KomFour

FS 2026 – Remo Bernhardsgrütter

Autoren: Simone Stitz, Mirko Ratti

https://gitlab.com/sstitz/komfour

V3.0.20260216

1 Komplexe Zahlen

1.1 Darstellungsformen von komplexen Zahlen

1.1.1 Normalform (kartesisch)

$$z = z_1 + \mathrm{j}z_2 \qquad z_1 = \mathrm{Re}(z) \qquad z_2 = \mathrm{Im}(z) \qquad |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

Umrechnung in Polarform:

$$r = |z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2} \qquad \varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right) & |\, z_1 \geq 0, \qquad \arccos\left(\frac{z_1}{r}\right) \,|\, z_2 \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{z_2}{z_1}\right) + \pi & |\, z_1 < 0, \quad -\arccos\left(\frac{z_1}{r}\right) \,|\, z_2 < 0 \end{cases}$$

1.1.2 Polarform / Eulerform

$$z = r \cdot \mathrm{cjs}(\varphi) = r \cdot [\cos(\varphi) + \mathrm{j}\sin(\varphi)] = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \qquad \varphi = \arg(z)$$

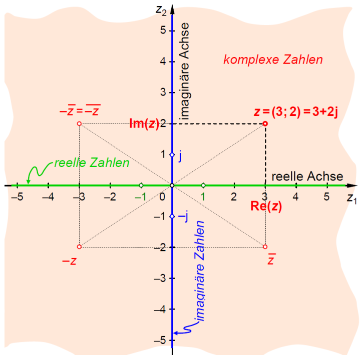
Umrechnung in Normalform (kartesisch):

$$\mathrm{Re}(z) = z_1 = |z|\cos(\varphi) \qquad \mathrm{Im}(z) = z_2 = |z|\sin(\varphi)$$

1.1.3 Wichtige Zusammenhänge

$$\mathrm{j}^2 = -1 \qquad \frac{1}{\mathrm{j}} = -\mathrm{j} \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi} = -1 \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} = \mathrm{j} \qquad \mathrm{j}^{\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \qquad |\mathrm{cjs}(\varphi)| = 1$$

1.1.4 Geometrische Aspekte von komplexen Zahlen



komplex-konjugieren:

➠ Spiegelung an **reeller** Achse

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b} \qquad \overline{a-b} = \overline{a} - \overline{b}$$
$$\overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b} \qquad \overline{a \div b} = \overline{a} \div \overline{b}$$

Multiplikation mit (−1):

➠ Punktspiegelung am Ursprung

1.2 Rechenoperationen

1.2.1 Addition / Subtraktion

Gleiches Vorgehen wie in $\mathbb{R}$ (**kartesisch**)

Addition: $(a_1 + \mathrm{j}a_2) + (b_1 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 + b_1) + \mathrm{j}(a_2 + b_2)$

Subtraktion: $(a_1 + \mathrm{j}a_2) - (b_1 + \mathrm{j}b_2) = (a_1 - b_1) + \mathrm{j}(a_2 - b_2)$

1.2.2 Multiplikation

kartesisch: $(a_1 + \mathrm{j}a_2) \cdot (b_1 + \mathrm{j}b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2) + \mathrm{j}(a_1b_2 + a_2b_1)$

polar: $a \cdot b = |a||b|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)}$

➠ Beträge multiplizieren und Argumente (Winkel) addieren

1.2.3 Division

kartesisch: $\frac{(a_1+\mathrm{j}a_2)}{(b_1+\mathrm{j}b_2)} = \frac{(a_1+\mathrm{j}a_2)(b_1-\mathrm{j}b_2)}{(b_1+\mathrm{j}b_2)(b_1-\mathrm{j}b_2)} = \frac{\text{ausmultiplizieren}}{b_1^2+b_2^2}$

polar: $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}$

➠ Beträge dividieren und Argumente (Winkel) subrahieren

Hinweis: Es gilt: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

1.2.4 Potenzieren (De Moivre)

Potenzgesetze gelten weiterhin für ganzzahlige Exponenten!

$$z^n = r^n \cdot [\cos(\alpha) + \mathrm{j}\sin(\alpha)]^n = r^n \cdot [\cos(n\alpha) + \mathrm{j}\sin(n\alpha)] \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

Mit der Formel von de Moivre können **Mehrfachwinkelformeln** aus der Trigo hergleitet werden:

$$\underbrace{[\cos(\zeta) + \mathrm{j}\sin(\zeta)]^2}_{} = \cos(2\zeta) + \mathrm{j}\sin(2\zeta)$$

$$[\cos(\zeta)]^2 + 2\cos(\zeta)\cdot\mathrm{j}\sin(\zeta) + \mathrm{j}^2[\sin(\zeta)]^2$$
$$= [\cos(\zeta)]^2 - [\sin(\zeta)]^2 + \mathrm{j}\cdot 2\sin(\zeta)\cos(\zeta)$$

$$\cos(n\alpha) = [\cos(\alpha)]^n - \binom{n}{2}[\cos(\alpha)]^{n-2}[\sin(\alpha)]^2 + \binom{n}{4}[\cos(\alpha)]^{n-4}[\sin(\alpha)]^4 - + \ldots$$

$$\sin(n\alpha) = \binom{n}{1}[\cos(\alpha)]^{n-1}\sin(\alpha) - \binom{n}{3}[\cos(\alpha)]^{n-3}[\sin(\alpha)]^3 + - \ldots$$

1.2.5 Wurzel ziehen (Radizieren)

Die Wurzelgesetze gelten in den komplexen Zahlen NICHT!

Die n-te Wurzel einer (komplexen) Zahl hat ***n* Lösungen**, angeordnet in einem regelmässigen n-Eck um den Ursprung.

$$z^n = a \qquad |z| = \sqrt[n]{|a|} \qquad \arg(z) = \frac{\arg(a)}{n}$$

Beispiel: $\sqrt[4]{-16}$ $\quad (z^n = a = -16)$

$$|z| = |z_i| = \sqrt[n]{|a|} = \sqrt[4]{16} = 2$$

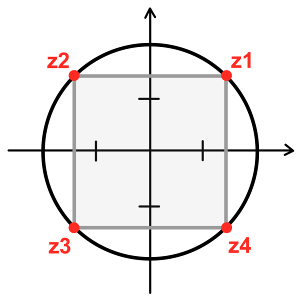
$|z_i| = \sqrt[4]{16} = 2$

$\arg(z_1) = \frac{\arg(a)}{n} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

$\arg(z_2) = 45^\circ + \frac{360^\circ}{4} = 135^\circ$

$\arg(z_3) = 135^\circ + 90^\circ = 225^\circ$

$\arg(z_4) = 225^\circ + 90^\circ = 315^\circ$



$z_1 = \sqrt{2} + \mathrm{j}\sqrt{2} \qquad z_2 = -\sqrt{2} + \mathrm{j}\sqrt{2}$

$z_3 = -\sqrt{2} - \mathrm{j}\sqrt{2} \qquad z_4 = \sqrt{2} - \mathrm{j}\sqrt{2}$

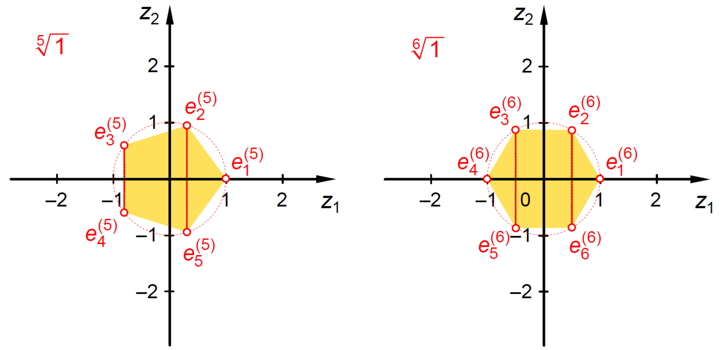
$$z = r \cdot \mathrm{e}^{\varphi\mathrm{j}} \rightarrow z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = \{\sqrt[n]{z} \cdot \mathrm{e}^{\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\cdot\mathrm{j}} \quad | k \in \mathbb{N} \;\;\&\;\; k > n\}$$

Einheitswurzel $\sqrt[n]{1}$:

Durch Multiplikation mit der n-ten Einheitswurzel erreicht man eine reine Drehung um $\frac{360}{n}$ Grad im **Gegenuhrzeigersinn**.

Achtung! Die erste Lösung von $\sqrt[n]{1}$ ist immer die reelle Zahl 1

➠ nächste Lösung verwenden!



1.2.6 Komplexwertige Exponentialfunktion

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z_1+\mathrm{j}z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{cjs}(z_2)$$

➠ Die Exponentialfunktion ist $2\pi\,\mathrm{j}$-periodisch (auf imaginärer Achse)

Exponentialgesetze:

Die Exponentialgesetze bleiben in $\mathbb{C}$ für ganzzahlige Exponenten erhalten!

$\mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b} \qquad \mathrm{e}^a : \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a-b} \qquad a,\ b \in \mathbb{C}$

$(\mathrm{e}^a)^k = \mathrm{e}^{ka} \qquad k \in \mathbb{Z}$

Beispiel: Exponentialfunktion

- $\mathrm{e}^z = e^{1-\frac{\pi}{2}\mathrm{j}} = \mathrm{e}^1 \cdot \mathrm{cjs}(-\frac{\pi}{2}) = \mathrm{e} \cdot (-\mathrm{j}) = -2.781\,\mathrm{j}$
- $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\ln(2)+3\pi\mathrm{j}} = \mathrm{e}^{\ln(2)} \cdot \mathrm{cjs}(3\pi) = 2 \cdot \mathrm{cjs}(\pi) = -2$

1.2.7 Komplexwertige Logarithmusfunktion

Ehemalige Log-Gesetze sind nur noch Kongruenzgesetze!

$$\mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + \mathrm{j}\arg(z) \qquad (z \in \mathbb{C},\ z \neq 0)$$

➠ Die Exponentialfunktion ist $2\pi\,\mathrm{j}$-periodisch (wie komplexe Exponentialfunktion)

1.2.8 Allgemeine Potenzfunktion

Es existieren keine Potenz- oder Kongruenzgesetze!

$$a^b = \mathrm{e}^{b \cdot \mathrm{Ln}(a)} \qquad (a,\ b \in \mathbb{C},\ a \neq 0)$$

1.2.9 Komplexwertige Trigonometrische Funktionen

$$\sin(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{2\mathrm{j}} \qquad \cos(z) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}z}}{2} \qquad \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

1.3 Polynome (vgl. Radizieren)

Alle Nullstellen des Polynoms $p(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_0$ liegen in der Gauss'schen Zahlenebene in einer Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius $\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{a_k}{a_n}\right|$

Für Gleichungen vom Grad ≥ 5 existieren **keine** nur aus den 4 Grundoperationen und Wurzeln zusammengesetzten Lösungsformeln.

1.3.1 Polynome mit Koeffizienten $\in \mathbb{C}$

Wichtige Eigenschaften von komplexen **und** reellen Polynomen:

1. Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 hat in $\mathbb{C}$ mindestens eine Nullstelle
2. Ein komplexes Polynom vom Grad n zerfällt in $\mathbb{C}$ in lauter Linearfaktoren. Die Faktoren müssen **nicht** verschieden sein. Die Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge eindeutig.
   Beispiel: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \xrightarrow{\text{umformen}} a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \ \ldots \ \cdot (z - z_n)$
3. Vielfachheit: Ein komplexes Polynom vom Grad n hat in $\mathbb{C}$ genau n (verschiedene) Nullstellen, wenn diese mit ihrer Vielfachheit gezählt werden

Tipps und Tricks für Lösung von $p(z) = 0$:

Methode	Beispiel für Anwendung
Mitternachtsformel	$p(z) = z^2 + (5 - 4\,\mathrm{j})z + (3 - 11\,\mathrm{j})$
Wurzel ziehen	$p(z) = z^3 - 8\,\mathrm{j} \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = 8\,\mathrm{j}$
ausklammern	$p(z) = 1z^3 + \mathrm{j}z^2 + 4z + 4\,\mathrm{j} = z^2(z + \mathrm{j}) + 4(z + \mathrm{j})$
3. Binom	$(z^2 + 4) = (z^2 - (-4)) = (z^2 - (2\,\mathrm{j})^2)$
2. Binom	$(z^4 - 4\,\mathrm{j}z^2 - 4) = (z^4 - 4\,\mathrm{j}z^2 + 4\,\mathrm{j}^2) = (z^2 - 2\,\mathrm{j})^2$
NS abspalten	Polynomdivision: $p(z) : (z - z_0)$ mit $z_0 = \mathrm{NS}$

1.3.2 Spezialfall: Polynome mit Koeffizienten $\in \mathbb{R}$

Wichtige Eigenschaften von **reellen** Polynomen:

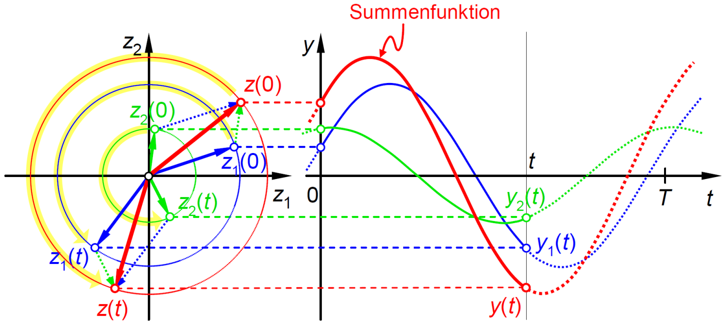
1. Nicht-reelle Nullstellen treten immer als konjugiert-komplexe Paare mit gleicher Vielfachheit auf
2. Im reellen zerfällt $p(z)$ in (reelle) Linearfaktoren und nicht weiter zerlegbare quadratische Faktoren
   Beispiel: $(z - z_0) \cdot (z - \overline{z_0}) \xrightarrow{\text{quadratischer reller Faktor}} (z^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_0) \cdot z + |z_0|^2)$
3. Ein Polynom mit reellen Koeffizienten von **un**geradem Grad hat mindestens eine reelle Nullstelle

Hinweis:
Wenn man eine (komplexe) Nullstelle z_0 des reellen Polynoms kennt, so kennt man auch die Nullstelle $\overline{z_0}$
Man muss nun **beide Nullstellen** bzw. ein **reelles quadratisches Polynom** von $p(z)$ abspalten!

1.4 Überlagerung von sinusförmigen Schwingungen

Darstellung einer Schwingung: $A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ entspricht **Imaginärteil** von $A \cdot [\cos(\omega t + \varphi) + \mathrm{j}\sin(\omega t + \varphi)] = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}$



Komplexe Amplitude $z_i(0)$	$z_i(0) = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}$	(zeitunabhängig)
'Schwingung' / 'Rotation'	$z(t) = A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)} = \underbrace{A \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}_{z_i(0)} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$	(zeitabhängig)

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen ($z(t) = z_1(t) + z_2(t)$):
Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen entspricht grafischer Addition der beiden 'Zeiger' zu jedem Zeitpunkt.

reelle Amplitude:	$A = \lvert A_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}\rvert$	(Betrag)
Nullphasenwinkel	$\varphi_0 = \arg(A_1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} + A_2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2})$	(Winkel)

2 Komplexe Funktionen (Abbildungen)

$$f : \mathbb{D}_f \subseteq \mathbb{C} \;\rightarrow\; \mathbb{W}_f \subseteq \mathbb{C},\; z \mapsto w = f(z)$$

- Winkeltreue für komplex differenzierbare Funktion mit $f'(z) \neq 0$
  ➛ Drehstreckung mit Drehwinkel $\arg[f'(z)]$ und Streckfaktor $|f'(z)|$
- Die Ableitung $f'(z)$ beschreibt, was lokal im Punkt z passiert
  ➛ Streckfaktor und Drehwinkel im Punkt z
  Beispiel: $f'(z) = \frac{1}{2}\,\mathrm{j}$ ➛ Steckung um $\frac{1}{2}$ und Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$

2.0.1 Parametergleichung von Bildkurven

Parametergleichung einer Bildgeraden kann **immer** ermittelt werden!

waagerechte Gerade:	$z = z(r) = r + \mathrm{j}c_2$	mit $r \in \mathbb{R}$
senkrechte Gerade:	$z = z(r) = c_1 + \mathrm{j}s$	mit $r \in \mathbb{R}$

➛ in $w = f(z)$ so einsetzen und ausrechnen / vereinfachen
➛ Beispiel-Resultat: $w = (r^2 - c^2) + \mathrm{j}2rc$

2.0.2 Koordinatengleichung von Bildkurven

Kann nur bei **einfachen** Parametergleichungen ermittelt werden!
Vorgehen: In GlSys Parameter r eliminieren

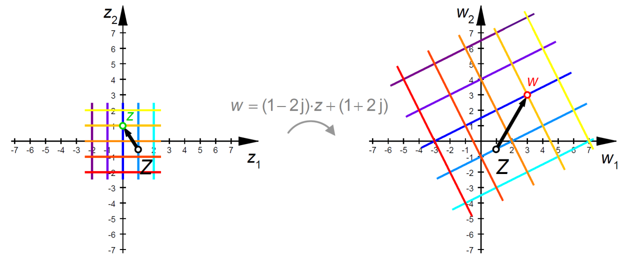
Beispiel: Koordinatengleichung von $w = (r^2 - c^2) + \mathrm{j}2rc$

$\left| \begin{array}{l} w_1 = r^2 - c^2 \\ w_2 = 2rc \end{array} \right|$ $\qquad r = \frac{w_2}{2c}$ ➛ einsetzen in w_1 $\qquad w_1 = \frac{w_2^2}{(2c)^2} - c^2$

2.1 Lineare Funktion

$$f : z \mapsto w = f(z) = az + b \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{C} \text{ und } a \neq 0$$

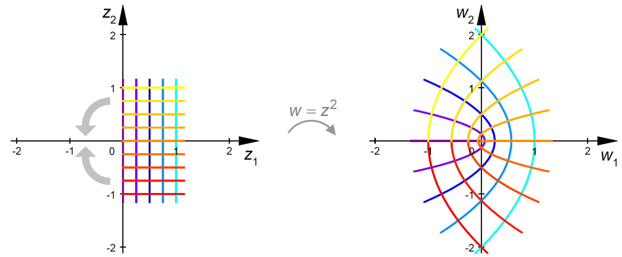
- für $a = 1$ eine Translation um den Ortsvektor $\vec{b}$
- für $a \neq 1$ eine Drehstreckung mit Zentrum $\frac{b}{1-a}$, dem Drehwinkel $\arg(a)$ und dem Streckfaktor $|a|$



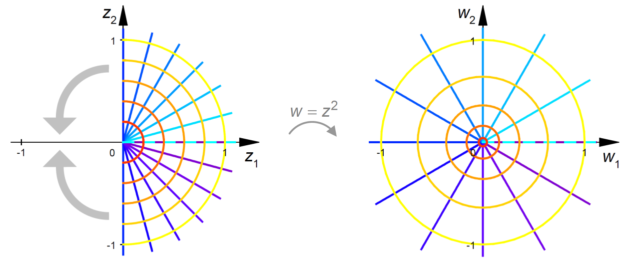
2.2 Quadratfunktion / Wurzelfunktion

$f(z) = z^2$	Verdoppelung des Winkels $\arg(z)$ und Quadrierung des Abstandes zum Ursprung $|z|^2$
$f(z) = \sqrt{w}$	Halbierung des Winkels $\arg(z)$ und (relle) Wurzel des Abstandes zum Ursprung $|z|$

Quadratfunktion (kartesische Koordinaten):



Quadratfunktion / Wurzelfunktion (Polarkoordinaten):



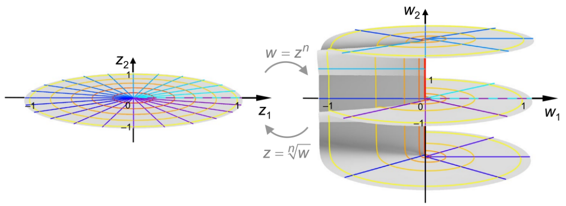
2.2.1 Eigenschaften der Quadrat- und Wurzelfunktion

- rechte Hälfte der z-Ebene wird schon auf ganze w-Ebene abgebildet
- Doppelwertig, wenn linke Hälfte auch noch abgebildet wird
- bijektiv, bei 2-blättriger Riemann'scher Fläche
- Quadratfunktion überall winkeltreu ausser im Ursprung, weil dort $f'(z) = 2z = 0$
- Wurzelfunktion überall winkeltreu ausser im Ursprung, weil $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$ nicht definiert

2.3 Potenzfunktion / Wurzelfunktion

$f(z) = z^n$ — n-facher Winkel von $\arg(z)$ und Abstand $|z|^n$ zum Ursprung

$f(z) = \sqrt[n]{w}$ — n-ter Teil des Winkels $\arg(z)$ und (relle) n-te Wurzel des Abstandes zum Ursprung $|z|$



2.3.1 Eigenschaften der Potenz- und Wurzelfunktion

- bijektiv, bei n-blättriger Riemann'scher Fläche
- Beide Funktionen überall winkeltreu ausser im Ursprung

2.4 Kreisspiegelung

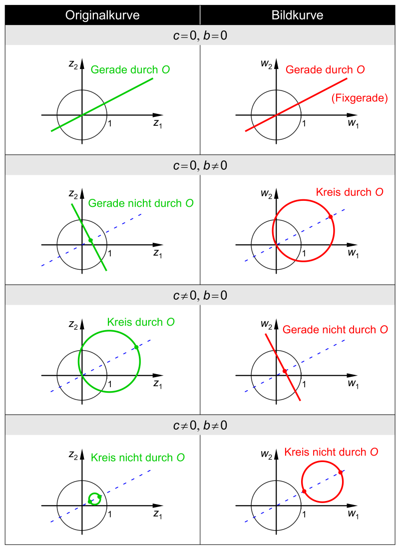
$$f: z \mapsto w = \frac{1}{\bar{z}}$$

Abstand: $|w| = \frac{1}{|z|}$ Winkel: $\arg(w) = \arg(z)$

2.4.1 Eigenschaften der Kreisspiegelung

- bijektiv auf $\mathbb{C} \cap \{\infty\}$
- winkeltreu (bis auf das Vorzeichen)
- Geraden / Kreise gehen in Geraden / Kreise über
- Einheitskreis ist ein **Fixpunktkreis**
- Rand eines Kreises geht in den Rand des Bildkreises über

2.4.2 Vorgehen Bildkurve / Bildfläche zeichnen



1. Ist Bild eine Gerade oder ein Kreis?
2. Gibt es Fixpunkte? (Einheitskreis)
3. Abstand zu Ursprung auf Strahl reziprok
4. Symmetrien beachten
5. Fläche schraffieren: geeigneten Punkt aus Originalfläche abbilden

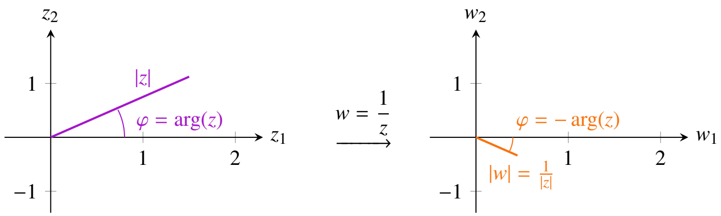
Hinweis: Bei Bedarf Originalkurve in Kreise und Geraden zerlegen!

2.5 Kehrwertfunktion

$$f: z \mapsto w = \frac{1}{z}$$

Abstand: $|w| = \frac{1}{|z|}$ Winkel: $\arg(w) = -\arg(z)$

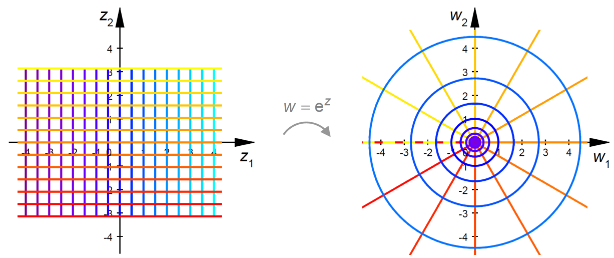
➠ **Grosse Ähnlichkeit zur Kreisspiegelung!**



2.6 Exponentialfunktion / Logarithmusfunktion

$$e^z = e^{z_1} \cdot e^{j z_2} = e^{z_1}\, \mathrm{cjs}(z_2) \qquad \mathrm{Ln}(z) = \ln(|z|) + j \arg(z)$$

➠ Der Nullpunkt (Ursprung) wird **nicht** abgebildet!



- Horizontale Geraden: Stahlen von Ursprung weg
- Vertikale Geraden: Kreise um Ursprung

2.6.1 Eigenschaften der Exponential- und Logarithmusfunktion

- bijektiv, bei ∞-blättriger Riemann'scher Fläche ($2\pi j$-periodisch) ausser im Punkt 0 (weil $e^z \neq 0$)
- Exponentialfunktion e^z überall winkeltreu
- Umkehrfunktion $\mathrm{Ln}(w)$ überall in $\mathbb{D}_f$ winkeltreu ($\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

2.7 Möbisutransformation

Die Möbiustransformation ist eine veralgemeinerung der Kehrwertsfunktion:

$$f(z) = w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad \text{Umkehrfunktion: } f(w) = z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

$a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$ & $ad - bc \neq 0$ ➠ sonst wäre f konstant

$$f: \mathbf{z} \xrightarrow[\text{lineare Funktion}]{u = cz + d} \mathbf{u} \xrightarrow[\text{Kehrwertfunktion}]{v = \frac{1}{u}} v \xrightarrow[\text{lineare Funktion}]{w = \frac{bc - ad}{c} v + \frac{a}{d}} \mathbf{w}$$

2.7.1 Eigenschaften der Möbiustransformation

- Die Möbiustransformation ist winkel- und kreistreu
- Die Umkehrfunktion ist wieder eine Möbiustransformation
  Achtung: Es sind nur 3 Parameter! ➠ ein Parameter kann gekürtzt werden

3 Fourierreihen periodischer Funktionen

Darstellung einer **periodischen** Funktion $f(t)$ mit Periodendauer $T > 0$ durch eine Linearkombination von Sinus- und Kosinusfunktionen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Kreisfrequenz (Winkelgeschwindigkeit) $\omega_f = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ sind.

Hinweis: In blau ist jeweils die komplexe Fourier-Theorie abgebildet.

$$\mathrm{FR}[f(t)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot \cos(n\,\omega_f\, t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_f\, t)]$$

$$\mathrm{FR}[f(t)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k \cdot e^{j k \omega_f t})$$

3.1 Orthagonalitätsbeziehungen Basisfunktionen

$$\int_0^T \cos(m\,\omega_f\, t) \cdot \cos(n\,\omega_f\, t)\, dt = \begin{cases} T, & m = n = 0 \\ \frac{T}{2}, & m = n > 0 \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (m,\ n \in \mathbb{N}_0)$$

$$\int_0^T \sin(m\,\omega_f\, t) \cdot \sin(n\,\omega_f\, t)\, dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \qquad (m,\ n \in \mathbb{N})$$

$$\int_0^T \cos(m\,\omega_f\, t) \cdot \sin(n\,\omega_f\, t)\, dt = 0 \qquad (m \in \mathbb{N}_0,\ n \in \mathbb{N})$$

3.2 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$\frac{a_0}{2}$ entspricht dem Mittelwert (Gleichstromanteil) der Funktion $f(t)$ auf dem Intervall [0 ; T)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\,\omega_f\, t)\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\,\omega_f\, t)\, dt \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-j n \omega_f t}\, dt \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad ➠ \text{Für } n = 0: \ c_0 = \frac{a_0}{2}$$

➠ Trigo-Produkte in Integralen in SUMMEN umwandeln!!

3.2.1 Umrechnung der Fourierkoeffizienten

$$c_n = \overline{c_{-n}} = \frac{a_n - j b_n}{2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots \text{ wobei } b_0 = 0)$$

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}(c_n) = c_n + c_{-n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_n = -2\,\mathrm{Im}(c_n) = j(c_n - c_{-n}) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

3.3 Sätze zur Berechnung der Koeffizienten

3.3.1 Symmetrie von Funktionen

	gerade	ungerade
gerade	gerade	ungerade
ungerade	ungerade	gerade

gerade: $f(-t) = f(t)$

ungerade: $f(-t) = -f(t)$

$f(t)$ gerade $\quad b_n = 0 \quad a_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos(n\,\omega_f\,t)\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{Im}(c_k) = 0 \quad c_n = \frac{a_n}{2}$ (reell)

$f(t)$ ungerade $\quad a_n = 0 \quad b_n = \frac{4}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \sin(n\,\omega_f\,t)\,\mathrm{d}t$

$\mathrm{Re}(c_k) = 0 \quad c_n = \mathrm{j}\frac{b_n}{2}$ (imaginär)

3.3.2 Linearität

$f(x)$ mit Koeffizienten $a_n^{(f)}$, $b_n^{(f)}$ $\qquad g(x)$ mit Koeffizienten $a_n^{(g)}$, $b_n^{(g)}$

➨ $h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)$ mit festem $s,\ r \in \mathbb{R}$

$$a_n^{(h)} = r \cdot a_n^{(f)} + s \cdot a_n^{(g)} \qquad b_n^{(h)} = r \cdot b_n^{(f)} + s \cdot b_n^{(g)}$$

3.3.3 Zeitstreckung / -stauchung / -spiegelung ("Ähnlichkeit")

$g(t) = f(r \cdot t)$ mit $0 \neq r \in \mathbb{R}$ $\qquad \omega_g = \frac{2\pi}{T_g}$ in Basisfunktionen!

$$a_n^{(g)} = a_n^{(f)} \qquad b_n^{(g)} = \mathrm{sgn}(r) \cdot b_n^{(f)}$$

3.3.4 Zeitverschiebung

$g(t) = f(t + t_0)$

$a_n^{(g)} = \cos(n\,\omega_f\,t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\,\omega_f\,t_0) \cdot b_n^{(f)} \qquad n = 0 \quad [\text{mit } b_0 = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots]$

$b_n^{(g)} = -\sin(n\,\omega_f\,t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\,\omega_f\,t_0) \cdot b_n^{(f)} \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

$c_k^{(g)} = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k\,\omega_f\,t_0} \cdot c_k^{(f)} \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

3.4 Konvergenzverhalten von Fourierreihen

3.4.1 Optimalität der Fourierreihe

Abstand zwischen zwei Funktionen zeigt, wie gut die Approximation der Funktion ist
➨ f und g sind T-periodisch und stückweise stetig mit Limes

$$\|f - g\| = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^T [f(t) - g(t)]^2\,\mathrm{d}t}$$

➨ Fourier-Reihe approximiert eine Funktion am Besten!

mittlere quadrierte Abweichung: $\frac{T}{2}\|f - g\|^2$

3.4.2 Bessel'sche Ungleichung

unendlich-dimensionaler Satz von Pythagoras

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{2}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t = \|f\|^2$$

3.4.3 Satz von Parseval

unendlich-dimensionaler Satz von Pythagoras ➨ Summe der Quadrate ist beschränkt

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{2}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t = \|f\|^2$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T}\int_0^T [f(t)]^2\,\mathrm{d}t$$

3.4.4 Konvergenz im Mittel

Jede Funktion f kann durch eine abbrechende Fourierreihe bezüglich ihres Abstandes beliebig genau approximiert werden. Die Fläche zwischen Approximation und Funktion geht gegen 0 $\quad \|s_m(t) - f(t)\| \searrow 0$

➨ Das heisst nicht, dass man überall absolute Übereinstimmung hat!

$$\lim_{m \to 0} \left\| \sum_{n=1}^{m} [a_n \cdot \cos(n\,\omega_f\,t) + b_n \cdot \sin(n\,\omega_f\,t)] - f(t) \right\| = 0$$

$$\lim_{m \to 0} \left\| \sum_{k=-m}^{m} (c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,k\,\omega_f\,t}) - f(t) \right\| = 0$$

3.4.5 Konvergenz der Fourierkoeffizienten

Die Fourierkoeffizienten bilden Nullfolgen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \cos(n\,\omega_f\,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{T}\int_0^T f(t) \cdot \sin(n\,\omega_f\,t)\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \overline{c_{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,n\,\omega_f\,t}\,\mathrm{d}t = 0$$

3.4.6 Konvergenzgeschwindigkeit der Fourierkoeffizienten

Ist die T-periodische Funktion f $(m-2)$-mal stetig differenzierbar und ihre $(m-1)$-ste Ableitung stückweise stetig mit Limes und stückweise monoton, so existiert eine (nur von f abhängige) Konstante $\in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n| \leq \frac{c}{n^m} \quad \text{und} \quad |b_n| \leq \frac{c}{n^m} \quad (m,\ n \in \mathbb{N})$$

3.4.7 Punktweise Konvergenz (Satz von Dirichlet)

Wenn die linksseitige $f(t_0 - 0)$ **und** die rechtsseitige Ableitung $f(t_0 + 0)$ existieren, dann konvergiert die Fourierreihe gegen:

$$\frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2} \qquad \text{(Mitte einer Sprungstelle)}$$

Ist die Funktion in t_0 **stetig** und die beidseitigen Ableitungen existieren, dann konvergiert die Fourierreihe gegen:

$$\frac{f(t_0 - 0) + f(t_0 + 0)}{2} = \frac{f(t_0) + f(t_0)}{2} = f(t_0) \qquad \text{(Funktionswert)}$$

Hinweis: Der Satz von Dirichlet wird gebraucht, um aus Fourier-Koeffizienten Reihen darzustellen.

➨ **Passende Entwicklungsstelle t_0 verwenden!**

3.5 Summenberechnung S mit Fourierreihe

Die Summenberechnung soll anhand eines Beispiels erklärt werden.

Beispiel: Summenberechnung mit Fourierreihe

Aus der gegebenen Fourierreihe FR[sin(t)] soll die Summe S berechnet werden:

$$FR[\sin(t)] = \frac{1}{2\pi} + \frac{15}{5\pi} * \cos(t) + \frac{13}{2\pi} * \sin(t) + \frac{15}{7\pi} * \cos(t) + \ldots$$

$$S = \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots$$

In der Fourierreihe FR[sin(t)] soll t so gewählt werden, dass die Schwingungen wegfallen und die Koeffizienten möglichst der Summe ähneln.
➨ Wähle $t = 0$, sodass übrig bleibt:

$$\underbrace{\frac{1}{2\pi} + \frac{15}{5\pi} + \frac{15}{7\pi} + \ldots}_{Q} = \sin(0) = 0$$

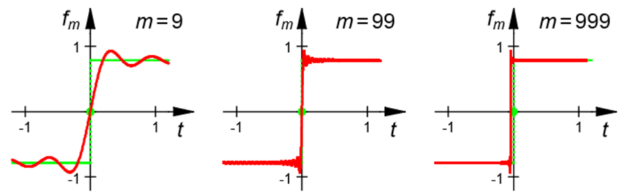
Dies entspricht noch nicht der gesuchten Summe S. Es ist eine **Umformung** nötig:

$$Q * \frac{\pi}{15} = \frac{1}{30} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots}_{S} \quad \xrightarrow{\text{auflösen nach } S} \quad \boldsymbol{S = -\frac{1}{30}}$$

3.6 Gibbs'sches Phänomen

Fourierreihen überschwingen bei Sprungstellen um 8.94 %

➨ Je mehr Summanden in der Fourierreihe sind, desto kleiner ist der Effekt dieser Überschwinger!

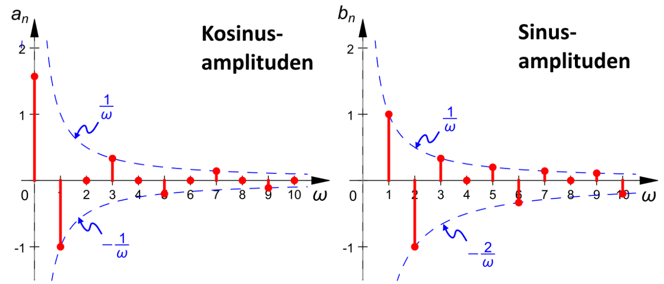


4 Spektren

4.1 Spektraldarstellungen

4.1.1 Kosinus- und Sinus-Amplitudendiagramm

Koeffizienten a_n und b_n als Stabdiagramm

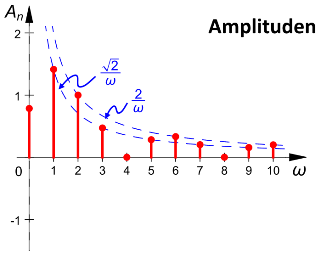


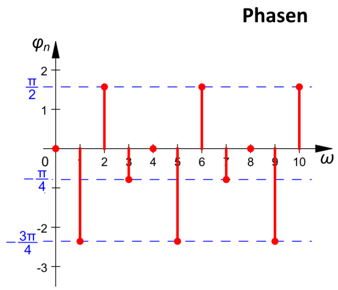
4.1.2 Einseitiges Amplituden-/ Phasendiagramm

Schwingung ist Summe aus zwei phasenverschobenen Kosinusschwingungen (Hat nicht zwingend Ähnlichkeit zum Amplitudendiagramm.)

A_n und φ_n ➛ Addition der komplexen Amplituden

$$A_n = |a_n - jb_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
$$\varphi_n = \arg(a_n - jb_n) \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$
$$A_0 = \left|\frac{a_0}{2}\right| \qquad \varphi_0 = \arg(a_0 - jb_0) = \arg(a_0)$$





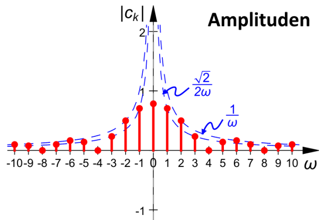
4.1.3 Zweiseitiges Amplituden-/ Phasendiagramm (komplex)

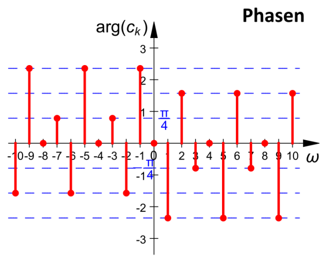
Zwei Diagramme für Betrag $|c_k|$ und Winkel $\arg(c_k)$ in jedem Punkt.
➛ Das einseitige Amplitudendiagramm auf zwei Seiten aufgeteilt!

$c_k = 0$	➛	$\arg(c_k) = 0$
$\|c_k\| = \|c_{-k}\|$		gerade (achsensymmetrisch)
$\arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$		ungerade (punktsymmetrisch)

$$A_n = |a_n - jb_n| = |2c_n| = 2|c_n| \qquad \varphi_n = \arg(a_n - jb_n) = \arg(2c_n) = 2\arg(c_n)$$
$$\Rightarrow c_k = \frac{A_n}{2} \qquad \Rightarrow \arg(c_n) = \frac{\arg(A_n)}{2}$$

➛ **Ausnahme: $|c_0| = A_0$**



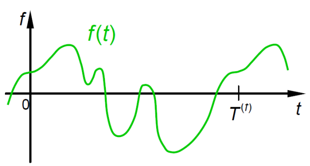


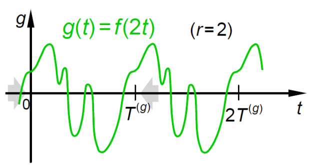
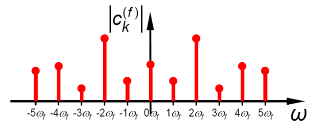
4.2 Zeit- und Frequenzbereich

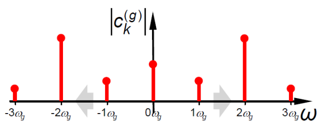
Zeitbereich:	Aussagen über Funktion
Frequenzbereich:	Aussagen über Spektrum
Fourier-Analyse:	aus Funktion $f(t)$ die Fourier-Reihe bilden
Fourier-Synthese:	Aus Spektrum Fourier-Reihe (und somit $f(t)$) finden

Legende für folgenden Bilder:

1. Sinus- / Kosinusamplitudendiagramm
2. Einseitiges Amplituden- / Phasendiagramm
3. Zweiseitiges Amplituden- / Phasendiagramm

<table>
<tr><th>Aussage im Zeitbereich</th><th>Aussage im Frequenzbereich</th></tr>
<tr><td>Funktion f gerade
$[\,f(-t) = f(t)\,]$</td><td>①: Sinusphasendiagramm überall 0.
②, ③: In den Phasendiagrammen kommen nur die Werte 0 oder π vor.</td></tr>
<tr><td>Funktion f ungerade
$[\,f(-t) = -f(t)\,]$</td><td>①: Kosinusphasendiagramm überall 0.
②, ③: In den Phasendiagrammen kommen nur die Werte $\pm\frac{\pi}{2}$ vor (oder 0, falls der zugehörige Amplitudenwert $=0$ ist).</td></tr>
<tr><td>Überlagerung $h(t) = r \cdot f(t) + s \cdot g(t)$</td><td>①: Für die entsprechenden Säulenhöhen gilt die analoge Gleichung.
②, ③: Keine Aussage möglich [wohl aber für den Koeffizient $c_k^{(h)}$ selbst: $c_k^{(h)} = r \cdot c_k^{(f)} + s \cdot c_k^{(g)}$].</td></tr>
<tr><td>Zeitverschiebung $g(t) = f(t + t_0)$</td><td>①: Für $n = 0, 1, 2, \ldots$ bzw. $n = 1, 2, \ldots$
$a_n^{(g)} = \cos(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \sin(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)}$,
$b_n^{(g)} = -\sin(n\omega_f t_0) \cdot a_n^{(f)} + \cos(n\omega_f t_0) \cdot b_n^{(f)}$.
②, ③: Das Amplitudendiagramm ist für f und g identisch. Die zur Frequenz $k\omega_f$ gehörige Säule des Phasendiagramms von g wächst um $k\omega_f t_0$ (mod 2π).</td></tr>
<tr><td>Ähnlichkeit $g(t) = f(r \cdot t)$
[der Graph von g ist der mit Faktor r gestauchte Graph von f]



</td><td>① – ③: Das Spektrum von g ist das horizontal mit dem Faktor r gestreckte Spektrum von f.


(Phasendiagramm entsprechend)


(Phasendiagramm entsprechend)</td></tr>
</table>

4.2.1 (Periodisches) Weisses Rauschen

Überlagerung von Schwingungen aller möglicher Frequenzen mit gleicher Amplitude und zufälliger Phase

5 Mathematische Grundlagen

5.1 Trigonometrie

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sin(α)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos(α)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(α)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot(α)	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\pm\infty$

5.1.1 Beziehungen zwischen sin(x) und cos(x)

$$\sin(-a) = -\sin(a) \qquad \cos(-a) = \cos(a)$$
$$\sin(\pi - a) = \sin(a) \qquad \cos(\pi - a) = -\cos(a)$$
$$\sin(\pi + a) = -\sin(a) \qquad \cos(\pi + a) = -\cos(a)$$
$$\sin\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a) \qquad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - a\right) = -\cos\left(\tfrac{\pi}{2} + a\right) = \sin(a)$$

5.1.2 Additionstheoreme

$$\sin(a \pm b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \pm \cos(a) \cdot \sin(b)$$
$$\cos(a \pm b) = \cos(a) \cdot \cos(b) \mp \sin(a) \cdot \sin(b)$$
$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan(a) \pm \tan(b)}{1 \mp \tan(a) \cdot \tan(b)}$$

5.1.3 Summen und Differenzen

$$\sin(a) + \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$
$$\sin(a) - \sin(b) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$$
$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cdot \cos\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \cdot \cos\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$
$$\cos(a) - \cos(b) = -2 \cdot \sin\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{a-b}{2}\right)$$
$$\tan(a) \pm \tan(b) = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a) \cdot \cos(b)}$$

5.1.4 Produkte

$$\sin(a) \cdot \sin(b) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\cos(a) \cdot \cos(b) = \tfrac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin(a) \cdot \cos(b) = \tfrac{1}{2}\big(\sin(a-b) + \sin(a+b)\big)$$

5.1.5 Winkelvielfache und Halbwinkel

$$\sin(2a) = 2\sin(a) \cdot \cos(a)$$
$$\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$$
$$\sin(4a) = 8\cos^3(a) \cdot \sin(a) - 4\cos(a) \cdot \sin(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$
$$\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$$
$$\cos(4a) = 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1$$

$$\sin\left(\tfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \cos(a))} \qquad \cos\left(\tfrac{a}{2}\right) = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 + \cos(a))}$$

5.1.6 Potenzen

$$\sin^2(a) = \tfrac{1}{2}(1 - \cos(2a)) \qquad \cos^2(a) = \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2a))$$
$$\sin^3(a) = \tfrac{1}{4}(3\sin(a) - \sin(3a)) \qquad \cos^3(a) = \tfrac{1}{4}(\cos(3a) + 3\cos(a))$$
$$\sin^4(a) = \tfrac{1}{8}(\cos(4a) - 4\cos(2a) + 3) \qquad \cos^4(a) = \tfrac{1}{8}(\cos(4a) + 4\cos(2a) + 3)$$

5.2 Exponentialgesetze (reell)

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$ $\quad \frac{a^x}{b^x} = (\frac{a}{b})^x$

5.3 Logarithmen-Gesetze (reell)

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$ $\quad \log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$ $\quad \log_b(r) = \frac{\log_a(r)}{\log_a(b)}$

5.4 Diverse Formeln

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$$

$$r^2 = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{reell}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

5.5 Transformationen von Funktionen

1. Streckung um $\frac{1}{a}$ in x-Richtung $\quad y = f(a \cdot x)$
   Spiegelung an y-Achse bei $\boldsymbol{-a}$
2. Verschiebung nach links ($\boldsymbol{+b}$) oder rechts ($\boldsymbol{-b}$) $\quad y = f(x \pm b)$
3. Streckung um $\boldsymbol{c}$ in y-Richtung $\quad y = c \cdot f(x)$
   Spiegelung an x-Achse bei $\boldsymbol{-c}$
4. Verschiebung nach oben ($\boldsymbol{+d}$) oder unten ($\boldsymbol{-d}$) $\quad y = f(x) \pm d$

5.6 Integraltionsregeln

5.6.1 Linearität

$$\int_a^b \alpha f(x)\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

5.6.2 Elementartransformation

$$\int f(\alpha x + \beta)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta)$$

5.6.3 Partielle Integration (Produktregel)

$$\int f' \cdot g\, \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f \cdot g'\, \mathrm{d}x \qquad \int f \cdot g'\, \mathrm{d}x = f \cdot g - \int f' \cdot g\, \mathrm{d}x$$

➠ Partielle Integration darf mehrfach angewendet werden.
PI sollte wenn möglich vermieden werden! Produkte in Summen umschreiben!

5.6.4 Substitution

$$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, \mathrm{d}t$$ ➠ siehe Beispiel

Integrationsgrenzen anpassen! (ev. mit Umkehrfunktion)

Beispiel: Substitution

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3 \cdot \cos(x^2)\, \mathrm{d}x$$

Substitution: $a = x^2$ **auch auf Grenzen anwenden!**

$\mathrm{d}a = 2\,x \cdot\, \mathrm{d}x \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}a}{2x} = \frac{\mathrm{d}a}{2\sqrt{a}}$

$$\int_0^{\pi} a\, \sqrt{a} \cdot \cos(a) \frac{\mathrm{d}a}{2\sqrt{a}} = \int_0^{\pi} a\, \sqrt{a} \cdot \cos(a)\, \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{a}}\, \mathrm{d}a = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a \cdot \cos(a)\, \mathrm{d}a = \ldots$$

5.6.5 Spezielle Regeln (Faktor in Integral = Ableitung)

Allg. Potenzregel $\quad \int f'(x) \cdot f(x)^\alpha\, \mathrm{d}x = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

Allg. Log-Regel $\quad \int f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\, \mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x = \ln(|f(x)|) + C$

Allg. Exp-Regel $\quad \int f'(x) \cdot \mathrm{e}^{f(x)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{f(x)} + C$

5.7 Wichtige Integrale

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	**Bedingung**
$\sin(n\,x)$	$-\frac{\cos(n\,x)}{n}$	$(n \neq 0)$
$\cos(n\,x)$	$\frac{\sin(n\,x)}{n}$	$(n \neq 0)$
$\mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_f t}$	$\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_f t}}{-\mathrm{j} n \omega_f} = \frac{\mathrm{j}}{n \omega_f} \mathrm{e}^{-\mathrm{j} n \omega_f t}$	$(n \neq 0)$
$t\ \sin(n\omega_f t)$	$\frac{\sin(n\omega_f t)}{(n\omega_f)^2} - \frac{t\cos(n\omega_f t)}{n\omega_f}$	$(n \neq 0)$
$t\cos(n\omega_f t)$	$\frac{\cos(n\omega_f t)}{(n\omega_f)^2} + \frac{t\sin(n\omega_f t)}{n\omega_f}$	$(n \neq 0)$