Analysis 2a

FS 2026 – Prof. Dr. Berhard Zgraggen
Autoren: Simone Stitz, Mirko Ratti
https://gitlab.com/sstitz/analysis-2a
V3.0.20260216

1 Integralrechnung (S. 493)

1.1 Rechenregeln mit Integralen (S. 508-510)

Zerlegung: $\int_a^b f_1(x) + f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x$

$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$

Grenzen tauschen: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$

Gleiche Grenzen: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

1.2 Integrationsregeln (S. 494 - 496)

1.2.1 Linearität

$$\int_a^b \alpha f(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

1.2.2 Elementartransformation

$$\int f(\alpha x + \beta)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C$$

1.2.3 Partielle Integration (Produktregel)

$$\int f' \cdot g\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x \qquad \int f \cdot g'\,\mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g\,\mathrm{d}x$$

➛ Partielle Integration darf mehrfach angewendet werden.
PI sollte wenn möglich vermieden werden! Produkte in Summen umschreiben!

1.2.4 Substitution

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$$ ➛ siehe Beispiel

Integrationsgrenzen anpassen! (ev. mit Umkehrfunktion)

Beispiel: Substitution

$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cdot \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ Substitution: $a = x^2$ **auch auf Grenzen anwenden!**

$\mathrm{d}a = 2x \cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}a}{2x} = \frac{\mathrm{d}a}{2\sqrt{a}}$

$$\int_0^{\pi} a\sqrt{a} \cdot \cos(a) \frac{\mathrm{d}a}{2\sqrt{a}} = \int_0^{\pi} a\sqrt{a} \cdot \cos(a)\,\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a}}\,\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} a \cdot \cos(a)\,\mathrm{d}a = ...$$

1.2.5 Universalsubstitution (Weierstrass) / Rationalisierung

Rationale Terme aus $\sin(x)$ und $\cos(x)$ substituieren: (verknüpft durch + - * :)

$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{d}x$
$\frac{2t}{1+t^2}$	$\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

➛ $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Definitionsbereich:
$-\pi < x < \pi$, da sonst $t \notin \mathbb{R}$

1.2.6 Spezielle Regeln (Faktor in Integral = Ableitung)

Allg. Potenzregel $\int f'(x) \cdot f(x)^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

Allg. Log-Regel $\int f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C$

Allg. Exp-Regel $\int f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$

1.3 Uneigentliche Integrale (S. 520)

1.3.1 Integrationsbereich auf x-Achse unbeschränkt ($\mathbb{D}_f$)

$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a \in \mathbb{R} \quad x \in [a;\infty)$

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad b \in \mathbb{R} \quad x \in (-\infty; b]$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x := \int_{-\infty}^{C} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_C^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad$ (Zerlegung)

Wenn $f(x)$ (stetig) nicht → 0, dann liegt Divergenz vor!

1.3.2 Integrationsbereich auf y-Achse unbeschränkt ($\mathbb{W}_f$)

links ($x_0 = a$) $\int_{a^+}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$

rechts ($x_0 = b$) $\int_a^{b^-} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$

zwischen ($x_0 \in (a;b)$) $\int_a^{x_0^-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{x_0^-} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0^+}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

beide ($x_0 = a; x_0 = b$) $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a^+}^{C} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_C^{b^-} f(x)\,\mathrm{d}x$

Generell gilt: Bei Unstetigkeitsstellen wird Integral zerlegt!

1.4 Referenz uneigentlicher Integrale

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \infty & \text{Div} \quad \alpha \in (0;1] \\ \mathbb{R} & \text{Konv} \quad \alpha > 1 \end{cases} \qquad \int_{0^+}^{b>0} \frac{1}{x^{\beta}}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{Konv} \quad 0 \leq \beta < 1 \\ \infty & \text{Div} \quad \beta > 1 \\ \infty & \text{Div} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

1.5 Majoranten- / Minorantenprinzip

1.5.1 Majorantenprinzip ("Grösser-Gleich-Term")

$|f(x)| \leq g(x) \qquad g(x) = \text{Majorante} \qquad D_f = D_g$ zw. Grenzen von Integral

Wenn $\int_{...}^{...} g(x)\,\mathrm{d}x$ konv. ➛ $\int_{...}^{...} |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konv. ➛ $\int_{...}^{...} f(x)\,\mathrm{d}x$ konv.

1.5.2 Minorantenprinzip ("Kleiner-Gleich-Term")

$0 \leq f(x) \qquad 0 \leq g(x) \leq f(x) \qquad g(x) = \text{Minorante} \qquad D_f = D_g$ zw. Grenzen von Integral

Wenn $\int_{...}^{...} g(x)\,\mathrm{d}x$ div. ➛ $\int_{...}^{...} f(x)\,\mathrm{d}x$ div.

1.6 Integraltabelle (S. 495)

Ableitung $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	**Funktion $f(x)$**	**Stammfunktion $F(x)$**
0	$c\ (c \in \mathbb{R})$	$c \cdot x$
c	$c \cdot x$	$c\frac{x^2}{2}$
$a \cdot x^{a-1}$	$x^a\ (a \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
e^x	e^x	e^x
$a\,\mathrm{e}^{ax}$	e^{ax}	$\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}$
$a^x \ln(\lvert a\rvert)$	a^x	$\frac{a^x}{\ln(\lvert a\rvert)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$x(\ln(\lvert x\rvert) - 1)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$1 - \tanh^2(x)$	$\tanh(x)$	$\ln(\cosh(x))$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \cdot \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x \cdot \operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x \cdot \operatorname{artanh}(x) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

2 Geometrie

Krümmungskreis-Radius	S. 254	Bogenlänge	S. 514	Rotations-Oberfläche	S. 515
Krümmungskreis-Mittelpunkt	S. 255	Flächeninhalt	S. 514	Rotations-Volumen	S. 515
Krümmung	S. 253 ff				

2.1 Kurvendarstellungen

Hinweis: Bei allen Formen muss der Definitionsbereich angegeben werden!

2.1.1 Explizit

- **Eindeutige** Funktionsgleichung $y = f(x)$
- Umkehrfunktion: $x = f^{-1}(y)$

2.1.2 Implizit

- nicht eindeutige Gleichung in x und y z.B. $x^2 + y^2 = 1$

2.1.3 Parameterdarstellung

- Darstellung als Vektor: $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ \dots \end{pmatrix}$
- $\vec{c}$ ableitbar nach t (keine Knicke)
- $\vec{c}$ ist regulär, wenn ableitbar und $\vec{c}' \neq \vec{0}$

2.1.4 Polarform

- Darstellung: Radius als Funktion des Winkels: $r = f(\varphi)$
- Darstellung als Polar-Vektor: $\vec{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$
- Im Pol bedeutet $r = 0$; Winkel φ_0 z.B. π
- Drehung um Winkel α: $r(\varphi) \to r(\varphi - \alpha)$ (Drehung im Gegenuhrzeigersinn)

2.1.5 Tangentialvektor

- Darstellung als Vektor: $\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dots \end{pmatrix}$
- Punkt steht für Ableitung nach der Zeit

2.2 Polarkoordinaten (r, φ) (S. 197-198)

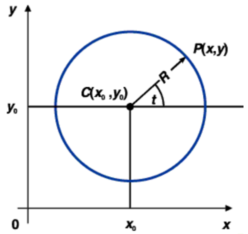
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad y = r \cdot \sin(\varphi) \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \end{cases}$$

Polar-Vektor: $\vec{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} r(\varphi)\cos(\varphi) \\ r(\varphi)\sin(\varphi) \end{pmatrix}$ ➛ r ist eine Funktion des Winkels φ

2.3 Umrechnung Darstellungsformen (Koordinatensysteme)

Parameter	➛	Explizit	t eliminieren; ineinander einsetzen; umformen
Ex- / Implizit	➛	Polar	Ersetzen: $x = r \cdot \cos(\varphi)$ $\quad y = r \cdot \sin(\varphi)$ $\quad x^2 + y^2 = r^2$
Polar	➛	Implizit	Ersetzen: $r \cdot \cos(\varphi) = x$ $\quad r \cdot \sin(\varphi) = y$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$
Polar	➛	Parameter	$\begin{pmatrix} r(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \\ r(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \end{pmatrix}$
Explizit	➛	Parameter	$\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

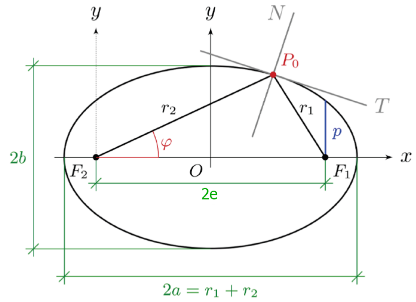
2.4 Kreis (Kurve 2. Ordnung) (S. 204)



r	Radius (im Folgenden R, da konstant)
x_0	x-Koordinate des Kreismittelpunktes
y_0	y-Koordinate des Kreismittelpunktes

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Paramter (Vektor) (Achsenkreuz in O)	Polar (Achsenkreuz in O)
Kurve	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + R \cdot \cos(t) \\ y_0 + R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$	$r(\varphi) = R$ (const)

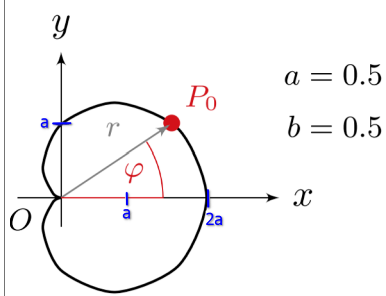
2.5 Ellipse (Kurve 2. Ordnung) (S. 205)



a	Grosse Halbachse (horizontal)	
b	Kleine Halbachse (vertikal)	
e	Extrentrizität	$e = \sqrt{a^2 - b^2}$
ε	num. Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{e}{a} \quad (0 \leq \varepsilon < 1)$
p	Halbparameter	$p = \frac{b^2}{a}$
φ	Polarwinkel bei F_2	$0 \leq \varphi < 2\pi$
F_1, F_2	Brennpunkte	
r_1, r_2	Polabstände zu $F_{1,2}$	

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Paramter (Vektor) (Achsenkreuz in O)	Polar **(Achsenkreuz in F_2)**
Kurve	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos(t) \\ b \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ $0 \leq t < 2\pi$	$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi)}$ $0 < \varphi < 2\pi$
Tangentensteigung	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$ $y_0 \neq 0$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{b \cdot \cos(t)}{-a \cdot \sin(t)}$ $t \neq 0, \pi$	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\varepsilon - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ $\varphi \neq 0, \pi$ AP: $(x_0; y_0) = \begin{pmatrix} r_0 \cdot \cos(\varphi_0) \\ r_0 \cdot \sin(\varphi_0) \end{pmatrix}$

2.6 Kardioide (Kurve 2. Ordnung) (S. 100)

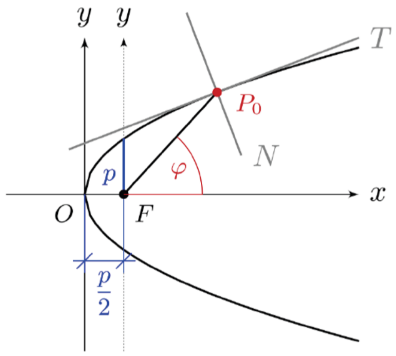


Allgemein gilt für Limaçons die Darstellung $r = f(\varphi)$ mit Pol bei $r = 0$

a Streckfaktor zum Pol

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Paramter (Vektor) (Achsenkreuz in O)	Polar (Achsenkreuz in O)
Kurve	–	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot (1 + \cos(t)) \cdot \cos(t) \\ a \cdot (1 + \cos(t)) \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$	$r(\varphi) = a \cdot \left(1 + \cos(\varphi)\right)$

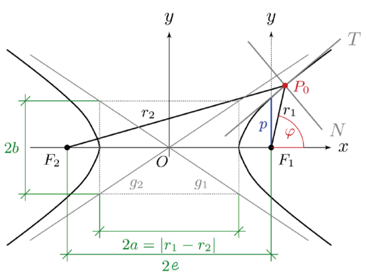
2.7 Parabel (Kurve 2. Ordnung) (S. 210)



ε	num. Exzentrizität	$\varepsilon = 1$
p	Halbparameter	
φ	Polarwinkel	$0 < \varphi < 2\pi$
F	Brennpunkt	

	Implizit (Achsenkreuz in O)	Paramter (Vektor) (Achsenkreuz in O)	Polar **(Achsenkreuz in F_2)**
Kurve	$y^2 = 2\,p\,x$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2\,p} \\ y \end{pmatrix}$ $y \in \mathbb{R}$	$r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ $(\varepsilon = 1)$
Tangentensteigung	$y' = f(x)' = \frac{p}{y}$ $y \neq 0$; $y =$ Parabelpunkt	$y' = \frac{p}{y}$ $y \neq 0$, $y =$ Parabelpunkt	$y' = \frac{1-\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ $\varphi \neq 0, \pi$

2.8 Hyperbel (Kurve 2. Ordnung) (S. 207)



a	Halbachse horizontal	
b	Halbachse vertikal	
e	Extrentrizität	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
ε	num. Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1$
p	Halbparameter	$p = \frac{b^2}{a}$
φ	Polarwinkel bei F_1	$\varphi \notin \left[-\arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right);\ \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$
F_1, F_2	Brennpunkte	
r_1, r_2	Polabstände zu $F_{1,2}$	
g_1, g_2	Asymptoten; Steigung $\pm\frac{b}{a}$	

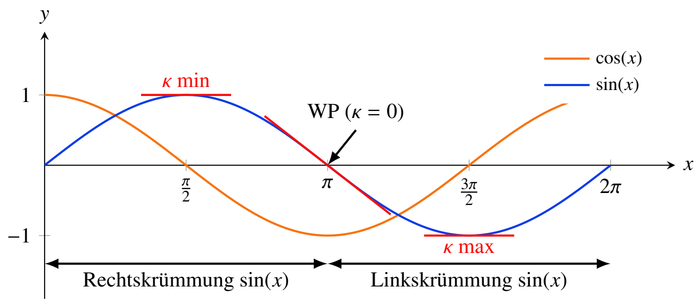
	Implizit (Achsenkreuz in O)	Paramter (Vektor) (Achsenkreuz in O)	Polar **(Achsenkreuz in F_1)**
Kurve	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cosh(t) \\ b \cdot \sinh(t) \end{pmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$; **rechter Ast**	$r(\varphi) = \frac{p}{1-\varepsilon \cdot \cos(\varphi)}$ $(\varepsilon > 1)$; **rechter Ast**

2.9 Krümmung

$$\text{Krümmung:} \quad \kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \kappa(x_0) \quad (\text{in AP } x_0;\ y_0)$$

konkav:	Rechtskurve	$f''(x) \leq 0$	$f' \downarrow$	$\kappa(x) \leq 0$
konvex:	Linkskurve	$f''(x) \geq 0$	$f' \uparrow$	$\kappa(x) \geq 0$

Wendepunkt	$\kappa = 0$ und Vorzeichenwechsel
Scheitel	κ extremal (Minimum; Maximum)
Flachpunkt	$\kappa = 0$ aber kein Vorzeichenwechsel



Extremalwerte der Krümmung

⇒ Tricks anwenden!

Maximum: simultan $\frac{\text{Zaehler max}}{\text{Nenner min}}$

Minimum: simultan $\frac{\text{Zaehler min}}{\text{Nenner max}}$

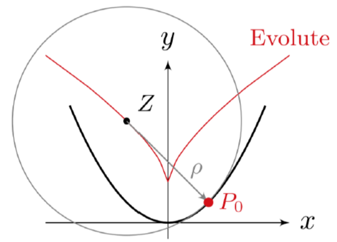
2.10 Krümmungskreis (Approximation 2. Ordnung)

2D Krümmungs**kreis** mit Radius $r = \frac{1}{|\kappa|}$ 3D Krümmungs**kugel** mit Radius $r = \frac{1}{|\kappa|}$

2.10.1 Eigenschaften des Krümmungskreises

- Krümmungskreis hat gleiche Krümmung wie Kurve in Arbeitspunkt
- Tangentenrichtung von Krümmungskreis und Kurve sind identisch
- Zentrum des Kreises liegt auf der Normalen auf der Seite von $\ddot{\vec{c}}$

2.11 Evolute (Kurve der Krümmungskreismittelpunkte) (S. 262)



- Die Evolute beschreibt die Kurve der Krümmungskreismittelpunkte
- Die Evolute erfüllt die folgende Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{\kappa}\vec{n}$$

2.11.1 Krümmungskreis-Mittelpunkt (S. 255)

Explizit	Parameter (Vektor)	Polar
$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$	$x_c(t) = x - \dot{y}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$	$x_c = r \cdot \cos(\varphi) - \frac{[r^2+\dot{r}^2]\cdot[r \cdot \cos(\varphi)+\dot{r} \cdot \sin(\varphi)]}{r^2+2\dot{r}^2-r\,\ddot{r}}$
$y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''}$	$y_c(t) = y + \dot{x}\,\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}$	$y_c = r \cdot \sin(\varphi) - \frac{[r^2+\dot{r}^2]\cdot[r \cdot \sin(\varphi)+\dot{r} \cdot \cos(\varphi)]}{r^2+2\dot{r}^2-r\,\ddot{r}}$

3 Formeln zu Kurven

3.1 Übersicht – Kurvenformeln

	Explizit	Parameter (Vektor)	Polar
Steigung	$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$	$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$	$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\dot{r}\,\sin(\varphi) + r\,\cos(\varphi)}{\dot{r}\,\cos(\varphi) - r\,\sin(\varphi)}$
2. Ableitung	$y'' = f''(x)$	$y'' = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$	
Länge	$\left\lvert \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\left\lvert \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,\mathrm{d}t \right\rvert$ (2D) $\left\lvert \int_{t_1}^{t_2} \lvert\dot{\vec{c}}(t)\rvert\,\mathrm{d}t \right\rvert$ (allg.)	$\left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Fläche zu x-Achse	$\left\lvert \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\left\lvert \int_{t_1}^{t_2} \lvert \dot{x} y \rvert\,\mathrm{d}t \right\rvert$	
Sektorfläche zum 0-Punkt	$\left\lvert \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \lvert x\dot{y} - y \rvert\,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\left\lvert \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \lvert x\dot{y} - y\dot{x} \rvert\,\mathrm{d}t \right\rvert$ (2D) $\left\lvert \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \lvert \vec{c}(t) \times \dot{\vec{c}}(t) \rvert\,\mathrm{d}t \right\rvert$ (3D)	$\left\lvert \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Volumen V_x mit Meridian	$\left\lvert \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\left\lvert \pi \int_{t_1}^{t_2} y(t)^2 \dot{x}(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \sin^2(\varphi)(\dot{r}\cos(\varphi) - r\sin(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Volumen V_y mit Meridian	$\left\lvert \pi \int_{y_1}^{y_2} f^{-1}(y)^2\,\mathrm{d}y \right\rvert$	$\left\lvert \pi \int_{t_1}^{t_2} x(t)^2 \dot{y}(t)\,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\pi \left\lvert \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 \cos^2(\varphi)(\dot{r}\sin(\varphi) + r\cos(\varphi))\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Oberfläche O_x mit Meridian	$\left\lvert 2\pi \int_a^b \lvert f(x) \rvert \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x \right\rvert$	$\left\lvert 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \lvert y(t) \rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\left\lvert 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r\,\sin(\varphi) \rvert \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Oberfläche O_y mit Meridian	$\left\lvert 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \lvert f^{-1}(y) \rvert \sqrt{1 + f^{-1\prime}(y)^2}\,\mathrm{d}y \right\rvert$	$\left\lvert 2\pi \int_{t_1}^{t_2} \lvert x(t) \rvert \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,\mathrm{d}t \right\rvert$	$\left\lvert 2\pi \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \lvert r\,\cos(\varphi) \rvert \sqrt{\dot{r}^2 + r^2}\,\mathrm{d}\varphi \right\rvert$
Krümmung κ	$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}$	$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}$ (2D) $\kappa(t) = \frac{\lvert \dot{\vec{c}}(t) \times \ddot{\vec{c}}(t) \rvert}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}^3}$ (3D)	$\kappa(\varphi) = \frac{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2}{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}^3}$
Krümmungs- kreis (R)	$R = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert} = \left\lvert \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}{f''(x)} \right\rvert$	$R = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert} = \left\lvert \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}^3}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}} \right\rvert$ (2D)	$R = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert} = \left\lvert \frac{\sqrt{\dot{r}^2 + r^2}^3}{2\dot{r}^2 - r\ddot{r} + r^2} \right\rvert$

Hinweis: $\dot{r} = -\frac{p\,\varepsilon\,\sin(\varphi)}{(1 - \varepsilon\,\cos(\varphi))^2}$ bzw. für Kardioide: $\dot{r} = a(-\sin(\varphi)) = -a\,\sin(\varphi)$ r entspricht $r(\varphi)$

3.2 Tangenten

Tangentengleichung: $y = m\,(x - x_0) + y_0$ m = Steigung ➛ Berechung gemäss Kapitel 3.1

3.2.1 Berechnung Tangentensteigung bei impliziter Kurvenformel

➛ Implizite Differentiation! **Ziel:** $f'(x) = y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

Beispiel: Kreis

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \Big\rvert\, \mathrm{d}(\ldots)\ \text{Differential}$$

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = 0 \quad \Big\rvert\, \div\,\mathrm{d}x$$

$$2x + 2y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

Beispiel: Mit Produktregel

$$y^3 = 2x^2 + 5xy \quad \Big\rvert\, \mathrm{d}(\ldots)\ \text{Differential}$$

$$3y^2\,\mathrm{d}y = 4x\,\mathrm{d}x + 5(1y + xy')\,\mathrm{d}x \quad \Big\rvert\, \div\,\mathrm{d}x$$

$$3y^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x + 5(y + xy') \;\Leftrightarrow\; 3y^2 y' = 4x + 5y + 5xy'$$

$$3y^2 y' - 5xy' = 4x + 5y \;\Leftrightarrow\; y'(3y^2 - 5x) = 4x + 5y$$

$$y' = f'(x) = \frac{4x + 5y}{3y^2 - 5x}$$

3.3 Normalen

Normale steht senkrecht zu Tangente in AP $(x_0;\,y_0)$

Normalengleichung: $y = -\frac{1}{m}(x - x_0) + y_0$

4 Sonstiges

4.1 Mittelwerte einer Funktion (S. 510)

Funktion aufgeteilt in n äquidistante Intervalle ➛ $\Delta x = \frac{b - a}{n}$

Linearer Mittelwert: $\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Quadr. Mittelwert (Effektivwert): $\sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b \lvert f(x) \rvert^2\,\mathrm{d}x}$

4.2 Integral-Umrechnung

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}x = \dot{x}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \int y(t)\,\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$$