boxed{\text{pour tout } n \text{ entier naturel, } n \text{ est un cardinal}}$.

3. Soit A un ensemble de cardinaux.

Supposons par l'absurde que $\sup(A)$ n'est pas un cardinal.

Il existe donc un ordinal $\beta < \sup(A)$ et $\beta \approx \sup(A)$ d'après la prop. 101 p. 245.

Mais $\beta < \sup(A)$ donc il existe $\alpha \in A$ tel que $\beta < \alpha$.

Comme $\alpha \in A$, on a $\alpha \leq \sup(A)$.

Ainsi $\beta < \alpha \leq \sup(A)$ et $\beta \approx \sup(A)$ donc $\beta \approx \alpha$ d'après la proposition 100 page 243.

Ainsi on a $\beta < \alpha$ et $\beta \approx \alpha$ donc α n'est pas un cardinal d'après la prop. 101 p. 245.

C'est absurde puisque $\alpha \in A$ et A est un ensemble de cardinaux.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{\sup(A) \text{ est un cardinal}}$.

4. D'après 2, ω est un ensemble de cardinaux.

Donc d'après 3, $\sup(\omega)$ est un cardinal.

Mais ω est limite donc $\sup(\omega) = \omega$ d'après la proposition 22 page 54.

Donc $\boxed{\omega \text{ est un cardinal}}$.

CQFD.

2.2 Le cardinal d'un ensemble

Nous l'avons dit, les nombres cardinaux sont là pour représenter les classes d'équipotence. On a prétendu que cela venait du fait que toute classe d'équipotence admettait au moins un ordinal en son sein, et c'est le plus petit d'entre ces ordinaux qui est le cardinal de la classe. Mais comment s'assurer qu'il y a au moins un ordinal dans la classe ?

Pour l'instant nous ne pouvons l'affirmer. Nous pouvons cependant nous intéresser aux ensembles munissables d'un bon ordre, car nous verrons qu'eux sont toujours équipotents à un ordinal, et donc à un cardinal.

Définition 36 (Ensemble bien ordonnable)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **bien ordonnable** si et seulement si parmi toutes les relations d'ordres que l'on peut définir sur E, au moins l'une d'entre elle est un bon ordre.

La proposition qui suit explique l'intérêt porté aux ensembles bien ordonnables : pour eux nous sommes assurés d'être équipotent avec un ordinal, et donc admettre un cardinal. Cela n'est pas étonnant : les ordinaux ont été définis justement pour qu'ils soient isomorphes (et donc en particulier équipotents) aux ensembles bien ordonnés !

Proposition 103 (Bonne ordonnabilité et ordinal équipotent)

Soit E un ensemble.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est bien ordonnable.
2. Il existe un ordinal α tel que $E \approx \alpha$.

Démonstration

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$

Supposons que E est bien ordonnable.

Il existe donc $\trianglelefteq$ un bon ordre sur E.

Posons alors $\alpha := \mathrm{type}(E, \trianglelefteq)$.

Par définition du type, $(E, \trianglelefteq)$ et α sont isomorphes.

Il existe donc $f : E \longrightarrow \alpha$ un isomorphisme d'ordres.

En particulier $f : E \longrightarrow \alpha$ est une bijection et donc $\boxed{E \approx \alpha}$.

$\boxed{1 \Leftarrow 2}$

Supposons qu'il existe un ordinal α tel que $E \approx \alpha$.

Il existe donc $f : E \longrightarrow \alpha$ une bijection.

Pour tout x et y dans E, on pose alors $x \trianglelefteq y \iff f(x) \leq f(y)$.

On a vu dans le premier livre :

— que $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur E.

— que $f : E \longrightarrow \alpha$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier $f^{-1} : \alpha \longrightarrow E$ est un isomorphisme d'ordres.

Or α est un ordinal donc est bien ordonné.

Donc $(E, \trianglelefteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 23 page 56.

Donc $\boxed{E \text{ est bien ordonnable}}$.

CQFD.

Nous y sommes : pour un ensemble bien ordonnable, on peut définir son cardinal, c'est-à-dire affirmer que parmi tous les ensembles qui lui sont équipotents, il y a un cardinal. Ce dernier est unique parce qu'on a justement défini la notion de cardinal pour cela.

Proposition 104 (Cardinal d'un ensemble bien ordonnable)

Soit E un ensemble **bien ordonnable**.
Il existe un unique cardinal équipotent à E.
On l'appelle **cardinal** de E et on le note $\text{card}(E)$.

Démonstration

Existence

La classe $C := \{\alpha \in ON \mid E \approx \alpha\}$ est non vide d'après la proposition 103 page 250.

Elle admet donc un ordinal minimum α d'après la proposition 10 page 30.

En particulier $\boxed{E \approx \alpha}$ puisque $\alpha \in C$.

Montrons que α est un cardinal.

Supposons par l'absurde que α n'est pas un cardinal.

Il existe donc un ordinal $\beta < \alpha$ tel que $\beta \approx \alpha$ d'après la proposition 101 page 245.

On a dit que $E \approx \alpha$ donc $E \approx \beta$ par transitivité.

En particulier $\beta \in C$.

Mais on a aussi $\beta < \alpha$ et $\alpha = \min(C)$, d'où l'absurdité.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{\alpha \text{ est un cardinal}}$.

Unicité

Soit α' un cardinal tel que $E \approx \alpha'$.

En particulier on a $\alpha \approx \alpha'$ par transitivité.

On a donc $\boxed{\alpha = \alpha'}$ d'après la proposition 102 page 246, d'où l'unicité.

CQFD.

Remarque :
Certains auteurs le notent aussi $|E|$ ou $\#E$.
Par définition du cardinal, pour β un ordinal tel que $E \approx \beta$ alors $\mathrm{card}(E) \leq \beta$.

Malheureusement au point où nous en sommes, rien ne nous garantit que tout ensemble est bien ordonnable et donc rien ne nous garantit que tout ensemble admet un cardinal. Voici cependant une proposition qui nous permet de dire que si on est plus petit qu'un ensemble bien ordonnable, alors on est aussi bien ordonnable.

Proposition 105 (Bonne ordonnabilité et subpotence)

Soient E et F deux ensembles. On suppose que E est **bien ordonnable**.

1. Si $F \preccurlyeq E$ alors F est bien ordonnable et $\mathrm{card}(F) \leq \mathrm{card}(E)$.
2. En particulier si $F \subseteq E$ alors F est bien ordonnable et $\mathrm{card}(F) \leq \mathrm{card}(E)$.

Démonstration

1. Supposons que $F \preccurlyeq E$.

Par définition du cardinal, on a $E \approx \mathrm{card}(E)$.

On a donc $F \preccurlyeq \mathrm{card}(E)$ d'après la proposition 89 page 222.

Or $\mathrm{card}(E)$ est un ordinal.

Il existe donc δ un ordinal tel que $F \approx \delta \leq \mathrm{card}(E)$ d'après la proposition 100 page 243.

En particulier $\boxed{F \text{ est bien ordonnable}}$ d'après la proposition 103 page 250.

On a dit que $F \preccurlyeq \mathrm{card}(E)$ et que $\mathrm{card}(E)$ est un ordinal.

On a donc en particulier $\boxed{\mathrm{card}(F) \leq \mathrm{card}(E)}$ par définition du cardinal.

2. Supposons que $F \subseteq E$.

On a alors $F \preccurlyeq E$ d'après la proposition 88 page 214.

On peut donc conclure car on s'est ramené à 1.

CQFD.

Proposition 106 (Type et équipotence)

Soient $(E, \trianglelefteq)$ un ensemble **bien ordonné** et τ son type.
On a alors $E \approx \tau$ et donc $\mathrm{card}(E) \leq \tau$.
En particulier si τ est un cardinal, alors $\mathrm{card}(E) = \tau$.

Démonstration

Par définition du type, il existe $f : (E, \trianglelefteq) \longrightarrow (\tau, \leq)$ un isomorphisme d'ordres.
En particulier $f : E \longrightarrow \tau$ est une bijection, et donc $\boxed{E \approx \tau}$.
CQFD.

Étant donnés deux ensembles bien ordonnables, le cardinal de chacun d'eux se comporte bien vis à vis de l'équipotence et de la subpotence.

Proposition 107 (Cardinal, équipotence et (strict) subpotence)

Soient E et F deux ensembles **bien ordonnables**.

1. $E \preccurlyeq F \iff \operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$
2. $E \approx F \iff \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$
3. $E \prec F \iff \operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(F)$

Démonstration

1. $\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $E \preccurlyeq F$.
Alors $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$ d'après la proposition 105 page 252.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F)$.
Alors $\mathrm{id}_{\operatorname{card}(E)} : \operatorname{card}(E) \longrightarrow \operatorname{card}(F)$ est injective.
Par définition du cardinal, il existe $\varphi : E \longrightarrow \operatorname{card}(E)$ et $\psi : \operatorname{card}(F) \longrightarrow F$ deux bijections. Alors $\psi \circ \mathrm{id}_{\operatorname{card}(E)} \circ \varphi : E \longrightarrow F$ est injective.
Donc $\boxed{E \preccurlyeq F}$.

2. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} E \approx F &\iff E \preccurlyeq F \text{ et } F \preccurlyeq E \text{ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein} \\ &\iff \operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F) \text{ et } \operatorname{card}(F) \leq \operatorname{card}(F) \text{ d'après 1} \\ &\iff \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F) \end{aligned}$$

Et donc finalement $\boxed{E \approx F \iff \operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)}$.

3. On a les équivalences suivantes :

$$E \prec F \iff E \preccurlyeq F \text{ et } E \not\approx F \text{ par définition}$$

$$\iff \operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(F) \text{ et } \operatorname{card}(E) \neq \operatorname{card}(F) \text{ d'après 1 et 2}$$
$$\iff \operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(F)$$

Et donc finalement $\boxed{E \prec F \iff \operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(F)}$.
CQFD.

On a déjà plus ou moins constaté le résultat suivant, mais faisons-en une proposition pour pouvoir l'utiliser systématiquement.

Proposition 108 (Cardinal plus petit et subpotence)

Soient E un ensemble **bien ordonnable** et κ un cardinal.
On a l'équivalence $\operatorname{card}(E) \leq \kappa \iff E \preccurlyeq \kappa$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que $\operatorname{card}(E) \leq \kappa$.

On a donc $\operatorname{card}(E) \preccurlyeq \kappa$ d'après la proposition 100 page 243.

Or par définition du cardinal, on a $E \approx \operatorname{card}(E)$.

On a donc $\boxed{E \preccurlyeq \kappa}$ d'après la proposition 89 page 222.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \preccurlyeq \kappa$.

On a donc $\operatorname{card}(E) \leq \operatorname{card}(\kappa)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or κ est un cardinal donc $\kappa = \operatorname{card}(\kappa)$.

On a donc $\boxed{\operatorname{card}(E) \leq \kappa}$.

CQFD.

Mais alors, existe-t-il des ensembles sans cardinal ? Pour dire qu'un ensemble admette un cardinal, il faut et il suffit que cet ensemble soit bien ordonnable, d'après la proposition 103 page 250. Existe-t-il donc des ensembles qui ne sont pas bien ordonnables ? La réponse est heureusement non : tout ensemble est bien ordonnable ! Enfin, c'est vrai ... mais à condition d'admettre l'**axiome du choix** ! C'est l'objet de la section suivante, qui va détailler tout cela.

3 Les grands théorèmes

3.1 Choix, Zorn et Zermelo

Dans cette section, nous allons utiliser l'axiome du choix pour démontrer deux théorèmes très important des mathématiques : le lemme de Zorn et le théorème de Zermelo. Nous avons déjà démontré l'équivalence entre le lemme de Zorn et l'axiome du choix dans le précédent livre, mais sa démonstration y était très fastidieuse et pas très intuitive. Maintenant que l'on dispose des ordinaux, sa démonstration va prendre bien moins de pages, et on pourra essayer d'en dégager une intuition.

Nous allons pour cela à nouveau avoir besoin des classes. Dans le précédent livre, nous avons montré que pour deux ensembles E et F, s'il existe une injection $E \longrightarrow F$ alors il existe une surjection $F \longrightarrow E$. Si l'on accepte l'axiome du choix (ce qui est notre cas dans les Barbuki), alors c'est une équivalence. Dans le cas des classes, nous n'allons pas généraliser l'axiome du choix et donc n'allons retrouver que l'implication directe, que voici.

Proposition 109 (Injection et surjection avec des classes)

Soient C et D deux classes, avec C **non vide**.
Supposons qu'il existe une assertion fonctionnelle injective $C \longrightarrow D$.
Alors il existe une assertion fonctionnelle surjective $D \longrightarrow C$.

Démonstration

Supposons qu'il existe une assertion fonctionnelle injective $F : C \longrightarrow D$.

On peut alors considérer sa réciproque $F^{-1} : \mathrm{im}(F) \longrightarrow C$.

Par définition C est non vide : il existe $x_0 \in C$.

Posons alors $G := \left(\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & C \\ y & \longmapsto & \begin{cases} F^{-1}(y) & \text{si } y \in \mathrm{im}(F) \\ x_0 & \text{si } y \notin \mathrm{im}(F) \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que G est surjective dans C.

Par définition de G, on sait déjà que $\mathrm{im}(G) \subseteq C$.

> Soit $x \in C$.
>
> Posons $y := F(x)$, de sorte que $y \in \mathrm{im}(F)$.
>
> Par définition de G, on a alors $G(y) = F^{-1}(y) = F^{-1}\big(F(x)\big) = x$.
>
> On a donc $x \in \mathrm{im}(G)$.

Ainsi $\mathrm{im}(G) \supseteq C$ et donc $\mathrm{im}(G) = C$.

Ainsi $\boxed{G : D \longrightarrow C \text{ est surjective dans } C}$.

CQFD.

Le résultat qui suit ne devrait pas nous étonner : une classe propre ne pouvant pas être associée à un ensemble, cela veut dire qu'elle est trop grosse pour un ensemble. C'est en particulier le cas de la classe propre ON : il est impossible de l'injecter dans un ensemble.

Proposition 110 (Pas d'injection d'ON dans un ensemble)

Soient E un ensemble et C une classe **propre**.
Il n'existe pas d'assertion fonctionnelle injective $C \longrightarrow E$.
Autrement dit on a $C \not\preccurlyeq E$.

Démonstration

Supposons par l'absurde qu'il existe $F : C \longrightarrow E$ une assertion fonctionnelle injective.

Il existe donc $G : E \longrightarrow C$ une assertion fonctionnelle surjective d'après la prop. 109 p. 255. Puisque G est surjective dans C, on a $G^{\rightarrow}(E) = \mathrm{im}(G) = C$.

Mais E est un ensemble donc $G^{\rightarrow}(E)$ est un ensemble d'après l'axiome de remplacement.

Ainsi C est un ensemble, $\boxed{\text{ce qui est absurde}}$ puisque justement C est une classe propre.

CQFD.

Revenons désormais sur le lemme de Zorn, et démontrons-le à l'aide des ordinaux. Rappelons les définitions suivantes, pour que tout soit clair : pour un ensemble ordonné $(E, \trianglelefteq)$,

- un **élément maximal** m de E est un élément tel que $\forall x \in E, (m \trianglelefteq x \Rightarrow m = x)$, c'est-à-dire que m est le seul élément de E à être plus grand que m, il n'existe pas d'éléments de E qui soit strictement plus grand que m.
- une **chaîne** C de E est une partie de E qui est totalement ordonnée, c'est-à-dire que tous les éléments de C sont comparables deux à deux.
- on dit que E est **inductif** si et seulement si toutes ses chaînes sont majorées.

L'idée du lemme de Zorn est alors de dire qu'un ensemble inductif admet forcément un élément maximal, c'est-à-dire un élément au delà duquel il n'est pas possible d'aller. Sa preuve repose sur l'idée de construire une chaîne par récursion (c'est là qu'interviennent les ordinaux). En voici les points clés, notons $\triangleleft$ l'ordre strict sur E :

- On prend un élément de E, notons-le x_0. Deux cas se présentent à nous : ou bien x_0 n'a pas d'éléments strictement plus grand, auquel cas c'est bon on a trouvé notre élément maximal, ou bien x_0 en admet au moins un. Dans ce dernier cas, on en choisit un grâce à l'**axiome du choix**, et on le note x_1.
- On recommence avec x_1. Deux cas se présentent à nous : ou bien x_1 n'a pas d'éléments strictement plus grand, auquel cas c'est bon on a trouvé notre élément maximal, ou bien x_1 en admet au moins un. Dans ce dernier cas, on en choisit un encore grâce à l'axiome du choix, et on le note x_2. Remarquons que x_2 est strictement plus grand que x_1 qui est strictement plus grand que x_0 : on a $x_0 \triangleleft x_1 \triangleleft x_2$ et donc l'ensemble $\{x_0, x_1, x_2\}$ constitue une chaîne.
- On recommence encore et encore en formant x_3, x_4, x_5, où chaque x_{n+1} est strictement plus grand que x_n et donc on a toujours une chaîne $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ et potentiellement en s'arrêtant sur l'un d'entre eux qui n'aurait pas d'élément strictement plus grand.

- Il est possible que l'on doive répéter ce processus un nombre ordinal infini de fois et donc considérer un certain x_ω, de même que $x_{\omega+1}$ et ainsi de suite pour chaque ordinal.
- Cela nous fournit une assertion fonctionnelle $ON \longrightarrow E$ définie par $\alpha \longmapsto x_\alpha$. Or une telle assertion fonctionnelle ne peut être injective (proposition 110 page 256), c'est-à-dire que ON a strictement plus d'éléments que E (peu importe à quel point E est gigantesque). Cela veut dire que ce processus finit par épuiser tout ce que E a à offrir en termes d'éléments strictement plus grand que ceux déjà parcourus et donc on est en fait obligés de stagner à un moment sur un élément au lieu d'en piocher des strictement plus grands.
- On s'intéresse alors à $C = \{x_\alpha \mid \alpha \in ON\}$ l'ensemble des éléments de E que l'on a énumérés. Comme on l'a dit, C est une chaîne donc admet un majorant m car **E est inductif**. Il s'avère que puisque l'on avait épuisé tout E, le majorant m ne peut pas admettre d'élément strictement plus grand (sinon cela veut dire que l'on n'avait pas épuisé tout E), et donc **m est maximal**. Bingo !

Exemple :
Pour en comprendre l'intérêt, reprenons l'exemple que l'on avait donné dans le précédent livre sur l'existence d'une base dans tout espace vectoriel, pour les lecteurs qui connaîtraient déjà la notion. Pour un espace vectoriel E, on dit qu'une partie A de E est libre si et seulement si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire d'autres vecteurs de A.

On peut alors considérer $\mathcal{L} := \{A \subseteq E \mid A \text{ est libre}\}$ l'ensemble des parties libres de E, que l'on ordonne par l'inclusion. Nous montrerons dans un prochain livre que $(\mathcal{L}, \subseteq)$ est un ensemble inductif : d'après **le lemme de Zorn** il admet un élément maximal M.

Du fait de sa maximalité, il s'avère que M est génératrice de E : si ce n'était pas le cas, par l'absurde on en déduirait qu'il existe M' une partie strictement plus grande que M mais qui est quand même libre et donc $M' \in \mathcal{L}$, ce qui contredirait la maximalité de M. Ainsi, puisque M est libre car élément de $\mathcal{L}$, on en déduit que M est une base de E. Voilà donc un exemple typique d'utilisation du lemme de Zorn.

Théorème 14 (Lemme de Zorn)

Soit E un ensemble ordonné.
Si E est non vide et inductif alors E admet un élément maximal.

Démonstration

Notons $\trianglelefteq$ l'ordre sur E et $\triangleleft$ l'ordre strict associé.

• Supposons que E est inductif.
En particulier E est non vide.
D'après l'**axiome du choix**, il existe une application $f : \mathscr{P}(E) \backslash \{\varnothing\} \longrightarrow E$ telle que pour toute partie non vide A de E, on a $f(A) \in A$.
En fait, l'application f va nous servir pour piocher dans les ensembles des majorants stricts pour poursuivre la construction de la chaîne. Par exemple si nous avons un certain x_α dans

la chaîne, pour construire $x_{\alpha+1}$, nous allons regarder A_α l'ensemble des majorants stricts de x_α, et nous poserons $x_{\alpha+1} := f(A_\alpha)$.

E est un ensemble et la classe des ensembles U est propre d'après le paradoxe de Russell.
Autrement dit il existe y un ensemble tel que $y \notin E$.
On prolonge alors f en une application $g : \mathscr{P}(E) \longrightarrow E \cup \{y\}$ de la façon suivante :

$$g := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & E \cup \{y\} \\ A & \longmapsto & \begin{cases} f(A) & \text{si } A \neq \varnothing \\ y & \text{si } A = \varnothing \end{cases} \end{array} \right)$$

De cette manière, si jamais un élément n'a plus de majorants stricts, son ensemble de majorants stricts sera vide et g renverra y : on saura qu'à ce moment-là on stagnera et on aura trouvé notre élément maximal. g est donc un indicateur de stagnation quand il vaut y et sinon quand il ne vaut pas y, il continue le rôle de f de fournir des majorants stricts.

Définissons une assertion fonctionnelle $G : \mathit{ON} \longrightarrow E \cup \{y\}$ par récursion de la façon suivante : pour tout ordinal α, on pose $G(\alpha) := g\Big(\big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd x\big\}\Big)$.
D'après la proposition 110 page 256, G n'est pas injective.
Pour tout ordinal α, posons $A_\alpha := \big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd x\big\}$.
Ainsi pour tout ordinal α on a $G(\alpha) = g(A_\alpha)$.
De cette manière, G va énumérer tous les éléments de la chaîne que nous souhaitons construire : les x_α du paragraphe introductif seront les $G(\alpha)$, et dès qu'on aura $G(\alpha) = y$, c'est là que l'on s'arrêtera et on aura donc à disposition notre élément maximal car G n'est plus en mesure de fournir des éléments strictements plus grands.

• Montrons que pour tout ordinal α, si $A_\alpha \neq \varnothing$ alors $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd G(\alpha)$.

Soit un ordinal α tel que $A_\alpha \neq \varnothing$.
On a alors $G(\alpha) = g(A_\alpha) = f(A_\alpha) \in A_\alpha$.
Autrement dit $G(\alpha) \in \big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd x\big\}$.
Donc $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd G(\alpha)$.

Ainsi pour tout ordinal α, si $A_\alpha \neq \varnothing$ alors $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd G(\alpha)$.
Notons $(\star_1)$ ce fait.

• Montrons que $y \in \mathrm{im}(G)$.
Autrement dit montrons que G finit par stagner, et qu'il y a un moment où l'on ne peut plus fournir de majorants stricts : on est donc tombé sur un élément maximal.

Supposons par l'absurde que $y \notin \mathrm{im}(G)$.

Par définition de G on a $\mathrm{im}(G) \subseteq E \cup \{y\}$ donc $\mathrm{im}(G) \subseteq E$.

Donc pour tout ordinal α, $G(\alpha) \in E$ et donc $g(A_\alpha) \in E$.

Or par définition de g, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $g(A) \in E \iff A \neq \varnothing$.

Donc pour tout ordinal α, $A_\alpha \neq \varnothing$ donc $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \lhd G(\alpha)$ d'après $(\star_1)$.

Montrons que G est injective.

Soient α et α' des ordinaux tels que $G(\alpha) = G(\alpha')$.

Comme l'ordre est total chez les ordinaux, on a $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha' < \alpha$.

Si $\alpha < \alpha'$ alors $G(\alpha) \lhd G(\alpha')$ d'après ce qui précède.

Si $\alpha' < \alpha$ alors $G(\alpha') \lhd G(\alpha)$ d'après ce qui précède.

Dans ces deux cas on a $G(\alpha) \neq G(\alpha')$ par antiréflexivité de $\lhd$.

Autrement dit le seul cas possible est $\alpha = \alpha'$.

Ainsi $G : \mathit{ON} \longrightarrow E$ est injective.

C'est absurde car on a justement dit le contraire plus tôt.

On vient de montrer par l'absurde que $y \in \mathrm{im}(G)$.

Il existe donc un ordinal α tel que $y = G(\alpha) = g(Y_\alpha)$ et donc $Y_\alpha = \varnothing$.

• Soit α_0 le plus petit ordinal tel que $Y_{\alpha_0} = \varnothing$.

Soit $\gamma < \alpha_0$.

Par minimalité de α_0 on a $Y_\gamma \neq \varnothing$.

On a donc $\forall \beta < \gamma, G(\beta) \lhd G(\gamma)$ d'après $(\star_1)$.

Ainsi $\forall \gamma < \alpha_0, \forall \beta < \gamma, G(\beta) \lhd G(\gamma)$.

Notons $(\star_2)$ ce fait.

• Considérons alors $X := \big\{G(\beta) \bigm| \beta < \alpha_0\big\}$.

Montrons que X est une chaîne de E.

Soient z et z' dans X.

Il existe alors $\gamma < \alpha_0$ et $\gamma' < \alpha_0$ tels que $z = G(\gamma)$ et $z' = G(\gamma')$.

Comme les ordinaux sont totalement ordonnés on a $\gamma < \gamma'$ ou $\gamma' < \gamma$ ou $\gamma = \gamma'$.

- ▶ Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \gamma'$.
  Comme $\gamma' < \alpha_0$, on a $\forall \beta < \gamma', G(\beta) \lhd G(\gamma')$ d'après $(\star_2)$.
  En particulier on a $G(\gamma) \lhd G(\gamma')$.
- ▶ On montre de même que si $\gamma' < \gamma$ alors $G(\gamma') \lhd G(\gamma)$.
- ▶ Enfin si $\gamma = \gamma'$ on a évidemment $G(\gamma) = G(\gamma')$.

On a donc $(\gamma) \lhd G(\gamma')$ ou $G(\gamma') \lhd G(\gamma)$ ou $G(\gamma) = G(\gamma')$.

Donc $G(\gamma)$ et $G(\gamma')$ sont comparables, et donc z et z' sont comparables.

Ainsi tous les éléments de X sont comparables, donc X est une chaîne de E.

Or E est **inductif** par hypothèse, donc X admet un majorant m.

• Montrons que m est un élément maximal de E.

Supposons par l'absurde que m n'est pas un élément maximal de E.

Il existe donc $m' \in E$ tel que $m \lhd m'$ d'après la proposition 2 page 13.

Or m majore X donc m' majore strictement X.

Autrement dit $\forall \beta < \alpha_0, G(\beta) < m'$.

Donc $m' \in Y_{\alpha_0}$, ce qui est absurde puisque $Y_{\alpha_0} = \varnothing$ par définition de α_0.

Par l'absurde on vient de montrer que $\boxed{m \text{ est un élément maximal de } E}$.

CQFD.

La première personne a avoir introduit le lemme de Zorn est en fait Kuratowski : son objectif était de se débarrasser des raisonnements par inductions avec les nombres ordinaux ! En effet, ceux-ci peuvent être parfois un peu lourds alors que le lemme de Zorn va à l'essentiel.

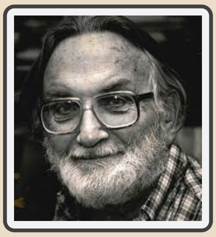
Pour la petite histoire

Kazimierz Kuratowski (2 février 1896 – 18 juin 1980) est un mathématicien polonais.

Les travaux de Kuratowski portent sur la théorie des fonctions de variable réelle, la topologie – en particulier, en compagnie d'Hausdorff, la définition d'une topologie en termes de *voisinages*, les *espaces métriques* et la notion de *compacité* –, la théorie des ensembles et la théorie des graphes, laquelle lui est redevable d'un important théorème portant désormais son nom. Avec Alfred Tarski et Wacław Sierpiński, il développe la théorie des espaces polonais (nommés ainsi en hommage au groupe de mathématiciens polonais à l'origine de cette théorie).

Dans le domaine de la théorie des ensembles, on doit à Kuratowski, dans son article *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, publié en 1922, une première version du lemme de Zorn.

Pour la petite histoire



Max Zorn (6 juin 1906 – 9 mars 1993) est un mathématicien américain né en Allemagne. Ses travaux portent sur l'algèbre, la théorie des groupes et l'analyse numérique. Il est surtout connu pour le lemme de Zorn que nous venons de voir. Il a notamment été l'élève d'Artin.

Le lemme de Zorn a été énoncé par de nombreux mathématiciens dès le début du $20^{\text{ème}}$ siècle dans le cadre de la *Crise des fondements* : démontré pour la première fois par Kuratowski en 1922, il a été retrouvé de façon indépendante par Zorn en 1935. Si c'est finalement Zorn qui lui a donné son nom, c'est parce qu'il a été le premier à utiliser ce résultat pour simplifier de nombreuses preuves d'algèbre déjà existantes. Max Zorn lui-même n'en revendiquait pas la paternité : « *Ce n'est pas un lemme, et il n'est pas de moi* ».

Le lemme de Zorn est en fait équivalent à l'axiome du choix. Autrement dit, dressons la liste de tous les axiomes que l'on a considérés jusque là, et retirons-en l'axiome du choix. À la place, mettons-y le lemme de Zorn. De ce nouveau système d'axiome, il est alors possible de déduire l'axiome du choix, qui en devient donc un théorème. On peut en retrouver une démonstration directe dans le précédent livre. On va donc ici le faire d'une manière détournée, avec le théorème qui va suivre.

Comme promis, tout ensemble est bien ordonnable et donc admet un cardinal. C'est ce que l'on appelle le **théorème de Zermelo**.

Théorème 15 (de Zermelo)

Tout ensemble est bien ordonnable.

On se propose deux démonstrations :

1. En utilisant le lemme de Zorn.
2. En utilisant directement l'axiome du choix.

Les deux démonstrations reposent sur l'idée qu'étant donné un ensemble E, une partie munie d'un bon ordre peut être vu comme la donnée d'un ordinal α et d'une injection $\alpha \longrightarrow E$. On peut donc raisonner sur les ordinaux plutôt que les parties de E.

Démonstration

Première démonstration : en utilisant le lemme de Zorn.

L'idée est de considérer tous les ordinaux qui s'injectent dans E : à chaque fois cela fournit un bon ordre sur les parties de E. Grâce au lemme de Zorn, cela va permettre de trouver un ordinal maximal s'injectant dans E, et par maximalité il sera en fait en bijection avec E, si bien que E est bien ordonnable au vu de la proposition 103 page 250.

Soit E un ensemble.
Montrons que E est bien ordonnable.
Posons $\mathscr{E} := \big\{(A, \trianglelefteq) \;\big|\; A \subseteq E \text{ et } \trianglelefteq \text{ est un bon ordre sur } A\big\}$.
Notre objectif est de montrer qu'il existe un bon ordre $\trianglelefteq$ sur E, et donc que $(E, \trianglelefteq) \in \mathscr{E}$.
Comme indiqué en amont de la démonstration, on va plutôt raisonner sur les ordinaux et les injections de ces ordinaux dans E.
Pour cela, posons la classe $\mathscr{F} := \big\{(\alpha, f) \;\big|\; \alpha \in \mathit{ON} \text{ et } f : \alpha \longrightarrow E \text{ est injective}\big\}$.
Nous allons appliquer le lemme de Zorn à $\mathscr{F}$.

• Montrons que $\mathscr{F}$ est un ensemble.
Considérons pour cela l'assertion fonctionnelle

$$\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \longrightarrow & \mathscr{F} \\ (A, \trianglelefteq) & \longmapsto & (\alpha, f) \text{ avec } \begin{cases} \alpha = \mathrm{type}(A, \trianglelefteq) \\ \text{et } f : \alpha \longrightarrow (A, \trianglelefteq) \text{ l'isomorphisme associé} \end{cases} \end{array}\right)$$

D'après l'axiome de remplacement, comme $\mathscr{E}$ est un ensemble, $\mathrm{im}(\varphi)$ aussi.
Montrons que $\mathrm{im}(\varphi) = \mathscr{F}$, c'est-à-dire que φ est surjective dans $\mathscr{F}$.
Par définition de φ, on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \mathscr{F}$.

Soit $(\alpha, f) \in \mathscr{F}$.
Par définition de $\mathscr{F}$, α est un ordinal et $f : \alpha \longrightarrow E$ une injection.
Considérons $A := \mathrm{im}(f)$, de sorte que $f : \alpha \longrightarrow A$ est bijective.
Autrement dit, $f^{-1} : A \longrightarrow \alpha$ est bijective.
On pose alors pour tout a et b dans A, $a \trianglelefteq b \iff f^{-1}(a) \leq f^{-1}(b)$.
On a vu dans le précédent livre qu'alors $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur A et que $f^{-1} : (A, \trianglelefteq) \longrightarrow \alpha$ est un isomorphisme d'ordres.
En particulier $f : \alpha \longrightarrow (A, \trianglelefteq)$ est un isomorphisme d'ordres.
Comme α est bien ordonné, $(A, \trianglelefteq)$ l'est aussi d'après la proposition 23 page 56.
En particulier $\alpha = \mathrm{type}(A, \trianglelefteq)$ et $f : \alpha \longrightarrow (A, \trianglelefteq)$ est l'isomorphisme associé.

Autrement dit $(\alpha, f) = \varphi(A, \trianglelefteq)$ et donc $(\alpha, f) \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi) \supseteq \mathscr{F}$ et donc $\mathrm{im}(\varphi) = \mathscr{F}$.

En particulier comme annoncé, $\mathscr{F}$ est un ensemble.

• Construisons une relation d'ordre sur $\mathscr{F}$.

Pour tout (α, f) et (β, g) dans $\mathscr{F}$, on pose $(\alpha, f) \sqsubseteq (\beta, g) \iff \Big(\alpha \leq \beta$ et $f = g_{|\alpha}\Big)$.

Montrons que $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}$.

Réflexivité

Soit (α, f) dans $\mathscr{F}$.

Par réflexivité de $\leq$, on a $\alpha \leq \alpha$.

On a $f : \alpha \longrightarrow E$ donc en particulier $f_{|\alpha} = f$.

On a donc bien $(\alpha, f) \sqsubseteq (\alpha, f)$.

Donc $\sqsubseteq$ est réflexive sur $\mathscr{F}$.

Antisymétrie

Soient (α, f) et (β, g) dans $\mathscr{F}$ tels que $(\alpha, f) \sqsubseteq (\beta, g)$ et $(\beta, g) \sqsubseteq (\alpha, f)$.

On a donc $\alpha \leq \beta$ et $\beta \leq \alpha$ et $g_{|\alpha} = f$ et $f_{|\beta} = g$.

On a donc $\alpha = \beta$ par antisymétrie de $\leq$.

De même, pour une application, le fait d'être une restriction revient à être inclus.

Autrement dit $f \subseteq g$ et $g \subseteq f$, si bien que $f = g$ par antisymétrie de l'inclusion.

On a donc $(\alpha, f) = (\beta, g)$.

Donc $\sqsubseteq$ est antisymétrique.

Transitivité

Soient (α, f), (β, g) et (γ, g) dans $\mathscr{F}$ tels que $(\alpha, f) \sqsubseteq (\beta, g)$ et $(\beta, g) \sqsubseteq (\gamma, h)$.

On a en particulier $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ donc $\alpha \leq \gamma$ par transitivité de $\leq$.

De plus on a $g_{|\alpha} = f$ et $h_{|\beta} = g$ donc $h_{|\alpha} = (h_{|\beta})_{|\alpha} = g_{|\alpha} = f$.

On a donc $(\alpha, f) \sqsubseteq (\gamma, h)$.

Donc $\sqsubseteq$ est transitive.

Finalement $\sqsubseteq$ est réflexive sur $\mathscr{F}$, antisymétrique et transitive.

Donc $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{F}$.

• Montrons que $\mathscr{F}$ muni de $\sqsubseteq$ est inductif.

Soit $\mathscr{C}$ une chaîne de $\mathscr{F}$.

Considérons alors $\mathscr{A} := \big\{\alpha \bigm| \exists f, (\alpha, f) \in \mathscr{C}\big\}$ et $\mathscr{B} := \big\{f \bigm| \exists \alpha, (\alpha, f) \in \mathscr{C}\big\}$.

Posons alors $\alpha^\star := \bigcup \mathscr{A}$ et $f^\star := \bigcup \mathscr{B}$.
$\mathscr{A}$ est un ensemble d'ordinaux donc $\alpha^\star = \sup(\mathscr{A})$ est un ordinal.
On a montré dans le précédent livre que $f^\star$ est une application si et seulement si les éléments de $\mathscr{B}$ se recollent deux à deux.

Soient f et g dans $\mathscr{B}$.
En posant $\alpha := \mathrm{dom}(f)$ et $\beta := \mathrm{dom}(g)$, on a $(\alpha, f) \in \mathscr{C}$ et $(\beta, g) \in \mathscr{C}$.
Par définition $\mathscr{C}$ est une chaîne donc tous ses éléments sont comparables.
On a donc $(\alpha, f) \sqsubseteq (\beta, g)$ ou $(\beta, g) \sqsubseteq (\alpha, f)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $(\alpha, f) \sqsubseteq (\beta, g)$.
  On a alors $\alpha \leq \beta$ et $f = g_{|\alpha}$.
  En particulier $\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) = \alpha \cap \beta = \alpha$.
  Donc pour tout $\gamma \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$, $f(\gamma) = g_{|\alpha}(\gamma) = g(\gamma)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $(\beta, g) \sqsubseteq (\alpha, f)$.
  On montre de la même manière que $\forall \gamma \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g), f(\gamma) = g(\gamma)$.

Dans les deux cas, f et g se recollent.

Donc tous les éléments de $\mathscr{B}$ se recollent deux à deux.
Donc $f^\star = \bigcup \mathscr{B}$ est une application d'après le premier livre.

Montrons que $\mathrm{dom}(f^\star) = \alpha^\star$.
Pour tout x, on a les équivalences

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{dom}(f^\star) &\iff \exists y, y = f^\star(x) \text{ par définition du domaine} \\
&\iff \exists y, (x, y) \in f^\star \\
&\iff \exists y, \exists f \in \mathscr{B}, (x, y) \in f \text{ car } f^\star = \bigcup \mathscr{B} \\
&\iff \exists y, \exists f \in \mathscr{B}, y = f(x) \\
&\iff \exists f \in \mathscr{B}, \exists y, y = f(x) \\
&\iff \exists f \in \mathscr{B}, x \in \mathrm{dom}(f) \text{ par définition du domaine} \\
&\iff \exists \alpha \in \mathscr{A}, x \in \alpha \text{ par définition de } \mathscr{A} \text{ et } \mathscr{B} \\
&\iff x \in \alpha^\star \text{ car } \alpha^\star = \bigcup \mathscr{A}
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{dom}(f^\star) = \alpha^\star$.

Montrons que $f^\star$ est injective.

Soient $\gamma < \alpha^\star$ et $\gamma' < \alpha^\star$ tels que $f^\star(\gamma) = f^\star(\gamma')$.
Posons y cette image commune.
On a $y = f^\star(\gamma)$ donc il existe $f \in \mathscr{B}$ tel que $y = f(\gamma)$.

De même $y = f^\star(\gamma')$ donc il existe $f' \in \mathscr{B}$ tel que $y = f'(\gamma')$.

Posons $\alpha := \mathrm{dom}(f)$ et $\alpha' := \mathrm{dom}(f')$.

Par définition de $\mathscr{B}$ on a $(\alpha, f) \in \mathscr{C}$ et $(\alpha', f') \in \mathscr{C}$.

Or par définition $\mathscr{C}$ est une chaîne donc est totalement ordonné.

On a donc $(\alpha, f) \sqsubseteq (\alpha', f')$ ou $(\alpha', f') \sqsubseteq (\alpha, f)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $(\alpha, f) \sqsubseteq (\alpha', f')$.
  On a alors $\alpha \leq \alpha'$ et $f'_{|\alpha} = f$.
  En particulier $f'(\gamma) = f'_{|\alpha}(\gamma) = f(\gamma) = y = f'(\gamma')$.
  Or par définition $f' : \alpha \longrightarrow E$ est injective.
  Donc $\gamma = \gamma'$.
- Plaçons-nous dans le cas $(\alpha', f') \sqsubseteq (\alpha, f)$.
  On montre de la même manière que $\gamma = \gamma'$.

Dans les deux cas on a $\gamma = \gamma'$.

Donc $f^\star$ est injective.

Montrons que $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow E$, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f^\star) \subseteq E$.

Soit $y \in \mathrm{im}(f^\star)$.

Il existe donc $\gamma < \alpha^\star$ tel que $y = f^\star(\gamma)$.

Comme $f^\star = \bigcup \mathscr{B}$, il existe $f \in \mathscr{B}$ tel que $y = f(\gamma)$.

Or par définition $f : \mathrm{dom}(f) \longrightarrow E$ donc $\mathrm{im}(f) \subseteq E$ et donc $y \in E$.

Ainsi $\mathrm{im}(f^\star) \subseteq E$, et donc $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow E$.

Comme $f^\star$ est injective et $\alpha^\star$ un ordinal, on a $(\alpha^\star, f^\star) \in \mathscr{C}$.

Montrons que $(\alpha^\star, f^\star)$ majore $\mathscr{C}$.

Soit $(\alpha, f) \in \mathscr{C}$.

On a en particulier $\mathrm{dom}(f) = \alpha$ et $f : \alpha \longrightarrow E$ injective.

Alors $\alpha \in \mathscr{A}$ et $f \in \mathscr{B}$ par définition de ces deux ensembles.

On a alors $\alpha \subseteq \bigcup \mathscr{A} = \alpha^\star$ donc $\alpha \leq \alpha^\star$ par définition de $\leq$.

De même $f \subseteq \bigcup \mathscr{B} = f^\star$ donc en particulier $f^\star_{|\alpha} = f$.

On a donc $(\alpha, f) \sqsubseteq (\alpha^\star, f^\star)$.

Ainsi $(\alpha^\star, f^\star)$ majore $\mathscr{C}$.

Ainsi toute chaîne de $(\mathscr{F}, \sqsubseteq)$ est majorée, donc $(\mathscr{F}, \sqsubseteq)$ est inductif.

D'après **le lemme de Zorn**, $(\mathscr{F}, \sqsubseteq)$ admet un élément maximal $(\alpha^\star, f^\star)$.

Par définition $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow E$ est injective, et on a aussi $\mathrm{im}(f^\star) \subseteq E$.

Montrons que $f^\star$ est surjective dans E, c'est-à-dire que $\mathrm{im}(f^\star) = E$.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{im}(f^\star) \subsetneq E$.

Il existe donc $y \in E \setminus \mathrm{im}(f^\star)$.

Posons alors $g := \left(\begin{array}{ccc} \alpha^\star + 1 & \longrightarrow & E \\ \gamma & \longmapsto & \begin{cases} f^\star(\gamma) & \text{si } \gamma < \alpha^\star \\ y & \text{si } \gamma = \alpha^\star \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que g est injective.

Soient $\gamma < \alpha^\star + 1$ et $\gamma' < \alpha^\star + 1$ tels que $g(\gamma) = g(\gamma')$.

- ▶ Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \alpha^\star$ et $\gamma' < \alpha^\star$.
  On a donc $f^\star(\gamma) = g(\gamma) = g(\gamma') = f^\star(\gamma')$.
  Or $f^\star$ est injective donc $\gamma = \gamma'$.
- ▶ Le cas où $\gamma = \alpha^\star = \gamma'$ conduit immédiatement à $\gamma = \gamma'$.
- ▶ Plaçons-nous dans le cas où $\gamma < \alpha^\star$ et $\gamma' = \alpha^\star$.
  On a alors $f(\gamma) = g(\gamma) = g(\gamma') = y$.
  En particulier $y \in \mathrm{im}(f)$, ce qui est impossible par définition de y.
- ▶ Le cas où $\gamma = \alpha^\star$ et $\gamma' < \alpha^\star$ est impossible pour la même raison.

Dans les deux cas possibles, on a donc $\gamma = \gamma'$.

Ainsi $g : \alpha^\star + 1 \longrightarrow E$ est injective, et donc $(\alpha^\star + 1, g) \in \mathscr{C}$.

Or $\alpha^\star < \alpha^\star + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

On a aussi $g_{|\alpha^\star} = f^\star$ par définition de g.

On a donc $(\alpha^\star, f^\star) \sqsubset (\alpha^\star + 1, g)$.

C'est absurde puisque $(\alpha^\star, f^\star)$ est un élément maximal de $\mathscr{C}$.

Par l'absurde on vient de montrer que $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow E$ est surjective dans E.

Ainsi $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow E$ est une bijection.

En particulier $(f^\star)^{-1} : E \longrightarrow \alpha^\star$ est une bijection.

• Construisons $\trianglelefteq$ un ordre sur E.

Pour tout x et y dans E, posons $x \trianglelefteq y \iff (f^\star)^{-1}(x) \leq (f^\star)^{-1}(y)$.

D'après le précédent livre, $\trianglelefteq$ est un ordre sur E et $(f^\star)^{-1} : (E, \trianglelefteq) \longrightarrow \alpha^\star$ est un isomorphisme d'ordres. En particulier $f^\star : \alpha^\star \longrightarrow (E, \trianglelefteq)$ est un isomorphisme d'ordres.

Or $\alpha^\star$ est un ordinal donc est bien ordonné.

Donc $(E, \trianglelefteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 23 page 56.

En particulier $\boxed{E \text{ est bien ordonnable}}$.

CQFD.

On peut utiliser directement utiliser l'axiome du choix, mais le lecteur avisé pourrait bien remarquer que cette démonstration et celle du lemme de Zorn se ressemblent beaucoup : on est en fait en train de redémontrer Zorn dans le cas particulier du théorème de Zermelo.

Démonstration

Deuxième démonstration : en utilisant directement l'axiome du choix.

Soit E un ensemble : montrons qu'il est bien ordonnable.

Si E est vide, on le sait déjà que car $0 = \varnothing$ est un ordinal.

On suppose à présent que E est non vide.

D'après l'**axiome du choix**, il existe une application $f : \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\} \longrightarrow E$ telle que pour tout $A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$, on a $f(A) \in A$.

E est un ensemble et la classe des ensembles U est propre d'après le paradoxe de Russell.

Autrement dit il existe un ensemble y tel que $y \notin E$.

On prolonge alors f en une application $g : \mathscr{P}(E) \longrightarrow E \cup \{y\}$ de la façon suivante :

$$g := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & E \cup \{y\} \\ & & \\ A & \longmapsto & \begin{cases} f(A) & \text{si } A \neq \varnothing \\ y & \text{si } A = \varnothing \end{cases} \end{array} \right)$$

Définissons une assertion fonctionnelle $G : ON \longrightarrow E \cup \{y\}$ par récursion de la façon suivante : pour tout ordinal α, on pose $G(\alpha) := g\Big(\big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq x\big\}\Big)$.

D'après la proposition 110 page 256, G n'est pas injective.

Pour tout ordinal α, posons $A_\alpha := \big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq x\big\}$.

Ainsi pour tout ordinal α, on a $G(\alpha) = g(A_\alpha)$.

• Pour tout ordinal α, si $A_\alpha \neq \varnothing$ alors $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq G(\alpha)$.

En effet, soit un ordinal α tel que $A_\alpha \neq \varnothing$.

On a alors $G(\alpha) = g(A_\alpha) = f(A_\alpha) \in A_\alpha$.

Autrement dit $G(\alpha) \in \big\{x \in E \,\big|\, \forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq x\big\}$.

Donc $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq G(\alpha)$.

Ainsi pour tout ordinal α, si $A_\alpha \neq \varnothing$ alors $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq G(\alpha)$.

Notons $(\star_1)$ ce fait.

• Montrons que $y \in \mathrm{im}(G)$.

Supposons par l'absurde que $y \notin \mathrm{im}(G)$.

Donc pour tout ordinal α, on a $G(\alpha) \in E$ et donc $g(A_\alpha) \in E$.

Or par définition de g, pour tout $A \subseteq E$ on a $g(A) \in E \iff A \neq \varnothing$.

Donc pour tout ordinal α, on a $A_\alpha \neq \varnothing$.

Donc pour tout ordinal α, $\forall \beta < \alpha, G(\beta) \neq G(\alpha)$ d'après $(\star_1)$.

Montrons que G est injective.

Soient α et α' deux ordinaux tels que $G(\alpha) = G(\alpha')$.

Comme l'ordre est total chez les ordinaux, on a $\alpha = \alpha'$ ou $\alpha < \alpha'$ ou $\alpha' < \alpha$.

Si $\alpha < \alpha'$ alors $G(\alpha) \neq G(\alpha')$ d'après ce qui précède.

Si $\alpha' < \alpha$ alors $G(\alpha') \neq G(\alpha)$ d'après ce qui précède.

Ainsi le seul cas possible est $\alpha = \alpha'$.

Donc G est injective.

C'est absurde puisqu'on a justement dit que G n'est pas injective.

Par l'absurde on vient de montrer que $y \in \mathrm{im}(G)$.

Il existe donc un ordinal α tel que $y = G(\alpha) = g(A_\alpha)$ et donc $A_\alpha = \varnothing$.

• Soit α_0 le plus petit ordinal tel que $A_\alpha = \varnothing$.

Soit $\gamma < \alpha_0$.

Par minimalité de α_0, on a $A_\gamma \neq \varnothing$.

On a donc $\forall \beta < \gamma, G(\beta) \neq G(\gamma)$ d'après $(\star_1)$.

Ainsi $\forall \gamma < \alpha_0, \forall \beta < \gamma, G(\beta) \neq G(\gamma)$.

Notons $(\star_2)$ ce fait.

• Considérons alors $h := G_{|\alpha_0}$, de sorte que $h : \alpha_0 \longrightarrow E \cup \{y\}$.

Pour tout $\gamma < \alpha_0$, on a $A_\gamma \neq \varnothing$ donc $h(\gamma) = G(\gamma) = g(A_\gamma) = f(A_\gamma) \in E$.

On a donc $h : \alpha_0 \longrightarrow E$.

Montrons que h est injective.

Soient γ et γ' tels que $h(\gamma) = h(\gamma')$.

Comme l'ordre est total chez les ordinaux, on a $\gamma = \gamma'$ ou $\gamma < \gamma'$ ou $\gamma' < \gamma$.

Si $\gamma < \gamma'$ alors $h(\gamma) = G(\gamma) \neq G(\gamma') = h(\gamma')$ d'après $(\star_2)$.

Si $\gamma' < \gamma$ alors $h(\gamma') = G(\gamma') \neq G(\gamma) = h(\gamma)$ d'après $(\star_2)$.

Dans ces deux cas on a $h(\gamma) \neq h(\gamma')$ et donc le seul cas possible est $\gamma = \gamma'$.

Donc h est injective.

• Montrons que h est surjective dans E.

Par définition de α_0, on a $A_{\alpha_0} = \varnothing$.

Autrement dit $\left\{x \in E \,\middle|\, \forall \beta < \alpha_0, G(\beta) \neq x\right\} = \varnothing$.

Donc pour tout $x \in E$, il existe $\beta < \alpha_0$ tel que $G(\beta) = x$.

Comme $h = G_{|\alpha_0}$, pour tout $x \in E$, il existe $\beta < \alpha_0$ tel que $h(\beta) = x$.

Donc h est surjective dans E.

• Ainsi $h : \alpha_0 \longrightarrow E$ est bijective.

En particulier $h^{-1} : E \longrightarrow \alpha_0$ est bijective.

Pour tout x et x' dans E, posons $x \trianglelefteq x' \iff h^{-1}(x) \leq h^{-1}(x')$.

On a vu dans le précédent livre que $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur E.

On a aussi vu que $h^{-1} : (E, \trianglelefteq) \longrightarrow \alpha_0$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier $h : \alpha_0 \longrightarrow (E, \trianglelefteq)$ est un isomorphisme d'ordres.

Or α_0 est un ordinal donc est bien ordonné.

Donc $(E, \trianglelefteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 23 page 56.

En particulier $\boxed{E \text{ est bien ordonnable}}$.

CQFD.

Pour la petite histoire

Ernst Zermelo (27 juillet 1871 – 21 mai 1953) est un mathématicien allemand. Il s'est principalement intéressé aux fondations des mathématiques et à la philosophie. Il a donné des développements importants à la théorie des ensembles et est un des précurseurs de la théorie des jeux. Sa thèse de doctorat en 1894 porte sur le calcul des variations : il aura travaillé une partie de sa vie sur la physique et aura été l'élève de Max Planck.

En 1883, Cantor avait affirmé sans démonstration que tout ensemble est bien ordonnable. Zermelo envoie la démonstration de son théorème à Hilbert en 1904, et utilise justement l'axiome du choix pour cela. Il est d'ailleurs le premier à formuler explicitement l'axiome du choix.

Zermelo a formulé en 1908 la plupart des axiomes utilisés aujourd'hui en théorie des ensembles, notamment ceux décrits dans le précédent livre (et l'axiome de l'infini décrit dans le premier chapitre). Plus tard, Fraenkel et Skolem compléterons ses travaux pour donner naissance à l'axiomatique de Zermelo-Fraenkel, abrégée ZF. En ajoutant à celle-ci l'axiome du choix, on obtient l'axiomatique de ZFC.

Remarque :
À ce stade, certains lecteurs pourraient être déroutés. On est en train d'affirmer que tout ensemble peut être muni d'un bon ordre. C'est donc en particulier le cas de $\mathbb{R}$. Il est donc tout à fait possible de désigner un premier élément de $\mathbb{R}$, puis un second, un troisième, etc. N'est-ce pas contradictoire avec ce que l'on affirmait au tout début du livre ? Après tout, si x et y sont deux nombres réels, alors leur milieu $\dfrac{x+y}{2}$ se situe bien entre x et y et donc y ne peut pas successeur de x, si ?

En fait, c'est l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas un bon ordre pour lequel l'argument du milieu fonctionne. Le théorème de Zermelo parle d'un autre ordre, et pour cette autre ordre il n'y a pas de compatibilité avec l'addition qui permette de réemployer l'argument du milieu. On ne peut pas dire grand chose de ce bon ordre sur $\mathbb{R}$: il est non constructif et c'est précisément pour ça que l'on a eu besoin de l'axiome du choix (via le théorème de Zermelo) pour prouver son existence.

Le théorème de Zermelo est équivalent à l'axiome du choix. Autrement dit, dressons la liste de tous les axiomes que l'on a considérés jusque là, et retirons-en l'axiome du choix. À la place, mettons-y le théorème de Zermelo. De ce nouveau système d'axiome, il est alors possible de déduire l'axiome du choix, qui en devient donc un théorème.

Idée de preuve

Supposons le théorème de Zermelo, c'est-à-dire que tout ensemble est bien ordonnable.

Soit E un ensemble.

D'après le **théorème de Zermelo**, E est bien ordonnable.

Soit $\trianglelefteq$ un bon ordre sur E.

En particulier, toute partie non vide de E admet un minimum pour $\trianglelefteq$.

Posons donc $f := \left(\begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\} & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & \min(A) \end{array} \right)$.

Alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)\backslash\{\varnothing\}$, $f(A) = \min(A) \in A$.

CQFD.

Nous avons établi que l'axiome du choix implique le lemme de Zorn qui implique le théorème de Zermelo, qui lui-même implique l'axiome du choix. Ces trois énoncés sont donc équivalents. Le mathématicien Jerry Bona disait en plaisantant à ce propos : « *L'axiome du choix est trivialement vrai, le théorème de Zermelo est trivialement faux, et que pouvons-nous dire du lemme de Zorn ?* ».

Le fait que tout ensemble est ordonnable nous assure que tout ensemble est équipotent à un ordinal d'après la proposition 103 page 250. Or nous le savons depuis le premier chapitre (théorème 1 page 27) : tous les ordinaux sont comparables, si bien que tous les ensembles sont comparables.

Théorème 16 (Tous les ensembles sont comparables)

Soient E et F deux ensembles.
On a alors $E \preccurlyeq F$ ou $F \preccurlyeq E$.

Démonstration

D'après le **théorème de Zermelo**, E et F sont bien ordonnables.

Ils admettent donc tous deux un cardinal d'après la proposition 104 page 251.

Les cardinaux sont des ordinaux donc sont comparables.

On a donc $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$ ou $\text{card}(F) \leq \text{card}(E)$.

On a donc $\text{card}(E) \preccurlyeq \text{card}(F)$ ou $\text{card}(F) \preccurlyeq \text{card}(E)$ d'après la proposition 100 page 243.

- Plaçons-nous dans le cas où $\text{card}(E) \preccurlyeq \text{card}(F)$.
  Par définition du cardinal on a $E \approx \text{card}(E)$ et $F \approx \text{card}(F)$.
  Ainsi on a $E \approx \text{card}(E) \preccurlyeq \text{card}(F) \approx F$.
  On a donc $E \preccurlyeq F$ d'après la proposition 89 page 222.
- Plaçons-nous dans le cas où $\text{card}(F) \preccurlyeq \text{card}(E)$.
  On montre de la même manière qu'alors $F \preccurlyeq E$.

Ainsi on a donc $\boxed{E \preccurlyeq F \text{ ou } F \preccurlyeq E}$.

CQFD.

Ainsi nous avons utilisé le théorème de Zermelo pour montrer ce résultat, et donc l'axiome du choix. Le fait que tous les ensembles sont comparables est en fait équivalent à l'axiome du choix : voici à nouveau un résultat que l'on aurait pu prendre comme axiome à la place de l'axiome du choix. Cependant pour voir qu'il implique l'axiome du choix, nous avons besoin d'un résultat dû à Hartogs, que nous allons voir à présent.

3.2 Théorème et cardinal de Hartogs

Le théorème d'Hartogs qui suit nous dit que pour un ensemble E donné, il existe un cardinal κ tel que κ ne s'injecte pas dans E, c'est-à-dire $\kappa \not\preccurlyeq E$. Si jamais on admet l'axiome du choix, ce résultat revient à dire que $E \prec \kappa$ d'après le théorème 16 page 270 : autrement dit pour tout ensemble que l'on se donne, on peut toujours trouver un cardinal strictement plus grand.

En fait si on admet l'axiome du choix, le théorème d'Hartogs est trivial. En effet, le théorème de Cantor nous dit que $E \prec \mathscr{P}(E)$. Or avec le théorème de Zermelo (*donc avec l'axiome du choix*), $\mathscr{P}(E)$ admet un cardinal κ, qui vérifie donc $E \prec \kappa$, ce qui rend la démonstration du théorème de Hartogs immédiate.

Cependant, on introduit ici ce théorème pour démontrer que le théorème 16 page 270 implique l'axiome du choix, donc on ne peut pas se servir de ce dernier, et donc le théorème de Hartogs n'est pas immédiat.

Théorème 17 (de Hartogs)

Soit E un ensemble.
Il existe un cardinal κ tel qu'il n'existe pas d'injection $\kappa \longrightarrow E$.

Démonstration

• Construisons κ.

Posons $\kappa := \{\text{type}(A, \trianglelefteq) \mid A \subseteq E \text{ et } \trianglelefteq \text{ est un bon ordre sur } A\}$.

Montrons que κ est un ordinal.

Par définition, κ est un ensemble d'ordinaux.

En particulier $(\kappa, \in)$ est strictement bien ordonné d'après le théorème 1 page 27.

Montrons que κ est transitif.

Soit $\alpha \in \kappa$.

Par définition il existe $A \subseteq E$ et $\trianglelefteq$ un bon ordre sur A tel que $\alpha := \text{type}(A, \trianglelefteq)$.

Soit $f : \alpha \longrightarrow A$ l'isomorphisme d'ordres associé.

Soit $\beta \in \alpha$.

Comme f est injective, $f_{|\beta}$ est injective.

Posons alors $B := \text{im}(f_{|\beta})$, de sorte que $f_{|\beta} : \beta \longrightarrow B$ est bijective.

Comme f est croissante, $f_{|\beta}$ est croissante.

$\text{dom}(f_{|\beta}) = \beta$ est un ordinal donc est bien ordonné donc totalement ordonné.

On en conclut que $f_{|\beta} : \beta \longrightarrow B$ est un isomorphisme d'ordres.

En particulier $\beta = \text{type}(B, \trianglelefteq)$.

Or $B \subseteq A \subseteq E$, et donc $\beta \in \kappa$.

Donc $\forall \beta \in \alpha, \beta \in \kappa$ et donc $\alpha \subseteq \kappa$.

Donc $\forall \alpha \in \kappa, \alpha \subseteq \kappa$, si bien que κ est inductif.

On en conclut donc que $\boxed{\kappa \text{ est un ordinal}}$.

• Montrons que κ ne s'injecte pas dans E.

Supposons par l'absurde qu'il existe une injection $g : \kappa \longrightarrow E$.

Posons $A := \mathrm{im}(g)$, de sorte que $g : \kappa \longrightarrow A$ est une bijection.

En particulier $g^{-1} : A \longrightarrow \kappa$ est une bijection.

Pour tout a et a' dans A, on pose $a \trianglelefteq a' \iff g^{-1}(a) \leq g^{-1}(a')$.

On a vu dans le premier livre qu'alors $\trianglelefteq$ est une relation d'ordre sur A.

On a aussi vu qu'alors $g^{-1} : A \longrightarrow \kappa$ est un isomorphisme d'ordres.

Donc $g : \kappa \longrightarrow A$ est un isomorphisme d'ordres.

Or κ est un ordinal donc est bien ordonné.

Donc $(A, \trianglelefteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 23 page 56.

En particulier $\kappa = \mathrm{type}(A, \trianglelefteq)$.

Comme $A \subseteq E$, on en déduit que $\kappa \in \kappa$ par définition de κ.

C'est absurde car $\in$ est antiréflexive sur les ordinaux.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{\kappa \text{ ne s'injecte pas dans } E}$.

• Montrons que κ est un cardinal.

Soit α un ordinal tel que $\alpha < \kappa$.

On a donc $\alpha \in \kappa$ par définition de $<$.

Il existe donc $A \subseteq E$ et $\trianglelefteq$ un bon ordre sur A tel que $\alpha = \mathrm{type}(A, \trianglelefteq)$.

Soit $f : \alpha \longrightarrow A$ l'isomorphisme associé, de sorte que $f : \alpha \longrightarrow E$ est une injection.

Supposons par l'absurde que $\alpha \approx \kappa$.

On a en particulier $\kappa \preccurlyeq \alpha$ d'après la proposition 87 page 213.

Il existe donc une injection $g : \kappa \longrightarrow \alpha$.

Alors $g \circ f : \kappa \longrightarrow E$ est une injection.

C'est absurde puisqu'on a montré que κ ne s'injecte pas dans E.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\alpha \not\approx \kappa$.

Or $\alpha < \kappa$ donc $\alpha \leq \kappa$ et donc $\alpha \preccurlyeq \kappa$ d'après la proposition 100 page 243.

Ainsi $\alpha \preccurlyeq \kappa$ et $\alpha \not\approx \kappa$ donc $\alpha \prec \kappa$.

Ainsi $\forall \alpha < \kappa, \alpha \prec \kappa$, et donc $\boxed{\kappa \text{ est un cardinal}}$.

CQFD.

Pour la petite histoire

Friedrich Moritz Hartogs, dit Fritz Hartogs (20 mai 1874 – 18 août 1943), est un mathématicien allemand connu pour ses importantes contributions à la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes. C'est à lui que l'on doit le théorème qui précède, qu'il a démontré en 1915. Notons bien que cette démonstration ne nécessite pas l'axiome du choix !

On peut désormais montrer que le fait que tous les ensembles sont comparables implique l'axiome du choix, plus précisément le théorème de Zermelo.

Idée de preuve

Supposons que tous les ensembles soient comparables.

Soit E un ensemble.

D'après le théorème d'Hartogs, il existe un cardinal κ tel qui ne s'injecte pas dans E.

Or par hypothèse E et κ sont comparables.

La seule possibilité est donc que $E \preccurlyeq \kappa$.

Il existe donc $\alpha \leq \kappa$ tel que $E \approx \alpha$ d'après la proposition 100 page 243.

En particulier $\boxed{E \text{ est bien ordonnable}}$ d'après la proposition 103 page 250.

CQFD.

Revenons dans notre cadre usuel : **l'axiome du choix et toutes ses dérivées sont admis**. D'après le théorème de Hartogs, pour un ensemble E il existe au moins un cardinal κ tel que $E \prec \kappa$. Le plus petit de tels cardinaux est alors appelé **cardinal de Hartogs** de E. Son existence est encore une fois assurée par le fait qu'une classe d'ordinaux admet un plus petit élément. C'est ainsi le cardinal qui suit directement celui de E, son successeur en somme (successeur au sens des cardinaux, pas des ordinaux !).

Définition 37 (Cardinal de Hartogs)

Soit E un ensemble.
On appelle **cardinal de Hartogs** de E le plus petit cardinal κ tel que $E \prec \kappa$.
On le note $\aleph(E)$.

Exemple :
Pour n un entier naturel, on a $\aleph(n) = n + 1$. En effet, $n + 1$ est aussi un entier naturel donc est un cardinal d'après le théorème 13 page 247. C'est aussi le plus petit ordinal strictement plus grand que n d'après la proposition 14 page 40.

Proposition 111 (Cardinal de Hartogs d'un ordinal)

Soit α un ordinal.
Alors $\alpha < \aleph(\alpha)$.

Démonstration

Comme tous les ordinaux sont comparables, on a $\alpha < \aleph(\alpha)$ ou $\aleph(\alpha) \leq \alpha$.

Supposons par l'absurde que $\aleph(\alpha) \leq \alpha$.

On alors $\aleph(\alpha) \preccurlyeq \alpha$ d'après la proposition 100 page 243.

Or par définition du cadinal de Hartogs, on a $\alpha \prec \aleph(\alpha)$.

On a donc $\alpha \preccurlyeq \aleph(\alpha)$ et $\alpha \not\approx \aleph(\alpha)$.

En particulier on a $\aleph(\alpha) \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \aleph(\alpha)$.

On a donc $\alpha \approx \aleph(\alpha)$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

C'est absurde puisqu'on vient justement de dire que $\alpha \not\approx \aleph(\alpha)$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\boxed{\alpha < \aleph(\alpha)}$.

CQFD.

L'assertion fonctionnelle qui suit a pour objet de parcourir tous les nombres cardinaux un à un. Évidemment les premiers cardinaux sont les entiers naturels, donc les ordinaux finis. La fonction de Hartogs démarre en fait après les entiers naturels, donc à partir du premier cardinal infini, c'est-à-dire ω.

Définition 38 (Fonction de Hartogs)

On définit l'assertion fonctionnelle $\aleph : ON \longrightarrow ON$ suivante par récursion :

$$\begin{cases} \aleph_0 := \omega \\ \aleph_{\alpha+1} := \aleph(\aleph_\alpha) \text{ pour tout ordinal } \alpha \\ \aleph_\gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma} \aleph_\delta \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

On pose aussi $\omega_\alpha := \aleph_\alpha$ pour tout ordinal α, les deux notations étant tout autant employées.

Remarque :

1. Ainsi $\omega_0 = \omega$ et ω_1 est le cardinal qui vient juste après ω. Nous verrons plus tard que ω_1 joue un rôle particulier avec l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, et plus généralement avec tous les ensembles dit indénombrables.

2. Pour justifier rigoureusement que cette définition a du sens, on utilise encore et toujours la proposition 37 page 101, avec $\mu_0 := \omega$ et pour tout ordinal ξ, on pose $G(\xi) := \aleph(\xi)$.

Le fait que tout ensemble admette un cardinal strictement plus grand (c'est le théorème d'Hartogs) implique qu'il n'est pas possible de considérer l'ensemble de tous les cardinaux : la classe des cardinaux est donc une classe propre. En particulier la classe C_∞ des cardinaux **infinis** est propre. D'après les propositions 80 page 196 et 81 page 197, il existe donc un unique isomorphisme $ON \longrightarrow C_\infty$. Il s'avère que c'est justement $\aleph$.

Théorème 18 (La fonction d'Hartogs est un isomorphisme)

Soit C_∞ la classe des cardinaux **infinis**.
Alors $\aleph$ est l'unique isomorphisme d'ordres de ON vers C_∞.
De plus $\aleph$ est continue.

Démonstration

• Montrons que $\aleph$ est strictement croissante.

Fixons α un ordinal.

Pour tout ordinal β, posons $P(\beta)$ l'assertion « $\alpha < \beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$ ».

Initialisation

La prémisse $\alpha < 0$ étant fausse, l'implication $\alpha < 0 \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_0$ est vraie.

Autrement dit, on a $P(0)$.

Hérédité

Soit β un ordinal tel que $P(\beta)$.

Par définition, on a $\aleph_{\beta+1} = \aleph(\aleph_\beta)$.

Or on a $\aleph_\beta < \aleph(\aleph_\beta)$ d'après la proposition 111 page 275, donc $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$.

Supposons que $\alpha < \beta + 1$.

On a donc $\alpha \leq \beta$ d'après la proposition 14 page 40.

On a donc $\alpha < \beta$ ou $\alpha = \beta$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\alpha < \beta$.
  On a alors $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ d'après $P(\beta)$.
  Or on a dit que $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$.
  On a donc $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$ par transitivité de $<$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\alpha = \beta$.
  On a alors $\aleph_\alpha = \aleph_\beta$.
  Or on a dit que $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$.

On a donc $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$.

Dans les deux cas, on a $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$.

Ainsi, si $\alpha < \beta + 1$ alors $\aleph_\alpha < \aleph_{\beta+1}$, et donc $P(\beta + 1)$.

Ainsi pour tout ordinal β, si $P(\beta)$ alors $P(\beta + 1)$.

Hérédité limite

Soit γ un ordinal limite non nul tel que $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$.

Supposons que $\alpha < \gamma$.

On a $\gamma = \sup(\gamma) = \sup\limits_{\delta \in \gamma} = \sup\limits_{\delta < \gamma} \delta$ d'après la proposition 22 page 54.

Il existe donc $\delta < \gamma$ tel que $\delta \not\leq \alpha$ par minimalité de la borne supérieure.

Comme les ordinaux sont totalement ordonnés, on a donc $\alpha < \delta$.

On en déduit que $\aleph_\alpha < \aleph_\delta$ d'après $P(\delta)$.

Or par définition $\aleph_\gamma = \sup\limits_{\varepsilon < \gamma} \aleph_\varepsilon$.

Puisque $\delta < \gamma$, on a $\aleph_\delta \leq \aleph_\gamma$ car la borne supérieure est un majorant.

On a donc $\aleph_\alpha < \aleph_\gamma$ par transitivité.

Ainsi, si $\alpha < \gamma$ alors $\aleph_\alpha < \aleph_\gamma$, et donc $P(\gamma)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul, si $\forall \delta < \gamma, P(\delta)$ alors $P(\gamma)$.

Ainsi P vérifie les trois conditions du principe faible d'induction.

Donc pour tout ordinal β, on a $P(\beta)$.

Autrement dit pour tout ordinal β, si $\alpha < \beta$ alors $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

Ainsi $\boxed{\aleph \text{ est strictement croissante}}$.

• Montrons que $\aleph$ est continue.

Comme $\aleph$ est strictement croissante, $\aleph$ est croissante d'après la proposition 77 page 192.

Par définition de $\aleph$, pour tout ordinal limite non nul γ, on a $\aleph_\gamma = \sup\limits_{\delta < \gamma} \aleph_\delta$.

Donc $\boxed{\aleph \text{ est continue}}$ d'après la proposition 43 page 113.

Autrement dit, pour tout ensemble d'ordinaux non vide X, on a $\aleph_{\sup(X)} = \sup(\aleph_X)$.

• Montrons que $\aleph$ est à valeurs dans C_∞ la classe des cardinaux infinis.

Soit α un ordinal.

On a $0 \leq \alpha$ donc $\aleph_0 \leq \aleph_\alpha$ par croissance de $\aleph$.

Or par définition $\aleph_0 = \omega$, donc $\omega \leq \aleph_\alpha$.

Or chez les ordinaux, « *être fini* » veut dire « *être strictement inférieur à* ω ».

Donc $\aleph_\alpha$ est infini, et est évidemment un cardinal par définition de $\aleph$.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout ordinal } \alpha,\ \aleph_\alpha \text{ est un cardinal infini donc } \aleph_\alpha \in C_\infty}$.

• Montrons que $\aleph$ est surjective dans C_∞.

Soit κ un cardinal infini.

Considérons alors la classe $A := \{\alpha \in ON \mid \aleph_\alpha \leq \kappa\}$.

On a dit que $\aleph$ est strictement croissante.

En particulier $\aleph$ est non bornée d'après la proposition 74 page 184.

Il existe donc $\beta \in ON$ tel que $\kappa < \aleph_\beta$.

Supposons par l'absurde que β ne majore pas A.

Il existe donc $\alpha \in A$ tel que $\alpha \not\leq \beta$.

Comme les ordinaux sont totalement ordonnés, on a donc $\beta < \alpha$.

Alors $\aleph_\beta < \aleph_\alpha$ par stricte croissance de $\aleph$.

En particulier $\kappa < \aleph_\alpha$ par transitivité de $<$.

C'est absurde puisque $\alpha \in A$.

Par l'absurde, on vient de montrer que β majore A.

Ainsi A est majorée donc A est un ensemble d'après la proposition 13 page 38.

En particulier $\aleph_A := \aleph^{\rightarrow}(A)$ est un ensemble d'après l'axiome de remplacement.

On en déduit que A et $\aleph_A$ admettent une borne supérieure car ensembles d'ordinaux.

Posons alors $\alpha^\star := \sup(A)$.

Par définition κ est un cardinal infini donc $\omega \leq \kappa$.

Or $\aleph_0 = \omega$ donc $\aleph_0 \leq \kappa$ et donc $0 \in A$ par définition de A.

Ainsi A est non vide, donc $\sup(\aleph_A) = \aleph_{\sup(A)}$ par continuité de $\aleph$.

On a donc $\sup(\aleph_A) = \aleph_{\alpha^\star}$.

Or $\forall \alpha \in A, \aleph_\alpha \leq \kappa$ par définition de A.

Donc $\sup(\aleph_A) \leq \kappa$ par minimalité de la borne supérieure, et donc $\aleph_{\alpha^\star} \leq \kappa$.

On a $\alpha^\star < \alpha^\star + 1$ d'après la proposition 14 page 40.

Alors $\alpha^\star + 1 \notin A$ car la borne supérieure est un majorant.

On a donc $\kappa < \aleph_{\alpha^\star+1}$ par définition de A.

Ainsi on a $\aleph_{\alpha^\star} \leq \kappa < \aleph_{\alpha^\star+1}$, c'est-à-dire $\aleph_{\alpha^\star} \leq \kappa < \aleph(\aleph_{\alpha^\star})$ par définition de $\aleph$.

On a donc $\aleph_{\alpha^\star} = \kappa$ par minimalité de $\aleph(\aleph_{\alpha^\star})$.

En particulier $\kappa \in \mathrm{im}(\aleph)$.

Ainsi $\boxed{\aleph \text{ est surjective dans } C_\infty}$.

Ainsi $\aleph : ON \longrightarrow C_\infty$ est strictement croissante et surjective dans C_∞.

Donc $\boxed{\aleph \text{ est un isomorphisme d'ordres de } ON \text{ dans } C_\infty}$ d'après la prop. 79 p. 195.

CQFD.

Remarque :
En particulier on peut appliquer le théorème 10 page 202 : celui-ci nous dit que la classe $\mathrm{fix}(\aleph)$ des points fixes de $\aleph$ est propre. Elle est en particulier non vide ! Ceci signifie qu'il existe des ordinaux ξ tels que $\aleph_\xi = \xi$.

Proposition 112 (Subpotence strict et comparabilité totale)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a $E \preccurlyeq F$ ou $F \prec E$.
2. On a l'équivalence $E \not\preccurlyeq F \iff F \prec E$.

Démonstration

1. D'après le théorème 16 page 270, on a $E \preccurlyeq F$ ou $F \preccurlyeq E$.

Supposons que $E \not\preccurlyeq F$.

On a donc $F \preccurlyeq E$ par ce qui précède.

Or on a $E \approx F \implies E \preccurlyeq F$ d'après la proposition 87 page 213.

On a donc $E \not\preccurlyeq F \implies E \not\approx F$ par contraposition.

On a donc $E \not\approx F$ par modus ponens.

Comme $F \preccurlyeq E$, on a donc $F \prec E$ par définition de $\prec$.

On a donc l'implication $E \not\preccurlyeq F \Rightarrow F \prec E$.

Autrement dit on a $\big(\mathrm{non}(E \not\preccurlyeq F) \text{ ou } F \prec E\big)$, c'est-à-dire $\boxed{\big(E \preccurlyeq F \text{ ou } F \prec E\big)}$.

2. On a montré juste avant que l'on a l'implication $E \not\preccurlyeq F \Rightarrow F \prec E$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que l'on a $F \prec E$.

On a donc $F \preccurlyeq E$ et $F \not\approx E$ par définition de $\prec$.

Supposons par l'absurde que l'on a $E \preccurlyeq F$.

On a donc $E \approx F$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

C'est absurde puisqu'on a justement dit que $E \not\approx F$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $E \not\preccurlyeq F$.

On a donc l'implication $F \prec E \Rightarrow E \not\preccurlyeq F$.

Finalement, on a l'équivalence $\boxed{E \not\preccurlyeq F \iff F \prec E}$.

CQFD.

4 Opérations sur les cardinaux

Les nombres cardinaux ont pour fonction de compter le nombre d'éléments. Par exemple si $E := \{a, b, c\}$, on peut le mettre en bijection avec $3 = \{0, 1, 2\}$ en posant $f : E \longrightarrow 3$ définie par $f(a) = 0$, $f(b) = 1$ et $f(c) = 2$ par exemple, si bien que $E \approx 3$. Comme 3 est un entier naturel, c'est un cardinal d'après le théorème 13 page 247 et donc $\mathrm{card}(E) = 3$, comme on pouvait s'y attendre.

Les ensembles finis, ce sont les ensembles dont le cardinal est un entier naturel, comme E ci-dessus. Ce sont les ensembles avec lesquels on est le plus familier, au contraire des ensembles infinis qui peuvent être plus paradoxaux. Nous reviendrons proprement sur la notion d'ensembles finis un peu plus tard, mais nous allons nous servir d'eux pour nourrir notre intuition du comportement des cardinaux vis à vis de certaines opérations ensemblistes. Pour E et F deux ensembles finis, nous allons nous demander par exemple si l'on peut exprimer $\mathrm{card}(E \cup F)$ à l'aide de $\mathrm{card}(E)$ et de $\mathrm{card}(F)$.

Nous allons être amenés à définir l'addition, la multiplication et l'exponentiation chez les nombres cardinaux. Cela peut prêter à confusion : les cardinaux sont des cas particuliers d'ordinaux, et lors du chapitre 2 on a justement défini des opérations sur les ordinaux. Oui, mais ici nous allons définir de nouvelles opérations spécifiquement sur les cardinaux, qui ne vont pas forcément donner le même résultat que celles sur les ordinaux. L'objectif de ces nouvelles opérations est de traduire certains comportements que les quantités d'éléments peuvent adopter. Pour bien distinguer les deux, nous allons introduire de nouvelles notations. Dans toute la suite, pour α et β deux ordinaux, on notera :

- $\alpha \overset{\mathcal{O}}{+} \beta$ pour signifier l'addition ordinale de α par β.
- $\alpha \overset{\mathcal{O}}{\cdot} \beta$ pour signifier la multiplication ordinale de α par β.
- $\alpha^{\mathcal{O}\beta}$ pour signifier l'exponentiation ordinale de α par β.

Désormais quand nous utiliserons le symbole $+$, il faudra le comprendre comme l'addition des cardinaux que nous allons définir sous peu, à ne pas confondre avec $\overset{\mathcal{O}}{+}$ l'addition des ordinaux définie au chapitre 2.

Rassurez-vous cependant : pour a et b deux entiers naturels, nous verrons que cela donne toujours la même chose. On aura donc $a \overset{\mathcal{O}}{+} b = a + b$, ainsi que $a \overset{\mathcal{O}}{\cdot} b = a \cdot b$ et $a^{\mathcal{O}b} = a^b$. Ainsi, pour des quantités finies, tout coïncide et il n'y a pas de question à sa poser, en tout cas c'est ce que nous monterons un peu plus tard.

L'addition des cardinaux

Comment se comporte le cardinal de l'union de deux ensembles finis ? Si l'on prend $F := \{d, e\}$, alors $\mathrm{card}(F) = 2$. On a $E \cup F = \{a, b, c, d, e\}$ et donc $\mathrm{card}(E \cup F) = 5$. Il semblerait donc que le cardinal de l'union, ce soit la somme des cardinaux, puisque c'est également $\mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(F) = 3 + 2 = 5$. Malheureusement ce n'est pas toujours le cas. Prenons par exemple $G := \{c, d\}$. On a alors $\mathrm{card}(G) = 2$ tout comme F. Cependant, on a $E \cup G = \{a, b, c, d\}$ et donc $\mathrm{card}(E \cup G) = 4$ qui n'est pas $\mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(G)$. Cela vient du fait qu'il y a des éléments en commun à E et à G : le c n'apparaît qu'une seule fois, puisqu'on ne compte pas le nombre d'occurrences d'un élément dans un ensemble.

Finalement, tout ce que l'on peut dire c'est que $\mathrm{card}(E \cup G) \leq \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(G)$. Cependant, nous avons développée la notion d'union disjointe lors du chapitre 2 qui avait pour objectif d'empêcher d'écraser les éléments en commun en marquant d'une certaine manière la provenance de l'ensemble. Ainsi ici $E \amalg G = \big\{(0,a),(0,b),(0,c),(1,c),(1,d)\big\}$, le $(0,c)$ représentant le c en provenance de E et le $(1,c)$ celui en provenance de G. On constate logiquement qu'ici $\mathrm{card}(E \amalg G) = 5 = \mathrm{card}(E) + \mathrm{card}(G)$ et cette fois cette observation n'est jamais mise en échec ! Nous allons partir de ce constat pour définir l'addition de deux cardinaux quelconques, même infinis ! En effet, pour κ et λ deux cardinaux, nous poserons simplement que $\kappa + \lambda := \mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda)$.

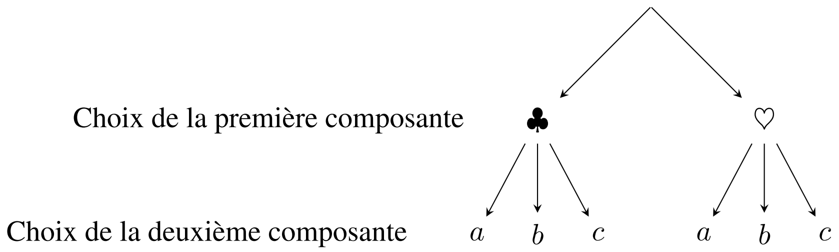
La multiplication des cardinaux

Comment se comporte le cardinal des ensembles finis vis à vis du produit cartésien de ceux-ci ? Posons $A := \{\clubsuit, \heartsuit\}$ et reprenons $E := \{a,b,c\}$. On a alors

$$A \times E = \big\{(\clubsuit,a),(\clubsuit,b),(\clubsuit,c),(\heartsuit,a),(\heartsuit,b),(\heartsuit,c)\big\}$$

Ainsi pour chaque élément de A, on retrouve en quelque sorte une copie de E : $\clubsuit$ se retrouve devant a, devant b et devant c, et il en va de même pour $\heartsuit$. Il y a donc autant de copies de E que d'éléments dans A : le cardinal de $A \times E$, c'est celui de E répété pour chaque élément de A, c'est donc la multiplication $\mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(E)$.

On peut aussi le constater à l'aider d'un arbre : il faut choisir entre $\clubsuit$ et $\heartsuit$ pour la première composante puis entre a, b et c pour la deuxième composante :

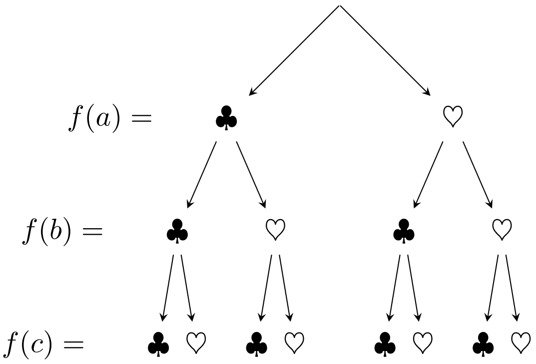


Pour connaître le nombre de feuilles de l'arbre, on multiplie le nombre d'embranchements au premier niveau par le nombre d'embranchements au second niveau. On constate ainsi que $\mathrm{card}(A \times E) = 6 = 2 \cdot 3 = \mathrm{card}(A) \cdot \mathrm{card}(E)$. Si l'on souhaite généraliser cela à deux cardinaux quelconques κ et λ, on va donc poser $\kappa \cdot \lambda := \mathrm{card}(\kappa \times \lambda)$. Encore une fois ici il ne faut pas confondre :

- ▶ $\kappa \times \lambda$ qui est le produit cartésien de κ par λ, c'est une opération ensembliste qui donne un ensemble de couples.
- ▶ $\kappa \cdot \lambda$ qui est la multiplication cardinale que l'on vient de définir.
- ▶ $\kappa \overset{\mathcal{O}}{\cdot} \lambda$ qui est la multiplication ordinale que l'on a définie au chapitre 2 et dont on vient de changer le symbole pour éviter des confusions.

L'exponentiation des cardinaux

Enfin, pour la dernière des trois opérations, intéressons-nous toujours à $E := \{a, b, c\}$ et $A := \{\clubsuit, \heartsuit\}$. Combien d'applications $E \longrightarrow A$ peut-on définir ? Pour définir une telle application f, il faut choisir les images $f(a)$, $f(b)$ et $f(c)$, et pour chacune d'entre elles ont dispose de 2 choix, à savoir $\clubsuit$ ou $\heartsuit$. On peut de nouveau raisonner en se servant d'un arbre représentant le choix de chaque image :



Ici encore, pour connaître le nombre de feuilles tout en bas de l'arbre, on va multiplier le nombre d'embranchements tout en haut par le nombre d'embranchements intermédiaires et enfin par le nombre d'embranchements finaux, c'est-à-dire $2 \cdot 2 \cdot 2$, ou encore 2^3, c'est-à-dire $\mathrm{card}(A)^{\mathrm{card}(E)}$. Ceci justifie d'ailleurs la notation A^E pour l'ensemble $\mathcal{F}(E \to A)$, de sorte que $\mathrm{card}(A^E) = \mathrm{card}(A)^{\mathrm{card}(E)}$. Par exemple, l'ensemble des suites réelles est souvent noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Prenons bien garde au fait que l'ensemble de départ est en exposant !

Si l'on souhaite généraliser cela à des cardinaux quelconques κ et λ, on va donc poser $\kappa^\lambda := \mathrm{card}\big(\mathcal{F}(\lambda \to \kappa)\big)$. On récapitule tout ceci dans la définition qui suit.

Définition 39 (Opérations sur les cardinaux)

Soient κ et λ deux cardinaux.
On pose

1. $\kappa + \lambda := \mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda)$
2. $\kappa \cdot \lambda := \mathrm{card}(\kappa \times \lambda)$ où $\times$ est le produit cartésien.
3. $\kappa^\lambda = \mathrm{card}\big(\mathcal{F}(\lambda \to \kappa)\big)$

Nous l'avons dit, les opérations cardinales que nous venons de définir n'ont a priori pas de raison de coïncider avec les opérations ordinales abordées au chapitre 2. Heureusement, dans le cas des entiers naturels, tout va bien !

Proposition 113 (Coïncidence chez les entiers naturels)

Soient n et m deux entiers naturels.

1. On a $n + m = n \overset{\mathcal{O}}{+} m$
2. On a $n \cdot m = n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m$
3. On a $n^m = n^{\mathcal{O}m}$

Autrement dit, les opérations cardinales et ordinales coïncident chez les entiers naturels.

Démonstration

1. D'après le théorème 7 page 130, on a $n \overset{\mathcal{O}}{+} m = \mathrm{type}(n \amalg m)$.

Or $n \overset{\mathcal{O}}{+} m$ est un entier naturel d'après la proposition 40 page 106.

Donc $n \overset{\mathcal{O}}{+} m$ est un cardinal d'après le théorème 13 page 247.

Donc $\mathrm{type}(n \amalg m)$ est un cardinal.

Or $n \amalg m$ et $\mathrm{type}(n \amalg m)$ sont équipotents d'après la proposition 106 page 252.

Donc $\mathrm{card}(n \amalg m) = \mathrm{type}(n \amalg m)$ et donc $\mathrm{card}(n \amalg m) = n \overset{\mathcal{O}}{+} m$.

Or par définition $n + m = \mathrm{card}(n \amalg m)$, si bien que $\boxed{n + m = n \overset{\mathcal{O}}{+} m}$.

2. D'après le théorème 8 page 153, on a $n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m = \mathrm{type}(n \times m)$.

Or $n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m$ est un entier naturel d'après la proposition 55 page 139 .

Donc $n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m$ est un cardinal d'après le théorème 13 page 247.

Donc $\mathrm{type}(n \times m)$ est un cardinal.

Or $n \times m$ et $\mathrm{type}(n \times m)$ sont équipotents d'après la proposition 106 page 252.

Donc $\mathrm{card}(n \times m) = \mathrm{type}(n \times m)$ et donc $\mathrm{card}(n \times m) = n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m$.

Or par définition $n \cdot m = \mathrm{card}(n \times m)$, si bien que $\boxed{n \cdot m = n \overset{\mathcal{O}}{\cdot} m}$.

3. D'après le théorème 9 page 178, on a $n^{\mathcal{O}m} = \mathrm{type}\big(\mathrm{sf}(m \to n)\big)$.

Montrons que $\mathrm{sf}(m \to n) = \mathcal{F}(m \to n)$.

Par définition, on sait déjà que $\mathrm{sf}(m \to n) \subseteq \mathcal{F}(m \to n)$.

Soit $f : m \longrightarrow n$.

Posons $S := \mathrm{supp}(f)$ et montrons que S est de type fini.

On a $S \subseteq m$ donc $\mathrm{type}(S) \leq \mathrm{type}(m)$ d'après la proposition 28 page 68.

Or m est un ordinal donc $\mathrm{type}(m) = m$ et donc $\mathrm{type}(S) \leq m$.

Or m est un entier naturel.

Donc $\mathrm{type}(S)$ est un entier naturel d'après la proposition 16 page 45.

Ainsi $\mathrm{type}(S)$ est fini donc f est à support fini, donc $f \in \mathrm{sf}(m \to n)$.

On a donc $\mathrm{sf}(m \to n) \supseteq \mathcal{F}(m \to n)$ et donc $\mathrm{sf}(m \to n) = \mathcal{F}(m \to n)$.

En particulier on a $n^{\mathcal{O}m} = \mathrm{type}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big)$.

Or $n^{\mathcal{O}m}$ est un entier naturel d'après la proposition 66 page 160.

Donc $n^{\mathcal{O}m}$ est un cardinal d'après le théorème 13 page 247.

Donc $\mathrm{type}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big)$ est un cardinal.

Or $\mathcal{F}(m \to n)$ et $\mathrm{type}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big)$ sont équipotents d'après la proposition 106 page 252.

Donc $\mathrm{card}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big) = \mathrm{type}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big)$ et donc $\mathrm{card}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big) = n^{\mathcal{O}m}$.

Or par définition $n^m = \mathrm{card}\big(\mathcal{F}(m \to n)\big)$, si bien que $\boxed{n^m = n^{\mathcal{O}m}}$.

CQFD.

Comme nous l'avons dit, dès qu'un des deux cardinaux est infinis, il n'y a plus de raison que ça coïncide. Prenons l'exemple de l'exponentiation. Rappelons-nous que pour tout entier naturel n, on a $2^{\mathcal{O}n} \in \mathbb{N}$ d'après la proposition 66 page 160. Autrement dit

$$\forall n < \omega, 2^{\mathcal{O}n} < \omega$$

Par minimalité de la borne supérieure, on a donc

$$\sup_{n<\omega} 2^{\mathcal{O}n} \leq \omega$$

Or ω est un ordinal limite non nul, donc par définition de l'exponentiation ordinale on a

$$2^{\mathcal{O}\omega} = \sup_{n<\omega} 2^{\mathcal{O}n}$$

ce qui permet de dire que

$$2^{\mathcal{O}\omega} \leq \omega$$

On pourrait montrer qu'on a exactement $2^{\mathcal{O}\omega} = \omega$, mais l'inégalité nous suffit déjà pour conclure : en effet on a en particulier $2^{\mathcal{O}\omega} \preccurlyeq \omega$ d'après la proposition 100 page 243. En se rappelant qu'on a aussi introduit les notations $\omega = \mathbb{N} = \aleph_0$, on a donc $2^{\mathcal{O}\aleph_0} \preccurlyeq \mathbb{N}$. D'après le théorème de Cantor, on a $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$ et donc $2^{\mathcal{O}\aleph_0} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$. Pourtant, avec l'exponentiation cardinale, on a le résultat suivant.

Proposition 114 (Cardinal des parties d'un ensemble)

1. Pour tout ensemble E, on a $\mathrm{card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^{\mathrm{card}(E)}$.
2. En particulier $\mathrm{card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = 2^{\aleph_0}$.

Démonstration

1. Posons $\kappa := \operatorname{card}(E)$.
Par définition de l'exponentiation cardinale, on a $2^\kappa = \operatorname{card}\big(\mathcal{F}(\kappa \to 2)\big)$.
En particulier on a $2^\kappa \approx \mathcal{F}(\kappa \to 2)$ par définition du cardinal.

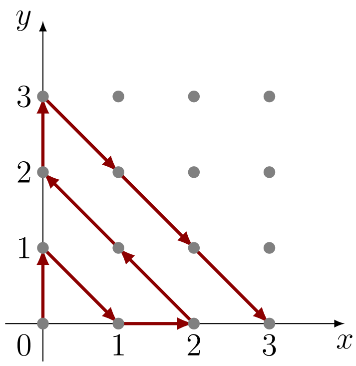
Mais $\kappa = \operatorname{card}(E)$ donc $\kappa \approx E$ par définition du cardinal.
On a aussi $2 \approx 2$ par réflexivité de $\approx$.
On a donc $\mathcal{F}(\kappa \to 2) \approx \mathcal{F}(E \to 2)$ d'après la proposition 98 page 236.
On a donc $2^\kappa \approx \mathcal{F}(E \to 2)$ par transitivité de $\approx$.

Enfin, on a $\mathcal{F}(E \to 2) \approx \mathscr{P}(E)$ d'après la proposition 92 page 226.
On a donc $2^\kappa \approx \mathscr{P}(E)$ par transitivité de $\approx$.
Or 2^κ est un cardinal par définition, donc $2^\kappa = \operatorname{card}\big(\mathscr{P}(E)\big)$ par définition du cardinal.
Enfin comme $\kappa = \operatorname{card}(E)$, on a donc $\boxed{\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(E)\big) = 2^{\operatorname{card}(E)}}$.

2. D'après 1, on a $\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{N})}$.
Or $\mathbb{N}$ est un cardinal d'après le théorème 13 page 247.
On a donc $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, et comme on l'a aussi noté $\aleph_0$, on a bien $\boxed{\operatorname{card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = 2^{\aleph_0}}$.
CQFD.

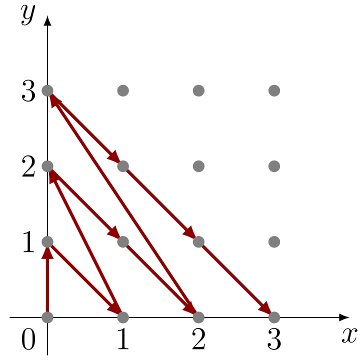
Ainsi $2^{\aleph_0} \approx \mathscr{P}(\mathbb{N})$, et donc d'après ce que l'on a dit plus tôt, $2^{\mathcal{O}\aleph_0} \prec 2^{\aleph_0}$. Pour montrer que cette différence est la règle plutôt que l'exception, observons à présent un théorème très important pour toute la suite : multiplier un cardinal infini par lui-même redonne ce même cardinal.

Par exemple $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Autrement dit, $\operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \operatorname{card}(\mathbb{N})$, c'est-à-dire qu'on peut réaliser une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ lui-même. Dans ce cas précis, il s'agit de pouvoir lister les couples d'entiers naturels. On peut s'en convaincre avec le dessin suivant :



On voit qu'en zigzagant ainsi, on va bien parcourir tous les points gris et donc tous les lister. La bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ va simplement associer à $n \in \mathbb{N}$ le $n^{\text{ème}}$ point parcouru.

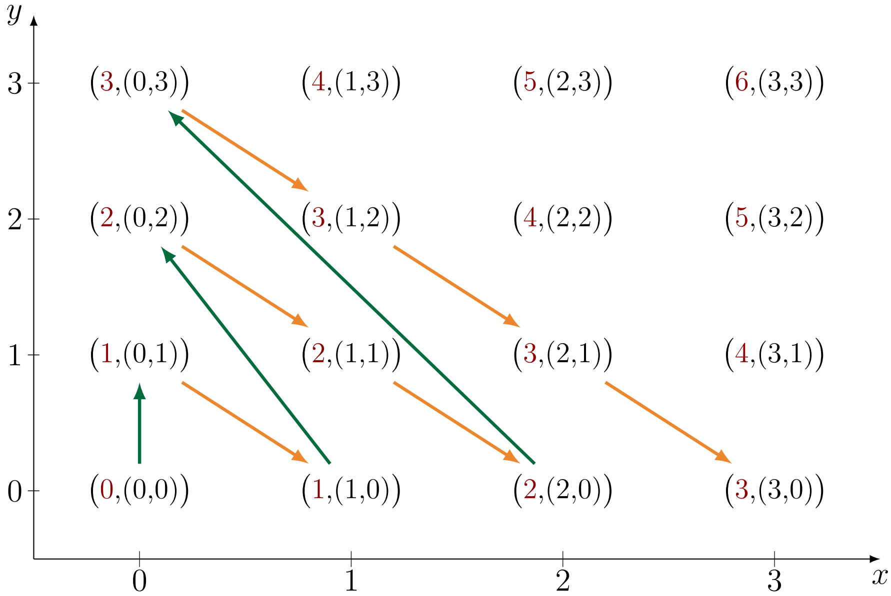
Dans la preuve du théorème qui va suivre, un étrange ordre intervient. Pour tenter de le justifier le plus intuitivement possible, voici une autre proposition de parcours de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, toujours en zigzag, mais en commençant cette fois chaque diagonale par le haut :



Intéressons-nous alors à l'ordre dans lequel chaque point est parcouru. On l'a dit, c'est un parcours en diagonales :

— d'abord le singleton $\{(0,0)\}$, que l'on peut voir comme une diagonale,
— puis la diagonale $\{(0,1),(1,0)\}$,
— vient ensuite la diagonale $\{(0,2),(1,1),(2,0)\}$,
— suivie de la diagonale $\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$,

et ainsi de suite. Quelle caractéristique commune partagent chaque point d'une même diagonale ? Au sein d'une même diagonale, la somme des coordonnées est constante ! Pour s'en rendre compte, on a ici représenté chaque point par ses coordonnées (x,y), mais on a aussi précisé en rouge la somme de ses deux coordonnées, de sorte que l'on a représenté chaque point sous la forme $\big(x+y,(x,y)\big)$



Le fait d'avoir représenté en première composante (en rouge) la somme des deux coordonnées fait que l'on a en quelque sorte plongé chaque point de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ par l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ (x,y) & \longmapsto & \big(x+y,(x,y)\big) \end{array}$$

On remarque alors deux choses : premièrement au sein d'une diagonale, on parcourt les points dans l'ordre lexicographique ! Dans la quatrième diagonale par exemple les points sont parcourus dans l'ordre $(0,3) \trianglelefteq (1,2) \trianglelefteq (2,1) \trianglelefteq (3,0)$. Deuxièmement, le passage d'une diagonale à la suivante se fait en augmentant de 1 la somme des coordonnées. Cela fait qu'une fois plongés dans $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, on parcourt là aussi les points dans l'ordre lexicographique ! En effet, le début du parcourt donne :

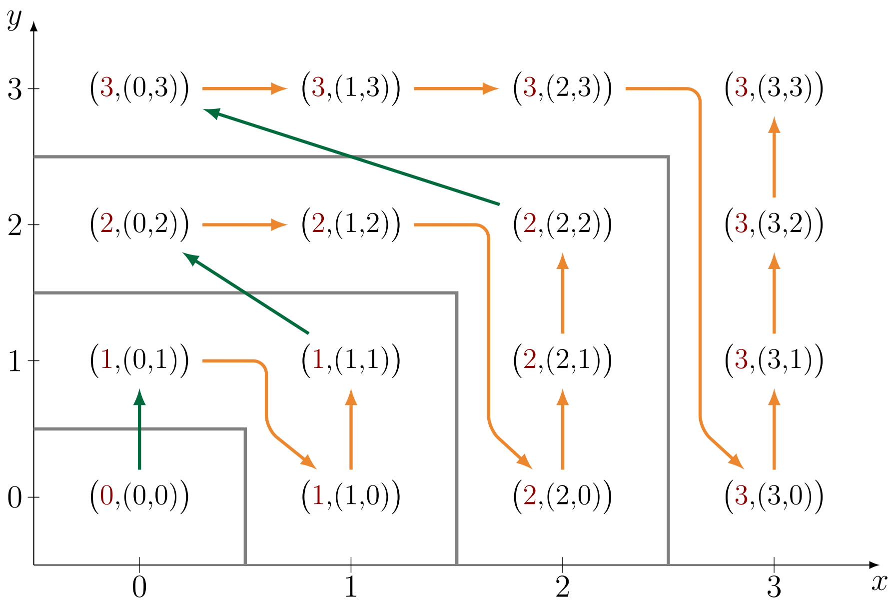
$$\big(0,(0,0)\big) \trianglelefteq \big(1,(0,1)\big) \trianglelefteq \big(1,(1,0)\big) \trianglelefteq \big(2,(0,2)\big) \trianglelefteq \big(2,(1,1)\big) \trianglelefteq \big(2,(2,0)\big) \trianglelefteq \dots$$

On peut donc représenter notre parcours de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (et donc la bijection avec $\mathbb{N}$) après avoir plongé (via la somme des coordonnées) dans $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et en ayant mis l'ordre lexicographique sur ce dernier.

On aurait cependant pu plonger différemment qu'en prenant la somme, par exemple en prenant le maximum ! Ainsi, on plongerait cette fois via l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \\ (x,y) & \longmapsto & \big(\max(x,y),(x,y)\big) \end{array}$$

Toujours en parcourant les points dans l'ordre lexicographique de $\mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, on obtient alors le tracé suivant :



Cette fois-ci ce ne sont plus des regroupements par diagonales, mais plutôt en forme de L retourné, ces regroupements sont ceux pour lesquels le maximum des deux coordonnées est constant. Pour autant, on se laisse convaincre sans trop de difficultés que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sera de cette manière entièrement parcouru. C'est donc l'idée derrière le plongement par le maximum utilisé dans la preuve du théorème ci-dessous. Notez au passage que l'on prouvera justement que pour deux cardinaux κ et λ, si au moins l'un des deux est infinis, alors $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$. C'est donc d'une certaine manière presque le plongement par la somme !

Théorème 19 (Multiplication par lui-même d'un cardinal infini)

Soit κ un cardinal **infini**.
Alors $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Démonstration

• Par définition de la multiplication cardinale, on a $\kappa \cdot \kappa = \mathrm{card}(\kappa \times \kappa)$.
Il nous faut donc montrer que $\kappa \times \kappa \approx \kappa$.
Nous allons à cet effet munir $\kappa \times \kappa$ d'un ordre un peu particulier.

• Pour cela, comme d'ordinaire munissons κ de $\leq$ l'ordre ordinal.
Munissons alors $\kappa \times \kappa$ de l'ordre lexicographique associé $\trianglelefteq$.
Alors $(\kappa \times \kappa, \trianglelefteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 5 page 17.
En ayant munit κ de $\leq$ et $\kappa \times \kappa$ de $\trianglelefteq$, on munit $\kappa \times (\kappa \times \kappa)$ de l'ordre lexicographique associé $\sqsubseteq$, c'est en quelque sorte un super ordre lexicographique.
Comme $\leq$ et $\trianglelefteq$ sont de bons ordres, $\sqsubseteq$ est un bon ordre d'après la proposition 5 page 17.
L'idée va être de s'en servir pour construire un deuxième ordre $\unlhd$ sur $\kappa \times \kappa$, qui lui va nous être utile.

Posons alors $g := \begin{pmatrix} \kappa \times \kappa & \longrightarrow & \kappa \times (\kappa \times \kappa) \\ (\alpha, \beta) & \longmapsto & \big(\max(\alpha, \beta), (\alpha, \beta)\big) \end{pmatrix}$.
Montrons que g est injective.

Soient (α, β) et (α', β') dans $\kappa \times \kappa$ tels que $g(\alpha, \beta) = g(\alpha', \beta')$.
On a alors $\big(\max(\alpha, \beta), (\alpha, \beta)\big) = \big(\max(\alpha', \beta'), (\alpha', \beta')\big)$.
En particulier $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$.

Donc $g : \kappa \times \kappa \longrightarrow \kappa \times (\kappa \times \kappa)$ est injective.
Posons $A := \mathrm{im}(g)$, de sorte que $g : \kappa \times \kappa \longrightarrow A$ est bijective.
On pose alors pour tout (α, β) et (α', β') dans $\kappa \times \kappa$:

$$(\alpha, \beta) \unlhd (\alpha', \beta) \iff g(\alpha, \beta) \sqsubseteq g(\alpha', \beta')$$

D'après le premier livre, $\unlhd$ est une relation d'ordre sur $\kappa \times \kappa$.
De plus, $g : (\kappa \times \kappa, \unlhd) \longrightarrow (A, \sqsubseteq)$ est un isomorphisme d'ordres.
Donc $g^{-1} : (A, \sqsubseteq) \longrightarrow (\kappa \times \kappa, \unlhd)$ est un isomorphisme d'ordres.
Or $(A, \sqsubseteq)$ est bien ordonné d'après la proposition 4 page 16.
Donc $(\kappa \times \kappa, \unlhd)$ est bien ordonné d'après la proposition 23 page 56.
Notons que $\unlhd$ induit un ordre sur tous les $B \times B$ avec $B \subseteq \kappa$, donc en particulier sur les $\alpha \times \alpha$ avec α un ordinal tel que $\alpha \leq \kappa$.

• Montrons que $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa, \unlhd) = \kappa$.

Supposons par l'absurde que $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa, \unlhd) \neq \kappa$.
Soit κ_0 le plus petit cardinal infini tel que $\mathrm{type}(\kappa_0 \times \kappa_0, \unlhd) \neq \kappa_0$.

Soit α un ordinal tel que $\alpha < \kappa_0$.

- Plaçons-nous dans le cas où α est fini.
  Alors $\alpha \cdot \alpha = \alpha \overset{\mathcal{O}}{\cdot} \alpha$ d'après la proposition 113 page 283.
  Or $\alpha \overset{\mathcal{O}}{\cdot} \alpha$ est fini d'après la proposition 55 page 139.
  Donc $\alpha \cdot \alpha$ est fini, mais κ_0 est infini.
  On a donc $\alpha \cdot \alpha < \kappa_0$, et on a $\alpha \cdot \alpha = \mathrm{card}(\alpha \times \alpha)$ par définition.
  On a donc $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) < \kappa_0$.

- Plaçons-nous dans le cas où α est infini.
  Posons alors $\lambda := \mathrm{card}(\alpha)$.
  Par définition du cardinal, λ est un cardinal et $\lambda \approx \alpha$.
  Par définition d'être un cardinal, on a donc $\lambda \leq \alpha$, et donc $\lambda \leq \alpha < \kappa_0$.
  Par minimalité de κ_0, on a donc $\mathrm{type}(\lambda \times \lambda, \trianglelefteq) = \lambda$.
  Donc $\lambda \times \lambda$ et λ sont équipotents d'après la proposition 106 page 252.
  Comme λ est un cardinal, on a $\mathrm{card}(\lambda \times \lambda) = \lambda$.
  Comme $\lambda < \kappa_0$, on a donc $\mathrm{card}(\lambda \times \lambda) < \kappa_0$.
  Or $\lambda = \mathrm{card}(\alpha)$, donc $\lambda \approx \alpha$.
  Donc $\lambda \times \lambda \approx \alpha \times \alpha$ d'après la proposition 93 page 228.
  Donc $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) = \mathrm{card}(\lambda \times \lambda)$ d'après la prop. 107 p. 253.
  On a donc $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) < \kappa_0$.

Dans tous les cas, on a $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) < \kappa_0$.

On a donc $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) \prec \kappa_0$ car κ_0 est un cardinal.

Ainsi pour tout ordinal $\alpha < \kappa_0$, on a $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) \prec \kappa_0$.

Notons $(\star)$ cette assertion.

Posons $\delta := \mathrm{type}(\kappa_0 \times \kappa_0, \trianglelefteq)$.

Comme les ordinaux sont totalement ordonnés, on a $(\delta = \kappa_0$ ou $\delta < \kappa_0$ ou $\kappa_0 < \delta)$.

Par définition de κ_0 on a $\delta \neq \kappa_0$ donc $(\delta < \kappa_0$ ou $\kappa_0 < \delta)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\delta < \kappa_0$.
  Comme κ_0 est un cardinal, on a $\delta \prec \kappa_0$.
  Or $\kappa_0 \preccurlyeq \kappa_0 \times \kappa_0$ d'après la proposition 93 page 228.
  De plus $\kappa_0 \times \kappa_0 \approx \delta$ d'après la proposition 106 page 252.
  Ainsi $\kappa_0 \preccurlyeq \kappa_0 \times \kappa_0 \approx \delta$ donc $\kappa_0 \preccurlyeq \delta$ d'après la proposition 89 page 222.
  Ainsi $\kappa_0 \preccurlyeq \delta \prec \kappa_0$ donc $\kappa_0 \prec \kappa_0$ d'après la même proposition.
  En particulier $\kappa_0 \not\approx \kappa_0$, ce qui est absurde par réflexivité de $\approx$.

- Plaçons-nous dans le cas où $\kappa_0 < \delta$.
  On a alors $\kappa_0 \in \delta$ par définition de $<$ chez les ordinaux.

Il existe $f : \delta \longrightarrow (\kappa_0 \times \kappa_0, \trianglelefteq)$ un isomorphisme par définition du type.

Alors $\kappa_0 \in \delta = \mathrm{dom}(f)$ donc on peut considérer $f(\kappa_0) \in \kappa_0 \times \kappa_0$.

Posons $(\xi, \zeta) := f(\kappa_0)$, si bien que $\xi \in \kappa_0$ et $\zeta \in \kappa_0$.

Ainsi $\xi < \kappa_0$ et $\zeta < \kappa_0$ par définition de $<$, donc $\max(\xi, \zeta) < \kappa_0$.

Posons alors $\alpha := \max(\xi, \zeta) + 1$.

Or κ_0 est un cardinal **infini** donc κ_0 est limite d'après le théorème 13 page 247.

On a donc $\alpha < \kappa_0$ d'après la proposition 15 page 44.

On a donc $\mathrm{card}(\alpha \times \alpha) \prec \kappa_0$ d'après $(\star)$.

Notons $(\star\star)$ ce fait.

Montrons que $f^{\rightarrow}(\kappa_0) \subseteq \alpha \times \alpha$.

Soit $y \in f^{\rightarrow}(\kappa_0)$.

Il existe alors un ordinal $\gamma \in \kappa_0$ tel que $y = f(\gamma)$.

On a donc $\gamma < \kappa_0$ par définition de $<$ chez les ordinaux.

f est un isomorphisme d'ordres donc est croissant, et donc $f(\gamma) \trianglelefteq f(\kappa_0)$.

Or f est à valeurs dans $\kappa_0 \times \kappa_0$.

Il existe donc $\mu \in \kappa_0$ et $\nu \in \kappa_0$ tels que $f(\gamma) = (\mu, \nu)$.

On a donc $\mu < \kappa_0$ et $\nu < \kappa_0$ par définition de $<$.

Comme $f(\gamma) \trianglelefteq f(\kappa_0)$, on a donc $(\mu, \nu) \trianglelefteq (\xi, \zeta)$.

Par définition de $\trianglelefteq$ on a donc $\big(\max(\mu, \nu), (\mu, \nu)\big) \sqsubseteq \big(\max(\xi, \zeta), (\xi, \zeta)\big)$.

En particulier on a $\max(\mu, \nu) \leq \max(\xi, \zeta)$ par définition de $\sqsubseteq$.

On a donc $\max(\mu, \nu) < \max(\xi, \zeta) + 1 = \alpha$ donc $\mu < \alpha$ et $\nu < \alpha$.

Ainsi $\mu \in \alpha$ et $\nu \in \alpha$ donc $y = f(\gamma) = (\mu, \nu) \in \alpha \times \alpha$.

On a donc $f^{\rightarrow}(\kappa_0) \subseteq \alpha \times \alpha$.

On a donc $f^{\rightarrow}(\kappa_0) \preccurlyeq \alpha \times \alpha$ d'après la proposition 88 page 214.

Or f est un isomorphisme d'ordres donc en particulier f est injectif.

Donc $f_{|\kappa_0}$ est injectif, donc $f_{|\kappa_0} : \kappa_0 \longrightarrow f^{\rightarrow}(\kappa_0)$ est bijectif.

Ainsi $\kappa_0 \approx f^{\rightarrow}(\kappa_0)$ et donc $\kappa_0 \preccurlyeq \alpha \times \alpha$ d'après la proposition 89 page 222.

C'est absurde puisque d'après $(\star\star)$ on a justement $\alpha \times \alpha \prec \kappa_0$.

Ainsi dans les deux cas on aboutit à une absurdité.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\mathrm{type}(\kappa \times \kappa, \trianglelefteq) = \kappa$.

On a donc $\kappa \times \kappa \approx \kappa$ d'après la proposition 106 page 252.

On a donc $\mathrm{card}(\kappa \times \kappa) = \mathrm{card}(\kappa)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or κ est un cardinal et $\kappa \cdot \kappa = \mathrm{card}(\kappa \times \kappa)$ par définition.

On a donc $\boxed{\kappa \cdot \kappa = \kappa}$.

CQFD.

Nous avons vu que si κ et λ deux cardinaux finis, alors les opérations cardinales coïncident avec les opérations ordinales. Cependant, si au moins l'un des deux est infini, alors l'addition et la multiplication cardinales perdent de leur intérêt. En effet, on a les résultats suivants.

Proposition 115 (Addition et multiplication de cardinaux infinis)

Soient κ et λ deux cardinaux, dont au moins l'un des deux est **infini**.
On a alors :

1. $\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)$
2. Si κ et λ sont **non nuls** alors $\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)$.

Démonstration

Plaçons-nous dans le cas où $\kappa \leq \lambda$.

Comme au moins l'un des deux est infinis, λ est infini.

On a donc les équipotences et égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \lambda \times \lambda &\approx \operatorname{card}(\lambda \times \lambda) \text{ par définition du cardinal} \\ &= \lambda \cdot \lambda \text{ par définition de la multiplication cardinale} \\ &= \lambda \text{ d'après le théorème 19 page 287} \end{aligned}$$

et donc $\lambda \times \lambda \approx \lambda$.

Notons $(\star)$ ce fait.

1. On a $\lambda \subseteq \kappa \cup \lambda$.

On a donc $\lambda \underset{88 \text{ p. } 214}{\preccurlyeq} \kappa \cup \lambda \underset{94 \text{ p. } 229}{\preccurlyeq} \kappa \amalg \lambda$ et donc $\lambda \preccurlyeq \kappa \amalg \lambda$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Montrons que $\kappa \amalg \lambda \preccurlyeq \lambda \times \lambda$.

> Soit (i, α) dans $\kappa \amalg \beta$.
>
> Si $i = 0$ alors $\alpha \in \kappa$ donc $\alpha < \kappa$ et comme $\kappa \leq \lambda$, on a $\alpha < \lambda$.
>
> Si $i = 1$ alors $\alpha \in \lambda$ donc $\alpha < \lambda$.
>
> Dans les deux cas on a donc $\alpha < \lambda$.
>
> Or λ est un cardinal **infini** donc est limite d'après le théorème 13 page 247.
>
> On a donc $\alpha + 1 < \lambda$, c'est-à-dire $\alpha + 1 \in \lambda$.
>
> De même λ est infini donc $0 < \lambda$, c'est-à-dire $0 \in \lambda$.
>
> On a donc $(\alpha + 1, 0) \in \lambda \times \lambda$ et $(0, \alpha + 1) \in \lambda \times \lambda$.

On peut donc considérer $f := \left(\begin{array}{ccc} \kappa \amalg \lambda & \longrightarrow & \lambda \times \lambda \\ (i, \alpha) & \longmapsto & \begin{cases} (\alpha+1, 0) & \text{si } i = 0 \\ (0, \alpha+1) & \text{si } i = 1 \end{cases} \end{array}\right)$.

Montrons que f est injective.

Soient (i, α) et (j, β) dans $\kappa \amalg \lambda$ tels que $f(i, \alpha) = f(j, \beta)$.

- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0 = j$.
  On a alors $(\alpha + 1, 0) = f(i, \alpha) = f(j, \beta) = (\beta + 1, 0)$.
  En particulier $\alpha + 1 = \beta + 1$ donc $\alpha = \beta$ d'après la proposition 14 page 40.
  Comme $i = j$ on a donc $(i, \alpha) = (j, \beta)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 1 = j$.
  On a alors $(0, \alpha + 1) = f(i, \alpha) = f(j, \beta) = (0, \beta + 1)$.
  En particulier $\alpha + 1 = \beta + 1$ donc $\alpha = \beta$ d'après la proposition 14 page 40.
  Comme $i = j$ on a donc $(i, \alpha) = (j, \beta)$.
- Plaçons-nous dans le cas où $i = 0$ et $j = 1$.
  On a alors $(\alpha + 1, 0) = f(i, \alpha) = f(j, \beta) = (0, \beta + 1)$.
  En particulier $\alpha + 1 = 0$, donc $\alpha < 0$, ce qui est impossible.
- Le cas où $i = 1$ et $j = 0$ est impossible pour la même raison.

Dans les deux cas possibles, on a $(i, \alpha) = (j, \beta)$.

Donc $f : \kappa \amalg \lambda \longrightarrow \lambda \times \lambda$ est injective et donc $\kappa \amalg \lambda \preccurlyeq \lambda \times \lambda$.

Avec $(\star)$ on a donc montré $\lambda \preccurlyeq \kappa \amalg \lambda \preccurlyeq \lambda \times \lambda \approx \lambda$.

On a donc $\lambda \approx \kappa \amalg \lambda$ par le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

Donc $\mathrm{card}(\lambda) = \mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or λ est un cardinal et $\kappa + \lambda = \mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda)$ par définition.

On a donc $\lambda = \kappa + \lambda$, et comme $\kappa \leq \lambda$, on a $\boxed{\kappa + \lambda = \max(\kappa, \lambda)}$.

2. On est toujours dans le cas où $\kappa \leq \lambda$.

On a alors $\kappa \preccurlyeq \lambda$ d'après la proposition 88 page 214.

De même $\lambda \preccurlyeq \lambda$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

On a donc $\kappa \times \lambda \preccurlyeq \lambda \times \lambda$ d'après la proposition 93 page 228.

De plus avec $(\star)$ on a vu que $\lambda \times \lambda \approx \lambda$.

On a donc $\kappa \times \lambda \preccurlyeq \lambda$ d'après la proposition 89 page 222.

Mais on a aussi $\lambda \preccurlyeq \kappa \times \lambda$ d'après la proposition 93 page 228.

On a donc $\lambda \approx \kappa \times \lambda$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.

On a donc $\mathrm{card}(\lambda) = \mathrm{card}(\kappa \times \lambda)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or λ est un cardinal et $\mathrm{card}(\kappa \times \lambda) = \kappa \cdot \lambda$ par définition.

On a donc $\kappa \cdot \lambda = \lambda$ et comme $\kappa \leq \lambda$, on a donc $\boxed{\kappa \cdot \lambda = \max(\kappa, \lambda)}$.

Le cas où $\lambda \leq \kappa$ se montre exactement de la même manière.

CQFD.

Ainsi les opérations d'addition et de multiplication cardinales manquent d'intérêt dans le cas où au moins l'un des deux cardinaux est infini, puisqu'il s'agit simplement du maximum des deux. Remarquons tout de même que l'on a cette propriété de croissance, que l'on retrouvait aussi chez les ordinaux.

Proposition 116 (Croissance des opérations sur les cardinaux)

Soient κ, λ, σ et θ quatre cardinaux.
On suppose que $\kappa \leq \sigma$ et $\lambda \leq \theta$.

1. On a $\kappa + \lambda \leq \sigma + \theta$.
2. On a $\kappa \cdot \lambda \leq \sigma \cdot \theta$.
3. Supposons que parmi κ et λ, au moins un des deux est **non nul**.
   On a alors $\kappa^\lambda \leq \sigma^\theta$.

Démonstration

1. On a $\kappa \leq \sigma$ et $\lambda \leq \theta$.

On a donc $\kappa \preccurlyeq \sigma$ et $\lambda \preccurlyeq \theta$ d'après la proposition 100 page 243.

On a donc $\kappa \amalg \lambda \preccurlyeq \sigma \amalg \theta$ d'après la proposition 95 page 230.

On a donc $\mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda) \leq \mathrm{card}(\sigma \amalg \theta)$ d'après la proposition 107 page 253.

On a donc $\boxed{\kappa + \lambda \leq \sigma + \theta}$ par définition de l'addition cardinale.

2. On a $\kappa \leq \sigma$ et $\lambda \leq \theta$.

On a donc $\kappa \preccurlyeq \sigma$ et $\lambda \preccurlyeq \theta$ d'après la proposition 100 page 243.

On a donc $\kappa \times \lambda \preccurlyeq \sigma \times \theta$ d'après la proposition 93 page 228.

On a donc $\mathrm{card}(\kappa \amalg \lambda) \leq \mathrm{card}(\sigma \amalg \theta)$ d'après la proposition 107 page 253.

On a donc $\boxed{\kappa \cdot \lambda \leq \sigma \cdot \theta}$ par définition de la multiplication cardinale.

3. On suppose ici que parmi κ et λ, au moins un des deux est non nul.

On a $\kappa \leq \sigma$ et $\lambda \leq \theta$.

On a donc $\kappa \preccurlyeq \sigma$ et $\lambda \preccurlyeq \theta$ d'après la proposition 100 page 243.

On a donc $\mathcal{F}(\lambda \to \kappa) \preccurlyeq \mathcal{F}(\theta \to \sigma)$ d'après la proposition 98 page 236.

On a donc $\mathrm{card}\big(\mathcal{F}(\lambda \to \kappa)\big) \leq \mathrm{card}\big(\mathcal{F}(\theta \to \sigma)\big)$ d'après la proposition 107 page 253.

On a donc $\boxed{\kappa^\lambda \leq \sigma^\theta}$ par définition de l'exponentiation cardinale.

CQFD.

On a vu lors du chapitre 2 que les opérations ordinales ne sont pas commutatives. On a cependant vu peu après que dans le cas des entiers naturels, l'addition et la multiplication sont bel et bien commutatives. En ce qui concerne l'addition et la multiplication cardinale, il y a cette fois commutativité ! On retrouve de plus les propriétés usuelles de ces opérations.

Proposition 117 (Propriétés des opérations cardinales)

Soient κ, λ et θ trois cardinaux.

Addition

1. On a $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
   On dit que l'addition cardinale est **commutative**.
2. On a $(\kappa + \lambda) + \theta = \kappa + (\lambda + \theta)$.
   On dit que l'addition cardinale est **associative**.

Multiplication

3. On a $\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$.
   On dit que la multiplication cardinale est **commutative**.
4. On a $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \theta = \kappa \cdot (\lambda \cdot \theta)$.
   On dit que la multiplication cardinal est **associative**.

Addition, multiplication et exponentiation

5. On a $\kappa \cdot (\lambda + \theta) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \theta$.
   On dit que la multiplication cardinale est **distributive** sur l'addition cardinale.
6. On a $\kappa^{\lambda \cdot \theta} = (\kappa^\lambda)^\theta$.
7. On a $\kappa^{\lambda + \theta} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\theta$.

Démonstration

Dans toute la suite, on utilisera le fait que pour un ensemble E, on a l'équipotence $E \approx \mathrm{card}(E)$ par définition du cardinal. En particulier pour μ et ν deux cardinaux, on a $\mu + \nu \approx \mu \amalg \nu$, ainsi que $\mu \cdot \nu \approx \mu \times \nu$ et également $\mu^\nu \approx \mathcal{F}(\nu \to \mu)$.

1. On a $\kappa + \lambda \approx \kappa \amalg \lambda \underset{96\text{ p. }232}{\approx} \lambda \amalg \kappa \approx \lambda + \kappa$ et donc $\kappa + \lambda \approx \lambda + \kappa$.
Or ce sont tous les deux des cardinaux, donc $\boxed{\kappa + \lambda = \lambda + \kappa}$.

2. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned}(\kappa + \lambda) + \theta &\approx (\kappa + \lambda) \amalg \theta \\ &\approx (\kappa \amalg \lambda) \amalg \theta \\ &\approx \kappa \amalg (\lambda \amalg \theta) \text{ d'après la prop. 96 p. 232}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \kappa \amalg (\lambda + \theta) \\ &\approx \kappa + (\lambda + \theta) \end{aligned}$$

Ainsi on a $(\kappa + \lambda) + \theta \approx \kappa + (\lambda + \theta)$.
Or ce sont tous deux des cardinaux, donc $\boxed{(\kappa + \lambda) + \theta = \kappa + (\lambda + \theta)}$.

3. On a $\kappa \cdot \lambda \approx \kappa \times \lambda \underset{96 \text{ p. } 232}{\approx} \lambda \times \kappa \approx \lambda \cdot \kappa$ et donc $\kappa \cdot \lambda \approx \lambda \cdot \kappa$.
Or ce sont deux cardinaux, donc $\boxed{\kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa}$.

4. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} (\kappa \cdot \lambda) \cdot \theta &\approx (\kappa \cdot \lambda) \times \theta \\ &\approx (\kappa \times \lambda) \times \theta \\ &\approx \kappa \times (\lambda \times \theta) \text{ d'après la prop. 96 p. 232} \\ &\approx \kappa \times (\lambda \cdot \theta) \\ &\approx \kappa \cdot (\lambda \cdot \theta) \end{aligned}$$

Ainsi on a $(\kappa \cdot \lambda) \cdot \theta \approx \kappa \cdot (\lambda \cdot \theta)$.
Or ce sont tous deux des cardinaux, donc $\boxed{(\kappa \cdot \lambda) \cdot \theta = \kappa \cdot (\lambda \cdot \theta)}$.

5.On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa \cdot (\lambda + \theta) &\approx \kappa \times (\lambda + \theta) \\ &\approx \kappa \times (\lambda \amalg \theta) \\ &\approx (\kappa \times \lambda) \amalg (\kappa \times \theta) \text{ d'après la prop. 96 p. 232} \\ &\approx (\kappa \cdot \lambda) \amalg (\kappa \cdot \theta) \\ &\approx (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \theta) \end{aligned}$$

On a donc $\kappa \cdot (\lambda + \theta) \approx (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \theta)$ par transitivité de $\approx$.
Comme ce sont tous deux des cardinaux, on a donc $\boxed{\kappa \cdot (\lambda + \theta) = (\kappa \cdot \lambda) + (\kappa \cdot \theta)}$.

6. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} (\kappa^\lambda)^\theta &\approx \mathcal{F}(\theta \to \kappa^\lambda) \\ &\approx \mathcal{F}\big(\theta \to \mathcal{F}(\lambda \to \kappa)\big) \\ &\approx \mathcal{F}\big((\theta \times \lambda) \to \kappa\big) \text{ d'après la prop. 99 p. 240} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx \mathcal{F}\big((\theta \cdot \lambda) \to \kappa\big) \\ &\approx \kappa^{\theta \cdot \lambda} = \kappa^{\lambda \cdot \theta} \text{ par commutativité de la multiplication cardinale} \end{aligned}$$

On a donc $(\kappa^\lambda)^\theta \approx \kappa^{\lambda \cdot \theta}$ par transitivité de $\approx$.
Comme ce sont tous deux des cardinaux, on a $\boxed{(\kappa^\lambda)^\theta = \kappa^{\lambda \cdot \theta}}$.

7. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} \kappa^{\lambda+\theta} &\approx \mathcal{F}\big((\lambda + \theta) \to \kappa\big) \\ &\approx \mathcal{F}\big((\lambda \amalg \theta) \to \kappa\big) \\ &\approx \mathcal{F}(\lambda \to \kappa) \times \mathcal{F}(\theta \to \kappa) \text{ d'après la prop. 99 p. 240} \\ &\approx \kappa^\lambda \times \kappa^\theta \\ &\approx \kappa^\lambda \cdot \kappa^\theta \end{aligned}$$

Ainsi $\kappa^{\lambda+\theta} \approx \kappa^\lambda \cdot \kappa^\theta$ par transitivité de $\approx$.
Comme ce sont tous deux des cardinaux, on a donc $\boxed{\kappa^{\lambda+\theta} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\theta}$.
CQFD.

On l'a vu lors de la proposition 114 page 284, on a $\mathrm{card}\big(\mathscr{P}(\mathbb{N})\big) = 2^{\aleph_0}$. On peut cependant remarquer qu'à la place de 2, on aurait en fait pu prendre 3 ou bien 4 et conserver le même cardinal : plus généralement, on a la proposition suivante.

Proposition 118 (Puissance de 2 et cardinal infini)

Soient κ et λ deux cardinaux.
Supposons que λ est **infini** et que l'on a $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$.
On a alors $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

Démonstration

On a $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$ donc $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq (2^\lambda)^\lambda$ par croissance de l'exponentiation cardinale.
Or on a

$$\begin{aligned} (2^\lambda)^\lambda &= 2^{\lambda \cdot \lambda} \text{ d'après la prop. 117 p. 294} \\ &= 2^\lambda \text{ d'après le théorème 19 page 287, car } \lambda \text{ est } \textbf{infini} \end{aligned}$$

On a donc $(2^\lambda)^\lambda = 2^\lambda$, si bien que $2^\lambda \leq \kappa^\lambda \leq 2^\lambda$ par ce qui précède.
On en déduit $\boxed{\kappa^\lambda = 2^\lambda}$ par antisymétrie de $\leq$.
CQFD.

Une propriété importante à présent. Un fait bien connu que l'on démontrera plus tard est que l'union dénombrable d'une famille dénombrable est dénombrable. C'est grâce à ce théorème plus général qu'on le montrera : c'est vrai pour tout cardinal infini.

Théorème 20 (Cardinaux infinis et stabilité par union)

Soit κ un cardinal **infini**.
Soit $\mathcal{A}$ un ensemble tel que :

1. $\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leq \kappa$.
2. $\forall X \in \mathcal{A}, \operatorname{card}(X) \leq \kappa$.

Alors $\operatorname{card}(\bigcup \mathcal{A}) \leq \kappa$.

Démonstration

• Si $\mathcal{A} = \varnothing$ alors $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup \varnothing = \varnothing = 0$ donc $\boxed{\operatorname{card}(\bigcup \mathcal{A}) = \operatorname{card}(0) = 0 \leq \kappa}$.

• On considère désormais que $\mathcal{A}$ est non vide.
Par hypothèse on a $\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leq \kappa$ donc $\mathcal{A} \preccurlyeq \kappa$ d'après la proposition 108 page 254.
Il existe donc une injection $f : \mathcal{A} \longrightarrow \kappa$.

Soit $X \in \mathcal{A}$.
Par hypothèse, on a $\operatorname{card}(X) \leq \kappa$ donc $X \preccurlyeq \kappa$ d'après la proposition 108 page 254.
Il existe donc au moins une injection $X \longrightarrow \kappa$.
Ainsi l'ensemble $S_X := \{g : X \to \kappa \mid g \text{ est une injection }\}$ est non vide.

Posons alors $\mathcal{S} := \{S_X \mid X \in \mathcal{A}\}$.
Par ce qui précède, pour tout $X \in \mathcal{A}, S_X \neq \varnothing$ donc $\varnothing \notin \mathcal{S}$.
D'après l'**axiome du choix**, il existe une fonction de choix $\varphi := \mathcal{S} \longrightarrow ?$.
Autrement dit pour tout $S \in \mathcal{S}, \varphi(S) \in S$ donc pour tout $X \in \mathcal{A}, \varphi(S_X) \in S_X$.
Dit encore autrement, pour tout $X \in \mathcal{A}$, $g_X := \varphi(S_X) : X \longrightarrow \kappa$ est une injection.

• Considérons $\coprod \mathcal{A} := \{(X, x) \mid X \in \mathcal{A} \text{ et } x \in X\}$.

Posons alors $\psi := \begin{pmatrix} \coprod \mathcal{A} & \longrightarrow & \bigcup \mathcal{A} \\ (X, x) & \longmapsto & x \end{pmatrix}$.

Montrons que $\psi : \coprod \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ est une surjection.
Par définition $\operatorname{im}(\psi) \subseteq \bigcup \mathcal{A}$.

Soit $x \in \bigcup \mathcal{A}$.
Par définition de la réunion, il existe $X \in \mathcal{A}$ tel que $x \in X$.
Alors $(X, x) \in \coprod \mathcal{A}$ et $x = \psi(X, x)$ donc $x \in \operatorname{im}(\psi)$.

On a donc $\operatorname{im}(\psi) \supseteq \bigcup \mathcal{A}$ et donc $\operatorname{im}(\psi) = \bigcup \mathcal{A}$.

Ainsi $\psi : \coprod \mathcal{A} \longrightarrow \bigcup \mathcal{A}$ est une surjection et donc $\boxed{\bigcup \mathcal{A} \preccurlyeq \coprod \mathcal{A}}$.

• Rappelons que l'on a $f : \mathcal{A} \longrightarrow \kappa$ donc $\forall X \in \mathcal{A}, f(X) \in \kappa$.

Rappelons aussi que pour tout $X \in \mathcal{A}$, on a $g_X : X \longrightarrow \kappa$ donc $\forall x \in X, g_X(x) \in \kappa$.

On peut donc poser $h := \left(\begin{array}{ccc} \coprod \mathcal{A} & \longrightarrow & \kappa \times \kappa \\ (X, x) & \longmapsto & \big(f(X), g_X(x)\big) \end{array} \right)$.

Montrons que h est injective.

> Soient (X, x) et (Y, y) dans $\coprod \mathcal{A}$ tels que $h(X, x) = h(Y, y)$.
>
> On a donc $\big(f(X), g_X(x)\big) = \big(f(Y), g_Y(y)\big)$.
>
> En particulier $f(X) = f(Y)$, et donc $X = Y$ car f est injective.
>
> De plus $g_X(x) = g_Y(y)$ donc par ce qui précède $y \in X$ et $g_X(x) = g_X(y)$.
>
> On a donc $x = y$ car g_X est injective.
>
> Ainsi $X = Y$ et $x = y$ donc $(X, x) = (Y, y)$.

Ainsi $h : \coprod \mathcal{A} \longrightarrow \kappa \times \kappa$ est injective, et donc $\boxed{\coprod \mathcal{A} \preccurlyeq \kappa \times \kappa}$.

• Enfin $\kappa \cdot \kappa = \mathrm{card}(\kappa \times \kappa)$ par définition de la multiplication cardinale.

Or $\kappa \cdot \kappa = \kappa$ car κ est **infini**, d'après le théorème 19 page 287.

On a donc $\kappa = \mathrm{card}(\kappa \times \kappa)$ et donc $\boxed{\kappa \times \kappa \approx \kappa}$ par définition du cardinal.

Finalement, on a $\bigcup \mathcal{A} \preccurlyeq \coprod \mathcal{A} \preccurlyeq \kappa \times \kappa \approx \kappa$.

On a donc $\boxed{\bigcup \mathcal{A} \preccurlyeq \kappa}$ d'après la proposition 89 page 222.

CQFD.

On l'a dit juste avant, l'usage habituel est celui d'une union de famille. On retrouve donc plutôt cette formulation-là.

Proposition 119 (Cardinaux infinis, union de famille)

Soit κ un cardinal **infini**.
Soit I un ensemble tel que $\mathrm{card}(I) \leq \kappa$.
Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille telle que $\forall i \in I, \mathrm{card}(E_i) \leq \kappa$.
Alors $\mathrm{card}\left(\bigcup_{i \in I} E_i\right) \leq \kappa$.

Démonstration

Posons $\mathcal{A} := \{E_i \mid i \in I\}$, de sorte que $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} E_i$.

Par définition de $\mathcal{A}$, l'ensemble des indices I se surjecte dans $\mathcal{A}$.

On a donc $\mathcal{A} \preccurlyeq I$ et donc $\mathrm{card}(\mathcal{A}) \leq \mathrm{card}(I)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or $\operatorname{card}(I) \leq \kappa$ par définition, donc $\operatorname{card}(\mathcal{A}) \leq \kappa$ par transitivité de $\leq$.
De plus pour tout $X \in \mathcal{A}$, il existe $i \in I$ tel que $X = E_i$.
Donc pour tout $X \in \mathcal{A}$, $\operatorname{card}(X) \leq \kappa$ par définition.

Alors $\operatorname{card}(\bigcup \mathcal{A}) \leq \kappa$ d'après le théorème 20 page 297.
Autrement dit, $\boxed{\operatorname{card}\left(\bigcup_{i\in I} E_i\right) \leq \kappa}$.
CQFD.

Observons enfin comment se comporte le cardinal vis à vis des opérations ensemblistes. Ici rien ne devrait nous étonner : on a précisément défini les opérations cardinales pour avoir ces égalités.

Proposition 120 (Cardinal et opérations ensemblistes)

Soient E et F deux ensembles.

1. On a $\operatorname{card}(E \amalg F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.
2. On a $\operatorname{card}(E \cup F) \leq \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.
3. Si E et F sont disjoints alors $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.
4. On a $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \cdot \operatorname{card}(F)$.
5. On a $\operatorname{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)}$.

Démonstration

Ici encore, on utilisera le fait que pour un ensemble A, on a l'équipotence $A \approx \operatorname{card}(A)$ par définition du cardinal. On utilisera également le fait que pour deux cardinaux κ et λ, on a $\kappa + \lambda \approx \kappa \amalg \lambda$, ainsi que $\kappa \cdot \lambda \approx \kappa \times \lambda$ et enfin $\kappa^\lambda \approx \mathcal{F}(\lambda \to \kappa)$.

1. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(E \amalg F) &\approx E \amalg F \\
&\approx \operatorname{card}(E) \amalg \operatorname{card}(F) \text{ d'après la prop. 95 p. 230} \\
&\approx \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)
\end{aligned}$$

et donc $\operatorname{card}(E \amalg F) \approx \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.
On a donc $\boxed{\operatorname{card}(E \amalg F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)}$ car ce sont des cardinaux.

2. On a $E \cup F \preccurlyeq E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.
On a donc $\operatorname{card}(E \cup F) \leq \operatorname{card}(E \amalg F)$ d'après la proposition 107 page 253.
On a donc $\boxed{\operatorname{card}(E \cup F) \leq \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)}$ d'après 1.

3. Supposons que E et F sont disjoints.
On a alors $E \cup F \approx E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.
On a donc $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E \amalg F)$ d'après la proposition 107 page 253.
On a donc $\boxed{\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F)}$ d'après 1.

4. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{card}(E \times F) &\approx E \times F \\ &\approx \text{card}(E) \times \text{card}(F) \text{ d'après la prop. 93 p. 228} \\ &\approx \text{card}(E) \cdot \text{card}(F) \end{aligned}$$

et donc $\text{card}(E \times F) \approx \text{card}(E) \cdot \text{card}(F)$.
On a donc $\boxed{\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \cdot \text{card}(F)}$ car ce sont des cardinaux.

5. On a les équipotences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big) &\approx \mathcal{F}(E \to F) \\ &\approx \mathcal{F}\big[\text{card}(E) \to \text{card}(F)\big] \text{ d'après la prop. 98 p. 236} \\ &\approx \text{card}(F)^{\text{card}(E)} \end{aligned}$$

et donc $\text{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big) \approx \text{card}(F)^{\text{card}(E)}$.
Comme ce sont des cardinaux, on a donc $\boxed{\text{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big) \approx \text{card}(F)^{\text{card}(E)}}$.
CQFD.

5 Ensembles finis et ensembles dénombrables

5.1 Ensembles finis

Il est enfin temps de définir la notion d'ensemble fini. Chez les ordinaux, on a déjà donné du sens à cela : c'est la même chose qu'être un entier naturel. Au fond, il nous suffit donc de simplement déclarer qu'être fini, c'est avoir son cardinal fini, c'est-à-dire être équipotent à un entier naturel.

Comment le justifier intuitivement ? On peut par exemple l'envisager sous l'angle d'une machine qui piocherait dans l'ensemble et en retirerait les éléments, à la vitesse d'un élément par seconde : quitte à attendre extrêmement longtemps, il existera un moment où l'ensemble aura été vidé. Le nombre de seconde écoulée jusqu'à épuisement est alors le cardinal de l'ensemble, puisque l'on a mis en bijection (par le fait de piocher) les secondes écoulées avec les éléments de l'ensemble. Dans le cas d'un ensemble infini, la machine n'aura au contraire jamais épuisé totalement l'ensemble.

Définition 40 (Ensembles finis et ensembles infinis)

Soit E un ensemble.
On dit que E est **fini** si et seulement s'il existe un entier naturel n tel que $E \approx n$.
Dans le cas contraire, on dit que E est **infini**.

Remarque :
D'après le théorème 13 page 247, tout entier naturel est un cardinal.
En particulier si E est fini avec $E \approx n$, alors $\operatorname{card}(E) = n$.

Exemple :

1. $\varnothing = 0 \approx 0$ donc $\varnothing$ est fini et $\operatorname{card}(\varnothing) = 0$.
2. Pour tout ensemble x, $\{x\} \approx \{0\} = 1$ donc $\{x\}$ est fini et $\operatorname{card}\big(\{x\}\big) = 1$.
3. Pour tout ensembles x et y avec $x \neq y$, on a $\{x, y\} \approx \{0, 1\} = 2$ donc $\{x, y\}$ est fini et $\operatorname{card}\big(\{x, y\}\big) = 2$.
4. Pour tout entier naturel n, on a $n \approx n$ donc n est fini et $\operatorname{card}(n) = n$.
5. $\mathbb{N}$ est infini : en effet $\mathbb{N} = \omega$ est lui-même un cardinal d'après le théorème 13 page 247. Donc pour tout entier naturel n, comme $n \in \mathbb{N}$ on a $n < \omega$ donc $\omega \not\approx n$.
   On symbolise souvent le cardinal de $\mathbb{N}$ par la notation de Hartogs $\aleph_0$ que l'on a introduite plus tôt. Ainsi $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, mais c'est aussi $\mathbb{N}$ lui-même, ω ou encore ω_0, toutes ces notations désignent le même ensemble, elles ont simplement des rôles différents.
6. Plus généralement quand on aura défini ces ensembles de nombres, nous verrons que $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont infinis car $\mathbb{N}$ s'injecte dedans.

Justement en parlant du fait que $\mathbb{N}$ s'injecte dans d'autres ensembles, voici une caractérisation avec $\mathbb{N}$ de la finitude et de l'infinitude. Ainsi $\mathbb{N}$ représente en quelque sorte la frontière entre le fini et l'infini : c'est le premier cardinal infini.

Proposition 121 (N et la frontière du fini)

Soit E un ensemble.
Alors E est fini si et seulement si $E \prec \mathbb{N}$.
De manière équivalente, E est infini si et seulement si $\mathbb{N} \preccurlyeq E$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que E est fini.

Par définition, il existe n un entier naturel tel que $E \approx n$.

Par définition de $\mathbb{N}$, on a $n \in \mathbb{N}$ donc $n < \mathbb{N}$ par définition de $<$.

Or n et $\mathbb{N}$ sont des cardinaux d'après le théorème 13 page 247.

En particulier $\operatorname{card}(E) = n$ et $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, si bien que $\operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(\mathbb{N})$.

On a donc $\boxed{E \prec \mathbb{N}}$ d'après la proposition 107 page 253.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E \prec \mathbb{N}$.

On a alors $\operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(\mathbb{N})$d'après la proposition 107 page 253.

Or $\mathbb{N}$ est un cardinal d'après le théorème 13 page 247.

On a donc $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, si bien que $\operatorname{card}(E) < \mathbb{N}$.

Posons $\kappa := \operatorname{card}(E)$, de sorte que $\kappa < \mathbb{N}$ (et $E \approx \kappa$).

On a donc $\kappa \in \mathbb{N}$ par définition de $<$, donc κ est un entier naturel par définition de $\mathbb{N}$.

Comme $E \approx \kappa$, il s'en suit que $\boxed{E \text{ est fini}}$.

CQFD.

On en déduit une propriété de stabilité de la finitude et de l'infinitude : être plus petit qu'un ensemble fini fait de nous un ensemble fini, et inversement, être plus grand qu'un ensemble infini fait de nous un ensemble infini.

Proposition 122 (Plus petit qu'un fini et plus gros qu'un infini)

Soient E et F deux ensembles.
Supposons que $E \subseteq F$ ou que $E \preccurlyeq F$.

1. Si F est fini alors E est fini.
2. Si E est infini alors F est infini.

Démonstration

Si $E \subseteq F$ alors $E \preccurlyeq F$ d'après la proposition 88 page 214.

Supposons donc que $E \preccurlyeq F$.

1. Supposons que F est fini.

On a alors $F \prec \mathbb{N}$ d'après la proposition 121 page 302.

Ainsi on a $E \preccurlyeq F \prec \mathbb{N}$ donc $E \prec \mathbb{N}$ d'après la proposition 89 page 222.

Donc $\boxed{E \text{ est fini}}$ d'après la proposition 121 page 302.

2. C'est le contraposée de 1.

CQFD.

Le fait d'être fini est stable par certaines opérations, notamment pour l'union et le produit cartésien.

Proposition 123 (Opérations ensemblistes d'ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles **finis**.
Alors $E \amalg F$, $E \cup F$, $E \times F$ et $\mathcal{F}(E \to F)$ sont finis.

Démonstration

Posons $m := \mathrm{card}(E)$ et $n := \mathrm{card}(F)$, qui sont par définition des entiers naturels.

• On a $\mathrm{card}(E \amalg F) = m + n$ d'après la proposition 120 page 299.

Or $m + n = m \overset{\mathcal{O}}{+} n$ d'après la proposition 113 page 283.

De plus $m \overset{\mathcal{O}}{+} n$ est un entier naturel d'après la proposition 40 page 106.

Donc $m + n$ est un entier naturel, donc $\mathrm{card}(E \amalg F)$ est un entier naturel.

Ainsi donc $\boxed{E \amalg F \text{ est fini}}$.

• On a $E \cup F \preccurlyeq E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.

Or on vient de montrer que $E \amalg F$ est fini.

Donc $\boxed{E \cup F \text{ est fini}}$ d'après la proposition 122 page 302.

• On a $\mathrm{card}(E \times F) = m \cdot n$ d'après la proposition 120 page 299.

Or $m \cdot n = m \overset{\mathcal{O}}{\cdot} n$ d'après la proposition 113 page 283.

De plus $m \overset{\mathcal{O}}{\cdot} n$ est un entier naturel d'après la proposition 55 page 139.

Donc $m \cdot n$ est un entier naturel, donc $\mathrm{card}(E \times F)$ est un entier naturel.

Ainsi donc $\boxed{E \times F \text{ est fini}}$.

• On a $\mathrm{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big) = n^m$ d'après la proposition 120 page 299.

Or $n^m = n^{\mathcal{O}m}$ d'après la proposition 113 page 283.

De plus $n^{\mathcal{O}m}$ est un entier naturel d'après la proposition 66 page 160.

Donc n^m est un entier naturel, donc $\mathrm{card}\big(\mathcal{F}(E \to F)\big)$ est un entier naturel.

Ainsi donc $\boxed{\mathcal{F}(E \to F) \text{ est fini}}$.
CQFD.

Une union finie d'ensembles finis est finie. À première vue, il semblerait que ce soit une application directe de la proposition 119 page 298. Mais avec quel cardinal infini ? ω ? Le soucis, c'est qu'on obtient alors une inégalité large, ce qui veut dire qu'on ne peut pas conclure à la finitude. C'est pour ça que la démonstration qui suit ne s'en sert pas.

Proposition 124 (Union finie d'ensembles finis)

Soient I un ensemble **fini** et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles **finis**.
Alors $\bigcup_{i\in I} E_i$ est fini.

Démonstration

On fait une démonstration par récurrence sur le cardinal de I.

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout* I *tel que* $\operatorname{card}(I) = n$ *et toute famille* $(E_i)_{i\in I}$ *d'ensemble finis,* $\bigcup_{i\in I} E_i$ *est fini.* »

Initialisation

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = 0$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis.

On a alors $I \approx 0$ donc $I = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.

Alors $\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in\varnothing} E_i = \varnothing$ donc est fini.

Ainsi on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = n + 1$.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis.

Par définition du cardinal, on a $I \approx n + 1$.

Soit $f : n + 1 \longrightarrow I$ une bijection.

Considérons alors $J := f^{\rightarrow}(n)$.

Alors $f_{|n} : n \longrightarrow J$ est injective car f l'est.

De plus $f_{|n} : n \longrightarrow J$ est aussi surjective dans J par définition de J.

Donc $f_{|n} : n \longrightarrow J$ est une bijection, donc $J \approx n$.

Ainsi $\operatorname{card}(J) = n$ et $(E_i)_{i\in J}$ est une famille d'ensembles finis par définition.

Donc $\bigcup_{i\in J} E_i$ est fini d'après $P(n)$.

Or $f : n+1 \longrightarrow I$ est une bijection donc $f^{\rightarrow}(n+1) = \mathrm{im}(f) = I$.
Or $f^{\rightarrow}(n+1) = f^{\rightarrow}\big(n \cup \{n\}\big) = f^{\rightarrow}(n) \cup f^{\rightarrow}\big(\{n\}\big) = J \cup \big\{f(n)\big\}$.
Donc $I = J \cup \big\{f(n)\big\}$: posons $a := f(n)$, de sorte que $I = J \cup \{a\}$.
On a alors $\bigcup\limits_{i \in I} E_i = \bigcup\limits_{i \in J \cup \{a\}} E_i = \left(\bigcup\limits_{i \in J} E_i\right) \cup E_a$.
Or on a dit que $\bigcup\limits_{i \in J} E_i$ est fini, et E_a est fini par définition.
Donc $\bigcup\limits_{i \in I} E_i$ est fini d'après la proposition 123 page 303.

Ainsi on a $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$.

CQFD.

Pour E et F deux ensembles, on a défini l'union disjointe $E \amalg F$ par $\big(\{0\} \times E\big) \cup \big(\{1\} \times F\big)$, de sorte à noter sur chaque éléments de E et de F leur provenance avec 0 pour E et 1 pour F.

Comment généraliser cette idée pour définir l'union disjointe d'une famille quelconque $(E_i)_{i \in I}$? Il faut marquer a provenance de chacun des éléments : on peut le faire en indiquant le i dont ils sont issus. Ainsi, les éléments de E_i seront identifiés aux couples (i, x) avec $x \in E_i$.

Définition 41 (Union disjointe généralisée)

Soient I un ensemble et $(E_i)_{i \in I}$ une famille.
On appelle **union disjointe** de $(E_i)_{i \in I}$ l'ensemble

$$\coprod_{i \in I} E_i := \big\{(i, x) \;\big|\; i \in I \text{ et } x \in E_i\big\}$$

Remarque :
$\coprod\limits_{i \in \{0,1\}} E_i = \big\{(0, x) \;\big|\; x \in E_0\big\} \cup \big\{(1, x) \;\big|\; x \in E_1\big\} = \big(\{0\} \times E_0\big) \cup \big(\{1\} \times E_1\big) = E_0 \amalg E_1$.
Cela montre bien en quoi cette union disjointe généralise celle que l'on connaissait déjà.

Tout comme l'union finie d'ensembles finis est finie, l'union disjointe finie d'ensembles finis est finie, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 125 (Union disjointe finie d'ensembles finis)

Soient I un ensemble **fini** et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles **finis**.
Alors $\coprod\limits_{i \in I} E_i$ est fini.

Démonstration

On fait une démonstration par récurrence sur le cardinal de I.

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout* I *tel que* $\operatorname{card}(I) = n$ *et toute famille* $(E_i)_{i \in I}$ *d'ensembles finis,* $\coprod_{i \in I} E_i$ *est fini* ».

Initialisation

Soient I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = 0$ et $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles finis.

Par définition du cardinal on a $I \approx 0$.

On a donc $I = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.

Donc $\coprod_{i \in I} E_i = \coprod_{i \in \varnothing} E_i = \{(i, x) \mid i \in \varnothing \text{ et } x \in E_i\} = \varnothing$.

Donc $\coprod_{i \in I} E_i$ est fini.

Ainsi on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = n + 1$.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles finis.

Par définition du cardinal, on a $I \approx n + 1$.

Il existe donc $f : n + 1 \longrightarrow I$ une bijection.

Autrement dit on a $(E_i)_{i \in I} = \left(E_{f(k)}\right)_{k \in n+1} = \left(E_{f(k)}\right)_{k < n+1}$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\coprod_{i \in I} E_i &= \coprod_{k < n+1} E_{f(k)} \\
&= \left\{(k, x) \mid k < n + 1 \text{ et } x \in E_{f(k)}\right\} \\
&= \left\{(k, x) \mid k < n \text{ et } x \in E_{f(k)}\right\} \cup \left\{(n, x) \mid x \in E_{f(n)}\right\} \\
&= \left(\coprod_{k < n} E_{f(k)}\right) \cup \left(\{n\} \times E_{f(n)}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi $\coprod_{i \in I} E_i = \left(\coprod_{k < n} E_{f(k)}\right) \cup \left(\{n\} \times E_{f(n)}\right)$.

Or $\{n\}$ et $E_{f(n)}$ sont finis.

Donc $\{n\} \times E_{f(n)}$ est fini d'après la proposition 123 page 303.

De plus $\coprod_{k < n} E_{f(k)}$ est fini d'après $P(n)$.

Donc $\left(\coprod_{k < n} E_{f(k)}\right) \cup \left(\{n\} \times E_{f(n)}\right)$ est fini d'après la prop. 123 p. 303.

Donc $\coprod_{i \in I} E_i$ est fini.

On a donc $P(n+1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$.

CQFD.

Pour prouver que l'union (ou l'union disjointe) finie d'ensembles finis est finie, on a utilisé la proposition 123 page 303 et une récurrence : on passe de n à $n+1$ en rajoutant un ensemble supplémentaire. On va réappliquer la même stratégie dans le cas du produit cartésien, mais pour cela on a besoin de la proposition suivante, qui explique comment justement rajouter un ensemble supplémentaire.

Proposition 126 (Produit cartésien généralisé et binaire)

Soient I un ensemble **non vide** et $(E_i)_{i\in I}$ une famille.
Soient $i_0 \in I$ et $J := I\backslash\{i_0\}$.

On a alors $\prod\limits_{i\in I} E_i \approx \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.

Démonstration

Commençons par remarquer la chose suivante.

Soit $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$.

Alors $f : I \longrightarrow ?$ et $\forall i \in I, f(i) \in E_i$.

Ainsi $\forall j \in J, f(j) \in E_j$ et $f(i_0) \in E_{i_0}$.

On a donc $\forall j \in J, f_{|J}(j) \in E_j$, et évidemment $f_{|J} : J \longrightarrow ?$.

On a donc $f_{|J} \in \prod\limits_{j\in J} E_j$.

On peut donc poser $\varphi := \left(\begin{array}{ccc} \prod\limits_{i\in I} E_i & \longrightarrow & \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0} \\ f & \longmapsto & (f_{|J}, f(i_0)) \end{array}\right)$.

• Montrons que φ est injective.

Soient f et g dans $\prod\limits_{i\in I} E_i$ tels que $\varphi(f) = \varphi(g)$.

On a donc $\big(f_{|J}, f(i_0)\big) = \big(g_{|J}, g(i_0)\big)$ donc $f_{|J} = g_{|J}$ et $f(i_0) = g(i_0)$.

On a donc $\forall j \in J, f(j) = g(j)$ et $f(i_0) = g(i_0)$.

Or $I = J \cup \{i_0\}$ donc $\forall i \in I, f(i) = g(i)$, et donc $f = g$.

Ainsi φ est injective.

• Montrons que φ est surjective dans $\left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.

Par définition de φ, on sait déjà que $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.

Soit $(g, y) \in \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.
Ainsi on a $g : J \longrightarrow ?$ ainsi que $\forall j \in J, g(j) \in E_j$, et $y \in E_{i_0}$.

Posons alors $f := \left(\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & ? \\ i & \longmapsto & \begin{cases} g(i) & \text{si } i \in J \\ y & \text{si } i = i_0 \end{cases} \end{array} \right)$.

Alors pour tout $i \in I$:

- ou bien $i \in J$ et $f(i) = g(i) \in E_i$,
- ou bien $i = i_0$ et $f(i) = y \in E_i$.

Ainsi $\forall i \in I, f(i) \in E_i$, et donc $f \in \prod\limits_{i\in I} E_i$.

De plus, $f_{|J} = g$ par définition, et $f(i_0) = y \in E_{i_0}$.
On a donc $\varphi(f) = \big(f_{|J}, f(i_0)\big) = (g, y)$ et donc $(g, y) \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi) \supseteq \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$, et donc $\mathrm{im}(\varphi) = \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.

Ainsi φ est surjective dans $\left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$.

Finalement, $\varphi : \prod\limits_{i\in I} E_i \longrightarrow \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}$ est bijective.

En particulier $\boxed{\prod\limits_{i\in I} E_i \approx \left(\prod\limits_{j\in J} E_j\right) \times E_{i_0}}$.

CQFD.

Proposition 127 (Produit cartésien fini d'ensembles finis)

Soient I un ensemble **fini** et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles **finis**.
Alors $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est fini.

Démonstration

On fait une démonstration par induction sur le cardinal de I.

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout I tel que* $\operatorname{card}(I) = n$ *et toute famille* $(E_i)_{i\in I}$ *d'ensembles finis,* $\prod_{i\in I} E_i$ *est fini* ».

Initialisation

Soient I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = 0$ et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis.

Par définition du cardinal on a $I \approx 0$.

On a donc $I = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.

On a donc $\bigcup_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in\varnothing} E_i = \varnothing$.

Donc $\mathcal{F}\left(I \to \bigcup_{i\in I} E_i\right) = \mathcal{F}(\varnothing \to \varnothing) = \{0\}$ qui est fini.

Or $\prod_{i\in I} E_i \subseteq \mathcal{F}\left(I \to \bigcup_{i\in I} E_i\right)$.

Donc $\prod_{i\in I} E_i$ est fini d'après la proposition 122 page 302.

Ainsi on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = n + 1$.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis.

Par définition du cardinal, on a $I \approx n + 1$.

Il existe donc $f : n + 1 \longrightarrow I$ une bijection.

Autrement dit on a $(E_i)_{i\in I} = \left(E_{f(k)}\right)_{k\in n+1} = \left(E_{f(k)}\right)_{k<n+1}$.

Donc $\prod_{i\in I} E_i = \prod_{k<n+1} E_{f(k)} \approx \left(\prod_{k<n} E_{f(k)}\right) \times E_{f(n)}$ d'après la prop. 126 p. 307.

Or $\prod_{k<n} E_{f(k)}$ est fini d'après $P(n)$, et $E_{f(n)}$ est fini par définition.

Donc $\left(\prod_{k<n} E_{f(k)}\right) \times E_{f(n)}$ est fini d'après la proposition 123 page 303.

Donc $\prod_{i\in I} E_i$ est fini.

On a donc $P(n + 1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n + 1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$.

CQFD.

Quand nous avons défini la notion de nombre cardinal, nous l'avons justifiée en montrant que $\omega \approx \omega+1$. Pourtant, on a $\omega < \omega+1$, c'est-à-dire $\omega \subsetneq \omega+1$. En effet, on a $\omega = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ et $\omega + 1 = \{\omega, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} = \{\omega\} \cup \omega$. On a donc pris l'ensemble infini, on lui a rajouté un élément qui n'était pas présent (en l'occurrence lui-même) et pourtant l'ensemble obtenu a tout autant d'éléments ! Rajouter un élément à un ensemble infini ne change pas le nombre d'éléments. On peut le voir également en disant que ω est une partie propre de $\omega + 1$, c'est-à-dire une partie de $\omega + 1$ qui n'est pas $\omega + 1$ et qui pourtant a autant d'éléments que $\omega + 1$.

Il s'avère que le fait que l'on puisse mettre en bijection un ensemble avec l'une de ses parties propres est en fait une caractérisation des ensembles infinis.

Proposition 128 (Ensemble infini et partie propre)

Soit E un ensemble.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. E est infini.
2. Il existe A une partie **propre** de E telle que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est infini.

On a alors $\mathbb{N} \preccurlyeq E$ d'après la proposition 121 page 302.

Il existe donc $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ injective.

Posons $A := E \backslash \{f(0)\}$, de sorte que $\boxed{A \text{ est une partie propre de } E}$.

On va alors construire une injection de E dans A. L'idée est la même que dans l'illustration par l'hôtel de Hilbert. On a à disposition une application $f : \mathbb{N} \longrightarrow E$ et donc on peut regarder $\mathrm{im}(f) = f^{\rightarrow}(\mathbb{N}) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), \dots\}$. On peut également regarder $F := E \backslash \mathrm{im}(f)$, c'est-à-dire tous les éléments de E qui ne sont pas concernés par f, qui ne sont pas un $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, de sorte que

$$E = F \cup \mathrm{im}(f) = F \cup \{f(0), f(1), f(2), f(3), \dots\}$$

En ayant défini A par $A := E \backslash \{f(0)\}$, on a donc simplement posé

$$A = F \cup \{f(1), f(2), f(3), \dots\}$$

Pour construire la bijection de E dans A, on va simplement laisser F intact et mettre en bijection $\{f(0), f(1), f(2), f(3), \dots\}$ avec $\{f(1), f(2), f(3), \dots\}$. L'hôtel de Hilbert nous a déjà montré comment faire : on envoie $f(0)$ sur $f(1)$, puis $f(1)$ sur $f(2)$ et ainsi de suite $f(n)$ est envoyé sur $f(n+1)$.

Considérons donc $g := \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N}) \\ f(n+1) & \text{si } x = f(n) \text{ avec } n \in \mathbb{N} \end{cases} \end{array} \right)$.

Montrons que g est injective.

Soient x et x' dans E tels que $g(x) = g(x')$.

- Plaçons-nous dans le cas où $x \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$ et $x' \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$.
  On a alors $x = g(x) = g(x') = x'$ donc $x = x'$.
- Plaçons-nous dans le cas où $x \in f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$ et $x' \in f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$.
  Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $n' \in \mathbb{N}$ tels que $x = f(n)$ et $x' = f(n')$.
  Alors $f(n+1) = g(x) = g(x') = f(n'+1)$ donc $f(n+1) = f(n'+1)$.
  On a donc $n+1 = n'+1$ car f **est injective**.
  On a donc $n = n'$ d'après la proposition 14 page 40.
  On a donc $x = f(n) = f(n') = x'$ et donc $x = x'$.
- Plaçons-nous dans le cas où $x \in f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$ et $x' \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$.
  Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $x = f(n)$.
  Alors $f(n+1) = g(x) = g(x') = x'$ donc $x' = f(n+1)$ donc $x' \in f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$.
  C'est absurde puisqu'on est justement dans le cas où $x' \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$.
- Le cas où $x \notin f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$ et $x' \in f^{\rightarrow}(\mathbb{N})$ est impossible pour la même raison.

Ainsi dans les deux cas possibles, on a $x = x'$.

Ainsi $g : E \longrightarrow A$ est injective, et donc $E \preccurlyeq A$.
Or $A \subseteq E$ donc $A \preccurlyeq E$ d'après la proposition 88 page 214.
On a donc $A \approx E$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
En particulier $\boxed{\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E)}$ d'après la proposition 107 page 253.

$\boxed{\Leftarrow}$

Raisonnons par contraposition.

Supposons que E est fini.

Soit A une partie propre de E.
Ainsi $A \subsetneq E$ et donc $E \backslash A$ est non vide.
Or on a les équivalences

$$\operatorname{card}(E\backslash A) = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{card}(E\backslash A) = \operatorname{card}(\varnothing) \;\Leftrightarrow\; E\backslash A \approx \varnothing \;\Leftrightarrow\; E\backslash A = \varnothing$$

On a donc $\operatorname{card}(E\backslash A) \neq 0$ et donc $\operatorname{card}(E\backslash A) > 0$.
De plus E est fini donc $\operatorname{card}(E)$ est un entier naturel.
Comme $A \subseteq E$ et $E\backslash A \subseteq E$, ils sont aussi finis d'après la prop. 122 p. 302.
Donc $\operatorname{card}(A)$ et $\operatorname{card}(E\backslash A)$ sont également des entiers naturels.
Enfin $E = A \cup (E\backslash A)$ et A et $E\backslash A$ sont disjoints.
Donc $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(E\backslash A)$ d'après la proposition 120 page 299.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}(A) &= \mathrm{card}(A) \overset{\mathcal{O}}{+} 0 \text{ puisque } 0 \text{ est neutre pour l'addition des ordinaux} \\
&< \mathrm{card}(A) \overset{\mathcal{O}}{+} \mathrm{card}(E \backslash A) \text{ d'après la prop. 41 p. 107} \\
&= \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(E \backslash A) \text{ car ce sont des entiers naturels} \\
&= \mathrm{card}(E)
\end{aligned}$$

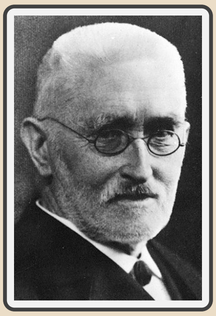
et donc $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(E)$.

Ainsi pour toute partie propre A de E, on a $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(E)$.

Donc si E est fini alors pour toute partie propre A de E, on a $\mathrm{card}(A) < \mathrm{card}(E)$.
Par contraposition, s'il existe une propre A de E telle que $\mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(E)$, alors E est infini.

CQFD.

Pour la petite histoire



Richard Dedekind (6 octobre 1831 – 12 février 1916) est un mathématicien allemand. À Göttingen, il suivra notamment les cours de Gauss, Dirichlet, Stern et Weber, et rencontrera Riemann, dont il deviendra assistant en 1851.

Son œuvre mathématique est immense. En 1872, à la même époque que Méray, Cantor et Weierstrass, il propose une construction des nombres réels, à l'aide de la méthode des coupures. Il est le fondateur avec Kummer et Kronecker de la théorie des nombres algébriques. En 1879, il défini la notion d'idéaux en l'honneur des nombres idéaux de Kummer.

De sa correspondance avec Cantor naîtra la notion d'infini que nous venons d'exposer.

Remarque :
C'est Dedekind qui a proposé cette définition pour la notion d'infini. On parle donc parfois d'ensemble infini **au sens de Dedekind**. Il faut en toute rigueur distinguer notre définition d'ensemble infini de celle de Dedekind. Nous venons de montrer qu'il s'agit de deux notions équivalentes, mais nous avons en réalité utilisé l'axiome du choix pour le montrer. En effet, pour montrer que 1 implique 2, nous avons utilisé la proposition 121 page 302 qui dit que si E est infini alors $\mathbb{N} \preccurlyeq E$. Pour montrer cette proposition, nous avons utilisé

le fait que E admet un cardinal : or on le sait, pour pouvoir l'affirmer en toute rigueur, on a besoin de l'axiome du choix. Si on ne supposait pas l'axiome du choix, on ne pourrait donc pas conclure qu'un ensemble infini l'est également au sens de Dedekind.

On dit toujours qu'une application :

- est **injective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a **au plus un** antécédent,
- est **surjective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a **au moins un** antécédent,
- est **bijective** si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée a **exactement un** antécédent.

On peut désormais expliciter rigoureusement ces affirmations avec la proposition suivante.

Proposition 129 (Injectivité, surjectivité et cardinaux)

Soient E et F deux ensembles, et $f : E \longrightarrow F$.
Pour tout $y \in F$, on note A_y l'ensemble $f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ des antécédents de y par f.

1. f est injective si et seulement si $\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \leq 1$.
2. f est surjective dans F si et seulement si $\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \geq 1$.
3. f est bijective dans F si et seulement si $\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) = 1$.

Démonstration

1.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est injective.

Soit $y \in F$.

- Plaçons-nous dans le cas où $y \notin \operatorname{im}(f)$.
  Alors $A_y = f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big) = \varnothing$ et donc $\operatorname{card}(A_y) = \operatorname{card}(\varnothing) = 0 \leq 1$.
- Plaçons-nous dans le cas où $y \in \operatorname{im}(f)$.
  Il existe alors $x \in E$ tel que $y = f(x)$, de sorte que $\{x\} \subseteq A_y$.
  Montrons que $A_y = \{x\}$.
  Soit $x' \in A_y$.
  On a alors $f(x') = y$ par définition de A_y, donc $f(x') = f(x)$.
  Or f est injective par définition, donc $x = x'$ et donc $x' \in \{x\}$.
  On a donc $A_y \subseteq \{x\}$ et donc $A_y = \{x\}$.
  Ainsi on a $\operatorname{card}(A_y) = \operatorname{card}\big(\{x\}\big) = 1 \leq 1$.

Dans les deux cas on a $\operatorname{card}(A_y) \leq 1$.

Ainsi $\boxed{\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \leq 1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \leq 1$.

Supposons par l'absurde que f n'est pas injective.

Il existe alors x et x' tel que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

Posons $y := f(x)$, de sorte que $f(x) = y = f(x')$.

On a alors $x \in A_y$ et $x' \in A_y$ donc $\{x, x'\} \subseteq A_y$.

On a donc $\operatorname{card}\big(\{x, x'\}\big) \leq \operatorname{card}(A_y)$ d'après la proposition 105 page 252.

Or $x \neq x'$ donc $\operatorname{card}\big(\{x, x'\}\big) \geq 2$ et donc $2 \leq \operatorname{card}(A_y)$.

C'est absurde puisque par hypothèse on a $\operatorname{card}(A_y) \leq 1$.

Par l'absurde on vient de montrer que $\boxed{f \text{ est injective}}$.

2.

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que f est surjective dans F.

Soit $y \in F$.

Comme f est surjective dans F, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a donc $x \in A_y$ donc $\{x\} \subseteq A_y$ et donc $\operatorname{card}\big(\{x\}\big) \leq \operatorname{card}(A_y)$.

Puisque $\operatorname{card}\big(\{x\}\big) = 1$, on a donc $1 \leq \operatorname{card}(A_y)$.

Ainsi $\boxed{\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \geq 1}$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $\forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \geq 1$.

Montrons que $\operatorname{im}(f) = F$.

Par définition de f on sait déjà que $\operatorname{im}(f) \subseteq F$.

Supposons par l'absurde que $\operatorname{im}(f) \neq F$, donc que $\operatorname{im}(f) \subsetneq F$.

Il existe alors $y \in F$ tel que $y \notin \operatorname{im}(f)$.

Donc pour tout $x \in E$, on a $f(x) \neq y$ donc $x \notin A_y$.

Or $A_y \subseteq E$ par définition, donc $A_y = \varnothing$ et $\operatorname{card}(A_y) = \operatorname{card}(\varnothing) = 0$.

C'est absurde puisque par hypothèse on a $\operatorname{card}(A_y) \geq 1$.

Par l'absurde on vient de montrer que $\operatorname{im}(f) = F$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est surjective dans } F}$.

3.

En se servant de 1 et de 2, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & f \text{ est bijective dans } F \\ \iff & f \text{ est injective et surjective dans } F \end{aligned}$$

$$\iff \forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \leq 1 \text{ et } \forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) \geq 1$$
$$\iff \forall y \in F, \operatorname{card}(A_y) = 1$$

D'où l'équivalence recherchée.
CQFD.

En algèbre linéaire, on se souvient souvent du fait qu'entre deux espaces vectoriels de même dimension, il y a équivalence pour une application linéaire entre être injective, être surjective et être bijective. On a un phénomène similaire dans le cas où deux ensembles sont finis et de même cardinal.

Théorème 21 (Injection, surjection et ensembles finis)

Soient E et F deux ensembles **finis** tels que $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.
Soit $f : E \longrightarrow F$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est une bijection de E vers F.
2. f est une injection de E dans F.
3. f est une surjection dans E sur F.

Démonstration

Nous allons montrer 1⇔2 et 1⇔3.

$\boxed{1 \Rightarrow (2 \text{ et } 3)}$

Supposons que f est une bijection de E vers F.

En particulier $\boxed{f \text{ est une injection de } E \text{ dans } F}$ et $\boxed{f \text{ est une surjection dans } E \text{ sur } F}$.

$\boxed{2 \Rightarrow 1}$

Supposons que f est une injection de E dans F.

Alors $f : E \longrightarrow \operatorname{im}(f)$ est une bijection donc $E \approx \operatorname{im}(f)$.

On a donc $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}\big(\operatorname{im}(f)\big)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$ **par hypothèse**, donc $\operatorname{card}\big(\operatorname{im}(f)\big) = \operatorname{card}(F)$.

Or F est **fini**, et $\operatorname{im}(f)$ est une partie de F par définition de f.

Donc $\operatorname{im}(f)$ n'est pas une partie propre de F d'après la proposition 128 page 310.

Autrement dit $\operatorname{im}(f) = F$, et donc f est une surjection dans E sur F.

En particulier $\boxed{f \text{ est une bijection de } E \text{ vers } F}$.

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$

Supposons que f est une surjection dans E sur F.

Par hypothèse **E et F sont finis**.

Il en va de même pour leurs parties d'après la proposition 122 page 302.

En particulier tous les cardinaux qui vont suivre sont des entiers naturels.

Donc les additions mises en jeux seront aussi bien cardinales qu'ordinales d'après la proposition 113 page 283.

Soit $y \in F$.

Posons $A_y := f^{\leftarrow}\big(\{y\}\big)$ l'ensemble des antécédents de y par f.

Comme f est surjective dans F, on a $\operatorname{card}(A_y) \geq 1$ d'après la prop. 129 p. 313.

Supposons par l'absurde que $\operatorname{card}(A_y) > 1$.

On a alors $\operatorname{card}(A_y) \geq 1 + 1 = 2$ d'après la proposition 14 page 40.

Posons $p := \operatorname{card}(A_y)$: on a donc $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 2$.

Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $p = q + 2$ d'après la proposition 52 page 134.

Considérons alors $E' := E \backslash A_y$ et $F' := F \backslash \{y\}$.

Ainsi $E = E' \cup A_y$, et E' et A_y sont disjoints.

On a donc $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E') + \operatorname{card}(A_y)$ d'après la prop. 120 p. 299.

Ainsi $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(E') + p = \operatorname{card}(E') + q + 2 = \operatorname{card}(E') + q + 1 + 1$.

De même $F = F' \cup \{y\}$, et F' et $\{y\}$ sont disjoints.

Donc $\operatorname{card}(F) = \operatorname{card}(F') + \operatorname{card}\big(\{y\}\big)$ d'après la prop. 120 p. 299.

On a donc $\operatorname{card}(F) = \operatorname{card}(F') + 1$.

Or **par hypothèse** on a $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$.

On a donc $\operatorname{card}(E') + q + 1 + 1 = \operatorname{card}(F') + 1$.

Or on a dit plus haut qu'il s'agissait de l'addition ordinale.

Donc $S\big(\operatorname{card}(E') + q + 1\big) = S\big(\operatorname{card}(F')\big)$ d'après la proposition 38 page 105.

On a donc $\operatorname{card}(E') + q + 1 = \operatorname{card}(F')$ d'après la proposition 14 page 40.

Encore une fois, on a donc $S\big(\operatorname{card}(E') + q\big) = \operatorname{card}(F')$.

On a donc $\operatorname{card}(E') + q < \operatorname{card}(F')$ d'après cette même proposition.

Donc $\operatorname{card}(E') = \operatorname{card}(E') + 0 \leq \operatorname{card}(E') + q < \operatorname{card}(F')$.

Ainsi on a $\operatorname{card}(E') < \operatorname{card}(F')$.

Posons $f' := f_{|E'}$.

Montrons que $\operatorname{im}(f') = F'$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $z \in \operatorname{im}(f')$.

En particulier $z \in F$ car $\operatorname{im}(f') \subseteq \operatorname{im}(f) \subseteq F$.

De plus il existe $x \in E'$ tel que $z = f'(x)$.

Comme $x \in E' = E \backslash A_y$, on a $x \notin A_y$.

Autrement dit $f(x) \neq y$ par définition de A_y.

Puisque $z = f(x)$, on a $z \neq y$ donc $z \notin \{y\}$ et donc $z \in F \backslash \{y\} = F'$.

On a donc $\text{im}(f') \subseteq F'$, et donc $f' : E' \longrightarrow F'$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $z \in F'$.

Comme $F' = F \backslash \{y\}$, on a $z \in F$ et $z \neq y$.

Or f est surjective dans F par hypothèse.

Il existe donc $x \in E$ tel que $z = f(x)$.

Or $z \neq y$ donc $f(x) \neq y$ et donc $x \notin A_y$.

On a donc $x \in E \backslash A_y = E'$.

Ainsi $z = f(x) = f_{|E'}(x) = f'(x)$ donc $z \in \text{im}(f')$.

On a donc $\text{im}(f') \supseteq F'$ et donc $\text{im}(f') = F'$.

Ainsi $f' : E' \longrightarrow F'$ est surjective donc $F' \preccurlyeq E'$.

On a donc $\text{card}(F') \leq \text{card}(E')$ d'après la proposition 107 page 253.

C'est absurde puisqu'on a justement dit que $\text{card}(E') < \text{card}(F')$.

Par l'absurde, on vient de montrer que $\text{card}(A_y) = 1$.

Ainsi pour tout $y \in F$, on a $\text{card}(A_y) = 1$.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective de } E \text{ vers } F}$ d'après la proposition 129 page 313.

CQFD.

5.2 Ensembles dénombrables

Un ensemble dénombrable, c'est un ensemble que l'on peut dénombrer. Que veut alors dire "*dénombrer un ensemble*" ? Il s'agit d'être capable de dresser la liste de ses éléments, et ici "*liste*" est à comprendre au sens de "*suite*". Autrement dit, il existe une suite parcourant tous les éléments de cet ensemble. Dit encore autrement, $\mathbb{N}$ se surjecte dans l'ensemble E en question, c'est-à-dire $E \preccurlyeq \mathbb{N}$.

Notons cependant que dans la pratique mathématique, deux usages différents du terme "*dénombrable*" sont utilisés. Le premier est celui que nous venons d'évoquer : $E \preccurlyeq \mathbb{N}$. Mais bien souvent, on va plutôt utiliser le terme "*dénombrable*" pour désigner le fait d'être carrément en bijection avec $\mathbb{N}$. Pour cette raison, on va dans cette définition distinguer les deux usages par les qualificatifs de "*au plus dénombrable*" et "*infini dénombrable*".

Enfin, notons que le terme "*indénombrable*" s'oppose quant à lui à "*au plus dénombrable*".

Définition 42 (Ensembles dénombrables)

Soit E un ensemble.

1. On dit que E est **au plus dénombrable** si et seulement si $E \preccurlyeq \mathbb{N}$.
2. On dit que E est **infini dénombrable** si et seulement si $E \approx \mathbb{N}$.
3. On dit que E est **indénombrable** si et seulement si $\mathbb{N} \prec E$.

Remarque :
On emploie souvent simplement le terme *dénombrable*. Malheureusement, en fonction du contexte, cela peut tout aussi bien désigner *au plus dénombrable* que *infini dénombrable*. Dans les Barbuki, on s'efforcera de toujours préciser le sens.

Exemple :

1. Les ensembles finis sont au plus dénombrables.
2. Les ensembles infinis dénombrables sont au plus dénombrables.
3. $\mathbb{N}$ est infini dénombrable, et nous verrons dans les prochains livres que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont infinis dénombrables.
4. D'après le théorème de Cantor, $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ est indénombrable.
5. Nous verrons dans les prochains livres que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont indénombrables.

De la même manière qu'être plus petit qu'un fini fait de nous un fini, et qu'être plus grand qu'un infini fait de nous un infini, on a le même genre de lien avec la dénombrabilité.

Proposition 130 (Plus petit qu'un au plus dénombrable)

Soient E et F deux ensembles tels que $E \subseteq F$ ou $E \preccurlyeq F$.

1. Si E est indénombrable alors F est indénombrable.
2. Si F est au plus dénombrable alors E est au plus dénombrable.

Démonstration

Si $E \subseteq F$ alors $E \preccurlyeq F$ d'après la proposition 88 page 214.

On va donc montrer le cas général $E \preccurlyeq F$.

1. Supposons que E est indénombrable.

On a alors $\mathbb{N} \prec E \preccurlyeq F$ donc $\mathbb{N} \prec F$ d'après la proposition 89 page 222.

Ainsi $\boxed{F \text{ est indénombrable}}$.

2. Supposons que F est au plus dénombrable.

On a alors $E \preccurlyeq F \preccurlyeq \mathbb{N}$ donc $E \preccurlyeq \mathbb{N}$ par transitivité de $\preccurlyeq$.

Ainsi $\boxed{E \text{ est au plus dénombrable}}$.

CQFD.

Rappelons-nous que nous avons défini $\omega_0 = \aleph_0$ comme étant le cardinal de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire le plus petit cardinal infini. À partir de là, on a défini $\omega_1 = \aleph_1$ comme étant $\aleph(\aleph_0)$, c'est-à-dire le cardinal venant juste après $\omega_0 = \aleph_0$. Cela tombe bien, être indénombrable, c'est être strictement plus grand qu'un ensemble infini dénombrable. On retrouve donc naturellement la proposition suivante.

Proposition 131 (aleph1 et la frontière de l'indénombrable)

Soit E un ensemble.
Alors E est au plus dénombrable si et seulement si $E \prec \aleph_1$.
De manière équivalente, E est indénombrable si et seulement si $\aleph_1 \preccurlyeq E$.

Démonstration

$\boxed{\Rightarrow}$

Supposons que E est au plus dénombrable.

On a donc $E \preccurlyeq \mathbb{N}$ par définition.

De plus on a $\mathbb{N} = \aleph_0$ par définition, donc $\mathbb{N} \approx \aleph_0$ par réflexivité de $\approx$.

On a aussi $\aleph_0 \prec \aleph(\aleph_0)$ par définition du cardinal d'Hartogs.

Enfin on a $\aleph(\aleph_0) = \aleph_1$ par définition, donc $\aleph(\aleph_0) \approx \aleph_1$ par réflexivité de $\approx$.

Ainsi on a $E \preccurlyeq \mathbb{N} \approx \aleph_0 \prec \aleph(\aleph_0) \approx \aleph_1$.

On a donc $\boxed{E \prec \aleph_1}$ d'après la proposition 89 page 222.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supposons que $E \prec \aleph_1$.

On a donc $\mathrm{card}(E) < \mathrm{card}(\aleph_1)$ d'après la proposition 107 page 253.

Or $\aleph_1$ est un cardinal par définition, donc $\mathrm{card}(\aleph_1) = \aleph_1$.

Ainsi on a $\mathrm{card}(E) < \aleph_1$. Or $\aleph_1 = \aleph(\aleph_0)$ par définition.

Donc $\aleph_1$ est le plus petit cardinal strictement supérieur à $\aleph_0$.

Donc $\mathrm{card}(E) \leq \aleph_0$, et donc $E \preccurlyeq \aleph_0$ d'après la proposition 108 page 254.

Comme $\aleph_0 = \mathbb{N}$ par définition, on a $E \preccurlyeq \mathbb{N}$.

Autrement dit $\boxed{E \text{ est au plus dénombrable}}$.

CQFD.

On a vu lors du théorème de Cantor que $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$, ce qui avec la proposition 114 page 284 montre que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. D'après ce qui précède, on a donc $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$. A-t-on égalité $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$? On ne peut pas répondre à cette question dans ZFC : en 1938, Gödel a montré que l'on ne pouvait pas réfuter cette affirmation dans ZFC, et en 1968, Cohen a montré que l'on ne pouvait pas prouver cette affirmation dans ZFC. Elle est donc indépendante de ZFC. Considérer cette affirmation vraie, c'est faire ce que l'on appelle l'**hypothèse du continu**.

Plus généralement, faire l'hypothèse que pour tout ordinal α, on a $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$, c'est faire l'**hypothèse généralisée du continu**. Cet énoncé, que l'on peut reformuler en « *Pour tout ensembles X et Y, si X est infini et si $X \preccurlyeq Y \prec \mathscr{P}(X)$, alors $X \approx Y$* », implique l'axiome du choix !

Tout comme la notion de finitude est stable par les opérations ensemblistes élémentaires (proposition 123 page 303), il en va de même pour la dénombrabilité. Notez l'absence des ensembles d'applications, nous reviendrons dessus juste après.

Proposition 132 (Opérations ensemblistes et dénombrabilité)

Soient E et F deux ensembles.

1. Si E et F sont infinis dénombrables alors $E \cup F$, $E \amalg F$ et $E \times F$ sont infinis dénombrables.
2. Si E et F sont au plus dénombrables alors $E \cup F$, $E \amalg F$ et $E \times F$ sont au plus dénombrables.
3. Si E et F sont indénombrables alors $E \cup F$, $E \amalg F$ et $E \times F$ sont indénombrables.

Démonstration

1. Supposons que E et F sont infinis dénombrables.

• On a alors $E \approx \mathbb{N}$ et $F \approx \mathbb{N}$.

On a alors

$$\begin{aligned} E \amalg F &\approx \mathbb{N} \amalg \mathbb{N} \text{ d'après la prop. 95 p. 230} \\ &\approx \mathrm{card}(\mathbb{N} \amalg \mathbb{N}) \text{ par définition du cardinal} \\ &= \mathbb{N} + \mathbb{N} \text{ par définition de l'addition cardinale} \\ &= \max(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N} \text{ d'après la prop. 115 p. 291} \end{aligned}$$

On a donc $E \amalg F \approx \mathbb{N}$, et donc $\boxed{E \amalg F \text{ est infini dénombrable}}$.

• On a $E \subseteq E \cup F$ donc $E \preccurlyeq E \cup F$ d'après la proposition 88 page 214.
De plus on a $E \cup F \preccurlyeq E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.
Ainsi on a $\mathbb{N} \approx E \preccurlyeq E \cup F \preccurlyeq E \amalg F \approx \mathbb{N}$.
On a donc $\mathbb{N} \preccurlyeq E \cup F \preccurlyeq \mathbb{N}$ d'après la proposition 89 page 222.
On a donc $E \cup F \approx \mathbb{N}$ d'après le théorème de Cantor-Schröder-Bernstein.
Ainsi $\boxed{E \cup F \text{ est infini dénombrable}}$.

• On a dit que $E \approx \mathbb{N}$ et $F \approx \mathbb{N}$.
On a donc

$$\begin{aligned} E \times F &\approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ d'après la prop. 93 p. 228} \\ &\approx \operatorname{card}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \text{ par définition du cardinal} \\ &= \mathbb{N} \cdot \mathbb{N} \text{ par définition de la multiplication cardinale} \\ &= \max(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N} \text{ d'après la prop. 115 p. 291} \end{aligned}$$

On a donc $E \times F \approx \mathbb{N}$, et donc $\boxed{E \times F \text{ est infini dénombrable}}$.

2. Supposons que E et F sont au plus dénombrables.

• On a alors $E \preccurlyeq \mathbb{N}$ et $F \preccurlyeq \mathbb{N}$.
On a donc $E \amalg F \preccurlyeq \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}$ d'après la proposition 95 page 230.
Or on a dit dans la démonstration de 1 que $\mathbb{N} \amalg \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.
On a donc $E \amalg F \preccurlyeq \mathbb{N}$ d'après la proposition 89 page 222.
Donc $\boxed{E \amalg F \text{ est au plus dénombrable}}$.

• On a $E \cup F \preccurlyeq E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.
On a donc $E \cup F \preccurlyeq \mathbb{N}$ par transitivité de $\preccurlyeq$.
Donc $\boxed{E \cup F \text{ est au plus dénombrable}}$.

• On a dit que $E \preccurlyeq \mathbb{N}$ et $F \preccurlyeq \mathbb{N}$.
On a donc $E \times F \preccurlyeq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d'après la proposition 93 page 228.
Or on a dit dans la démonstration de 1 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.
On a donc $E \times F \preccurlyeq \mathbb{N}$ d'après la proposition 89 page 222.
Donc $\boxed{E \times F \text{ est au plus dénombrable}}$.

3. Supposons que E et F sont indénombrables.

• On a alors $\mathbb{N} \prec E$ et $\mathbb{N} \prec F$.
On a $E \subseteq E \cup F$ donc $E \preccurlyeq E \cup F$ d'après la proposition 88 page 214.
On a donc $\mathbb{N} \prec E \cup F$ d'après la proposition 89 page 222.
Donc $\boxed{E \cup F \text{ est indénombrable}}$.

• On a $E \cup F \preccurlyeq E \amalg F$ d'après la proposition 94 page 229.
On a donc $\mathbb{N} \prec E \amalg F$ d'après la proposition 89 page 222.
Donc $\boxed{E \amalg F \text{ est indénombrable}}$.

• Comme $\mathbb{N} \prec F$, F est en particulier non vide.
On a donc $E \preccurlyeq E \times F$ d'après la proposition 93 page 228.
On a donc $\mathbb{N} \prec E \times F$ d'après la proposition 89 page 222.
Donc $\boxed{E \times F \text{ est indénombrable}}$.
CQFD.

On retrouve comme annoncé plus tôt que toute union (au plus) dénombrable d'ensembles (au plus) dénombrables est (au plus) dénombrable.

Proposition 133 (Union d'ensembles dénombrables)

Soit I un ensemble **au plus dénombrable**.
Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles **au plus dénombrables**.
Alors $\bigcup_{i\in I} E_i$ est au plus dénombrable.

Démonstration

On applique la proposition 119 page 298 avec $\kappa = \mathbb{N}$.
CQFD.

On l'a dit juste avant d'énoncer la proposition 132 page 320, on n'y a pas fait mention des ensembles d'applications. La raison est simple : pour E et F deux ensembles au plus dénombrables, il n'y a pas de raison que $\mathcal{F}(E \to F)$ le soit aussi. Et oui, souvenons-nous du théorème de Cantor !

Proposition 134 (Indénombrabilité des suites à valeurs entières)

L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ des suites à valeurs entières est indénombrable.

Démonstration

On a $\mathcal{F}\big(\mathbb{N} \to \{0,1\}\big) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$.

On a donc $\mathcal{F}\big(\mathbb{N} \to \{0,1\}\big) \preccurlyeq \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ d'après la proposition 88 page 214.

Or on a $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{F}\big(\mathbb{N} \to \{0,1\}\big)$ d'après la proposition 92 page 226.

De plus on a $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N})$ d'après le théorème de Cantor.

Ainsi on a $\mathbb{N} \prec \mathscr{P}(\mathbb{N}) \approx \mathcal{F}\big(\mathbb{N} \to \{0,1\}\big) \preccurlyeq \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$.

On a donc $\mathbb{N} \prec \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ d'après la proposition 89 page 222.

Ainsi $\boxed{\mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \text{ est indénombrable}}$.

CQFD.

Or, rappelons-nous que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \mathbb{N}$, alors chacun des termes de $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dénombrable, mais pourtant $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \prod\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{N} = \mathcal{F}(\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, qui n'est donc pas dénombrable. Autrement dit, dans la proposition qui suit, on ne peut pas demander à l'ensemble I des indices d'être infini dénombrable, seulement fini.

Proposition 135 (Produit cartésien fini de dénombrables)

Soit I un ensemble **fini**.
Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles **au plus dénombrables**.
Alors $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est au plus dénombrable.

Démonstration

On fait une démonstration par induction sur le cardinal de I.

Pour tout entier naturel n, on note $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout I tel que $\operatorname{card}(I) = n$ et toute famille $(E_i)_{i\in I}$ d'ensembles au plus dénombrables, $\prod\limits_{i\in I} E_i$ est au plus dénombrable* ».

Initialisation

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = 0$.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables.

Par définition du cardinal on a $I \approx 0$.

On a donc $I = \varnothing$ d'après la proposition 97 page 236.

On a donc $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = \bigcup\limits_{i\in\varnothing} E_i = \varnothing$.

Donc $\mathcal{F}\left(I \to \bigcup\limits_{i\in I} E_i\right) = \mathcal{F}(\varnothing \to \varnothing) = \{0\}$, qui est fini.

Or $\prod\limits_{i\in I} E_i \subseteq \mathcal{F}\left(I \to \bigcup\limits_{i\in I} E_i\right)$.

Donc $\prod_{i \in I} E_i$ est fini d'après la proposition 122 page 302.

En particulier $\prod_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable.

Ainsi on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.

Soit I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = n + 1$.

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables.

Par définition du cardinal, on a $I \approx n + 1$.

Il existe donc $f : n + 1 \longrightarrow I$ une bijection.

Autrement dit on a $(E_i)_{i \in I} = \left(E_{f(k)}\right)_{k < n+1}$.

Donc $\prod_{i \in I} E_i = \prod_{k < n+1} E_{f(k)} \approx \left(\prod_{k<n} E_{f(k)} \right) \times E_{f(n)}$ d'après la prop. 126 p. 307.

Or $\prod_{k<n} E_{f(k)}$ est au plus dénombrable d'après $P(n)$.

De plus $E_{f(n)}$ est au plus dénombrable par définition.

Donc $\left(\prod_{k<n} E_{f(k)} \right) \times E_{f(n)}$ est au plus dénombrable d'après la prop. 132 p. 320.

Donc $\prod_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable.

On a donc $P(n + 1)$.

Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n + 1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.

Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$.

CQFD.

Proposition 136 (Finitude et dénombrabilité des cylindres)

Soient A et B deux ensembles et C une partie de $A \times B$.
Pour tout $a \in A$, on note $C_{a,\bullet}$ l'ensemble $\{b \in B \mid (a, b) \in C\}$.
Pour tout $b \in B$, on note $C_{\bullet,b}$ l'ensemble $\{a \in A \mid (a, b) \in C\}$.

1. Supposons que C est fini.
   Alors pour tout $a \in A$, l'ensemble $C_{a,\bullet}$ est fini.
   De même pour tout $b \in B$, l'ensemble $C_{\bullet,b}$ est fini.
2. Supposons que C est au plus dénombrable.
   Alors pour tout $a \in A$, l'ensemble $C_{a,\bullet}$ est au plus dénombrable.
   De même pour tout $b \in B$, l'ensemble $C_{\bullet,b}$ est au plus dénombrable.

Démonstration

Soit $a \in A$.

Par définition, $\forall b \in C_{a,\bullet}, (a,b) \in C$.

Considérons alors l'application $f := \begin{pmatrix} C_{a,\bullet} & \longrightarrow & C \\ b & \longmapsto & (a,b) \end{pmatrix}$.

Alors f est injective.

En effet, soient b et b' dans $C_{a,\bullet}$ tels que $f(b) = f(b')$.

On a alors $(a,b) = (a,b')$ et donc en particulier $b = b'$.

Ainsi $f : C_{a,\bullet} \longrightarrow C$ est injective et donc $C_{a,\bullet} \preccurlyeq C$.

Ainsi $\forall a \in A, C_{a,\bullet} \preccurlyeq C$.

On montre exactement de la même manière que $\forall b \in B, C_{\bullet,b} \preccurlyeq C$.

1. Supposons que C est fini.

On a alors $C \prec \mathbb{N}$ d'après la proposition 121 page 302.

Or on a montré que $\forall a \in A, C_{a,\bullet} \preccurlyeq C$ et $\forall b \in B, C_{\bullet,b} \preccurlyeq C$.

On a donc $\forall a \in A, C_{a,\bullet} \prec \mathbb{N}$ et $\forall b \in B, C_{\bullet,b} \prec \mathbb{N}$ d'après la proposition 89 page 222.

Donc pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $\boxed{C_{a,\bullet} \text{ et } C_{\bullet,b} \text{ sont finis}}$ d'après la prop. 121 p. 302.

2. Supposons que C est au plus dénombrable.

On a alors $C \preccurlyeq \mathbb{N}$ par définition.

Or on a montré que $\forall a \in A, C_{a,\bullet} \preccurlyeq C$ et $\forall b \in B, C_{\bullet,b} \preccurlyeq C$.

On a donc $\forall a \in A, C_{a,\bullet} \preccurlyeq \mathbb{N}$ et $\forall b \in B, C_{\bullet,b} \preccurlyeq \mathbb{N}$ par transitivité de la subpotence.

Donc pour tout $a \in A$ et $b \in B$, $\boxed{C_{a,\bullet} \text{ et } C_{\bullet,b} \text{ sont au plus dénombrables}}$ par définition.

CQFD.

Concluons ce chapitre avec la promesse de fin du précédent chapitre. On avait alors défini

$$\varepsilon_0 := \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

un ordinal immensément grand dans l'infini. On avait surenchéri avec la définition

$$\zeta_0 := \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_{\dots}}}}}$$

ce qui semble dépasser l'entendement. Pourtant à ce moment-là, on a affirmé que le chapitre actuel allait nous fournir des ordinaux encore plus immense : il s'agit par exemple de $\omega_1 = \aleph_1$. Pourquoi ? Tout simplement parce que ε_0 et ζ_0 sont dénombrables ! La définition et la proposition qui suit ont pour objectif de le montrer.

Définition 43 (Assertion préservant les dénombrables)

Soit F une assertion fonctionnelle.
On dit que F **préserve les au plus dénombrable** si et seulement pour tout ordinal α au plus dénombrable, $F(\alpha)$ est aussi au plus dénombrable.

Proposition 137 (Fixation et dénombrabilité)

Soit $F : ON \longrightarrow ON$ une assertion fonctionnelle **strictement croissante et continue**.
Supposons que F préserve les au plus dénombrables.
On a alors :

1. Pour tout entier naturel n, F^n préserve les au plus dénombrables.
2. F^ω préserve les au plus dénombrables.
3. F° préserve les au plus dénombrables.

Démonstration

1. Pour tout entier naturel n, posons $P(n)$ l'assertion

« *F^n préserve les au plus dénombrables* ».

Initialisation

Soit α un ordinal au plus dénombrable.
Alors $F^0(\alpha) = \alpha$ par définition de F^0.
Donc $F^0(\alpha)$ est au plus dénombrable.
Ainsi F^0 préserve les au plus dénombrables donc on a $P(0)$.

Hérédité

Soit n un entier naturel tel que $P(n)$.
Soit α un ordinal au plus dénombrable.
Alors $F^n(\alpha)$ est au plus dénombrable d'après $P(n)$.
Donc $F\big(F^n(\alpha)\big)$ est au plus dénombrable par hypothèse sur F.
Or $F^{n+1}(\alpha) = F\big(F^n(\alpha)\big)$ par définition de F^{n+1}.
Donc $F^{n+1}(\alpha)$ est au plus dénombrable.
Ainsi F^{n+1} préserve les au plus dénombrables, donc on a $P(n+1)$.
Ainsi pour tout entier naturel n, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe d'induction chez les entiers naturels.
Donc pour tout entier naturel n, on a $P(n)$.
Ainsi $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ F^n \text{ préserve les au plus dénombrables}}$.

2.

Soit α un ordinal au plus dénombrable.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F^n(\alpha)$ est au plus dénombrable d'après 1.

Autrement dit, $\forall n \in \mathbb{N}, F^n(\alpha) \preccurlyeq \mathbb{N}$ par définition.

De plus $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{N}$ par réflexivité de $\preccurlyeq$.

Donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F^n(\alpha) \preccurlyeq \mathbb{N}$ d'après la proposition 133 page 322.

Or on a $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} F^n(\alpha) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F^n(\alpha)$ d'après la proposition 12 page 35.

Donc $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} F^n(\alpha)$ est au plus dénombrable.

Or $F^\omega(\alpha) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} F^n(\alpha)$ par définition de F^ω.

Donc $F^\omega(\alpha)$ est au plus dénombrable.

Ainsi $\boxed{F^\omega \text{ préserve les au plus dénombrables}}$.

3. Rappelons-nous qu'avec la proposition 84 page 205, on a montré que

$$\begin{cases} F^\circ(0) = F^\omega(0) \\ F^\circ(\alpha+1) = F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big) \text{ pour tout ordinal } \alpha \\ F^\circ(\gamma) = \sup\limits_{\delta<\gamma} F^\circ(\delta) \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Pour tout ordinal α, posons $Q(\alpha)$ l'assertion

« *Si α est au plus dénombrable alors $F^\circ(\alpha)$ est au plus dénombrable.* »

Initialisation

0 est au plus dénombrable puisque $0 \leq \mathbb{N}$.

Donc $F^\omega(0)$ est au plus dénombrable d'après 2.

Donc $F^\circ(0)$ est au plus dénombrable d'après ce que l'on a dit plus haut.

On a donc $Q(0)$.

Hérédité

Soit α un ordinal tel que $Q(\alpha)$.

Supposons que $\alpha+1$ est au plus dénombrable.

On a $\alpha \leq \alpha+1$ donc $\alpha \preccurlyeq \alpha+1$.

Donc α est au plus dénombrable d'après la proposition 130 page 318.

Donc $F^\circ(\alpha)$ est au plus dénombrable d'après $Q(\alpha)$.

Or $F^\circ(\alpha)+1 = S\big(F^\circ(\alpha)\big) = F^\circ(\alpha) \cup \big\{F^\circ(\alpha)\big\}$ par définition.

Donc $F^\circ(\alpha)+1$ est au plus dénombrable d'après la prop. 132 p. 320.

Donc $F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$ est au plus dénombrable d'après 2.

Or on a dit que $F^\circ(\alpha+1) = F^\omega\big(F^\circ(\alpha)+1\big)$.

Donc $F^\circ(\alpha+1)$ est au plus dénombrable.

On a donc $Q(\alpha+1)$.

Donc pour tout ordinal α, si $Q(\alpha)$ alors $Q(\alpha+1)$.

Hérédité limite

Soit α un ordinal limite non nul tel que $\forall\beta<\alpha, Q(\beta)$.

Supposons que α est au plus dénombrable.

Soit β un ordinal tel que $\beta<\alpha$.

On a en particulier $\beta\leq\alpha$ donc $\beta\preccurlyeq\alpha$.

Donc β est au plus dénombrable d'après la proposition 130 page 318.

Donc $\forall\beta<\alpha, \beta\preccurlyeq\mathbb{N}$ par définition.

Donc $\forall\beta<\alpha, F^\circ(\beta)\preccurlyeq\mathbb{N}$ puisque $\forall\beta<\alpha, Q(\beta)$.

De plus $\alpha\preccurlyeq\mathbb{N}$ par hypothèse.

Donc $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta)\preccurlyeq\mathbb{N}$ d'après la proposition 133 page 322.

Or $\sup\limits_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta)$ d'après la proposition 12 page 35.

Donc $\sup\limits_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta)$ est au plus dénombrable.

Or on a dit que $F^\circ(\alpha) = \sup\limits_{\beta<\alpha} F^\circ(\beta)$.

Donc $F^\circ(\alpha)$ est au plus dénombrable.

On a donc $Q(\alpha)$.

Donc pour tout ordinal limite non nul α, si$\forall\beta<\alpha, Q(\beta)$ alors $Q(\alpha)$.

Finalement Q vérifie les trois conditions du principe faible d'induction transfinie.

Donc pour tout ordinal α, on a $Q(\alpha)$.

Autrement dit, $\boxed{F^\circ \text{ préserve les au plus dénombrables}}$.

CQFD.

Nous pouvons conclure, en se rappelant la fin du précédent chapitre.

Posons $F := \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \alpha & \longmapsto & \omega^{\mathcal{O}\alpha} \end{pmatrix}$.

D'après la proposition 67 page 161, F est strictement croissante.
D'après la proposition 69 page 165, F est continue.
On peut donc considérer F° sa fixation d'après le théorème 10 page 202.
On peut même considérer $F^{\circ\circ}$ la fixation de sa fixation d'après la proposition 83 page 203.

On a alors posé $\varepsilon_0 := F^\circ(0)$ et $\zeta_0 := F^{\circ\circ}(0)$.
Il nous reste à montrer que F préserve les au plus dénombrables.

Proposition 138 (Les puissances d'omega)

Soit $F := \begin{pmatrix} ON & \longrightarrow & ON \\ \alpha & \longmapsto & \omega^{\mathcal{O}\alpha} \end{pmatrix}$.
Alors F préserve les au plus dénombrables.

Démonstration

Pour tout ordinal α, posons $R(\alpha)$ l'assertion

« *Si α est au plus dénombrable, alors $\omega^{\mathcal{O}\alpha}$ est au plus dénombrable.* »

Initialisation
On a $\omega^{\mathcal{O}0} = 1$ par définition, qui est bien au plus dénombrable, donc on a $R(0)$.

Hérédité
Soit α un ordinal tel que $R(\alpha)$.
Supposons que $\alpha + 1$ est au plus dénombrable.
On a $\alpha \leq \alpha + 1$ donc $\alpha \preccurlyeq \alpha + 1$.
Donc α est au plus dénombrable d'après la proposition 130 page 318.
Donc $\omega^{\mathcal{O}\alpha}$ est au plus dénombrable d'après $R(\alpha)$, c'est-à-dire $\omega^{\alpha} \preccurlyeq \omega$.
De même, $\omega \preccurlyeq \omega$ est au plus dénombrable par réflexivité de $\preccurlyeq$.
Donc $\omega \times \omega^{\mathcal{O}\alpha} \preccurlyeq \omega \times \omega$ d'après la proposition 93 page 228.

On a alors

$$\begin{aligned}
\omega^{\mathcal{O}(\alpha+1)} &= \left(\omega^{\mathcal{O}\alpha}\right) \overset{\mathcal{O}}{\cdot} \omega \text{ par définition de l'exponentiation ordinale} \\
&= \operatorname{type}(\omega \times \omega^{\mathcal{O}\alpha}) \text{ d'après le théorème 8 page 153} \\
&\approx \omega \times \omega^{\mathcal{O}\alpha} \text{ d'après la prop. 106 p. 252} \\
&\preccurlyeq \omega \times \omega \text{ par ce qui précède} \\
&\approx \operatorname{card}(\omega \times \omega) \text{ par définition du cardinal} \\
&= \omega \cdot \omega \text{ par définition de la multiplication cardinale} \\
&= \omega \text{ d'après le théorème 19 page 287}
\end{aligned}$$

et donc $\omega^{\mathcal{O}(\alpha+1)} \preccurlyeq \omega$.
Ainsi $\omega^{\mathcal{O}(\alpha+1)}$ est au plus dénombrable.
On a donc $R(\alpha + 1)$.
Ainsi pour tout ordinal α, si $R(\alpha)$ alors $R(\alpha + 1)$.

Hérédité limite

Soit α un ordinal tel que $\forall \beta < \alpha, R(\beta)$.

Supposons que α est au plus dénombrable.

Soit β un ordinal tel que $\beta < \alpha$.

On a en particulier $\beta \leq \alpha$ donc $\beta \preccurlyeq \alpha$.

Donc β est au plus dénombrable d'après la proposition 130 page 318.

Donc $\forall \beta < \alpha, \beta \preccurlyeq \mathbb{N}$ par définition.

Donc $\forall \beta < \alpha, \omega^{\mathcal{O}\beta} \preccurlyeq \mathbb{N}$ car $\forall \beta < \alpha, R(\beta)$.

Or $\alpha \preccurlyeq \mathbb{N}$ par hypothèse.

Donc $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\mathcal{O}\beta} \preccurlyeq \mathbb{N}$ d'après la proposition 133 page 322.

Or $\sup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\mathcal{O}\beta} = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\mathcal{O}\beta}$ d'après la proposition 12 page 35.

Donc $\sup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\mathcal{O}\beta} \preccurlyeq \mathbb{N}$.

Or α est un ordinal limite non nul.

Donc $\omega^{\mathcal{O}\alpha} = \sup\limits_{\beta<\alpha} \omega^{\mathcal{O}\beta}$ par définition de l'exponentiation ordinale.

Donc $\omega^{\mathcal{O}\alpha}$ est au plus dénombrable.

On a donc $R(\alpha)$.

Ainsi pour tout ordinal limite non nul, si $\forall \beta < \alpha, R(\beta)$ alors $R(\alpha)$.

Finalement R vérifie les trois conditions du principe faible d'induction transfinie.

Donc pour tout ordinal α, on a $R(\alpha)$.

Finalement $\boxed{F \text{ préserve les au plus dénombrables}}$.

CQFD.

Ainsi F préserve les au plus dénombrables.
Donc F° et $F^{\circ\circ}$ aussi d'après la proposition d'avant.
Or 0 est au plus dénombrable.
Donc $\varepsilon_0 = F^{\circ}(0)$ et $\zeta_0 = F^{\circ\circ}(0)$ sont au plus dénombrables par ce qui précède.
En particulier $\varepsilon_0 < \omega_1$ et $\zeta_0 < \omega_1$. Fascinant !

Chapitre 4

Répétition d'opérations

Note de l'auteur

Terminons cet ouvrage par un chapitre un peu spécial qui va faire office d'annexe. L'idée est de donner du sens aux symboles $\sum$ et $\prod$ que l'on rencontre très souvent en mathématiques : il s'agit de répéter une opération un certain nombre de fois, généralement la somme ou le produit de nombres.

Pour en parler, nous avons notamment besoin de la notion d'ensemble fini et d'entier naturel, ce qui explique pourquoi ce chapitre ne pouvait intervenir qu'après le précédent.

Sommaire

1 De 1 à n

Lire les symboles de sommes et de produits n'est pas simple au premier abord. Commençons par en donner un exemple : $\sum_{k=1}^{4} k^2$ doit être compris comme la somme des carrés des entiers de 1 à 4, c'est-à-dire $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$. Autrement dit, la variable k va prendre successivement toutes les valeurs entières de 1 à 4, et on rajoutera à chaque fois la valeur de k^2. Le symbole Σ est en fait la lettre grecque *sigma* majuscule, qui est donc l'ancêtre de la lettre `S`, initiale du mot *somme*. Pour les plus informaticiens d'entre nous, on peut voir cela sous la forme d'une boucle `for` comme ceci :

$S = 0$
for $k = 1$ **to** 4 **do**
  $S = S + k^2$
end

On remarque que l'on a initialisé la somme à 0 : en effet, quand on répète une opération, on l'initialise avec la valeur neutre pour cette opération. Si l'on souhaite plutôt répéter un produit, on utilisera alors le symbole Π, qui est en fait la lettre grecque *pi* majuscule, ancêtre de la lettre `P` initiale du mot *produit*. Par exemple si l'on s'intéresse au produit $\prod_{k=1}^{4} k^2$, qui va donc être le produit $1^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 4^2$, on va également pouvoir le faire avec la boucle `for` suivante :

$P = 1$
for $k = 1$ **to** 4 **do**
  $P = P \times k^2$
end

On l'initialise donc avec 1 car c'est 1 qui est neutre pour la multiplication.

Pour pouvoir définir une répétition d'une opération, il va nous falloir plusieurs choses :

- Un ensemble dans lequel effectuer l'opération.
- Une opération sur cet ensemble, c'est-à-dire une application qui prend en entrée deux éléments de l'ensemble et en renvoie un troisième.
- Un élément neutre pour cette opération afin d'initialiser la répétition.

Commençons par définir la notion d'opération sur un ensemble : on parle plutôt de **loi de composition interne**. La mot *loi* fait ici référence au fait qu'il y a d'une certaine manière une règle de calcul. Le mot *composition* est là pour signifier que l'on compose deux éléments entre eux, et le mot *interne* nous indique que l'on ne quitte pas l'ensemble dans lequel on fait l'opération.

Définition 44 (Loi de composition interne)

Soit E un ensemble.
On appelle **loi de composition interne** sur E toute application $* : E^2 \longrightarrow E$.
Pour x et y dans E, on note $x * y$ plutôt que $*(x, y)$.

Exemple :

1. L'addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ et sur les ensembles de nombres usuels comme $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ que nous aurons l'occasion de définir dans les prochains ouvrages. Il en va de même pour la multiplication.
2. La soustraction n'est pas une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ puisque par exemple $1-2$ n'est pas un élément de $\mathbb{N}$ alors que pourtant 1 et 2 le sont. En revanche c'en est une sur $\mathbb{Z}$, cet ensemble sera d'ailleurs défini dans le prochain livre à cet effet.

Les lois de compositions internes peuvent vérifier un certain nombre de propriétés : par exemple certains lois permettent de « *tourner autour* », et on parle alors de commutativité.

Définition 45 (Qualificatifs de lois de composition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.

1. On dit que $*$ est **associative** si et seulement si pour tout x, y et z dans E, on a
$$(x * y) * z = x * (y * z)$$
Dans ce cas-là, on note $x * y * z$ pour désigner ce même élément.
2. On dit que $*$ est **commutative** si et seulement si pour tout x et y dans E, on a
$$x * y = y * x$$
3. On dit que E admet un **élément neutre** pour $*$ si et seulement s'il existe $e \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a
$$x * e = x = e * x$$
On dit alors qu'un tel e est un élément neutre de E pour $*$.

Exemple :

1. L'addition sur $\mathbb{N}$ est associative, commutative et admet 0 pour élément neutre. La multiplication sur $\mathbb{N}$ est également associative et commutative, mais c'est 1 qui en est élément neutre.
2. La soustraction sur $\mathbb{Z}$ n'est pas commutative : par exemple $1-2 \neq 2-1$. Elle n'est même pas associative, puisque $(1-2)-3 = -1-3 = -4$ tandis que $1-(2-3) = 1-(-1) = 2$. Quand une loi de composition interne $*$ n'est pas associative, l'élément $x * y * z$ est souvent défini comme étant $(x * y) * z$, c'est-à-dire que l'on effectue les opérations de la gauche vers la droite.
3. Pour un ensemble A, la réunion $\cup$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(A)$. En effet, la réunion de deux parties de A est encore une partie de A. Comme nous l'avons vu dans le premier livre, la réunion est associative, commutative, et l'ensemble vide en est un élément neutre.

Un fait remarquable est qu'une loi de composition interne ne peut disposer que d'un seul élément neutre au maximum.

Proposition 139 (Unicité de l'élément neutre)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
Alors E admet au plus un élément neutre pour $*$.

Démonstration

Supposons qu'il existe e et e' deux éléments neutres de E pour $*$.

En appliquant d'abord la neutralité de e' puis celle de e, on a alors

$$e = e * e' = e'$$

et donc $e = e'$, $\boxed{\text{d'où l'unicité}}$.

CQFD.

Nous avons à présent ce qu'il faut à disposition pour pouvoir répéter une opération. L'idée va être maintenant de se donner des éléments avec lesquels on souhaite répéter l'opération. Dans l'exemple introductif, nous avons répété l'addition et la multiplication sur l'ensemble $\{1^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$.

Notons d'ailleurs qu'ils étaient donnés dans un ordre précis : on a voulu parler en premier lieu de la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ et non par exemple de $3^2 + 2^2 + 4^2 + 1^2$, bien qu'a posteriori il s'agisse du même nombre par associativité et commutativité de l'addition. Si par exemple dans $\mathbb{Z}$ on souhaite définir $1^2 - 2^2 - 3^2 - 4^2$, il est impératif de traduire le fait que c'est tout d'abord la soustraction entre 1^2 et 2^2 qui est faite puis ensuite seulement soustraire 3^2 au résultat, et enfin retirer 4^2. Autrement dit, on va plutôt vouloir définir la somme sur le quadruplet $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2)$ qui traduit bien l'idée d'un ordonnancement dans les opérations à effectuer.

Pour l'heure, commençons par nous donner la possibilité de le faire avec des suites d'éléments : dans notre exemple il s'agirait de la suite $(k^2)_{k\in\mathbb{N}}$, et on va simplement définir la somme ou le produit des n premiers termes de cette suite. Notons qu'on obtient également une suite ! En effet, pour la somme de l'exemple on va définir la suite dont les premiers termes sont 0 (*pour l'initialisation*) puis 1^2 puis $1^2 + 2^2$ puis encore $1^2 + 2^2 + 3^2$, etc, c'est-à-dire la suite dont les premiers termes sont $\sum\limits_{k=1}^{0} k^2$ (*pour l'initialisation*) puis $\sum\limits_{k=1}^{1} k^2$ puis $\sum\limits_{k=1}^{2} k^2$ puis encore $\sum\limits_{k=1}^{3} k^2$, etc. Autrement dit, on est en train de se donner la possibilité de définir la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$
Comment allons-nous procédé ? Remarquons que par exemple

$$\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2) + 4^2 = \left(\sum_{k=1}^{3} k^2\right) + 4^2$$

Nous avons en fait là une définition par récurrence ! Autrement dit $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^2\right) + (n+1)^2$.

Définition 46 (Répétition d'opérations)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que E **admet un élément neutre** e pour $*$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Par récurrence, on pose

$$\left\{\begin{aligned} &\mathop{\Huge *}_{k=1}^{0} x_k := e \\ &\mathop{\Huge *}_{k=1}^{n+1} x_k := \left(\mathop{\Huge *}_{k=1}^{n} x_k\right) * x_{n+1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{aligned}\right.$$

Remarque :

1. L'indice k dans la notation $\mathop{\Huge *}\limits_{k=1}^{n} x_k$ est muet : on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère (qui n'est pas déjà utilisé évidemment). Ainsi on a

$$\mathop{\Huge *}_{k=1}^{n} x_k = \mathop{\Huge *}_{i=1}^{n} x_i = \mathop{\Huge *}_{j=1}^{n} x_j$$

2. Ainsi par défaut le symbole de l'opération, ici $*$, est grossi pour indiquer qu'il s'agit de la répétition de celle-ci. En revanche comme on l'a dit jusqu'à présent, on utilisera généralement la répétition avec l'addition $+$ et la multiplication $\times$, où comme indiqué les symboles sont plutôt $\sum$ et $\prod$.

Exemple :
Pour un ensemble A, on a dit que la réunion $\cup$ est une loi de composition interne sur $\mathscr{P}(A)$. On a déjà défini la réunion d'une famille quelconque de parties de A, mais il est tout à fait possible d'utiliser cette définition-ci pour définir par exemple la réunion $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k$ d'une suite de parties de A. Bien heureusement, les deux définitions coïncident, puisqu'on a montré dans le précédent livre que pour J un ensemble d'indices et a un indice, on a l'égalité

$$\bigcup_{j\in J\cup\{a\}} B_j = \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) \cup B_a$$

ce qui correspond bien, en prenant $J := \{1, \ldots, n\}$ et $a := n + 1$ à la définition par récurrence que l'on vient de donner. On a la même chose pour l'intersection, exactement pour la même raison.

Au lieu de commencer à sommer à partir du premier terme, il est possible que l'on souhaite débuter la somme à partir du rang 2 ou n'importe quel autre indice plus grand. La notation qui suit le permet.

Notation

Pour tout n et m dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathop{\huge\ast}\limits_{k=1+m}^{n+m} x_k := \mathop{\huge\ast}\limits_{k=1}^{n} x_{k+m}$.
On dit que l'on a fait un **décalage** des indices.

Exemple :
Le produit des carrés des entiers de 4 à 8 est

$$\prod_{k=4}^{8} k^2 = \prod_{k=1+3}^{5+3} k^2 = \prod_{k=1}^{5} (k+3)^2$$

et là on retrouve la notion définie plus haut, à savoir

$$(1+3)^2 \times (2+3)^2 \times (3+3)^2 \times (4+3)^2 \times (5+3)^2 = 4^2 \times 5^2 \times 6^2 \times 7^2 \times 8^2$$

Comme le montre l'exemple ci-dessus, on est donc en mesure de définir la répétition à partir de n'importe quel entier jusqu'à n'importe quel autre entier plus grand. Ainsi, si a et b sont deux entiers naturels tels que $1 \leq a \leq b+1$, on est capable de parler de $\mathop{\huge\ast}\limits_{k=a}^{b} x_k$. En effet, puisque $1 \leq a$ il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a = m+1$ d'après la proposition 52 page 134. Puisque $a \leq b+1$ on a $m+1 \leq b+1$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b+1 = m+1+n = m+n+1$ toujours d'après la même proposition, et donc $b = m+n$ par injectivité du passage au successeur. On a donc

$$\mathop{\huge\ast}\limits_{k=a}^{b} x_k = \mathop{\huge\ast}\limits_{k=1+m}^{n+m} x_k = \mathop{\huge\ast}\limits_{k=1}^{n} x_{k+m}$$

Voyons à présent une version un peu plus générale du décalage.

Proposition 140 (Décalages des indices de répétition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que E **admet un élément neutre** e pour $*$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Soient a et b deux entiers naturels tels que $1 \leq a \leq b+1$.

Pour tout entier naturel ℓ, on a l'égalité $\mathop{\huge\ast}\limits_{k=a+\ell}^{b+\ell} x_k = \mathop{\huge\ast}\limits_{k=a}^{b} x_{k+\ell}$.

Démonstration

On sait que $1 \leq a$.

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $a = m + 1$ d'après la proposition 52 page 134.

Puisque $a \leq b + 1$ on a donc $m + 1 \leq b + 1$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b + 1 = (m + 1) + n$ toujours d'après la même proposition.

Ainsi $b + 1 = (m + n) + 1$ et donc $b = m + n$ par injectivité du passage au successeur.

On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathop{\huge *}_{k=a+\ell}^{b+\ell} x_k &= \mathop{\huge *}_{k=(m+1)+\ell}^{(m+n)+\ell} x_k \text{ puisque } a = m+1 \text{ et } b = m+n \\
&= \mathop{\huge *}_{k=1+(m+\ell)}^{n+(m+\ell)} x_k \\
&= \mathop{\huge *}_{k=1}^{n} x_{k+(m+\ell)} \text{ par définition du décalage} \\
&= \mathop{\huge *}_{k=1}^{n} x_{(k+m)+\ell} \\
&= \mathop{\huge *}_{k=1+m}^{n+m} x_{k+\ell} \text{ par définition du décalage} \\
&= \mathop{\huge *}_{k=a}^{b} x_{k+\ell} \text{ puisque } a = m+1 \text{ et } b = m+n
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathop{\huge *}_{k=a+\ell}^{b+\ell} x_k = \mathop{\huge *}_{k=a}^{b} x_{k+\ell}}$.

CQFD.

Généralisons légèrement la définition par récurrence au cas où la répétition ne commence pas à l'indice 1.

Proposition 141 (Élément supplémentaire : bornes quelconques)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que E **admet un élément neutre** e pour $*$.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Soient a et b deux entiers naturels tels que $1 \leq a \leq b + 1$.

On a alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{i=a}^{b+1} x_i = \left(\mathop{\huge *}_{i=a}^{b} x_i\right) * x_{b+1}$.

Démonstration

On sait que $1 \leq a$.

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $a = m + 1$ d'après la proposition 52 page 134.

Puisque $a \leq b + 1$ on a donc $m + 1 \leq b + 1$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b + 1 = (m + 1) + n$ toujours d'après la même proposition.

Ainsi $b + 1 = (m + n) + 1$ et donc $b = m + n$ par injectivité du passage au successeur.

On a donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b+1} x_i &= \mathop{\Huge *}_{i=1+m}^{(n+1)+m} x_i \quad \text{car } a = m+1 \text{ et } b+1 = m+n+1 \\
&= \mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_{i+m} \quad \text{par définition du décalage} \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n} x_{i+m} \right) * x_{(n+1)+m} \text{ par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1+m}^{n+m} x_i \right) * x_{(n+1)+m} \quad \text{par définition du décalage} \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b} x_i \right) * x_{b+1} \quad \text{car } a = m+1 \text{ et } b = m+n
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b+1} x_i = \left(\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b} x_i \right) * x_{b+1}}$.

CQFD.

Notation :
Considérons a et b deux entiers naturels.
On pose $[\![a, b]\!] := \{k \in \mathbb{N} \mid a \leq k \leq b\}$.
Par exemple $[\![3, 7]\!] = \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Proposition 142 (Casser en deux une répétition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **associative** et admet un **élément neutre** $e \in E$.
Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n} x_i = \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{k} x_i \right) * \left(\mathop{\Huge *}_{i=k+1}^{n} x_i \right)$$

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion

$$\text{« \textit{Pour tout} } k \in [\![0, n]\!] \text{, \textit{on a} } \mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i = \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{n} x_i\right) \text{ ».}$$

Initialisation

Soit $k \in [\![0, 0]\!]$.

On a alors nécessairement $k = 0$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{i=1}^{0} x_i &= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{0} x_i\right) \ast e \text{ car } e \text{ est neutre pour } \ast \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{0} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{0} x_i\right) \text{ par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{0} x_i\right) \text{ puisque } k = 0
\end{aligned}$$

On a donc $\mathop{\ast}_{i=1}^{0} x_i = \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{0} x_i\right)$.

Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0, 0]\!]$, on a $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a $P(n)$.

Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$.

► Plaçons-nous dans le cas où $k \in [\![0, n]\!]$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{i=1}^{n+1} x_i &= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{n} x_i\right) \ast x_{n+1} \text{ par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{n} x_i\right) \ast x_{n+1} \text{ d'après } P(n) \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{n+1} x_i\right) \text{ d'après la prop. 141 p. 337}
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathop{\ast}_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{k} x_i\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i=k+1}^{n+1} x_i\right)$.

► Plaçons-nous dans le cas où $k = n + 1$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_i &= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_i\right) * e \text{ car } e \text{ est neutre pour } * \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_i\right) * \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{0} x_{i+k}\right) \text{ par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_i\right) * \left(\mathop{\Huge *}_{i=1+k}^{0+k} x_i\right) \text{ par définition du décalage} \\
&= \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{k} x_i\right) * \left(\mathop{\Huge *}_{i=k+1}^{n+1} x_i\right) \text{ puisque } k = n+1
\end{aligned}$$

Ainsi on a $\mathop{\Huge *}_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\mathop{\Huge *}_{i=1}^{k} x_i\right) * \left(\mathop{\Huge *}_{i=k+1}^{n+1} x_i\right)$.

On vient donc de le prouver pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$, et donc on a $P(n+1)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement, P vérifie les deux conditions du principe de récurrence.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } P(n)}$.

CQFD.

Remarque :
Il semble à première vue que dans la démonstration de la proposition, nous n'avons pas utilisé l'associativité de $*$ alors pourtant que c'est une hypothèse. En réalité si nous l'avons utilisée implicitement. À un moment dans la preuve, deux symboles $*$ se suivent sans que l'on indique de priorité sur l'un d'entre eux. L'associativité nous permet justement de ne pas se soucier de cela et de mettre la priorité sur celle qui nous intéresse.

2 Sur un ensemble fini

Soit $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'élément de E. Comment donner du sens à l'expression $\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s$? Par exemple on peut se donner $S = \{a, b, c\}$ puis définir $x_a := 5$, $x_b := 8$ et $x_c := 2$ et on aimerait pouvoir dire $\sum\limits_{s\in S} x_s = 5 + 8 + 2$. Pour l'instant avec nos définitions, on ne peut concrètement donner du sens à l'expression que si S est de la forme $[\![1, n]\!]$ pour un certain entier naturel n puisqu'on a fait une définition par récurrence.

Si S est fini, il existe un entier n tel que $\mathrm{card}(S) = n$. Puisque $[\![1, n]\!]$ a également pour cardinal n on a l'équipotence $S \approx [\![1, n]\!]$ et donc il existe une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$. Par exemple si $S = \{a, b, c\}$ alors $n = 3$ et donc on peut proposer la bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ définie par $\varphi(1) := a$, $\varphi(2) := b$ et $\varphi(3) := c$, de sorte qu'on pourrait poser

$$\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s := \mathop{\Huge *}\limits_{i=1}^{3} x_{\varphi(i)} = x_{\varphi(1)} * x_{\varphi(2)} * x_{\varphi(3)} = x_a * x_b * x_c$$

Le problème vient alors du fait qu'il n'y a pas une unique bijection entre $[\![1, n]\!]$ et S. Par exemple on aurait pu prendre ψ définie par $\psi(1) := b$, $\psi(2) := c$ et $\psi(3) := a$ et on aurait alors posé

$$\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s := \mathop{\Huge *}\limits_{i=1}^{3} x_{\psi(i)} = x_{\psi(1)} * x_{\psi(2)} * x_{\psi(3)} = x_b * x_c * x_a$$

Si $*$ n'est ni associative ni commutative, il n'y a pas de raison que cela donne le même résultat. En revanche si elle l'est, alors nous allons montrer que justement cela ne dépend pas de la bijection choisie, et donc on peut pleinement donner du sens à la répétition indicée par S.

Proposition 143 (Opération répétée sur un ensemble fini)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient S un ensemble **fini**, n son cardinal et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Alors pour toutes bijections $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ et $\psi : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$, on a

$$\mathop{\Huge *}\limits_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = \mathop{\Huge *}\limits_{k=1}^{n} x_{\psi(k)}$$

On note $\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s$ cette quantité indépendante de la bijection $[\![1, n]\!] \longrightarrow S$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur n.

On considère donc ici que E et $*$ sont fixés.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P(n)$ l'assertion

« *Pour tout ensemble S de cardinal n, pour toute famille $(x_s)_{s\in S}$ d'éléments de E, et pour toutes bijections $\varphi : [\![1,n]\!] \longrightarrow S$ et $\psi : [\![1,n]\!] \longrightarrow S$, on a* $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} x_{\varphi(k)} = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{n} x_{\psi(k)}$ ».

Initialisation

Soit S un ensemble de cardinal 0.

Soit $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Soient $\varphi : [\![1,0]\!] \longrightarrow S$ et $\psi : [\![1,0]\!] \longrightarrow S$ deux bijections.

On a alors $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{0} x_{\varphi(k)} = e = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{0} x_{\psi(k)}$ par définition de la répétition.

Donc pour toutes bijections $\varphi : [\![1,0]\!] \to S$ et $\psi : [\![1,0]\!] \to S$, $\mathop{\ast}\limits_{k=1}^{0} x_{\varphi(k)} = \mathop{\ast}\limits_{k=1}^{0} x_{\psi(k)}$.

On a donc $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'on a $P(n)$.

Soit S un ensemble de cardinal $n+1$.

Soit $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Soient φ et ψ deux bijections $[\![1,n+1]\!] \longrightarrow S$.

Posons $u := \varphi(n+1)$ et $k \in [\![1,n+1]\!]$ l'unique antécédent de u par ψ.

Ainsi on a $\psi(k) = u$ et $k \geq 1$.

Il existe donc $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $k = \ell + 1$ d'après la prop. 52 p. 134.

Notons donc que $\psi(\ell+1) = \psi(k) = u$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n+1} x_{\psi(i)} &= \left(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{k} x_{\psi(i)}\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) && \text{d'après la prop. 142 p. 338} \\
&= \left(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{\ell+1} x_{\psi(i)}\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) && \text{car } k = \ell+1 \\
&= \left(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) \ast x_{\psi(\ell+1)} \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) && \text{par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) \ast x_{\psi(\ell+1)} && \text{par commutativité de } \ast \\
&= \left(\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) \ast x_u && \text{car } \psi(\ell+1) = u
\end{aligned}$$

Posons désormais $S' := S \backslash \{u\}$, qui est donc un ensemble de cardinal n.

Posons aussi $\varphi' := \varphi_{|[\![1,n]\!]}$, qui est une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans S'.

Enfin, posons $\psi' := \left(\begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & S' \\ i & \longmapsto & \begin{cases} \psi(i) & \text{si } i < k \\ \psi(i+1) & \text{si } i \geq k \end{cases} \end{array}\right)$.

Alors ψ' est elle aussi une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans S'.

En effet elle est injective car ψ l'est, et elle atteint toutes les valeurs de S sauf $u = \psi(k)$, d'où la surjectivité dans S'.

On pourra donc appliquer en particulier $P(n)$ avec φ' et ψ'.

Enfin, par définition $k \in [\![1, n+1]\!]$ donc $k \leq n+1$.

Il existe donc $q \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = k+q$ d'après la prop. 52 p. 134.

Notons que $n+1 = k+q = \ell+1+q$ si bien que $n = \ell+q$.

On peut donc reprendre notre calcul :

$$\begin{aligned}
\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n+1} x_{\psi(i)} &= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=k+1}^{n+1} x_{\psi(i)}\right) * x_u \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=k+1}^{k+q} x_{\psi(i)}\right) * x_u \text{ car } n+1 = k+q \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{q} x_{\psi(k+i)}\right) * x_u \text{ par définition du décalage} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{q} x_{\psi(\ell+1+i)}\right) * x_u \text{ car } k = \ell+1 \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi'(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{q} x_{\psi'(\ell+i)}\right) * x_u \text{ par définition de } \psi' \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell} x_{\psi'(i)}\right) * \left(\mathop{\Large\ast}_{i=\ell+1}^{\ell+q} x_{\psi'(i)}\right) * x_u \text{ par définition du décalage} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{\ell+q} x_{\psi'(i)}\right) * x_u \text{ d'après la prop. 142 p. 338} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n} x_{\psi'(i)}\right) * x_u \text{ car } n = \ell+q \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n} x_{\varphi'(i)}\right) * x_u \text{ d'après } P(n) \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)}\right) * x_u \text{ car } \varphi' = \varphi_{|[\![1,n]\!]} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)}\right) * x_{\varphi(n+1)} \text{ car } u = \varphi(n+1) \\
&= \mathop{\Large\ast}_{i=1}^{n+1} x_{\varphi(i)} \text{ par définition de la répétition}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n+1} x_{\psi(i)} = \mathop{\ast}\limits_{i=1}^{n+1} x_{\varphi(i)}$.

Ceci est donc vrai pour toutes bijections $[\![1, n+1]\!] \longrightarrow S$.

Ceci est donc vrai pour tout ensemble S de cardinal $n+1$ et toute famille $(x_s)_{s \in S}$ d'éléments de E. On a donc $P(n+1)$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe de récurrence.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } P(n)}$.

CQFD.

Exemple :
On se place dans $E := \mathbb{N}$ avec pour opération l'addition qui est associative, commutative et d'élément neutre 0 : on est donc en plein dans les hypothèses de la proposition.

Reprenons l'exemple de $S := \{a, b, c\}$ et de la famille $(x_s)_{s \in S}$ définie par $x_a := 5$, $x_b := 8$ et $x_c := 2$. Comme on l'a dit S est de cardinal 3, et donc on peut prendre n'importe quelle bijection de $[\![1, 3]\!]$ dans S, le résultat n'en dépendra pas.

Prenons par exemple ϕ définie par $\phi(1) := c$, $\phi(2) := a$ et $\phi(3) := b$. La proposition nous dit que $\sum\limits_{s \in S} x_s$ c'est $\sum\limits_{i=1}^{3} x_{\phi(i)}$, c'est-à-dire $x_{\phi(1)} + x_{\phi(2)} + x_{\phi(3)} = x_c + x_a + x_b = 2 + 5 + 8$. C'est bien ce que l'on souhaitait !

Remarque :
Dans la notation $\mathop{\ast}\limits_{s \in S} x_s$, le caractère s est une variable muette. Cela veut dire qu'on peut le remplacer par n'importe quel autre caractère (*qui n'est pas déjà utilisé*) sans que cela ne change quoi que ce soit. Ainsi on a les égalités

$$\mathop{\ast}\limits_{s \in S} x_s = \mathop{\ast}\limits_{t \in S} x_t = \mathop{\ast}\limits_{u \in S} x_u$$

Grâce au décalage, on a défini les répétitions indexées entre n'importe quels entiers naturels a et b qui vérifient $1 \leq a \leq b+1$, que l'on a donc notée $\mathop{\ast}\limits_{i=a}^{b} x_i$. Si l'opération est associative et commutative, on s'attend à ce que ça donne la même résultat que si l'on prend $S := [\![a, b]\!]$ dans la proposition précédente, c'est-à-dire avoir $\mathop{\ast}\limits_{i=a}^{b} x_i = \mathop{\ast}\limits_{i \in [\![a,b]\!]} x_i$. Bien heureusement, c'est le cas, les deux définitions donnent la même chose comme le montre la proposition suivante.

Proposition 144 (Répétition entre deux entiers quelconques)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
Soient a et b deux entiers naturels tels que $1 \leq a \leq b+1$.

On a alors $\displaystyle\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b} x_i = \mathop{\Huge *}_{i\in[\![a,b]\!]} x_i$.

Démonstration

• On sait que $1 \leq a$.

Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $a = m+1$ d'après la proposition 52 page 134.

Puisque $a \leq b+1$ on a donc $m+1 \leq b+1$.

Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b+1 = (m+1)+n$ toujours d'après la même proposition.

Ainsi $b+1 = (m+n)+1$ et donc $b = m+n$ par injectivité du passage au successeur.

Par définition du décalage, on a donc $\displaystyle\mathop{\Huge *}_{i=a}^{b} x_i = \mathop{\Huge *}_{i=m+1}^{m+n} x_i = \mathop{\Huge *}_{i=1}^{n} x_{m+i}$.

• Intuitivement $[\![a,b]\!]$ a pour cardinal $b-a+1 = b+1-a = m+n+1-(m+1) = n$.

Montrons donc que l'on peut mettre en bijection $[\![1,n]\!]$ et $[\![a,b]\!]$.

Pour cela, remarquons que $a = m+1$ et $b = m+n$.

Donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $a = m+1 \leq m+i \leq m+n = b$ donc $m+i \in [\![a,b]\!]$.

Posons donc $\varphi := \begin{pmatrix} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![a,b]\!] \\ i & \longmapsto & m+i \end{pmatrix}$.

φ est injective car l'addition à gauche est régulière d'après la proposition 42 page 111.

De plus φ est surjective dans $[\![a,b]\!]$.

En effet, soit $c \in [\![a,b]\!]$.

On a alors $a \leq c$, mais on également $m < m+1 = a$ si bien que $m < c$.

Il existe donc $i \in \mathbb{N}$ tel que $c = m+i$ d'après la proposition 52 page 134.

Supposons par l'absurde que $i = 0$.

On a alors $c = m+i = m+0 = m$ donc $c = m$.

C'est absurde car justement on a $m < c$.

On a donc $i > 0$ et donc $i \geq 1$.

De plus $c \leq b$ donc $m+i \leq m+n$.

Supposons par l'absurde que $i > n$.

On a alors $m+i > m+n$ par strictement croissance de l'addition à gauche.

On a donc $c > b$, ce qui est absurde car justement $c \leq b$.

On a donc nécessairement $i \leq n$, donc $1 \leq i \leq n$ et donc $i \in [\![1,n]\!]$.

On a donc $\varphi(i) = m + i = c$ et donc $c \in \mathrm{im}(\varphi)$.

Ainsi $\mathrm{im}(\varphi) = [\![a, b]\!]$ et donc φ est surjective dans $[\![a, b]\!]$.

C'est donc une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![a, b]\!]$.

Autrement dit on a $\displaystyle\mathop{\huge *}_{c\in[\![a,b]\!]} x_c = \mathop{\huge *}_{i=1}^{n} x_{\varphi(i)} = \mathop{\huge *}_{i=1}^{n} x_{m+i}$ par définition.

Oui mais on a montré justement montré que $\displaystyle\mathop{\huge *}_{i=a}^{b} x_i = \mathop{\huge *}_{i=1}^{n} x_{m+i}$.

On a donc l'égalité recherchée $\boxed{\displaystyle\mathop{\huge *}_{i=a}^{b} x_i = \mathop{\huge *}_{i\in[\![a,b]\!]} x_i}$.

CQFD.

Parmi les ensembles finis d'indices que l'on peut prendre, on peut s'intéresser particulier au cas où ceux-ci sont vides, des singletons ou des paires. C'est ce que détaille la proposition suivante.

Proposition 145 (Répétition sur ensembles simples)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

1. Si $S = \varnothing$ alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{s\in S} x_s = e$.
2. S'il existe a tel que $S = \{a\}$ alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{s\in S} x_s = x_a$.
3. S'il existe a et b tels que $S = \{a, b\}$ et $a \neq b$ alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{s\in S} x_s = x_a * x_b$.

Démonstration

1. Supposons que $S = \varnothing$.

Alors $\mathrm{card}(S) = 0$: considérons $\varphi : [\![1, 0]\!] \longrightarrow S$ bijective.

On a alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{s\in S} x_s = \mathop{\huge *}_{i=1}^{0} x_{\varphi(i)} = e$ par définition de la répétition.

2. Supposons qu'il existe a tel que $S = \{a\}$.

Alors $\mathrm{card}(S) = 1$: considérons $\varphi : [\![1, 1]\!] \longrightarrow S$ bijective.

On a nécessairement $\varphi(1) \in \{a\}$ donc $\varphi(1) = a$.

On a alors $\displaystyle\mathop{\huge *}_{s\in S} x_s = \mathop{\huge *}_{i=1}^{1} x_{\varphi(i)} = \left(\mathop{\huge *}_{i=1}^{0} x_{\varphi(i)}\right) * x_{\varphi(1)} = e * x_{\varphi(1)} = x_{\varphi(1)} = x_a$.

3. Supposons qu'il existe a et b tels que $S = \{a, b\}$ et $a \neq b$.

Alors $\mathrm{card}(S) = 2$. Considérons $\varphi : [\![1, 2]\!] \longrightarrow S$ définie par $\varphi(1) := a$ et $\varphi(2) := b$.

Alors φ est une bijection de $[\![1, 2]\!]$ dans S.

On a donc $\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{2} x_{\varphi(i)} = \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{1} x_{\varphi(i)}\right) * x_{\varphi(2)} \underset{1.}{=} x_{\varphi(1)} * x_{\varphi(2)} = x_a * x_b$.

CQFD.

Il est parfois utile d'effectuer un **changement de variable**, c'est-à-dire modifier l'indice de sommation et l'ensemble qui va avec. Prenons par exemple l'ensemble d'indices $S := \{1, 4, 9\}$. On peut utiliser directement cet ensemble et donc effectuer la répétition $\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s$, mais on peut remarquer que $S = \{1^2, 2^2, 3^2\}$ et donc en posant $T := \{1, 2, 3\}$ on peut aussi écrire la répétition comme étant $\mathop{\Large\ast}\limits_{t\in T} x_{t^2}$. La proposition suivante explicite cela.

Proposition 146 (Changement de variable dans une répétition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Soit T un ensemble tel qu'il existe une bijection $\varphi : T \longrightarrow S$.
Alors

$$\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\Large\ast}\limits_{t\in T} x_{\varphi(t)}$$

Démonstration

Soit n le cardinal de S : il existe $\psi : [\![1, n]\!] \longrightarrow S$ une bijection.

On a en particulier $\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{\psi(i)}$ par définition.

Comme $\varphi : T \longrightarrow S$ est bijective, on peut considérer $\varphi^{-1} : S \longrightarrow T$, elle aussi bijective.

Considérons alors $\phi := \varphi^{-1} \circ \psi : [\![1, n]\!] \longrightarrow T$.

ϕ est bijective comme composée de deux bijections.

En particulier T est fini et n est aussi le cardinal de T.

Enfin, $\left(x_{\varphi(t)}\right)_{t\in T}$ est une famille d'éléments de E indexée par T.

On a donc $\mathop{\Large\ast}\limits_{t\in T} x_{\varphi(t)} = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{\varphi(\phi(i))}$ toujours par définition.

On en déduit donc les égalités suivantes :

$$\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{\psi(i)} = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{(\varphi\circ\varphi^{-1}\circ\psi)(i)} = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{(\varphi\circ\phi)(i)} = \mathop{\Large\ast}\limits_{i=1}^{n} x_{\varphi(\phi(i))} = \mathop{\Large\ast}\limits_{t\in T} x_{\varphi(t)}$$

et donc l'égalité $\boxed{\mathop{\Large\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\Large\ast}\limits_{t\in T} x_{\varphi(t)}}$.

CQFD.

Remarque :
Si $S = T$, cela nous dit que l'on peut permuter les termes de la famille comme on le souhaite sans que cela ne change le résultat de la répétition.

Il arrive souvent que l'on ne souhaite répéter que les termes dont les indices respectent une certaine condition. Par exemple pour sommer les 7 premiers carrés d'entiers sauf le $5^{\text{ème}}$, on peut considérer $\sum\limits_{\substack{i=1\\i\neq 5}}^{7} i^2$, qui va donc donner $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2$. Généralisons cela.

Notation

Soit P une assertion à paramètres ne nécessitant qu'un seul paramètre pour être énoncée.
Considérons $T := \left\{s \in S \,\middle|\, P(s)\right\}$ l'ensemble des indices dans S qui vérifient P.
La répétition $\mathop{\Huge *}\limits_{s\in T} x_s$ est également notée $\mathop{\Huge *}\limits_{\substack{s\in S\\P(s)}} x_s$

De la façon dont on a défini la répétition par récurrence, on a $\mathop{\Huge *}\limits_{i=1}^{n+1} x_i = \left(\mathop{\Huge *}\limits_{i=1}^{n} x_i\right) * x_{n+1}$. On peut voir cela comme le fait de faire sortir le $(n+1)^{\text{ème}}$ terme de la répétition. Si l'opération est commutative, alors on peut en réalité faire sortir n'importe quel terme, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 147 (Sortir un élément d'une répétition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Alors pour tout $t \in S$, on a $\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s = \left(\mathop{\Huge *}\limits_{\substack{s\in S\\s\neq t}} x_s\right) * x_t$.

Démonstration

Par définition, S est un ensemble fini.

Soit n son cardinal.

- Plaçons-nous dans le cas où $n = 0$.

  Dans ce cas-là, $S = \varnothing$.

  Par vérité creuse, on a donc $\forall t \in S$, $\mathop{\Huge *}\limits_{s\in S} x_s = \left(\mathop{\Huge *}\limits_{\substack{s\in S\\s\neq t}} x_s\right) * x_t$.

- Plaçons-nous dans le cas où $n > 0$.

  On a alors $n \geq 1$ d'après la proposition 14 page 40.

  Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = m + 1$ d'après la proposition 52 page 134.

Ainsi $m+1$ est le cardinal de S.

Il existe donc $\varphi : [\![1, m+1]\!] \longrightarrow S$ une bijection.

Soit $t \in S$.

On va se servir de φ pour construire une autre bijection telle que t soit l'image de $m+1$. Considérons donc $k := \varphi^{-1}(t)$ l'unique antécédent de t par φ.

Considérons également $u := \varphi(m+1)$: on va échanger u et t.

Soit alors $\psi := \left(\begin{array}{rcl} [\![1, m+1]\!] & \longrightarrow & S \\ i & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(i) & \text{si } i \notin \{k, m+1\} \\ t & \text{si } i = m+1 \\ u & \text{si } i = k \end{cases} \end{array} \right)$.

Ainsi $\psi : [\![1, m+1]\!] \longrightarrow S$ est une bijection : en effet elle associe les mêmes images que φ, sauf en k et $m+1$ dont elle intervertit les images.

De plus elle vérifie $\psi(m+1) = t$.

Remarquons que si l'on avait déjà $\varphi(m+1) = t$, alors $\varphi = \psi$.

Posons ensuite $S' := \{s \in S \mid s \neq t\} = \big\{\psi(i) \bigm| i \in [\![1, m]\!]\big\} = \psi^{\rightarrow}\big([\![1, m]\!]\big)$.

Enfin, posons $\psi' := \psi_{|[\![1,m]\!]}$, qui est donc une bijection $[\![1, m]\!] \longrightarrow S'$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{s \in S} x_s &= \mathop{\ast}_{i=1}^{m+1} x_{\psi(i)} \text{ car } \psi : [\![1, m+1]\!] \to S \text{ est une bijection} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_{\psi(i)} \right) \ast x_{\psi(m+1)} \text{ par définition de la répétition} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_{\psi(i)} \right) \ast x_t \text{ par définition de } \psi \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i=1}^{m} x_{\psi'(i)} \right) \ast x_t \text{ puisque } \psi' := \psi_{|[\![1,m]\!]} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{s \in S'} x_s \right) \ast x_t \text{ car } \psi' : [\![1, m]\!] \to S' \text{ est une bijection} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{\substack{s \in S \\ s \neq t}} x_s \right) \ast x_t \text{ par définition de } S'
\end{aligned}$$

On a donc bien $\mathop{\ast}\limits_{s \in S} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{\substack{s \in S \\ s \neq t}} x_s \right) \ast x_t$.

Ceci est donc vrai pour tout $t \in S$.

CQFD.

Ainsi on peut remarquer que $\mathop{\ast}\limits_{s\in S'\cup\{t\}} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{s\in S'} x_s\right) \ast x_t$ pour $t \notin S'$.

Autrement dit on a $\mathop{\ast}\limits_{s\in S'\cup\{t\}} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{s\in S'} x_s\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{s\in\{t\}} x_s\right)$ pour $t \notin S'$.

Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 148 (Répétitions et union de parties disjointes)

Soient E un ensemble et $\ast$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $\ast$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Soient A et B deux parties **disjointes** de S telles que $S = A \cup B$.
On a alors

$$\mathop{\ast}\limits_{s\in S} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{b\in B} x_b\right)$$

Démonstration

Soit $e \in E$ l'élément neutre pour $\ast$.

On fixe S et $(x_s)_{s\in S}$, et on raisonne par récurrence sur le cardinal de B.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour toutes parties A et B de S telles que* $\mathrm{card}(B) = n$, *$A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = S$, on a*

$$\mathop{\ast}\limits_{s\in S} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{b\in B} x_b\right) \text{ ».}$$

Initialisation

Soient A et B deux parties de S telles que $\mathrm{card}(B) = 0$, $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = S$.

En particulier $B = \varnothing$, donc $S = A \cup B = A \cup \varnothing = A$.

On a donc

$$\mathop{\ast}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast e = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{b\in \varnothing} x_b\right) = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{b\in B} x_b\right)$$

On a donc prouvé que $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a $P(n)$.

Soient A et B deux parties de S telles que $\mathrm{card}(B) = n+1$, $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = S$. En particulier B est non vide : soit $\beta \in B$.

Comme A et B sont disjoints, on a $\beta \notin A$.

Posons alors $B' := B\backslash\{\beta\}$, de sorte que $B = B' \cup \{\beta\}$ et $\mathrm{card}(B') = n$.
Posons aussi $A' := A\cup\{\beta\}$, de sorte que $A'\cup B' = A\cup\{\beta\}\cup B' = A\cup B = S$.
Enfin, A' et B' sont disjoints car A et B le sont et $\beta \notin B'$.
On peut donc appliquer $P(n)$ à A' et B', ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{s\in S} x_s &= \left(\mathop{\ast}_{a\in A'} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B'} x_b\right) && \text{d'après } P(n)\\
&= \left(\mathop{\ast}_{a\in A\cup\{\beta\}} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B'} x_b\right) && \text{par définition de } A'\\
&= \left(\mathop{\ast}_{a\in A} x_a\right) \ast x_\beta \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B'} x_b\right) && \text{d'après la prop. 147 p. 348 et } \beta \notin A\\
&= \left(\mathop{\ast}_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B'} x_b\right) \ast x_\beta && \text{car } \ast \text{ est commutative}\\
&= \left(\mathop{\ast}_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B'\cup\{\beta\}} x_b\right) && \text{d'après la prop. 147 p. 348 et } \beta \notin B'\\
&= \left(\mathop{\ast}_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b\in B} x_b\right) && \text{par définition de } B'
\end{aligned}$$

et donc $\mathop{\ast}\limits_{s\in S} x_s = \left(\mathop{\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) \ast \left(\mathop{\ast}\limits_{b\in B} x_b\right)$.

Ceci montre donc que l'on a $P(n+1)$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe de récurrence.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } P(n)}$.
CQFD.

Ici on a considéré l'union de **deux** parties disjointes, et on a vu qu'alors on pouvait effectuer l'opération entre les **deux** répétitions. Pour généraliser cela, commençons par introduire la notion de **recouvrement disjoint** : c'est quasiment la même notion que celle de partition, mais on autorise en plus les termes à être vides.

Définition 47 (Recouvrement disjoint)

Soient S et I deux ensembles.
Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille de parties de S.

On dit que $(T_i)_{i\in I}$ est un **recouvrement disjoint** de S si et seulement si :

1. Les termes de $(T_i)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints.
2. On a $\bigcup\limits_{i\in I} T_i = S$.

Exemple :

1. Si A et B sont deux parties de S tels que $A \cap B = \varnothing$ et $A \cup B = S$, on peut voir (A, B) comme un recouvrement disjoint de S. Ici rien n'empêche A ou B d'être vides, contrairement à une partition.
2. Une partition est un cas particulier de recouvrement disjoint.

Proposition 149 (Répétitions et recouvrements disjoints)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Soient I un ensemble **fini** et $(T_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de S.
On a alors

$$\mathop{\Huge *}_{s\in S} x_s = \mathop{\Huge *}_{i\in I}\left(\mathop{\Huge *}_{t\in T_i} x_t\right)$$

Démonstration

Soit $e \in E$ l'élément neutre pour $*$.

On raisonne par récurrence sur le cardinal de I.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout ensemble fini S, toute famille $(x_s)_{s\in S}$ d'élément de E, tout ensemble I tel que* $\operatorname{card}(I) = n$ *et tout recouvrement disjoint $(T_i)_{i\in I}$ de S, on a* $\mathop{\Huge *}_{s\in S} x_s = \mathop{\Huge *}_{i\in I}\left(\mathop{\Huge *}_{t\in T_i} x_t\right)$ ».

Initialisation

Soient S un ensemble fini et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'élément de E.

Soient I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = 0$ et $(T_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de S.

On a alors $I = \varnothing$, donc $S = \bigcup_{i\in I} T_i = \bigcup_{i\in\varnothing} T_i = \varnothing$.

On a donc $\mathop{\Huge *}_{s\in S} x_s = \mathop{\Huge *}_{s\in \varnothing} x_s = e = \mathop{\Huge *}_{i\in \varnothing}\left(\mathop{\Huge *}_{t\in T_i} x_t\right) = \mathop{\Huge *}_{i\in I}\left(\mathop{\Huge *}_{t\in T_i} x_t\right)$.

Ceci démontre que l'on a $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a $P(n)$.

Soient S un ensemble et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'élément de E.

Soient I un ensemble tel que $\operatorname{card}(I) = n + 1$ et $(T_i)_{i\in I}$ un recouvrement disjoint de S. En particulier I est non vide : il existe $j \in I$.

• Posons $I' := I \backslash \{j\}$, de sorte que $I = I' \cup \{j\}$ et $\operatorname{card}(I') = n$.
On peut appliquer la proposition 148 page 350 à I, I' et $\{j\}$.

• Posons $A := \bigcup_{i \in I'} T_i$, de sorte que $(T_i)_{i \in I'}$ est un recouvrement disjoint de A.
On peut donc appliquer $P(n)$ à A, I' et $(T_i)_{i \in I'}$.

• Posons $B := T_j$: alors $S = \bigcup_{i \in I} T_i = \bigcup_{i \in I' \cup \{j\}} T_i = \left(\bigcup_{i \in I'} T_i \right) \cup T_j = A \cup B$.
Comme les termes de $(T_i)_{i \in I}$ sont disjoints deux à deux, A et B sont disjoints.
On peut donc appliquer la proposition 148 page 350 à S, A et B.

• De toute cela, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{s \in S} x_s &= \left(\mathop{\ast}_{a \in A} x_a \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{b \in B} x_b \right) && \text{d'après la prop. 148 p. 350} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{a \in A} x_a \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{t \in T_j} x_t \right) && \text{par définition de } B \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i \in I'} \left[\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right] \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{t \in T_j} x_t \right) && \text{d'après } P(n) \\
&= \left(\mathop{\ast}_{i \in I'} \left[\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right] \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{i \in \{j\}} \left[\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right] \right) && \text{d'après la prop. 145 p. 346} \\
&= \mathop{\ast}_{i \in I' \cup \{j\}} \left[\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right] && \text{d'après la prop. 148 p. 350} \\
&= \mathop{\ast}_{i \in I} \left[\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right] && \text{par définition de } I'
\end{aligned}$$

Ainsi on a donc $\mathop{\ast}_{s \in S} x_s = \mathop{\ast}_{i \in I} \left(\mathop{\ast}_{t \in T_i} x_t \right)$.
Cela prouve que l'on a $P(n+1)$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe de récurrence.
Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } P(n)}$.
CQFD.

Remarque :
Dans le cas d'une somme, cette propriété s'appelle également la **sommation par paquets**.

Exemple :
Prenons $S := \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\}$.
On peut poser $T_a := \{1, 2\}$, $T_b := \{3, 4, 5, 6\}$ et $T_c := \{7, 8, 9\}$ puis $I := \{a, b, c\}$.
On a alors $\bigcup\limits_{i \in I} T_i = T_a \cup T_b \cup T_c = \{1, 2\} \cup \{3, 4, 5, 6\} \cup \{7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, \ldots, 8, 9\} = S$.
De plus les T_i sont disjoints deux à deux : $(T_i)_{i \in I}$ est un recouvrement disjoint de S.
D'après le résultat précédent, on a donc l'égalité

$$\sum_{k \in S} k^2 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in T_i} k^2$$

Cette égalité traduit simplement le fait que l'on peut effectuer la somme avec les termes regroupés comme on le souhaite, comme ceci :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 9^2 &= \sum_{k \in S} k^2 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in T_i} k^2 \\ &= \sum_{k \in T_a} k^2 + \sum_{k \in T_b} k^2 + \sum_{k \in T_c} k^2 \\ &= \left(1^2 + 2^2\right) + \left(3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) + \left(7^2 + 8^2 + 9^2\right) \end{aligned}$$

Dans l'égalité $\mathop{\huge\ast}\limits_{s \in S} x_s = \mathop{\huge\ast}\limits_{i \in I} \left(\mathop{\huge\ast}\limits_{t \in T_i} x_t \right)$, on voit que l'on effectue à droite une répétition de répétitions. Intéressons-nous plus en détails aux répétitions de répétitions. Cela commence par s'intéresser aux répétitions indexée par un produit cartésien.

Notation

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient A et B deux ensembles **finis**, et $(x_c)_{c \in A \times B}$ une famille d'éléments de E.
Alors $A \times B$ est fini d'après la proposition 123 page 303.

On note parfois $\mathop{\huge\ast}\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} x_{a,b}$ à la place de $\mathop{\huge\ast}\limits_{c \in A \times B} x_c$.

Intéressons-nous à la somme

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)$$

que l'on peut voir comment étant la double somme $\sum\limits_{a \in \{1,2,3\}} \sum\limits_{b \in \{4,5\}} \frac{a}{b}$, c'est-à-dire que l'on fixe d'abord le numérateur parmi 1, 2 et 3 pour ensuite sommer pour chaque dénominateur parmi 4 et 5. Puisque l'addition des fractions est commutative et associative, on peut tout aussi bien d'abord fixer le dénominateur parmi 4 et 5 puis sommer pour chaque dnumérateur parmi 1, 2 et 3, c'est-à-dire la double somme $\sum\limits_{b \in \{4,5\}} \sum\limits_{a \in \{1,2,3\}} \frac{a}{b}$, qui correspond donc à la somme

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\right)$$

C'est la proposition suivante qui le justifie, et qui nous indique que l'on puisque l'ordre n'a pas d'importance, on peut simplement l'écrire $\displaystyle\sum_{\substack{a\in\{1,2,3\}\\ b\in\{4,5\}}} \frac{a}{b}$.

Proposition 150 (Répétition de répétition)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient A et B deux ensembles **finis**, et $(x_c)_{c\in A\times B}$ une famille d'éléments de E.

On a alors

$$\mathop{\Large *}_{a\in A}\left(\mathop{\Large *}_{b\in B} x_{a,b}\right) = \mathop{\Large *}_{\substack{a\in A\\ b\in B}} x_{a,b} = \mathop{\Large *}_{b\in B}\left(\mathop{\Large *}_{a\in A} x_{a,b}\right)$$

Démonstration

Remarquons que l'on a $A\times B = \bigcup\limits_{a\in A}(\{a\}\times B)$.

Soient a et a' tels que $\{a\}\times B$ et $\{a'\}\times B$ ne sont pas disjoints.

Il existe alors $c\in\{a\}\times B$ tel que $c\in\{a'\}\times B$.

Il existe donc b et b' dans B tel que $c=(a,b)$ et $c=(a',b')$.

Ainsi $(a,b)=(a',b')$ donc en particulier $a=a'$ et donc $\{a\}\times B=\{a'\}\times B$.

Ainsi les termes de $\big(\{a\}\times B\big)_{a\in A}$ sont deux à deux disjoints.

Autrement dit, $\big(\{a\}\times B\big)_{a\in A}$ est un recouvrement disjoint de $A\times B$.

On a donc $\displaystyle\mathop{\Large *}_{c\in A\times B} x_c = \mathop{\Large *}_{a\in A}\left(\mathop{\Large *}_{c\in\{a\}\times B} x_c\right)$ d'après la proposition 149 page 352.

Or pour tout $a\in A$, l'application $\varphi_a := \begin{pmatrix} B & \longrightarrow & \{a\}\times B \\ b & \longmapsto & (a,b)\end{pmatrix}$ est bijective.

Donc pour tout $a\in A$, on a $\displaystyle\mathop{\Large *}_{c\in\{a\}\times B} x_c = \mathop{\Large *}_{b\in B} x_{\varphi(b)} = \mathop{\Large *}_{b\in B} x_{a,b}$ d'après la prop. 146 p. 347.

Finalement, on en conclut que $\displaystyle\mathop{\Large *}_{c\in A\times B} x_c = \mathop{\Large *}_{a\in A}\left(\mathop{\Large *}_{c\in\{a\}\times B} x_c\right) = \mathop{\Large *}_{a\in A}\left(\mathop{\Large *}_{b\in B} x_{a,b}\right)$.

Remarquons de même que $A\times B = \bigcup\limits_{b\in B} A\times\{b\}$.

Pour la même raison que précédemment, cette union est disjointe.

Par le même raisonnement, on a $\displaystyle\mathop{\Large *}_{c\in A\times B} x_c = \mathop{\Large *}_{b\in B}\left(\mathop{\Large *}_{c\in A\times\{b\}} x_c\right) = \mathop{\Large *}_{b\in B}\left(\mathop{\Large *}_{a\in A} x_{a,b}\right)$.

CQFD.

Enfin, terminons notre tour d'horizon des répétitions finies par les répétitions de l'élément neutre : on s'en doute, répéter l'opération uniquement avec le neutre ne produira que le neutre.

Proposition 151 (Répétition finie du neutre)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient S un ensemble **fini** et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Si $\forall s \in S, x_s = e$ alors $\displaystyle\mathop{\ast}_{s\in S} x_s = e$.

Démonstration

On raisonne par récurrence sur le cardinal de S.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$ l'assertion suivante :

« *Pour tout ensemble S de cardinal n, pour toute famille $(x_s)_{s\in S}$ d'éléments de E, si $\forall s \in S, x_s = e$, alors $\displaystyle\mathop{\ast}_{s\in S} x_s = e$* ».

Initialisation

Soient S un ensemble de cardinal 0 et $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

On a alors $S = \varnothing$, et donc $\displaystyle\mathop{\ast}_{s\in S} x_s = \mathop{\ast}_{s\in\varnothing} x_s = e$.

En particulier si $\forall s \in S, x_s = e$, alors $\displaystyle\mathop{\ast}_{s\in S} x_s = e$.

On a donc montré que l'on a $P(0)$.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on a $P(n)$.

Soit S un ensemble de cardinal $n+1$.

Soit $(x_s)_{s\in S}$ une famille d'éléments de E.

Comme $\operatorname{card}(S) = n+1 > 0$, S est non vide.

Il existe donc $t \in S$: posons $S' := S\backslash\{t\}$.

De cette manière on a $\operatorname{card}(S') = n$, donc on peut utiliser $P(n)$ avec S'.

Supposons que $\forall s \in S, x_s = e$.

En particulier $\forall s \in S', x_s = e$ et $x_t = e$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{s\in S} x_s &= \Big(\mathop{\ast}_{\substack{s\in S\\ s\neq t}} x_s\Big) * x_t \text{ d'après la prop. 147 p. 348} \\
&= \Big(\mathop{\ast}_{s\in S'} x_s\Big) * x_t \text{ par définition de } S' \\
&= e * x_t \text{ d'après } P(n)
\end{aligned}$$

$= x_t$ car e est neutre pour $*$

$= e$ par hypothèse

On a donc $\displaystyle\mathop{\Huge *}_{s\in S} x_s = e$.

Ainsi si $\forall s \in S, x_s = e$ alors $\displaystyle\mathop{\Huge *}_{s\in S} x_s = e$.

Ceci étant vrai pour tout ensemble S de cardinal $n+1$, on a $P(n+1)$.

On vient donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ alors $P(n+1)$.

Finalement P vérifie les deux conditions du principe de récurrence.

On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}, P(n)$.

CQFD.

3 Familles à support fini

Pour l'instant, nous avons vu comment effectuer une répétition des éléments d'une famille quand celle-ci est indexée par un ensemble fini. Il est possible de généraliser cela à certains cas où l'ensemble des indices n'est pas forcément fini : prenons par exemple la suite

$$(0, 45, 2, 8, 4, 0, 0, 0, \dots)$$

L'ensemble des indices de cette suite est infini (c'est $\mathbb{N}$ tout entier), mais pourtant il est facile de définir la somme de ses termes : on voit que c'est

$$0 + 45 + 2 + 8 + 4 + 0 + 0 + 0 + \dots$$

En effet, la suite finit par ne prendre que la valeur 0 à partir d'un certain rang, et donc c'est comme si on avait simplement sommé $45 + 2 + 8 + 4$, qui est bien une somme portée par un ensemble fini d'indices. Ce qui importe pour définir cette somme, c'est donc l'ensemble des indices pour lesquels elle ne vaut pas 0 justement : on appelle cela le **support** de la suite. Si celui-ci est fini, alors la suite va forcément finir par valoir 0 et donc on pourra définir sa somme.

Plus généralement, étant donnés un ensemble et une opération sur celui-ci qui dispose d'un élément neutre, on peut définir le support d'une famille à valeurs dans l'ensemble : c'est l'ensemble des indices pour lesquels elle ne vaut pas l'élément neutre. On remarque donc au passage que cela dépend de l'élément neutre en question et donc de l'opération, ce n'est pas une notion intrinsèque à la famille.

Définition 48 (Support d'une famille)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ admet un **élément neutre** e.
Soit I un ensemble et $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.

On appelle **support** de x l'ensemble $\operatorname{supp}(x) := \{i \in I \mid x_i \neq e\}$.

Exemple :
Prenons $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite constante égale à 1.

1. Plaçons-nous dans $\mathbb{N}$ muni de l'addition. L'élément neutre est alors 0, et donc $\operatorname{supp}(u) = \mathbb{N}$ puisqu'elle ne vaut jamais 0, donc c'est en tout $\mathbb{N}$ que u ne vaut pas 0. Son support ici est infini et nous ne pouvons donc pas définir en l'état la somme des termes de la suite.
2. Plaçons-nous dans $\mathbb{N}$ muni de la multiplication. L'élément neutre est alors 1, et donc $\operatorname{supp}(u) = \varnothing$ puisqu'elle ne vaut jamais autre chose que 1. Son support est ici fini, et donc nous allons voir que nous pouvons définir le produit des termes de la suite.

Remarque :
Dans le chapitre 2, nous avons défini le support des applications à valeurs ordinales, c'est-à-dire des applications $f : \alpha \longrightarrow \beta$ où α et β sont deux ordinaux. On avait alors posé $\operatorname{supp}(f) = \{\gamma \in \alpha \mid f(\gamma) \neq 0\}$, car l'élément neutre qui nous intéressait alors était celui de l'addition. Autrement dit, c'est bien la même notion dont il est question ici. On a alors justement parlé des applications à support fini, comme nous allons le faire à présent.

Considérons donc une famille $x = (x_i)_{i \in I}$. Si jamais son support est fini, alors on peut en quelque sorte oublier tous les termes en dehors du support et définir simplement la répétition sur son support, pour lequel on peut définir la répétition puisqu'il est fini justement.

Autrement dit, en posant $S := \operatorname{supp}(x)$, nous allons simplement écrire

$$\mathop{\ast}_{i \in I} x_i := \mathop{\ast}_{s \in S} x_s$$

Cela dit, que dire du cas où I était déjà fini ? N'est-on pas en train d'écraser la définition précédente ? Bien évidemment non, nous allons montrer que cette nouvelle définition coïncide avec la précédente.

Proposition 152 (Coïncidence entre les deux répétitions)

Soient E un ensemble et $\ast$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $\ast$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.
Soit $S := \operatorname{supp}(x)$ le support de x.

Si I est fini alors $\mathop{\ast}_{i \in I} x_i = \mathop{\ast}_{s \in S} x_s$.

Démonstration

Puisque I est fini et $S \subseteq I$, S est également fini d'après la proposition 122 page 302.

Autrement dit on peut bien définir la répétition sur S.

Posons $T := I \backslash S$.

On a alors $S \cup T = I$ et $S \cap T = \varnothing$.

Par définition de S et donc de T, $\forall s \in S, x_s \neq e$ et $\forall t \in T, x_t = e$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{i \in I} x_i &= \mathop{\ast}_{i \in S \cup T} x_i \\
&= \left(\mathop{\ast}_{s \in S} x_s \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{t \in T} x_t \right) \text{ d'après la prop. 148 p. 350} \\
&= \left(\mathop{\ast}_{s \in S} x_s \right) \ast \left(\mathop{\ast}_{t \in T} e \right) \\
&= \left(\mathop{\ast}_{s \in S} x_s \right) \ast e \text{ d'après la prop. 151 p. 356} \\
&= \mathop{\ast}_{s \in S} x_s \text{ puisque } e \text{ est neutre pour } \ast
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{\mathop{\ast}_{i \in I} x_i = \mathop{\ast}_{s \in S} x_s}$.

CQFD.

On peut donc sans souci définir la répétition pour toute famille à support fini.

Définition 49 (Répétitions de familles à support fini)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $x = (x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.
On suppose que $S := \operatorname{supp}(x)$ est fini.

On pose $\mathop{\huge *}\limits_{i \in I} x_i := \mathop{\huge *}\limits_{s \in S} x_s$.

Exemple :
Dans le prochain livre, nous parlerons du théorème fondamental de l'arithmétique. Celui-ci dit que tout nombre entier naturel plus grand que 2 admet une unique décomposition en produit de facteurs premiers. Considérons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Une première façon de l'énoncer consiste à dire que pour tout $n \geq 2$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $(p_1, \ldots, p_m)$ dans $\mathcal{P}^m$ et $(k_1, \ldots, k_m)$ dans $\mathbb{N}^m$ tels que

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$$

et m ainsi que les deux m-uplets sont uniques, à l'ordre des facteurs près. Par exemple pour $n = 405$, on a $405 = 3^4 \times 5$, c'est-à-dire $m = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $k_1 = 4$ et $k_2 = 1$. Mais en fait on aurait également pu écrire $80 = 5 \times 3^4$ et donc prendre $m = 2$, $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, $k_1 = 1$ et $k_2 = 4$: c'est en cela que l'unicité n'est qu'à l'ordre des facteurs près, ce qui rend l'énoncé du théorème et sa démonstration un peu plus pénibles.

Une autre façon consiste à dire que pour tout $n \geq 2$, il existe $\big(v_p(n)\big)_{p \in \mathcal{P}}$ une famille d'entiers naturels, indexée par $\mathcal{P}$, et dont le support (par rapport à l'élément neutre 0 de l'addition) est fini. Ainsi, cette famille $\big(v_p(n)\big)_{p \in \mathcal{P}}$ a beau être indexée par l'ensemble infini des nombres premiers, elle vaut tout le temps 0 sauf en nombre fini de termes. Puisque pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a $p^0 = 1$, la famille $\big(p^{v_p(n)}\big)_{p \in \mathcal{P}}$ vaut tout le temps 1 sauf en un nombre fini de termes : c'est donc précisément une famille à support fini (par rapport à l'élément neutre 1 de la multiplication), si bien que l'on peut tout à fait parler du produit de tous ses termes. Le théorème fondamental de l'arithmétique dit qu'alors

$$n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(n)}$$

et que la famille $\big(v_p(n)\big)_{p \in \mathcal{P}}$ est unique. Notez qu'ici l'unicité n'est pas donnée « *à l'ordre des facteurs près* » comme dans la précédente formulation, et donc l'énoncé du théorème et sa démonstration en sont bien plus simples. Dans le cas de $n = 405$ par exemple, on avait dit $405 = 3^4 \times 5$, on va simplement avoir $v_2(405) = 0$, $v_3(405) = 4$, $v_5(405) = 1$ et ensuite $v_p(405) = 0$ pour tout premier p à partir de 7. L'ordre dans lequel on effectue la multiplication n'a aucune incidence sur la définition de $\big(v_p(n)\big)_{p \in \mathcal{P}}$ et donc l'unicité est absolue parmi toutes les familles d'entiers indexée par $\mathcal{P}$.

La proposition suivante nous explique que si l'on se donne une famille à support fini, alors faire la répétition sur un ensemble d'indices plus gros que le support ne change rien, seul le support compte.

Proposition 153 (Répétition et sur-ensemble du support)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.
Considérons S le support de $(x_i)_{i\in I}$.

Pour tout ensemble J tel que $S \subseteq J \subseteq I$:

1. La famille $(x_j)_{j\in J}$ est à support fini.
2. On a l'égalité $\underset{j\in J}{\ast} x_j = \underset{s\in S}{\ast} x_s$.

Démonstration

Considérons J un ensemble tel que $S \subseteq J \subseteq I$.

Considérons T le support de $(x_j)_{j\in J}$.

1. Montrons que $T \subseteq S$.

Soit $t \in T$.

On a alors $t \in J$ et $x_t \neq e$ par définition du support de $(x_j)_{j\in J}$.

Or $J \subseteq I$ par définition donc $t \in I$ et $x_t \neq e$.

On a donc $t \in S$ par définition du support de $(x_i)_{i\in I}$.

Ainsi $T \subseteq S$.

Or S est fini par définition, et donc $\boxed{T \text{ est fini}}$ d'après la proposition 122 page 302.

2. Montrons que $T \supseteq S$.

Soit $s \in S$.

On a alors $s \in I$ et $x_s \neq e$ par définition du support de $(x_i)_{i\in I}$.

Or $S \subseteq J$ par définition de J.

On a donc $s \in J$ et $x_s \neq e$.

Autrement dit $s \in T$ par définition du support de $(x_j)_{j\in J}$.

On a donc $T \supseteq S$, et donc $T = S$.

Or par définition $\underset{j\in J}{\ast} x_j = \underset{t\in T}{\ast} x_t$, et donc $\boxed{\underset{j\in J}{\ast} x_j = \underset{s\in S}{\ast} x_s}$.

CQFD.

Nous allons à présent prouver toutes les propriétés que nous avons déjà vues sur les répétitions sur les ensembles finis. Par exemple le fait que faire une répétition du neutre donne nécessairement le neutre.

Proposition 154 (Répétition du neutre)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.

Si $\forall i \in I, x_i = e$ alors $(x_i)_{i\in I}$ est à support fini et $\mathop{\huge *}\limits_{i\in I} x_i = e$.

Démonstration

Considérons S le support de $(x_i)_{i\in I}$.

Supposons que $\forall i \in I, x_i = e$.
Alors par définition $S = \{i \in I \mid x_i \neq e\} = \varnothing$.
En particulier S est fini et donc $\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est à support fini}}$.

On a alors $\mathop{\huge *}\limits_{i\in I} x_i = \mathop{\huge *}\limits_{s\in S} x_s = \mathop{\huge *}\limits_{s\in \varnothing} x_s = e$ d'après la proposition 145 page 346.
CQFD.

De même, on peut effectuer un changement de variables dans une répétition à support fini.

Proposition 155 (Changement de variables à support fini)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

Soit J un ensemble tel qu'il existe une bijection $\varphi : J \longrightarrow I$.
Alors $\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$ est également à support fini et $\mathop{\huge *}\limits_{i\in I} x_i = \mathop{\huge *}\limits_{j\in J} x_{\varphi(j)}$.

Démonstration

Posons $x := (x_i)_{i\in I}$ et $x_\varphi := \left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J}$.
Considérons $S := \operatorname{supp}(x) = \{i \in I \mid x_i \neq e\}$ et $T := \operatorname{supp}(x_\varphi) = \left\{j \in J \;\middle|\; x_{\varphi(j)} \neq e\right\}$.

• Montrons que T est fini.

Commençons pour cela par montrer que $\varphi^{\rightarrow}(T) = S$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $t \in T$.
Alors $t \in \operatorname{supp}(x_\varphi)$ donc $x_{\varphi(t)} \neq e$ et donc $\varphi(t) \in \operatorname{supp}(x)$.

Ainsi $\varphi(t) \in S$.

On a donc $\varphi^{\rightarrow}(T) \subseteq S$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $s \in S$.

Alors $s \in \operatorname{supp}(x)$ donc $x_s \neq e$.

Par définition φ est bijective de J dans I, et on a $S \subseteq I$.

Il existe donc $j \in J$ tel que $\varphi(j) = s$.

On a alors $x_{\varphi(j)} = x_s \neq e$ donc $j \in \operatorname{supp}(x_\varphi) = T$.

Ainsi $s = \varphi(j) \in \varphi^{\rightarrow}(T)$.

On a donc $\varphi^{\rightarrow}(T) \supseteq S$ et donc $\varphi^{\rightarrow}(T) = S$.

Or on sait que $\varphi : J \longrightarrow I$ est bijective, donc $\varphi_{|T} : T \longrightarrow S$ est bijective.

Ainsi $T \approx S$ et comme S est fini, T l'est également d'après la proposition 122 page 302.

Autrement dit $\operatorname{supp}(x_\varphi)$ est fini, donc $\boxed{\left(x_{\varphi(j)}\right)_{j\in J} \text{ est à support fini}}$.

• Montrons l'égalité des répétitions.

On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{i\in I} x_i &= \mathop{\ast}_{s\in S} x_s \text{ par définition} \\
&= \mathop{\ast}_{t\in T} x_{\varphi_{|T}(t)} \text{ d'après la prop. 146 p. 347} \\
&= \mathop{\ast}_{t\in T} x_{\varphi(t)} \\
&= \mathop{\ast}_{j\in J} x_{\varphi(j)} \text{ par définition}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

CQFD.

Remarque :
Si $I = J$, cela montre que l'on peut permuter les termes dans la répétition sans changer le résultat.

Nous allons pour la suite revenir sur les recouvrement disjoints et les partitions. En particulier, puisque nous parlons de finitude des supports, la proposition suivante va nous aider.

Proposition 156 (Partition d'un ensemble fini)

Soient A et I deux ensembles.
On suppose qu'il existe $(B_i)_{i\in I}$ une partition de A.

Si A est fini alors I est fini.

Démonstration

Supposons que A est fini.

Il existe alors n un entier naturel tel que $A \approx n$.

Autrement dit il existe une application $f : n \longrightarrow A$ bijective.

Soit $i \in I$.

Par définition d'une partition, on a $B_i \neq \varnothing$ et $B_i \subseteq A$.

Or on a $\mathrm{im}(f) = A$ par définition de f.

Autrement dit $B_i \neq \varnothing$ et $B_i \subseteq \mathrm{im}(f)$.

Il existe donc $k < n$ tel que $f(k) \in B_i$.

Donc l'ensemble $\{k < n \mid f(k) \in B_i\}$ est non vide.

Étant une partie de $\mathbb{N}$, il admet un minimum k_i.

Ainsi $f(k_i) \in B_i$.

Or on a $B_i \subseteq A$ donc on a également $f(k_i) \in A$.

On peut donc considérer l'application $g := \begin{pmatrix} I & \longrightarrow & A \\ i & \longmapsto & f(k_i) \end{pmatrix}$.

Montrons que g est injective.

Soient i et j dans I tels que $g(i) = g(j)$.

On a donc $f(k_i) = f(k_j)$.

Or par définition, on a $f(k_i) \in B_i$ et $f(k_j) \in B_j$ donc $f(k_i) \in B_i \cap B_j$.

Ainsi $B_i \cap B_j \neq \varnothing$.

Comme il s'agit des termes d'une partition, on a nécessairement $i = j$.

Ainsi $g : I \longrightarrow A$ est injective, et donc $I \preccurlyeq A$.

Or A est fini par hypothèse, donc $\boxed{I \text{ est fini}}$ d'après la proposition 122 page 302.

CQFD.

Étudions à présent les relations qu'entretiennent les supports de sous-familles quand celles-ci sont définies à l'aide d'un recouvrement disjoint.

Proposition 157 (Support fini et recouvrement disjoint)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
Soient K un ensemble et $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I.

Notons S_x le support de $(x_i)_{i\in I}$.
Pour tout $k \in K$, on note S_k le support de $(x_j)_{j\in J_k}$.
Enfin, on pose $L := \{k \in K \mid S_k \neq \varnothing\}$.

On a alors :

1. Pour tout $k \in K$, on a $S_k = J_k \cap S_x$.
2. $(S_k)_{k\in K}$ est un recouvrement disjoint de S_x.
3. $(S_k)_{k\in L}$ est une partition de S_x.
4. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
   (a) S_x est fini.
   (b) L est fini et pour tout $k \in K$, S_k est fini.

Démonstration

1. Soit $k \in K$.

Montrons que $S_k = J_k \cap S_x$.

$\boxed{\subseteq}$

Soit $j \in S_k$.

On alors $j \in J_k$ et $x_j \neq e$ par définition de S_k.

Or $J_k \subseteq I$ par définition, donc $j \in I$.

Ainsi $j \in I$ et $x_j \neq e$, donc $j \in S_x$ par définition de S_x.

Ainsi $j \in J_k$ et $j \in S_x$ donc $j \in J_k \cap S_x$.

On a donc $S_k \subseteq J_k \cap S_x$.

$\boxed{\supseteq}$

Soit $j \in J_k \cap S_x$.

On a alors $j \in J_k$ et $j \in S_x$.

Puisque $j \in S_x$, on a $x_j \neq e$.

Ainsi $j \in J_k$ et $x_j \neq e$ donc $j \in S_k$ par définition de S_k.

Ainsi $S_k \supseteq J_k \cap S_x$ et donc $\boxed{S_k = J_k \cap S_x}$.

2. Par définition $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I.
Ainsi les termes de $(J_k)_{k\in K}$ sont deux à deux disjoints.
En particulier les termes de $(J_k \cap S_x)_{k\in K}$ sont deux à deux disjoints.
Donc les termes de $(S_k)_{k\in K}$ sont deux à deux disjoints d'après 1.

Enfin, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k\in K} S_k &= \bigcup_{k\in K} (J_k \cap S_x) \text{ d'après 1.} \\
&= \left(\bigcup_{k\in K} J_k\right) \cap S_x \\
&= I \cap S_x \text{ car } (J_k)_{k\in K} \text{ est recouvrement disjoint de } I \\
&= S_x \text{ car } S_x \subseteq I \text{ par définition de } S_x
\end{aligned}$$

et donc $S_x = \bigcup_{k\in K} S_k$.
Ainsi $\boxed{(S_k)_{k\in K} \text{ est un recouvrement disjoint de } S_x}$.

3. On vient de voir dans 2. que les termes de $(S_k)_{k\in K}$ sont deux à deux disjoints.
Puisque $L \subseteq K$, on en déduit que $(S_k)_{k\in L}$ sont deux à deux disjoints.
De plus par définition de L, pour tout $k \in L$ on a $S_k \neq \varnothing$.
Enfin on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
S_x &= \bigcup_{k\in K} S_k \text{ d'après 2.} \\
&= \left(\bigcup_{k\in L} S_k\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K\setminus L} S_k\right) \\
&= \left(\bigcup_{k\in L} S_k\right) \cup \left(\bigcup_{k\in K\setminus L} \varnothing\right) \text{ par définition de } L \\
&= \left(\bigcup_{k\in L} S_k\right) \cup \varnothing \\
&= \bigcup_{k\in L} S_k
\end{aligned}$$

et donc $S_x = \bigcup_{k\in L} S_k$.
Ainsi $\boxed{(S_k)_{k\in L} \text{ est une partition de } S_x}$.

4.

$\boxed{\text{(a)}\Rightarrow\text{(b)}}$

Supposons que S_x est fini.

Pour tout $k \in L$, on a $S_k \subseteq S_x$ d'après 1.

Donc pour tout $k \in L$, on a S_k fini d'après la proposition 122 page 302.

De plus si L était infini alors S_x le serait d'après la proposition 156 page 364.

Donc par contraposition, on en conclut que L est fini.

Ainsi si S_x est fini alors L est fini et pour tout $k \in L$, S_k est fini.

$\boxed{\text{(a)}\Leftarrow\text{(b)}}$

Supposons que L est fini et que pour tout $k \in L$, S_k est fini.

On sait que $S_x = \bigcup\limits_{k \in L} S_k$ d'après 3.

Donc S_x est l'union finie d'ensembles finis.

Donc S_x est fini d'après la proposition 124 page 304.

Donc si L est fini et si pour tout $k \in L$, S_k est fini alors S_x est fini.

CQFD.

Nous allons voir la version « *support fini* » de la proposition 149 page 352 : on veut pouvoir dire que si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille à support fini et $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I, alors on a $\mathop{\ast}\limits_{i\in I} x_i = \mathop{\ast}\limits_{k\in K} \mathop{\ast}\limits_{j\in J_k} x_j$. Pour cela, il faut tout d'abord montrer que toutes ces répétitions ont du sens, c'est-à-dire que pour chaque $k \in K$, $(x_j)_{j\in J_k}$ est à support fini puis également que la famille $\left(\mathop{\ast}\limits_{j\in J_k} x_j\right)_{k\in K}$ elle-même est à support fini.

Proposition 158 (Support fini et paquets)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre** e.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

Soient K un ensemble et $(J_k)_{k\in K}$ un recouvrement disjoint de I.
Alors :

1. Pour tout $k \in K$, la famille $(x_j)_{j\in J_k}$ est à support fini.
2. La famille $\left(\mathop{\ast}\limits_{j\in J_k} x_j\right)_{k\in K}$ est à support fini.
3. On a l'égalité $\mathop{\ast}\limits_{i\in I} x_i = \mathop{\ast}\limits_{k\in K}\left(\mathop{\ast}\limits_{j\in J_k} x_j\right)$.

Démonstration

Considérons S_x le support de $(x_i)_{i\in I}$.

Par hypothèse, S_x est donc fini.

1. Soit $k \in K$.

On sait que $S_k = J_k \cap S_x$ d'après la proposition 157 page 365.

En particulier $S_k \subseteq S_x$.

Or S_x est fini par hypothèse, donc S_k est fini d'après la proposition 122 page 302.

Autrement dit, $\boxed{\text{la famille } (x_j)_{j\in J_k} \text{ est à support fini}}$.

En particulier on peut définir $R_k := \displaystyle\mathop{\Large *}_{j\in J_k} x_j$.

2. On veut montrer que $(R_k)_{k\in K}$ est à support fini.

Considérons S_R le support de $(R_k)_{k\in K}$, et montrons que S_R est fini.

Pour cela, nous allons considérer les $k \in K$ tel que S_k le support de $(x_j)_{j\in J_k}$ est non vide.

Autrement dit, considérons $L := \{k \in K \mid S_k \neq \varnothing\}$.

Notons que $S_x \subseteq I$ et $\forall k \in K, S_k \subseteq I$ car ce sont des ensembles d'indices de $(x_i)_{i\in I}$.

En revanche $S_R \subseteq K$ et $L \subseteq K$ car ce sont des ensembles d'indices de $(J_k)_{k\in K}$.

Montrons que $S_R \subseteq L$.

Autrement dit, montrons que pour tout $k \in K$, si $R_k \neq e$ alors $S_k \neq \varnothing$.

> Soit $k \in S_R$.
>
> On a alors $R_k \neq e$ par définition de S_R, c'est-à-dire $\displaystyle\mathop{\Large *}_{j\in J_k} x_j \neq e$.
>
> Or si $\forall j \in J_k, x_j = e$ alors $\displaystyle\mathop{\Large *}_{j\in J_k} x_j = e$ d'après la prop. 154 p. 362.
>
> Donc par contraposition, puisque $\displaystyle\mathop{\Large *}_{j\in J_k} x_j \neq e$, il existe $j \in J_k$ tel que $x_j \neq e$.
>
> On a donc $j \in S_k$ par définition de S_k.
>
> En particulier $S_k \neq \varnothing$ et donc $k \in L$ par définition de L.

Ainsi $S_R \subseteq L$.

On sait que $(S_k)_{k\in L}$ est une partition de S_x d'après la proposition 157 page 365.

Or S_x est fini par hypothèse donc L est fini d'après la proposition 156 page 364.

On vient de montrer que $S_R \subseteq L$, si bien que S_R est fini d'après la proposition 122 page 302.

Autrement dit $\boxed{(R_k)_{k\in K} \text{ est à support fini}}$, donc on peut parler de $\displaystyle\mathop{\Large *}_{k\in K} R_k = \mathop{\Large *}_{k\in K}\left(\mathop{\Large *}_{j\in J_k} x_j\right)$.

3. Nous pouvons conclure avec les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathop{\ast}_{k\in K}\mathop{\ast}_{j\in J_k} x_j &= \mathop{\ast}_{k\in S_R}\mathop{\ast}_{j\in J_k} x_j \text{ car } S_R \text{ est le support de la première répétition}\\
&= \mathop{\ast}_{k\in L}\mathop{\ast}_{j\in J_k} x_j \text{ d'après la prop. 153 p. 361, car } S_R \subseteq L\\
&= \mathop{\ast}_{k\in L}\mathop{\ast}_{j\in S_k} x_j \text{ car } S_k \text{ est le support de la deuxième répétition}\\
&= \mathop{\ast}_{i\in U} x_i \text{ d'après la prop. 149 p. 352}\\
&\qquad \text{car } (S_k)_{k\in L} \text{ est un recouvrement disjoint de } U \text{ et } L \text{ et les } S_k \text{ sont finis}\\
&= \mathop{\ast}_{i\in S_x} x_i \text{ car } U = S_x\\
&= \mathop{\ast}_{i\in I} x_i \text{ car } S_x \text{ est le support de cette répétition}
\end{aligned}$$

Et donc on a l'égalité voulue.

CQFD.

On peut en déduire le cas où K possède deux éléments et donc que l'on décompose I en une union de deux parties disjoints A et B.

Proposition 159 (Union de parties disjointes - Support fini)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

Soient A et B deux parties de I telles que $A \cup B = I$ et $A \cap B = \varnothing$.
On a alors

$$\mathop{\ast}_{i\in I} x_i = \left(\mathop{\ast}_{a\in A} x_a\right) * \left(\mathop{\ast}_{b\in B} x_b\right)$$

Démonstration

Posons $K := \{0, 1\}$ puis $J_0 := A$ et $J_1 := B$.

On a alors $\bigcup_{k\in K} J_k = \bigcup_{k\in\{0,1\}} J_k = J_0 \cup J_1 = A \cup B = I$.

De plus A et B sont disjoints donc les termes de $(J_k)_{k\in K}$ sont disjoints deux à deux.

Autrement dit $(J_k)_{k\in K}$ est un recouvrement disjoint de I.

On a donc les égalités suivantes :

$$\mathop{\ast}_{i\in I} x_i = \mathop{\ast}_{k\in K}\mathop{\ast}_{j\in J_k} x_j \text{ d'après la prop. 158 p. 367}$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathop{\Large\ast}\limits_{k\in\{0,1\}} \mathop{\Large\ast}\limits_{j\in J_k} x_j \text{ car } K = \{0,1\} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{j\in J_0} x_j\right) * \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{j\in J_1} x_j\right) \text{ d'après la prop. 145 p. 346} \\
&= \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) * \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{b\in B} x_b\right) \text{ car } J_0 = A \text{ et } J_1 = B
\end{aligned}
$$

D'où l'égalité.

CQFD.

En particulier, on peut toujours sortir un élément d'une répétition à support fini ! Redonnons pour cela la notation que l'on avait introduite dans le cas fini, qui sera donc la même ici.

Notation

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

Soit P une assertion à paramètres ne nécessitant qu'un seul paramètre pour être énoncée.
Considérons $J := \left\{i \in I \,\middle|\, P(i)\right\}$ l'ensemble des indices dans I qui vérifient P.
La répétition $\mathop{\Large\ast}\limits_{i\in J} x_i$ est également notée $\mathop{\Large\ast}\limits_{\substack{i\in I\\ P(i)}} x_i$

Proposition 160 (Sortir un élément - Support fini)

oient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

Pour tout $j \in I$, on a l'égalité $\mathop{\Large\ast}\limits_{i\in I} x_i = \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} x_i\right) * x_j$.

Démonstration

Posons $A := \{i \in I \mid i \neq j\}$ et $B := \{j\}$.

On a alors $A \cup B = I$ et $A \cap B = \varnothing$.

On a donc les égalités suivantes :

$$
\mathop{\Large\ast}\limits_{i\in I} x_i = \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{a\in A} x_a\right) * \left(\mathop{\Large\ast}\limits_{b\in B} x_b\right) \text{ d'après la prop. 159 p. 369}
$$

$$= \left(\mathop{\Huge\ast}_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x_i \right) * \left(\mathop{\Huge\ast}_{b \in B} x_b \right) \text{ par définition de } A$$

$$= \left(\mathop{\Huge\ast}_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x_i \right) * \left(\mathop{\Huge\ast}_{b \in \{j\}} x_b \right) \text{ par définition de } B$$

$$= \left(\mathop{\Huge\ast}_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} x_i \right) * x_j \text{ d'après la prop. 145 p. 346}$$

D'où l'égalité.

CQFD.

Pour conclure ce tour d'horizon des propriétés sur les répétitions à support fini, il nous reste à gérer les doubles répétitions, c'est-à-dire celles sur produit cartésien de deux ensembles. Introduisons de nouveau la notation concernée.

Notation

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient A et B deux ensembles et $(x_c)_{c \in A \times B}$ une famille d'éléments de E **à support fini**.

On note parfois $\mathop{\Huge\ast}\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} x_{a,b}$ à la place de $\mathop{\Huge\ast}\limits_{c \in A \times B} x_c$.

Abordons pour conclure le résultat d'échange de double répétitions. Pour les plus connaisseurs d'entre nous, cela n'est pas sans rappeler les théorèmes de Fubini en théorie de l'intégration !

Pour tenter de justifier ses hypothèses un peu farfelue a priori, le lecteur peut dans un premier temps relire la proposition 157 page 365 dont les hypothèses sont très proches. Dans un deuxième temps, donnons-nous un premier exemple pour comprendre l'importance des hypothèses.

Le résultat par d'une famille $(x_{a,b})_{\substack{a \in A \\ b \in B}}$ qui est donc indicée par un produit cartésien $A \times B$. Prenons par exemple $A := \{0, 1\}$ et $B := \mathbb{N}$, de sorte que l'on peut représenter ainsi ses termes :

$$\begin{array}{cccccccccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} & x_{0,4} & x_{0,5} & x_{0,6} & x_{0,7} & x_{0,8} & \cdots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & x_{1,4} & x_{1,5} & x_{1,6} & x_{1,7} & x_{1,8} & \cdots \end{array}$$

Disons que pour tout $b \in \mathbb{N}$, $x_{0,b} = 1$ et $x_{1,b} = -1$, comme ceci :

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \end{array}$$

Si l'on s'amuse à sommer d'abord chacune des colonnes, cela donnera 0 pour chacune d'entre elles. On peut alors additionner tous ces 0 le long des lignes et donc cela à du sens de sommer d'abord par colonne puis par ligne, comme ceci :

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \cdots & & \\
+ & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & + & & & & \\
-1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & -1 & & \cdots & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \cdots & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

On est ainsi en train de dire que $\sum_{b\in\mathbb{N}} \sum_{a\in\{0,1\}} x_{a,b} = \sum_{b\in\mathbb{N}} \big(1+(-1)\big) = \sum_{b\in\mathbb{N}} 0 = 0.$

En revanche, on ne peut pas intervertir l'ordre de sommation, c'est-à-dire sommer d'abord le long des lignes, puisqu'on a une infinité de 1 pour la première et une infinité de -1 pour la deuxième, ce qui signifie que la double somme $\sum_{a\in\{0,1\}} \sum_{b\in\mathbb{N}} x_{a,b}$ n'a quant-à-elle pas de sens.

$$\begin{array}{ccc}
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots & \longrightarrow & +\infty \\
 & & + \\
-1 + -1 + -1 + -1 + -1 + -1 + -1 + -1 + -1 + \cdots & \longrightarrow & -\infty \\
 & & \downarrow \\
 & & ?
\end{array}$$

Ici le problème venait clairement du fait que selon les lignes, le support n'est pas fini alors qu'il l'est pour chaque colonne. Cependant on peut très bien avoir un support fini pour chaque colonne et chaque ligne et tout de même ne pas avoir un support fini au global. Prenons par exemple $A := \mathbb{N}$ et $B := \mathbb{N}$, c'est-à-dire que l'on peut représenter la situation ainsi :

$$\begin{array}{ccccc}
x_{0,0} & x_{1,0} & x_{2,0} & x_{3,0} & \cdots \\
x_{0,1} & x_{1,1} & x_{2,1} & x_{3,1} & \cdots \\
x_{0,2} & x_{1,2} & x_{2,2} & x_{3,2} & \cdots \\
x_{0,3} & x_{1,3} & x_{2,3} & x_{3,3} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

On va mettre toutes les valeurs à 0 sauf la diagonale qui vaudra 1 et la sur-diagonale qui vaudra -1, comme ceci :

$$\begin{array}{cccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots &
\end{array}$$

c'est-à-dire qu'on a posé $\begin{cases} x_{a,b} = 1 & \text{si } a = b \\ x_{a,b} = -1 & \text{si } a = b+1 \\ x_{a,b} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour chaque ligne, on a seulement deux termes non nuls donc le support est fini et la somme de la ligne vaut $1 + (-1) = 0$. Pour chaque colonne, on a seulement un ou deux termes non nuls donc le support est également fini et la somme de la ligne vaut 1 ou $-1 + 1 = 0$. Pour autant, au global sur toute la famille, il y a un nombre infini de termes non nuls (sur toute la diagonale et la sur-diagonale qui sont infinis) et donc le support n'est pas fini.

Cela suffit à faire vacillier l'échange des deux sommes : si l'on additionne d'abord le long des colonnes, on obtient $1+0+0+\ldots = 1$ pour la première et $-1+1+0+0+\ldots = 0$ pour toutes les autres, si bien que l'on obtient $1+0+0+\ldots = 1$ en sommant les résultats le long des lignes. En revanche, si l'on additionne d'abord le long des lignes, on obtient $1+(-1)+0+0+\ldots = 0$ pour chaque ligne et donc en obtient $0+0+0+\ldots = 0$ en sommant les résultats le long des colonnes. Autrement dit, $\sum_{a\in\mathbb{N}} \sum_{b\in\mathbb{N}} x_{a,b} = 1 \neq 0 = \sum_{b\in\mathbb{N}} \sum_{a\in\mathbb{N}} x_{a,b}$.

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & & \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

D'abord par colonnes puis sur la ligne

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \longrightarrow & 0 \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & \longrightarrow & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & \longrightarrow & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1 & & \longrightarrow & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & & 0
\end{array}$$

D'abord par lignes puis sur la colonne

Ainsi on comprend qu'avoir un support fini pour chaque $a \in A$ fixé et un support fini pour chaque $b \in B$ fixé ne suffit pas. Concrètement, il faut et il suffit que les termes non nuls soient contenus dans un rectangle, c'est-à-dire que le nombre de lignes avec des éléments non nuls soit finie et que le nombre de colonnes avec des éléments non nuls soit finie également, ce qui explique les conditions du résultat suivant.

Proposition 161 (Echange de répétitions - Support fini)

Soient E un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E.
On suppose que $*$ est **commutative** et **associative**, et admet un **élément neutre**.
Soient A et B deux ensembles et $(x_c)_{c\in A\times B}$ une famille d'éléments de E.

Notons S le support de $(x_c)_{c\in A\times B}$.
Pour tout $a\in A$, on note $S_{a,\bullet}$ le support de $x_{a,\bullet} := (x_{a,b})_{b\in B}$.
Pour tout $b\in B$, on note $S_{\bullet,b}$ le support de $x_{\bullet,b} := (x_{a,b})_{a\in A}$.
Enfin on pose $L := \{a\in A \mid S_{a,\bullet}\neq\varnothing\}$ et $M := \{b\in B \mid S_{\bullet,b}\neq\varnothing\}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. S est fini.
2. L est fini et pour tout $a\in A$, $S_{a,\bullet}$ est fini.
3. M est fini et pour tout $b\in B$, $S_{\bullet,b}$ est fini.

Dans ce cas-là, on a les égalités :

$$\mathop{\ast}_{a\in A}\mathop{\ast}_{b\in B} x_{a,b} = \mathop{\ast}_{\substack{a\in A\\ b\in B}} x_{a,b} = \mathop{\ast}_{b\in B}\mathop{\ast}_{a\in A} x_{a,b}$$

Démonstration

$\boxed{1\Leftrightarrow 2}$

Posons $I := A\times B$, $K := A$ et pour tout $a\in K$, $J_a := \{a\}\times B$.

Alors on est exactement dans les hypothèses de la proposition 157 page 365.

En effet, on a $\bigcup_{a\in K} J_a = \bigcup_{a\in A}(\{a\}\times B) = \left(\bigcup_{a\in A}\{a\}\right)\times B = A\times B = I$.

De plus les termes de $(J_a)_{a\in K}$ sont deux à deux disjoints.

En effet soient a et a' dans K tels que $J_a\cap J_{a'}\neq\varnothing$.

Autrement dit on a $\big(\{a\}\times B\big)\cap\big(\{a'\}\times B\big)\neq\varnothing$.

Il existe donc $c\in\{a\}\times B$ tel que $c\in\{a'\}\times B$.

Il existe donc b et b' dans B tels que $(a,b)=c=(a',b')$ et donc en particulier $a=a'$.

Ainsi $(J_a)_{a\in K}$ est un recouvrement disjoint de I.

Si l'on se conforme aux notations de la proposition 157 page 365, on a alors $S=S_x$, pour tout $a\in K$, $S_{a,\bullet}=S_a$ et le L est le même. On a donc l'équivalence S est fini si et seulement si L est fini et pour tout $a\in K=A$, $S_{a,\bullet}$ est fini, d'après le point 4. de la proposition.

$\boxed{1\Leftrightarrow 3}$

La preuve est la même en prenant cette fois-ci $K := B$ et pour tout $b\in K$, $J_b := A\times\{b\}$.

Montrons à présent les égalités souhaitées dans le cas où ces conditions équivalentes sont vérifiées.
On reprend de nouveau $I := A \times B$, $K := A$ et pour tout $a \in K$, $J_a := \{a\} \times B$.
On a déjà vu que $(J_a)_{a \in A}$ est un recouvrement disjoint de $A \times B$.
On peut donc utiliser cette fois le point 3. de la proposition 158 page 367.
On a donc les égalités suivantes :

$$\mathop{\ast}_{\substack{a \in A \\ b \in B}} x_{a,b} = \mathop{\ast}_{i \in I} x_i \underset{158 \text{ p. } 367}{=} \mathop{\ast}_{k \in K} \mathop{\ast}_{j \in J_k} x_j = \mathop{\ast}_{a \in A} \mathop{\ast}_{c \in \{a\} \times B} x_c$$

Or pour tout $a \in A$, on a la bijection $\varphi_a := \begin{pmatrix} B & \longrightarrow & \{a\} \times B \\ b & \longmapsto & (a,b) \end{pmatrix}$ qui permet d'effectuer un changement de variable et d'avoir les égalités suivantes :

$$\mathop{\ast}_{a \in A} \mathop{\ast}_{c \in \{a\} \times B} x_c \underset{155 \text{ p. } 362}{=} \mathop{\ast}_{a \in A} \mathop{\ast}_{b \in B} x_{\varphi(b)} = \mathop{\ast}_{a \in A} \mathop{\ast}_{b \in B} x_{a,b}$$

Ceci permet de conclure à l'égalité $\boxed{\mathop{\ast}_{a \in A} \mathop{\ast}_{b \in B} x_{a,b} = \mathop{\ast}_{\substack{a \in A \\ b \in B}} x_{a,b}}$.

Pour conclure à l'égalité $\mathop{\ast}_{\substack{a \in A \\ b \in B}} x_{a,b} = \mathop{\ast}_{b \in B} \mathop{\ast}_{a \in A} x_{a,b}$, on raisonne de la même manière en utilisant l'autre recouvrement disjoint, c'est-à-dire $K := B$ et et pour tout $b \in K$, $J_b := A \times \{b\}$.
CQFD.

Conclusion

L'aventure continue chez les ordinaux

Ainsi se termine notre aventure dans le pays des ordinaux. Elle se termine en tout cas à travers cet ouvrage, mais j'espère un jour la reprendre dans un tout nouvel ouvrage allant encore plus loin ! Et oui, dans le monde fabuleux des ordinaux, nous n'avons en réalité que gratté la surface.

Nous pourrions par exemple évoquer l'application $\beth$ définie par récurrence par

$$\begin{cases} \beth_0 := \aleph_0 = \omega \\ \beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha} \text{ pour tout ordinal } \alpha \\ \beth_\gamma := \sup\limits_{\delta<\gamma} \beth_\delta \text{ pour tout ordinal limite non nul } \gamma \end{cases}$$

Nous pourrions aussi évoquer la topologie sur les ordinaux, issue de la topologie de l'ordre. Celle-ci donne alors pleinement son sens à la continuité et à la notion d'ordinaux limites, notions qui ont parsemé cet ouvrage.

Enfin, nous pourrions aussi évoquer la myriade d'applications des ordinaux en logique formelle ! Le lecteur est par exemple incité à se renseigner sur la célèbre suite de Goodstein, dont la stationnarité à 0 peut être montrée à l'aide des ordinaux.

L'aventure continue chez l'infini

La théorie des ordinaux nous a permis de parler de l'infini. On l'a fait en s'amusant à aller "toujours plus loin". Ce n'est cependant pas la seule façon de l'évoquer en mathématiques.

L'**analyse réelle**, que nous aborderons dans un prochain ouvrage, est un exemple de domaine mathématique où l'infini intervient fréquemment, sans que l'on ait besoin de parler d'ordinaux. On parle bien de suite tendant vers $+\infty$ par exemple. Il y a aussi le cas des infiniment petits, les fameux nombres **infinitésimaux**. Ces nombres infiniment petits ont perturbés les mathématiciens du fait de leur non rigueur : grâce aux travaux de Cauchy, Bolzano et Weierstrass, on a pu les balayer hors de l'analyse en les remplaçant par la fameuse méthode en $\varepsilon - \delta$. Pourtant en 1961, le mathématicien Robinson a enfin rendu rigoureux ces infinitésimaux à travers l'**analyse non standard** et les nombres **hyperréels**.

Enfin, évoquons l'incroyable théorie des nombres **surréels**, découverte par Conway en 1974. Cette théorie défini une classe de nombres dans lesquels se trouvent en particulier à la fois les nombres ordinaux et à la fois les infinitésimaux. Cette classe dispose même d'une structure de corps ordonné : il est possible d'ajouter, soustraire, multiplier et diviser les ordinaux sans soucis. C'est même la plus grande structure de corps ordonné qui soit. Absolument magnifique !

L'aventure continue chez les Barbuki

Enfin, même s'il est temps de dire au revoir aux ordinaux, notre aventure dans les Barbuki n'est pas terminée. Si les ordinaux étaient beaux à étudier en eux-même, ils nous ont offert au passage des outils puissants : les entiers naturels, la notion de cardinal et le lemme de Zorn.

Justement à propos des entiers naturels : leur étude plus en détails va concerner le prochain ouvrage : celui-ci portera sur l'**arithmétique dans $\mathbb{Z}$**. La suite de nos aventures va donc porter sur les ensembles de nombres.

Un peu d'histoire

Nous l'avons dit, c'est à Cantor que l'on doit la théorie des ordinaux. Dans quel cadre a-t-il été amené à les rencontrer ? Les explications qui suivent sont issues de l'article Wikipédia sur les nombres ordinaux.

Heine conseillera à Cantor de s'intéresser aux décompositions des fonctions périodiques en séries de Fourier. Cantor démontrera que si une série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

est nulle sur $\mathbb{R}$, alors tous les coefficients a_n et b_n sont nuls. Cantor va chercher à affaiblir les hypothèses en réduisant le domaine sur lequel la série s'annule. Il montre que le résultat reste vrai si la série est nulle sauf en un nombre fini de points.

Il introduit alors la notion suivante : si P est une partie d'un segment $[a, b]$, il définit l'ensemble dérivé de P, noté P^1, comme l'ensemble des points d'accumulation de P ou, de manière équivalente, comme l'ensemble P duquel ont été retirés tous les points isolés. Pour tout entier naturel n, il définit P^{n+1} comme étant l'ensemble dérivé de P^n. Il montre que, si la série trigonométrique est nulle sur $[0, 2\pi]$ en dehors d'un ensemble P pour lequel l'un des P^n est vide, alors les coefficients sont nuls.

Cherchant à prolonger ce résultat si les P^n sont tous non vides, il définit alors $P^\omega := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} P^n$ puis $P^{\omega+1}$ comme étant le dérivé de P^ω. Les premiers ordinaux sont nés !

Plus généralement pour un ordinal α quelconque, il pose $P^{\alpha+1}$ l'ensemble dérivé de P^α, et pour tout ordinal limite non nul γ, il pose $P^\gamma := \bigcap\limits_{\delta<\gamma} P^\delta$.

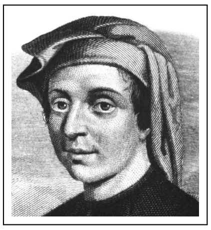
Baire reprendra cette démarche pour la convergence simple des suites de fonctions continues vers une fonction discontinue. Il définit une partie réductible P comme une partie pour laquelle il existe un ordinal α tel que P^α soit vide. Baire montre ensuite que si f est une fonction telle que l'ensemble des points où elle est discontinue est un ensemble réductible, alors f est limite simple d'une suite de fonctions continues.

Dans le cas contraire, la suite des P^α se stabilise avant l'ensemble P^{ω_1}. Il montre que P^{ω_1} est un ensemble parfait, c'est-à-dire sans point isolé.

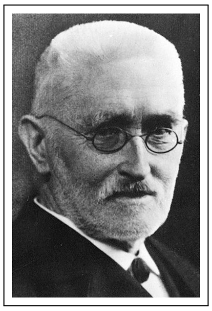
Bibliographie

- Wikipédia
- Kenneth Kunen, *The Foundations of Mathematics*, 29 octobre 2007.
- Jean-Louis Krivine, *Théorie des ensembles*, 2007, éditions Cassini.
- Daniel Suratteau et Bertrand Hauchecorne, *Des mathématiciens de A à Z*, 2008, Ellipses.

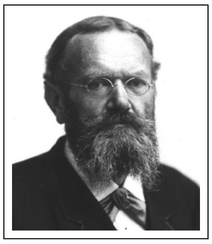
Mathématiciens



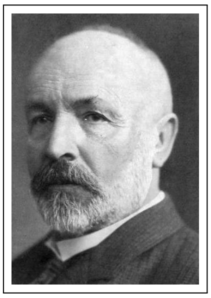
Leonardo Fibonacci
1170 à 1250
page 85



Richard Dedekind
1831 à 1916
page 312



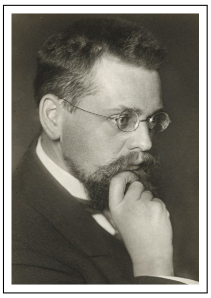
Ernst Schröder
1841 à 1902
page 221



Georg Cantor
1845 à 1918
page 189

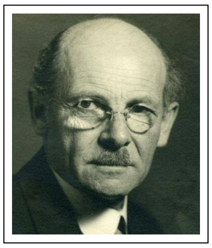
Cesare Burali-Forti
1861 à 1931
page 30

David Hilbert
1862 à 1943
page 244



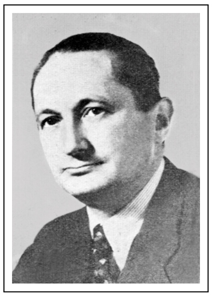
Ernst Zermelo
1871 à 1953
page 269

Friedrich Hartogs
1874 à 1943
page 274



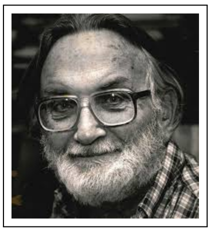
Felix Bernstein
1878 à 1956
page 220

Emmy Noether
1882 à 1935
page 96

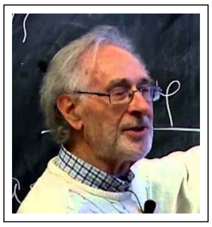


Kazimierz Kuratowski
1896 à 1980
page 260

John von Neumann
1903 à 1957
page 22



Max Zorn
1906 à 1993
page 261



Jean-Louis Krivine
1939 à aujourd'hui
page iv

Kenneth Kunen
1943 à 2020
page iv