Analysis 2b

FS 2022 – Prof. Dr. Berhard Zgraggen

Autoren: Simone Stitz

https://gitlab.com/sstitz/analysis-2b

V2.0.20250129

1 Zahlenreihen (S. 470 ff)

1.1 Grundbegriffe zu Reihen

Summandenfolge a_n	$a_1, a_2, a_3, \dots a_n$
Partialsumme (Folge)	$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{a-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$
Summe	$\lim_{n\to\infty} s_n = s$ falls Konvergenz ($s \in \mathbb{R}$)

1.2 Geometrische Reihe (S. 20)

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{1-q} \qquad (q = \text{const})$$

$n \to \infty$ $|q| < 1$ ➠ Konvergenz zu $\frac{1}{1-q}$ $|q| \geq 1$ ➠ Divergenz

1.3 Harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{\infty} = \infty$$

Divergenz!

Harmonische Zahl H_n: Summe aller Zahlen a_1 bis a_n
$H_n \approx \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + R_n$

1.4 Superharmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad (\alpha > 1)$$

Konvergenz

1.5 Raffsumme (Teleskopsumme)

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1} - a_i)$$

➠ Benachbarte Differenzen

$$s_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1$$

$n \to \infty$ $s_n = -a_1$ wenn $a_n \to 0$ Konvergenz

1.6 Leibnizreihe (Leibniz-Kriterium) (S. 476)

1. Vorzeichenwechsel Summanden $(-1)^n,\ (-1)^{n-1},\ (-1)^{n+1}$
2. $a_n \to 0$ wenn $n \to \infty$ ("Letzter Summand")
3. $|a_n| \downarrow$ (absolut monoton fallend)

➠ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn **alle** Bedingungen erfüllt sind

Fehlerabschätzung: $|s_n - s| \leq |a_{n+1}|$

2 Konvergenz – Divergenz von Reihen

2.1 Treppenfläche / Restfläche / Cauchy-Bedingung

2.1.1 Treppenfläche

Summand als Rechteck mit Breite 1 und Höhe a_n darstellen
Fläche des Rechtecks $A = |a_n|$

2.1.2 Restfläche / Cauchy-Bedingung (2)

(1) "Letzter Summand"(a_n)
Wenn $\sum$ konvergiert, **dann** $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$
Wenn $a_n \to 0$, **dann** $\sum$ divergent $(n \to \infty)$

(2) "Mehrere letzte Summanden"
$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_m$ $(m > n \in \mathbb{N})$ entspricht "Rest"
$\sum$ Konvergenz ⟺ "Rest" $\to 0$ $(m,\ n \to \infty)$

2.2 Majorante (Konvergenzverdacht)

Summand $|a_n| \leq c_n$ c_n ist Major

Wenn $\sum c_n$ konv, **dann** $\sum |a_n|$ konv und **dann** $\sum a_n$ konv $|\sum a_n| \leq \sum |a_n| \leq \sum c_n$

2.3 Minorante (Divergenzverdacht)

Summand $a_n \geq d_n \geq 0$ (!) d_n ist Minor

Wenn $\sum d_n$ divergent, **dann** $\sum a_n$ divergent

2.4 Cauchy Wurzel-Kriterium (S. 474)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}: \qquad \sqrt[1]{|a_1|};\ \sqrt[2]{|a_2|};\ \sqrt[3]{|a_3|}\ \dots$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} := \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{oder} \quad \alpha = +\infty$$

$\alpha \in [0, 1)$	➠	$\sum \lvert a_n \rvert$ konvergent	➠	$\sum a_n$ konvergent
$\alpha > 1$	➠	$\sum \lvert a_n \rvert$ divergent	➠	$\sum a_n$ divergent
$\alpha = 1$	➠	unklarer Fall		

2.5 Quotientenkriterium (S. 474)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|: \quad \left|\frac{a_2}{a_1}\right|; \left|\frac{a_3}{a_2}\right|; \left|\frac{a_4}{a_3}\right|; \dots \quad (a_n \neq 0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| := \tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_0^+ \quad \text{oder} \quad \tilde{\alpha} = +\infty$$

$\tilde{\alpha} \in [0, 1)$	➠	$\sum \lvert a_n \rvert$ konvergent	➠	$\sum a_n$ konvergent
$\tilde{\alpha} > 1$	➠	$\sum \lvert a_n \rvert$ divergent	➠	$\sum a_n$ divergent
$\tilde{\alpha} = 1$	➠	unklarer Fall		

2.6 Integralkriterium (S. 475)

Bedingungen: Summanden ≥ 0; Summanden ↓
Summandenfunktion $f(x)$ mit $x \in [1; \infty)$ $f(n) = a_n$ = Summand

(1) $\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = \infty$ ➠ $\sum a_n = \infty$ Divergenz

(2) $\int_1^\infty f(x)\ \mathrm{d}x < \infty$ ➠ $\sum a_n \in \mathbb{R}$ Konvergenz

2.7 Wahl der geeigenten Methode

(1) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ versuchen: Wenn $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}_0^+$ oder $\tilde{\alpha} = \infty$ ➠ Methode ok
Falls $\tilde{\alpha} = 1$, dann andere Methode wählen (nicht Wurzelkriterium)

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ versuchen: Wenn $\tilde{\alpha} \notin \mathbb{R}_0^+$ und $\tilde{\alpha} \notin \infty$ ➠ unbest. div.
dann Wurzelkriterium versuchen

2.8 Grenzwerte mit n-ten Wurzeln und Fakultäten

$\lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = \mathrm{e}^a$ (a = const)	$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1$ (α = const)
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert p(n) \rvert} = 1$ ($p(n) \neq 0$)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert r(n) \rvert} = 1$ ($r(n) \neq 0$)
$\lim_{n\to\infty} \frac{K^n}{n!} = 0$ (K = const)	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{K^n}{n!}} = 0$ (K = const > 0)	$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}$

2.9 Konvergenzen von Summen $\sum a_n$

bedingt: Original $\sum a_n$ konvergiert, aber Umordnungen können neue Summe ergeben oder divergieren
➠ Jede Summe $\in \mathbb{R}$ und $\pm\infty$ möglich

unbedingt: Jede Umordnung konvergiert zur gleichen Summe

absolut: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ⟺ unbedingte Konvergenz
Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, dann $\sum$ pos. Summanden $= \infty$
Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, dann $\sum$ neg. Summanden $= -\infty$

Umordnung: Jeden Summanden genau einmal verwenden!

2.10 Reihenprodukte

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \dots$ ➠ siehe folgende Unterkapitel

2.10.1 Faltung / Diagonalanordnung / Cauchy

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k} \quad (n \to \infty) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$$

(wenn absolut konvergent)

c_n = Summe der Indizes $= n$

2.10.2 Rechtecksprodukt ($n \in \mathbb{N}_0$)

$= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots)(b_0 + b_1 + b_2 + \dots) \quad (n \to \infty) = ab$ **(wenn absolut konvergent)**

3 Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x) \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad \text{(Taylor-Theorie)}$$

a_n	Koeffizienten (Gewichte)	x_0	Entwicklungsstelle
x	Variable	$f(x)$	Summenfunktion

3.1 Wichtige Potenzreihen (S. 1076 ff)

Hinweis: In folgender Notation gilt Entwicklungsstelle $x_0 = 0$

$\sum_{n=0}^{\infty} 1\, x^n = \frac{1}{1-x}$ — Konvergenz wenn ($|x| < 1$) — Geom. Reihe G.R.

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = e^x$ — Konvergenz wenn ($|x| < \infty$; $x \in \mathbb{R}$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \ln(1+x)$ — Konvergenz wenn ($-1 < x \leq 1$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\ln(1-x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < 1$)

$2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ — Konvergenz wenn ($|x| < 1$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \sin(x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < \infty$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \cos(x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < \infty$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < \infty$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh(x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < \infty$)

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$ — Konvergenz wenn ($|x| < 1$)

3.2 Substitution

Ein Term kann jederzeit substituiert werden.
Der Definitionsbereich darf nicht verlassen werden!

Beispiel: Substitution

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{8}{3}(x+1)\right)}_{q}^{n} \quad \Rightarrow \text{Auf Geom. Reihe bringen durch Substitution}$$

Def-Bereich: $|q| < 1$ damit Geom. Reihe konvergent $\Rightarrow \left|-\frac{8}{3}(x+1)\right| < 1$

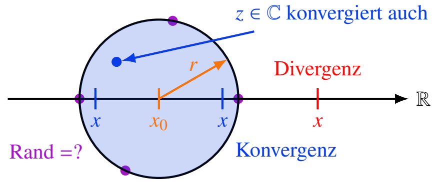
3.3 Summieren / Taylor-Entwicklung

Summieren: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad \Rightarrow \quad f(x)$

Taylor-Entwicklung: $f(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

3.4 Konvergenzbereich (Kreisscheibe)

$$\underbrace{|x-x_0|}_{\text{Kreisscheibe}} < \underbrace{\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}_{\text{Radius}}$$



3.4.1 Spezialfälle

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0^+$ — $\Rightarrow r = +\infty$

2) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ev. nötig — untere Grenze bei versch. mögl. Radien

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ — geht auch (Wurzelersatz)

3.4.2 Rand des Konvergenzbereichs

Es ist eine Spezialanalyse nötig, um zu sehen, ob auch Randstellen konvergieren!

Randstelle konkret in Reihe einsetzen und mit einer der folgenden Methoden auf Konvergenz untersuchen:
Leibniz, Majorante, Minorante, Integral, ...

3.5 Ableiten einer Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = f(x) \quad \xrightarrow{\text{ableiten}} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n\, x^{n-1} = f'(x) \qquad |x| < r$$

3.5.1 Höhere Ableitungen

Logik wiederholen! **Konvergenzradius $|x| < r$ bleibt erhalten**

Zweite Ableitung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n(n-1)\, x^{n-2} = f''(x) \qquad |x| < r$

n-te Ableitung: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, n(n-1) \cdots (n-i+1)\, x^{n-i} = f^{(i)}(x)$

3.6 Integrieren einer Reihe

Konvergenzradius $|x| < r$ bleibt erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int f(x)\, dx + C \qquad |x| < r$$

Hinweis: Der Koeffizient vor x^{n+1} entspricht dem Term $\frac{a_n}{n+1}$ Für Konstante C: Entwicklungsstelle x_0 auf beiden Seiten einsetzen (hier: $x_0 = 0$)

3.7 Limitsatz von Abel (Rand)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \qquad x = r(\text{Rand rechts}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n (\text{Zahlenreihe})$$

Wenn Zahlenreihe konvergiert, dann $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n = f(x=r) = \lim\limits_{x\to r^-} f(x)$

$\Rightarrow$ analog mit linkem Rand ($x = -r$) und rechtsseitiges Limit

4 Differentialgleichungen

4.1 Übersicht

DGL (explizit): $y'' = \underbrace{2\,y' - x^2\,y + \frac{1}{2}x}_{\text{r.h.s. } f(x,y,y')}$ (Ordnung $n = 2$), linear!

DGL	Gleichung, welche mind. eine Ableitung der gesuchten Funktion y enthält
Ordnung n	**höchste** in DGL vorkommende Ableitung von y
Variable x	Modellvariable in einem Intervall
r.h.s.	right hand side $f(x, y', y'', \ldots y^{(n-1)})$
Anfangswerte	Jede DGL der Ordnung n hat n Anfangswerte $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad \ldots \quad y^{(n-1)} = y_{n-1}$
Linearität	DGL ist **linear in y**, wenn alle y-Terme linear vorkommen (x-Terme ändern Linearität von y nicht)
spez. Lösung	Menge aller Lösungen $\mathbb{L}$ erfüllen auch Anfangsbedindungen
allg. Lösung	Menge aller Lösungen $\mathbb{L}$ ohne spezifische Anfangsbedingungen (Synonym: allg. Integral)

4.2 Picard-Lindelöf

Schema zur Beruteilung der **Lösbarkeit** einer DGL

(1) $f(x, y, y', \ldots y^{(n-1)})$ lokal bei $x_0; y_0$ stetig
(2) alle partielle Ableitungen bilden: $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$; $f_{y'} = \frac{\partial f}{\partial y'}$; ...

Wenn (1) erfüllt und alle (2) lokal bei $x_0; y_0$ beschränkt, **dann** ist DGL lokal eindeutig lösbar (inkl. Anfangsbedingungen)

Wenn (1) erfüllt aber (2) nicht erfüllt, dann ist alles möglich
$\Rightarrow$ **Singularitäts-Test durchführen:**
Polstellen f_y nach y auflösen, in DGL einsetzen und konrollieren, ob DGL erfüllt ist

4.3 ABC-Analyse

Schema zur Überprüfung, ob **Lösungsmenge $\mathbb{L}$ vollständig** ist

A Verifizieren, ob gefundene Lösung y DGL erfüllt (Einsetzen)
B Alle Anfangswerte lösbar? $\Rightarrow$ GlSys mit det $\neq 0$
C Eindeutigkeit mit Picard-Lindelöf prüfen

4.4 Lösungsmethoden DGL Ordnung $n = 1$

4.4.1 Trennung der Variablen (separiert)

$$y' = f(x\,;\,y) = (\text{Faktor in } x) * (\text{Faktor in } y) = \tilde{f}(x) * g(y)$$

(1) $\frac{y'}{g(y)} = \tilde{f}(x)$ mit $g(y) \neq 0$

(2) $\int_{x_0}^{x} \frac{y'}{g(y)}\, d\tilde{x} = \int_{x_0}^{x} \tilde{f}(\tilde{x})\, d\tilde{x}$

(3) $\int_{y_0}^{y} \frac{d\tilde{y}}{g(\tilde{y})}$ = gelöstes Integral

(4) Integral links lösen = gelöstes Integral rechts

(5) Gleichung auflösen nach $y \Rightarrow$ Formel in x

(6) Singularitätstest um weitere Lösungen zu finden

$g(y) = 0 \Rightarrow y = \ldots$ in DGL einsetzen und verifizieren

4.4.2 Linearterm

$$y' = f(x\,;\,y) = f(\underbrace{ax+by+c}_{z}) \qquad y(x_0) = y_0$$

separiert: $z' = a + b\,f(z) \qquad z(x_0) = z_0 = a\,x_0 + b\,y_0 + c$

$\Rightarrow$ weiter in Abschnitt 4.4.1 mit $\tilde{f}(x) = 1$ und Substitution $y = z$

4.4.3 Gleichgradigkeit

$$y' = f(x\,;\,y) = f\Big(\underbrace{\frac{y}{x}}_{z}\Big) \qquad y(x_0) = y_0; (x; x_0 \neq 0)$$

separiert: $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) \qquad z(x_0) = z_0 = \frac{y_0}{x_0}$

$\Rightarrow$ weiter in Abschnitt 4.4.1 mit $\tilde{f}(x) = \frac{1}{x}$ und Substitution $y = z$

Umkehrfunktions-Trick:
Variablen x und y vertauschen wenn:

- $f(\frac{y}{x})$ verkehrt herum, also $f(\frac{x}{y})$
- Ableitung (Steigung) y' steht im Kehrwert $\frac{1}{y'}$

4.5 Lineare DGL $n = 1$

$$1\,y' + f(x)\,y = g(x) \qquad g(x) \text{ ist Störterm} \qquad \text{Anfangswert: } y(x_0) = y_0$$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_H + y_p$ **(y_p ist stationärer Anteil)**

Gesamte Rechnung inkl. homogenem Teil ohne Integrations-Grenzen durchführen!

4.5.1 Homogen $\Rightarrow$ Störterm $g(x) = 0$

$$1\,y' + f(x)\,y = g(x) \quad \leftrightarrow \quad y' = -f(x)\,y$$

$$y = \underbrace{y_0}_{k}\; e^{-\int_{x_0}^{x} f(\tilde{x})\,d\tilde{x}} \qquad (y_0 \in \mathbb{R}) \Rightarrow \mathbb{L}_H$$

4.5.2 Partikulär / Inhomogen $\Rightarrow$ Störterm $g(x) \neq 0$

$$y_p = k(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx} \quad \text{mit} \quad k(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,dx}\,dx$$

4.6 Kurvenmengen

A $\quad y = c \cdot x \quad$ Parameter ($c \in \mathbb{R}$)
Geraden durch (0;0), c = Steigung

B $\quad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1 \quad$ Parameter (a; $b > 0$)
Ellipsen zentriert in (0;0), Halbachsen $\sqrt{a}$; $\sqrt{b}$

C $\quad x^2 + y^2 = c^2$
Kreise zentriert in (0;0), Radius $\sqrt{c}$

polar: $\frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi)} \quad \varphi \in \mathbb{D}_\varphi \quad 0 \leq \varepsilon < 1$ Ellipse
$\varepsilon = 1$ Parabel $\quad \varepsilon > 1$ Hyperbel

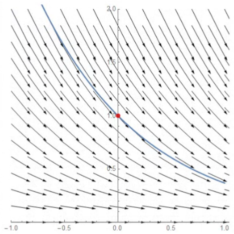
4.7 Senkrechte Kurven / Orthagonaltrajektorien

Schneiden Originalkurven immer senkrecht

(1) Originalkurve = $\mathbb{L}$ von DGL
Originalkurve Ableiten; Parameter-Elimination
$\Rightarrow$ Originalkurven sind nun als DGL ausgedrückt

(2) DGL y' in neue DGL $\tilde{y}'$ transformieren
$\Rightarrow \mathbb{L}$ der neuen DGL sind senkrechte Kurven
$y' = f(x\,;\,y) \quad \Rightarrow \quad \tilde{y}' = -\frac{1}{f(x;y)} \quad \Rightarrow$ DGL $\tilde{y}'$ lösen!

4.8 Richtungsfelder (für DGL 1. Ordnung)



DGL liefert Steigung in jedem Punkt

Durch einsetzen von Punkten kann ein Richtungsfeld gezeichnet werden

Auflösung: $h = \Delta x = \text{const}$

4.9 Lineare DGL $n = 2$

$$1\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = f(x) \qquad f(x) \text{ ist Störterm}$$

a_0, a_1 konstante Koeffizienten $\in \mathbb{R}$
Anfangswerte: $y(x_0) = y_0$ und $y'(x_0) = y_1$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_H + y_p$

4.9.1 Homogen $\Rightarrow$ Störterm $f(x) = 0$

$$\text{char. Gleichung:} \quad \underbrace{1\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0}_{\text{char. Polynom}} = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}$$

$D > 0 \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}\,;\, \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad$ (starke Dämpfung)
$\mathbb{L}_H = A\,e^{\lambda_1 x} + B\,e^{\lambda_2 x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$

$D < 0 \quad \lambda_{1,2} \notin \mathbb{R}\,;\, \lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm j\,\underbrace{\sqrt{|D|}}_{\alpha} \quad$ (Schwingfall)
$\mathbb{L}_H = A\,e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \cos(\alpha\,x) + B\,e^{-\frac{a_1}{2}x} \cdot \sin(\alpha\,x) \quad (A, B \in \mathbb{R})$

$D = 0 \quad \lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} \in \mathbb{R} \quad$ (Aperiodischer Grenzfall)
$\mathbb{L}_H = A\,e^{\lambda_1 x} + B\,x\,e^{\lambda_1 x} \quad (A, B \in \mathbb{R})$

Amplituden $A, B \in \mathbb{R} \quad$ (Schwing-) Frequenz $\alpha = \sqrt{|D|}$
Dämpfungen λ_1 und λ_2

4.9.2 Partikulär / Inhomogen $\Rightarrow$ Störterm $f(x) \neq 0 \Rightarrow$ 4.10

$$\textbf{Faltungsintegral = Grundlösung} \quad y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{g(x + x_0 - t)}_{(1)} \cdot \underbrace{f(t)}_{(2)}\,dt$$

(1) homogene Lösung mit Anfang $g(x_0) = 0\,;\; g'(x_0) = 1$
(2) Störterm $f(t)$

Vorteile: Störung direkt verwendet
Neutraler Anfang mit $y_p(x_0) = 0$ und $y_p'(x_0) = 0$
Anfangsbedingungen für y nur mit $\mathbb{H}$ lösbar

4.10 Ansatz rechte Seite (Störung $f(x) \neq 0$)

$p_n(x) \quad$ Polynom vom Grad $n \quad$ (z.B. $ax^2 + bx + c$ für $n = 2$)

$q_n(x) \quad$ Lösungs-Polynom vom gleichen Grad $n \quad$ (z.B. $ax^2 + bx + c$ für $n = 2$)
$\Rightarrow$ Koeffizienten bestimmen durch einsetzen in DGL

$r_n, s_n \quad$ Amplituden $\Rightarrow y_p$ in DGL einsetzen

$a_1, a_0 \quad$ Koeffizienten $\in \mathbb{R}$

4.10.1 Störung = Polynom in x

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = p_n(x)$$

a) $a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow y_p = q_n(x)$

b) $a_0 = 0\,;\, a_1 \neq 0 \quad \Rightarrow y_p = x \cdot q_n(x)$

c) $a_0 = a_1 = 0 \quad \Rightarrow y_p = x^2 \cdot q_n(x)$

4.10.2 Störung = Polynom * e^{bx}

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = e^{bx} p_n(x)$$

a) wenn b **keine** Lösung der char. Gleichung ist
$\Rightarrow y_p = e^{bx} q_n(x)$

b) wenn b **einfache** Lösung der char. Gleichung ist
$\Rightarrow y_p = e^{bx} x\,q_n(x)$

c) wenn b **doppelte** Lösung der char. Gleichung ist
$\Rightarrow y_p = e^{bx} x^2\,q_n(x)$

4.10.3 Störung = Polynom * e^{cx} * (sin(bx) + cos(bx))

$$y'' + a_1\,y' + a_0\,y = e^{cx}(p_n(x)\,\cos(bx) + q_n(x)\,\sin(bx))$$

a) wenn $c + jb$ keine Lösung der char. Gleichung ist
$\Rightarrow y_p = e^{cx}(r_n(x)\,\cos(bx) + s_n(x)\,\sin(bx))$

b) wenn $c + jb$ Lösung der char. Gleichung ist
$\Rightarrow y_p = e^{cx}\,x\,(r_n(x)\,\cos(bx) + s_n(x)\,\sin(bx))$

4.11 Lineare DGL Ordnung $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Form:} \quad 1\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_2\,y'' + a_1\,y' + a_0\,y = f(x)$$

$f(x)$ ist Störterm $\qquad a_0, a_1, \ldots, a_n$ konstante Koeffizienten $\in \mathbb{R}$
Anfangswerte: $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_1 \quad \ldots \quad y^{(n-1)}(x_0)$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_H + y_p$

4.11.1 Homogen $\Rightarrow$ Störterm $f(x) = 0$

$$\text{char. Gleichung:} \quad \underbrace{1\,\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\,\lambda^2 + a_1\,\lambda + a_0}_{\text{char. Polynom}} = 0$$

$\Rightarrow \lambda$ finden und gemäss folgender Tabelle Baustein finden:

a) **reelle r-fache** Lösung $\lambda_1 \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = x\,e^{\lambda_1 x}, \quad \ldots \quad y_r = x^{r-1}\,e^{\lambda_1 x}$

b) **komplexe k-fache** Lösung $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ (komplex-konjugiert)
mit $\lambda_2 = \alpha + j\beta$ und $\beta \neq 0$
$\Rightarrow y_1 = A_1 \cdot e^{\alpha x}\cos(\beta x) + A_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
$\Rightarrow y_n = A_{2n-1} e^{\alpha x} x^{n-1}\,\cos(\beta x) + A_{2n} e^{\alpha x} x^{n-1}\,\sin(\beta x)$

Homogene Lösung $\mathbb{H}$ ist Superposition aller Bausteine!
Vor Bausteine eine freie Amplitude $A_1, A_2 \ldots A_n \in \mathbb{R}$ packen

4.11.2 Partikulär / Inhomogen ➛ Störterm $f(x) \neq 0$

Faltungsintegral = Grundlösung $y_p(x) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{g(x + x_0 - t)}_{(1)} \cdot \underbrace{f(t)}_{(2)} \, \mathrm{d}t$

(1) homogene Lösung mit Anfang: $g(x_0) = 0,\ g'(x_0) = 0, \quad \ldots \quad \boldsymbol{g^{(n-1)} = 1}$
(2) Störterm $f(t)$

Vorteile: Störung direkt verwendet
y_p hat neutralen Anfang
Anfangsbedingungen für y nur mit $\mathbb{H}$ lösbar

4.12 Ansatz rechte Seite (Störung $f(x) \neq 0$)

$p_m(x), q_m(x)$	Polynome vom Grad m (z.B. $a\,x^2 + b\,x + c$ für $m = 2$)
r_m, s_m	Amplituden ➛ y_p in DGL einsetzen
a_n	Koeffizienten $\in \mathbb{R}$ für $1 \neq k \neq n - 1$, $a_n = 1$
r	Vielfachheit einer komplexen Lösung (Resonanz)

4.12.1 Störung = $e^{\alpha x}$ * Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)} = \mathrm{e}^{\alpha x} p_m(x)$$

a) wenn α **keine** Lösung der char. Gleichung ist
➛ $y_p = \mathrm{e}^{\alpha x} q_m(x)$

b) wenn α ***r*-fache** Lösung der char. Gleichung ist
➛ $y_p = \mathrm{e}^{\alpha x} x^r\, q_m(x)$

4.12.2 Störung = $e^{\alpha x}$ * Polynom * Schwingung

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y^{(k)} = \mathrm{e}^{\alpha x}\Big(p_m(x)\, \cos(\beta x) + q_m(x)\, \sin(\beta x)\Big)$$

a) wenn $\alpha + \mathrm{j}\beta$ **keine** Lösung der char. Gleichung ist
➛ $y_p = \mathrm{e}^{\alpha x}\Big(r_m(x)\, \cos(\beta x) + s_m(x)\, \sin(\beta x)\Big)$

b) wenn $\alpha + \mathrm{j}\beta$ ***r*-fache** Lösung der char. Gleichung ist
➛ $y_p = \mathrm{e}^{\alpha x}\, x^r \Big(r_m(x)\, \cos(\beta x) + s_m(x)\, \sin(\beta x)\Big)$

4.13 DGL Gleichungssysteme vom Grad 2

$$\begin{array}{r|lcccc|} \mathrm{I} & \dot{x} = ax & + & by & + & e \\ \mathrm{II} & \dot{y} = cx & + & dy & + & \underbrace{f}_{\text{störf.}} \end{array} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}, (x; y) = ?$$

Matrix erstellen / umformen auf folgende Form:

$$\begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Vereinfacht sich zu:

$$1\ddot{x} - (a + d)\dot{x} + (ad - bc)x = \overbrace{\dot{e} - de + bf}^{\text{Störterm}}$$

$$1\ddot{y} - (a + d)\dot{y} + (ad - bc)y = \dot{f} - af + ce$$

➛ Lösbar wie in Abschnitt 4.9 beschrieben
➛ Wenn x gefunden wurde kann $y = \frac{\dot{x} - ax - e}{b \neq 0}$ verwendet werden