Compte rendu MA306

Florian Luce

1 Solution analytique

(1) Justifions que la solution donnée par la formule de d'Alembert coïncide avec la solution analytique de l'EDP.

Soit la formule de d'Alembert :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

En se servant de cette formule pour la partie intégrale :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,dt\right) = f(b(x))\,b'(x) - f(a(x))\,a'(x)$$

On dérive deux fois par rapport à t :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}\left[-cu_0'(x-ct) + cu_0'(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[cu_1(x+ct) - (-c)u_1(x-ct)\right]$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{c}{2}\left[u_0'(x+ct) - u_0'(x-ct)\right] + \frac{1}{2}\left[u_1(x+ct) + u_1(x-ct)\right]$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{c^2}{2}\left[u_0''(x+ct) + u_0''(x-ct)\right] + \frac{c}{2}\left[u_1'(x+ct) - u_1'(x-ct)\right]$$

On dérive deux fois par rapport à x :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0'(x-ct) + u_0'(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[u_1(x+ct) - u_1(x-ct)\right]$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0'(x-ct) + u_0'(x+ct)\right]$$
$$+ \frac{1}{2c}\left[u_1(x+ct)\cdot\frac{\partial(x+ct)}{\partial x} - u_1(x-ct)\cdot\frac{\partial(x-ct)}{\partial x}\right]$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0''(x-ct) + u_0''(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\left[u_1'(x+ct) - u_1'(x-ct)\right]$$

On remarque bien que cela vérifie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

Vérifions les conditions initiales :

$$u(x,0) = \frac{1}{2}[u_0(x) + u_0(x)] + \frac{1}{2c}\int_x^x u_1(s)\,ds = u_0(x)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{c}{2}\left[u_0'(x) - u_0'(x)\right] + \frac{1}{2}\left[u_1(x) + u_1(x)\right] = u_1(x)$$

Vérifions les conditions aux limites :

En rappelant que u_0 a pour support $[-a;a]$. Soit $x=1$, en prenant en compte que $u_1(x)=0$, $c=1/2$, et $a=0,2$, on a $u(1,t)=\frac{1}{2}[u_0(1-\frac{1}{2}t)+u_0(1+\frac{1}{2}t)]$.

D'une part comme dans l'EDP on a t>0, alors $|1+\frac{1}{2}t|=1+\frac{1}{2}t>1>0,2$ donc $u_0(1+\frac{1}{2}t)=0$.

D'autre part comme dans l'EDP on a aussi t<1, alors $|1-\frac{1}{2}t|\in[\frac{1}{2},1]$ alors $|1-\frac{1}{2}t|>0,2$ donc $u_0(1-\frac{1}{2}t)=0$.

Donc $u(1,t)=0$. De la même manière on montre que $u(-1,t)=0$.

3 Stabilité et CFL dans la pratique

(6) Analyser le schéma donné et trouver la condition CFL sous laquelle la méthode est stable

Commençons par analyser le schéma donné :

$$\frac{U_i^{n+1}-2U_i^n+U_i^{n-1}}{\Delta t^2}=c^2\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{\Delta x^2}$$

Tout d'abord, il s'agit d'un schéma explicite, en regardant la réécriture, U_i^{n+1} est exprimé en fonction des valeurs à des temps précédents.

1) Analysons la consistance du schéma :

En reprenant le premier membre du schéma et en sachant que $U_i^n\approx u(x_i,t^n)$, on remplace U_i^{n+1} et U_i^{n-1} par leur développement de taylor d'ordre 3 en t_n ci-dessous : (En supposant que u soit de classe $\mathcal{C}^3$ comme on le fait dans la proposition 3.1.2 (et la remarque page 51), et si u est seulement $\mathcal{C}^2$ alors on montrerait que l'erreur de consistance est en $O(\Delta x+\Delta t)$)

$$U_i^{n+1}\approx u(x_i,t^{n+1})=u(x_i,t^n+\Delta t)=u(x_i,t^n)+\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n)+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)+\frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t^n)+O(\Delta t^4)$$
$$U_i^{n-1}\approx u(x_i,t^{n-1})=u(x_i,t^n-\Delta t)=u(x_i,t^n)-\Delta t\frac{\partial u}{\partial t}(x_i,t^n)+\frac{\Delta t^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)-\frac{\Delta t^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i,t^n)+O(\Delta t^4)$$

On a donc :

$$U_i^{n+1}+U_i^{n-1}=2u(x_i,t^n)+\Delta t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)+O(\Delta t^4)$$

Ainsi :

$$\frac{U_i^{n+1}-2U_i^n+U_i^{n-1}}{\Delta t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)+O(\Delta t^2)$$

de la même manière, on trouve :

$$\frac{U_{i+1}^n-2U_i^n+U_{i-1}^n}{\Delta x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n)+O(\Delta x^2)$$

selon le schéma, on a donc :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)+O(\Delta t^2)=c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n)+O(\Delta x^2)\right)$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i,t^n)=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t^n)+O(\Delta x^2+\Delta t^2)$$

avec $c^2O(\Delta x^2)=O(\Delta x^2)$

Donc l'erreur de consistance est donc en $O(\Delta x^2+\Delta t^2)$, et tend vers 0 quand $\Delta t\to 0$ et $\Delta x\to 0$. Ainsi, on a montré que le schéma est consistant et la méthode est d'ordre (2,2).

Cela revient au même mais on aurait pu aussi calculer l'erreur de consistance en utilisant la définition 3.3.1 :

$$\kappa_j^n = \frac{1}{\Delta t^2}(u(xj,t_{n+1}) - H(U_{i-1}^n, U_i^n, U_{i+1}^n, U_i^{n-1})$$

Où H est une combinaison linéaire de ses quatre paramètres qui vérifie bien la condition H(v,v,v,v)=v, et utiliser $u(xj,t_{n+1})$ donné par la formule de d'Alembert, et utiliser des développements de taylor comme plus haut. On trouverait également $O(\Delta x^2 + \Delta t^2)$.

2) Analysons la stabilité du schéma :

Prenons pour exemple le cours :
Soit $\lambda = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2}$ et

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} = H(U_{i+1}^n, U_i^n, U_{i-1}^n, U_i^{n-1}) &= \sum_{l=-1}^{1} c_l U_{i+l}^n \; - U_i^{n-1} \\ &= \lambda U_{i+1}^n + 2(1-\lambda)U_i^n + \lambda U_{i-1}^n - U_i^{n-1} \end{aligned}$$

Ici, on a bien H(v,v,v,v)=v, cependant il est vrai que contrairement au cours, l'un des paramètres de H dépend dE t_{n-1}, cela confirme néanmoins qu'il s'agit d'un schéma linéaire, donc la relation peut s'écrire $V_h^{n+1} = QV_h^n$ avec $n \in [\![1, N_t - 2]\!]$.

On rappelle les conditions initiales $U_i^0 = u_0(x_i) = U_i^1$ et les conditions aux limites spatiales $U_0^n = U_{N_x-1}^n = 0$.

On pose :

$$U_h^n = \begin{pmatrix} U_1^n \\ \vdots \\ U_{i-1}^n \\ U_i^n \\ U_{i+1}^n \\ \vdots \\ U_{N_x-2}^n \end{pmatrix}, V_h^n = \begin{pmatrix} U_h^n \\ U_h^{n-1} \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} A & -I_{N_x-2} \\ I_{N_x-2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } A = \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & 2(1-\lambda) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \lambda & 2(1-\lambda) & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

Malheureusement, je ne trouve pas le moyen de rendre la matrice Q circulante. Ainsi je ne peux pas procéder comme le cours en définissant une base orthonormée $(F_1, ..., F_{N_x-2})$ avec $F_k := \frac{1}{\sqrt{N_x-2}} \begin{pmatrix} e^{i2\pi k \cdot 1 \Delta x} \\ e^{i2\pi k \cdot 2\Delta x} \\ \vdots \\ e^{i2\pi k \cdot (N_x-2)\Delta x} \end{pmatrix}$, dire que F_k est vecteur propre de Q avec pour valeur propre α_k qui est le coefficient d'amplification du mode k de Fourier. Et que par la formule de Parseval dire que calculer la norme de Q revient à montrer que $|\alpha_k|$ est bornée.

J'ai passé beaucoup de temps sur cette question donc je suis un peu déçu. Il m'a été suggéré de prendre $c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \leq 1$ selon ce lien https ://lmi2.insa-rouen.fr/ atonnoir/Cours/GM/CND/cours1.pdf.

Théorème du cours d'amphi (Lax theorem) : "A scheme is convergent at order (p,q) in some norm if it is both consistent at order (p,q) and stable in the same norm."

Nous avons montré que le schéma est consistant d'ordre (2,2), en supposant qu'il soit stable, il est donc convergent vers l'EDP.

4 Convergence et analyse d'erreur

La pente observée sur les deux graphiques est d'environ de 2, ce qui indique que l'ordre de convergence est de 2 en espace, et de 2 en temps.