Inhaltsverzeichnis

1 Hypotesentest 1
1.1 Nullhypothese und Gegenhypothese 1
1.1.1 Beispiel 2
1.2 Vorgehensweise 2
1.2.1 Beispiel 2
1.2.2 Die Stichprobe: Testgröße und Stichprobenlänge 3
1.2.3 Beispiel (Fortsetzung) 3
1.2.4 Die Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich 3
1.2.5 Beispiel (Fortsetzung) 3
1.2.6 Fehler 1. Art und 2. Art 4
1.2.7 Beispiel (Fortsetzung) 4
1.2.8 Signifikanzniveau 4
2 Übung 5
3 Lösungsweg 5
3.1 Formuliere eine logischen Entscheidungsregel 5
3.2 Die Entscheidungsregel lautet hier: 5

1 Hypotesentest

Bei einem Hypothesentest stehen sich zwei einander widersprechende Behauptungen / Vermutungen (sog. Hypothesen) gegenüber. Welche der beiden Hypothesen wahr ist und welche falsch, weiß man nicht und man kann es auch nicht wissen, da in den Hypothesen Aussagen über vom Zufall beeinflusste Vorgänge gemacht werden (z. B. dass die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses einen Wert oberhalb bzw. unterhalb eines angegebenen Wertes liegt o. ä.).

Der Hypothesentest dient nun dazu, anhand des Ergebnisses einer Stichprobe zu einer Entscheidung darüber zu kommen, welche der beiden Hypothesen man eher zu glauben bereit ist oder anders ausgedrückt: Welche der beiden Hypothesen angenommen (bzw. beibehalten) und welche verworfen wird.

Eine 100%ige Sicherheit, dass die angenommene Hypothese auch tatsächlich wahr ist, kann der Hypothesentest naturgemäß niemals bieten.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeiten eines solchen Tests benutzt man die Binomialverteilung.

1.1 Nullhypothese und Gegenhypothese

Eine der beiden Hypothesen, die bei einem Signifikanztest einander gegenüberstehen, ist die Nullhypothese, die andere die Gegenhypothese. Welche der beiden Hypothesen die Nullhypothese ist und welche die Gegenhypothese, hängt von der in der Aufgabenstellung gegebenen Ausgangssituation ab.

Quellen:
https://de.serlo.org/mathe/1965/hypothesentest

Die Nullhypothese H_0 ist das, wovon man ohne weiteres Wissen und vor dem Test (vorsichtshalber) ausgeht oder ausgehen muss. Die Gegenhypothese H_1 oder H_A ist das, wovon man erst durch ein entsprechend deutliches Testergebnis überzeugt werden muss.

In den meisten Aufgaben beschreibt die Nullhypothese die Grundsituation, während die Gegenhypothese die Vermutung ist, dass sich etwas verändert hat.

1.1.1 Beispiel

Eine Maschine produziert Werkstücke mit 2% Ausschuss. Ein Arbeiter hat das Gefühl, sie arbeitet zurzeit schlechter und produziert mehr defekte Teile.

Die Grundsituation ist, dass die Maschine 2% fehlerhafte Teile herstelle. Das ist die Nullhypothese H_0. Die Vermutung ist, dass die Maschine schlechter arbeitet , was erst nachgewiesen werden muss. Es handelt sich also um die Gegenhypothese H_a.

1.2 Vorgehensweise

Als Erstes muss man aus der Aufgabenstellung die beiden einander gegenüberstehenden Hypothesen herauslesen.
In der Regel werden in den beiden Hypothesen Aussagen über die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines bestimmten Ereignisses gemacht.

- Um welches Ereignis handelt es sich? Dieses Ereignis wird dann als „Treffer“ (im Sinne des Treffers einer Bernoulli-Kette) aufgefasst und seine Wahrscheinlichkeit üblicherweise mit pp abgekürzt.
- Welche Aussagen über p stehen einander gegenüber? Oft wird in der Aufgabenstellung nur eine der beiden Hypothesen konkret formuliert. Die andere muss man dann (zumeist einfach durch logische Verneinung der angegebenen Hypothese) selbst erschließen.
- Bei einem Signifikanztest: Welche der beiden Hypothesen ist die Nullhypothese und welche die Gegenhypothese?

1.2.1 Beispiel

Handwerksmeister X besitzt eine Maschine, die bestimmte Bauteile fertigt. Erfahrungsgemäß sind ca. 2% der angefertigten Bauteile Ausschuss, d. h. sie sind so misslungen, dass Herr X sie nicht verwenden kann.

Herr X vermutet nun, dass sich der Ausschussanteil in letzter Zeit erhöht hat. Da er sich jedoch nicht sicher ist, will er einen Test durchführen…

Welche beiden Hypothesen stehen sich gegenüber und welches ist die Nullhypothese?

Lösung:

Zugrunde liegendes Bernoulli-Experiment: Anfertigen eines Bauteils durch die Maschine.

Treffer: Das Bauteil ist Ausschuss.

Einander gegenüber stehen sich nun die Hypothesen

- "Die Trefferwahrscheinlichkeit pp hat sich erhöht" (Vermutung von Herrn X) und
- "Die Trefferwahrscheinlichkeit pp hat sich nicht erhöht".

Da Herr X seine Vermutung prüfen will, muss er zunächst einmal davon ausgehen, dass seine Vermutung *nicht stimmt* und dann versuchen seine Vermutung doch zu belegen und nicht umgekehrt von der Richtigkeit seiner Annahme bereits ausgehen. Als Nullhypothese muss er daher wählen

$H_0 : p \leq 2\%$

und als Gegenhypothese

$H_a : p > 2\%$.

1.2.2 Die Stichprobe: Testgröße und Stichprobenlänge

Um zu einer Entscheidung darüber zu gelangen, welche der beiden Hypothesen angenommen und welche verworfen werden soll, plant man nun die Durchführung eine Stichprobe: D. h. es wird vorgesehen, dass das betreffende Zufallsexperiment n-mal voneinander unabhängig durchgeführt und dabei notiert wird, wie oft das betreffende Ereignis eintritt.

Die Anzahl n der Wiederholungen des Zufallsexperiments bezeichnet man als die Länge der Stichprobe.

Das, worauf bei der Durchführung der einzelnen Versuche geachtet wird (also die Anzahl der Eintritte des betreffenden Ereignisses), nennt man die Testgröße. Sie wird manchmal mit T, oft auch mit X oder Z abgekürzt.

Bei der Stichprobe handelt es sich dabei um eine Bernoulli-Kette. Die Testgröße ist daher binomialverteilt.

1.2.3 Beispiel (Fortsetzung)

Um den Test durchzuführen beauftragt Herr X den mit der Bedienung der Maschine betrauten Mitarbeiter seines Betriebes bei den nächsten 100 von der Maschine gefertigten Bauteilen darauf zu achten, wie viele davon Ausschuss sind, und ihm das Ergebnis am Ende der Woche mitzuteilen.

Was ist in diesem Fall die Stichprobenlänge und was ist bei dieser Stichprobe die Testgröße?

Lösung:

Die Stichprobe hat die Länge 100.

Die Testgröße ist die Anzahl der Ausschussstücke unter den 100 Bauteilen der Stichprobe.

1.2.4 Die Entscheidungsregel: Annahme- und Ablehnungsbereich

Abhängig vom Wert, den die Testgröße in der Stichprobe annimmt, wird man die Richtigkeit der einen bzw. der anderen der beiden Hypothesen annehmen.

Diejenigen Werte zwischen 0 und n, bei denen die Richtigkeit der Hypothese H angenommen werden soll, bezeichnet man als den Annahmebereich von H. Die anderen Werte, also die, bei denen HH verworfen (d. h. abgelehnt) wird, bilden den Ablehnungsbereich von H.

Die Entscheidungsregel aufstellen heißt, für eine der beiden Hypothesen – üblicherweise für die Nullhypothese - Annahme- und Ablehnungsbereich festzulegen.

1.2.5 Beispiel (Fortsetzung)

Herr X entscheidet die Maschine bei mehr als vier defekten Teilen zur Reparatur zu schicken, bei weniger will er die Sache nicht weiter verfolgen.

Was ist hier der Annahme- und was der Ablehnungsbereich?

Lösung:

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ist der Annahmebereich,

A = {5, 6, 7, …, 100} ist der Ablehnungsbereich

1.2.6 Fehler 1. Art und 2. Art

Bei einem Hypothesentest können zwei spezielle Fehler auftreten:

- Ein Fehler 1. Art liegt vor, wenn bei einem Hypothesentest die Nullhypothese zu Unrecht verworfen wird.
- Ein Fehler 2. Art liegt vor, wenn bei einem Hypothesentest die Nullhypothese zu Unrecht beibehalten wird.

Damit ergeben sich vier mögliche Ausgänge für einen Hypothesentest. Diese lassen sich mit einer Tabelle veranschaulichen:

	H_0 ist wahr	**H_0 ist falsch**
Die Testgröße T nimmt bei der Stichprobe einen Wert im Annahmebereich von H_0 an.	Richtige Entscheidung H_0 ist wahr und wird (zu Recht) beibehalten.	Falsche Entscheidung H_0 ist falsch und wird zu Unrecht beibehalten. Fehler 2. Art
Die Testgröße T nimmt bei der Stichprobe einen Wert im Ablehnungsbereich von H_0 an.	Falsche Entscheidung H_0 ist wahr und wird zu Unrecht verworfen. Fehler 1. Art	Richtige Entscheidung H_0 ist falsch und wird (zu Recht) verworfen.

Der Fehler 2. Art lässt sich im Allgemeinen nicht berechnen, da für die Gegenhypothese keine Trefferwahrscheinlichkeit angegeben ist (Ausnahme Alternativtest).

1.2.7 Beispiel (Fortsetzung)

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Herr X fälschlicherweise annimmt, die Maschine arbeite schlechter?

Um diesen Fehler 1. Art zu berechnen muss man die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass die Maschine 2 % Ausschuss produziert, in der Stichprobe aber trotzdem fünf oder mehr defekte Teile sind.

Dies kann man beispielsweise im Tafelwerk der Binomialverteilung nachschlagen. Dort sind die Wahrscheinlichkeiten für null bis k Treffer bei verschiedenen Testlängen und Trefferwahrscheinlichkeiten angegeben.

Da hier die Chance für mehr als k Treffer gesucht ist, muss man über das Gegenereignis gehen: In unserem Beispiel wird die Wahrscheinlichkeit für 0 bis k = 4 Treffer mit Trefferwahrscheinlichkeit p_G = 0,02 bei n = 100 Versuchen gesucht. (aus Tabelle Binominalverteilung; Tafelwerk; https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/binverttab.htm)

$$P_{100;0,02}(X \geq 5) = 1 - P_{100;0,02}(X \leq 4) = 1 - 0{,}9492 \approx 5\%$$

Herr X schickt die Maschine also mit einem Risiko von 5 % zur Reparatur, obwohl sie fehlerfrei arbeitet.

1.2.8 Signifikanzniveau

Die Entscheidungsregel sollte nicht willkürlich oder nach Gefühl aufgestellt werden. Denn dann kann es passieren, dass Hypothesen zu leicht angenommen oder abgelehnt werden, was die Aussagekraft des Tests verschlechtert.

Quellen:
https://de.serlo.org/mathe/1965/hypothesentest

Um das zu verhindern, bestimmt man vorher ein Signifikanzniveau. Dieses stellt sicher, dass das Ergebnis des Tests aussagekräftig ist.

Das Signifikanzniveau ist dabei gleich der Wahrscheinlichkeit einen Fehler 1. Art zu begehen. Übliche Werte sind 5 % und 10 %, bei großen Stichproben manchmal auch 1 %.

Beispiel (Fortsetzung)

Wie ist das Signifikanzniveau im Test von Herrn X?

Es ist gleich dem Fehler 1. Art. Dieser wurde im oberen Absatz schon berechnet, er ist gleich 5 %.

Wie man für ein vorgegebenes Signifikanzniveau die entsprechende Entscheidungsregel aufstellt, wird im zugehörigen Artikel gezeigt.

2 Übung

In einer Urne befinden sich entweder 4 blaue und 6 rote Kugeln oder 6 blaue und 4 rote. Dies soll durch Ziehen von 5 Kugeln ohne Zurücklegen herausgefunden werden.

- Welches Entscheidungsverfahren ist das vernünftigste?
- Wie hoch ist die Fehlerwahrscheinlichkeit in diesem Fall?

3 Lösungsweg

Die beiden Möglichkeiten sind entweder 4 blaue und 6 rote oder 6 blaue und 4 rote Kugeln.

3.1 Formuliere eine logischen Entscheidungsregel

Die einzig sinnvolle Entscheidungsregel, um beide Fehler gleichzeitig klein zu halten, ist folgende:

Die Farbe, die beim Ziehen am häufigsten auftritt, wird als die Farbe angenommen, die insgesamt öfter vorhanden ist. Da 5 eine ungerade Zahl ist, ist dies eindeutig.

3.2 Die Entscheidungsregel lautet hier:

0, 1 oder 2 blaue Kugeln: $\Rightarrow$ 4 blaue und 6 rote Kugeln.

3, 4 oder 5 blaue Kugeln: $\Rightarrow$ 4 rote und 6 blaue Kugeln.

Da beide Möglichkeiten symmetrisch sind, ist der Fehler 1. Art identisch mit dem Fehler 2. Art.

Formuliere, wann ein Fehler 1. oder 2. Art auftritt

Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit, dass von der selteneren Farbe mehr Kugeln gezogen werden, d.h. entweder 3 oder 4. Da es nur 4 Kugeln der selteneren Farbe gibt, sind 5 nicht möglich.

Berechne nun die Fehlerwahrscheinlichkeit.

P(Fehler) = P(4 seltene Kugeln gezogen) + P(3 seltene Kugeln gezogen)

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge.

$$P(Fehler) = \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{2} + \binom{4}{4}\binom{6}{1}}{\binom{10}{5}} = \frac{4 * 15 + 1 * 6}{252} = \frac{11}{42} = 0{,}261905 \approx 26{,}19\%$$

Quellen:
https://de.serlo.org/mathe/1965/hypothesentest

In der oberen Zeile musst du zunächst den Binomialkoeffizienten jeweils ausrechnen und dann im nächsten Schritt in der Zeile den Bruch ausrechnen.

Die Fehlerwahrscheinlichkeit beträgt ungefähr 26,2%.

Quellen:
https://de.serlo.org/mathe/1965/hypothesentest