

PID capture d'axe

Thierry Miquel <thierry.miquel@enac.fr>

7 décembre 2020

Table des matières

1	Équations cinématiques	1
2	Dynamique du vol latéral	2
2.1	Modèle de validation	2
2.2	Linéarisation	3
3	Capture de cap	3
3.1	Commande modale	3
3.2	Séparation des échelles de temps	4
4	Capture de route	6
5	Capture d'axe	7
5.1	Dynamique de l'erreur latérale	7
5.2	Linéarisation de la dynamique de l'erreur latérale	8
5.3	Correcteur PI-D	9
5.4	Correcteur sans action intégrale	10
5.5	Capture d'axe : séparation des échelles de temps	11
5.6	Capture d'arc de cercle	11

1 Équations cinématiques

Nous notons :

- x la position de l'avion par rapport à l'axe orienté vers le nord
- y la position de l'avion par rapport à l'axe orienté vers l'est
- V est la vitesse vraie de l'avion
- γ est la pente de l'avion, i.e. l'angle entre la vitesse vraie V et l'horizontale
- ψ le cap de l'avion

Nous ferons l'hypothèse d'un vent constant dans le plan horizontal ; W et ψ_w représentent respectivement la vitesse du vent et la direction d'où il vient.

Les équations cinématiques sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = V_p \cos(\psi) + W \cos(\psi_w + \pi) \\ \dot{y} = V_p \sin(\psi) + W \sin(\psi_w + \pi) \end{cases} \quad (1)$$

Où

$$V_p = V \cos(\gamma) \quad (2)$$

2 Dynamique du vol latéral

2.1 Modèle de validation

Les équations de la dynamique du vol latéral sont celles issues de la mécanique du point. Lorsque l'avion est modélisé par un point matériel de masse constante m et qu'il n'y a pas de dérapage les équations issues de la dynamique du vol sont les suivantes¹ :

$$\begin{cases} \dot{V} = g(n_x - \sin(\gamma)) \\ \dot{\gamma} = \frac{g}{V}(n_z \cos(\phi) - \cos(\gamma)) \\ \dot{\psi} = \frac{g}{V} \frac{\sin(\phi)}{\cos(\gamma)} n_z \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad (3)$$

Où :

- V est la vitesse (TAS) de l'avion
- γ est la pente de l'avion
- $n_x = \frac{T-D}{mg}$ est le facteur de charge longitudinale
- T (Thrust) est la force de poussée exercée sur l'avion
- D (Drag) est la force de traînée
- $n_z = \frac{L}{mg}$ est le facteur de charge vertical
- m est la masse (supposée constante) de l'avion
- g est l'accélération de la gravité ($g = 9.80665 \text{ m/s}^2$)
- L (Lift) représente la force de portance exercée sur l'avion
- ϕ est l'inclinaison latérale de l'avion (*bank angle*)
- p est la vitesse de roulis de l'avion

Les équations (4) constituent le modèle de *validation* des lois de commande qui seront élaborées. Notez que ce modèle de *validation* est non-linéaire.

Pour maintenir une vitesse (TAS) et une pente γ constantes, le facteur de charge vertical n_z et le facteur de charge longitudinale $n_x = \frac{T-D}{mg}$, où T (Thrust) représente la force de poussée exercée sur l'avion et D (Drag) la force de traînée, doivent être choisis comme suit :

$$\boxed{\begin{cases} n_x = \frac{\dot{V}}{g} + \sin(\gamma) \\ n_z = \frac{1}{\cos(\phi)} \left(\frac{V\dot{\gamma}}{g} + \cos(\gamma) \right) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \dot{V} = 0 \\ \frac{V\dot{\gamma}}{g} = 0 \end{cases}}$$

En utilisant ces conditions dans (3), nous pouvons écrire les équations de la dynamique du *vol latéral* sous la forme suivante :

$$\boxed{\begin{cases} V_p \dot{\psi} = g n_z \sin(\phi) \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad \text{où} \quad V_p = V \cos(\gamma)} \quad (4)$$

Nous prendrons comme commande de ce modèle du *vol latéral* la vitesse de roulis p de l'avion.

1. Etkin, B., Dynamics of Atmospheric Flight, Dover Publications, 2005

2.2 Linéarisation

Les équations de la dynamique latérale peuvent s'écrire sous la forme :

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (5)$$

où :

$$\begin{cases} \underline{x} := [\psi & \phi]^T \\ \underline{u} := p \end{cases} \quad (6)$$

et

$$f(\underline{x}, \underline{u}) := \begin{bmatrix} \frac{g n_z}{V_p} \sin(\phi) \\ p \end{bmatrix} \quad (7)$$

En désignant par $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$ un point d'équilibre nous avons par définition du point d'équilibre $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$:

$$f(\underline{x}_e, \underline{u}_e) = \underline{0} \quad (8)$$

Posons :

$$\begin{cases} \underline{x} = \underline{x}_e + \delta \underline{x} \\ \underline{u} = \underline{u}_e + \delta \underline{u} \end{cases} \quad (9)$$

Le développement limité à l'ordre 1 du champ de vecteur $f()$ donne :

$$\delta \dot{\underline{x}} \approx \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_e, \underline{u}=\underline{u}_e} \delta \underline{x} + \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_e, \underline{u}=\underline{u}_e} \delta \underline{u}$$

En linéarisant la dynamique latérale autour du point d'équilibre $\underline{x}_e = [\psi_e \ 0]^T$ et $u_e = 0$ il vient :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \cos(\phi) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\phi=0} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p \quad (10)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p \quad (11)$$

3 Capture de cap

3.1 Commande modale

Nous partons des équations linéarisées de la dynamique latérale :

$$\begin{cases} \delta \dot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \phi \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad (12)$$

Soit sous forme de représentation d'état :

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p \quad (13)$$

La commande appliquée est de la forme :

$$p = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \delta \psi \\ \phi \end{bmatrix} + \mathbf{H} \delta r \quad (14)$$

De sorte qu'en boucle fermée nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} \right) \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{H} \delta r \quad (15)$$

La matrice de gain \mathbf{K} est une matrice 1×2 et la précommande \mathbf{H} est un scalaire que nous exprimons sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{K} = [k_1 & k_2] \\ \mathbf{H} = H \end{cases} \quad (16)$$

Il vient :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} \delta r \quad (17)$$

Nous choisissons les gains k_1 et k_2 de telle sorte que la dynamique du système bouclé possède deux pôles complexes conjugués de pulsation naturelle ω_n et de coefficient d'amortissement m :

$$\det \left(s\mathbb{I} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} s & -\frac{g n_z}{V_p} \\ k_1 & s + k_2 \end{bmatrix} \right) = s^2 + s k_2 + k_1 \frac{g n_z}{V_p} \equiv s^2 + 2m\omega_n s + \omega_n^2 \quad (18)$$

D'où par identification :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{V_p}{g n_z} \omega_n^2 \\ k_2 = 2m\omega_n \end{cases} \quad (19)$$

la précommande H est réglée de telle sorte qu'en régime établi lorsque $\delta\dot{\psi} = \dot{\phi} = 0$ et $\phi = 0$ nous ayons $\delta r = \delta\psi = \psi_c - \psi_e$. Il vient :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{g n_z}{V_p} \\ -k_1 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_c - \psi_e \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ H \end{bmatrix} (\psi_c - \psi_e) \quad (20)$$

Soit :

$$H = k_1 \quad (21)$$

La commande en roulis p a donc l'expression suivante :

$$\begin{aligned} p &= - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\psi \\ \phi \end{bmatrix} + k_1 \delta r \\ &= - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi - \psi_e \\ \phi \end{bmatrix} + k_1 (\psi_c - \psi_e) \end{aligned} \quad (22)$$

Soit :

$$\boxed{p = -k_1 (\psi - \psi_c) - k_2 \phi} \quad (23)$$

3.2 Séparation des échelles de temps

L'inconvénient principal de la commande précédente est qu'elle ne permet pas de limiter facilement l'inclinaison latérale ϕ .

Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser une commande utilisant le principe de la séparation des échelles de temps.

Nous allons dans un premier temps calculer p de telle sorte que l'inclinaison ϕ converge vers une consigne ϕ_c :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi} = p \\ \dot{\phi} = \frac{\phi_c - \phi}{\tau_\phi} \end{array} \Rightarrow p = \frac{\phi_c - \phi}{\tau_\phi} := k_2 (\phi_c - \phi) \right. \quad (24)$$

Dans un second temps nous allons considérer que c'est la consigne ϕ_c , et non ϕ , permet de commander le cap ψ . En remarquant que $\delta\psi_c - \delta\psi = (\psi_c - \psi_e) - (\psi - \psi_e) = \psi_c - \psi$ il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \phi \approx \frac{g n_z}{V_p} \phi_c \\ \delta\dot{\psi} = \frac{\delta\psi_c - \delta\psi}{\tau_\psi} = \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \end{array} \Rightarrow \phi_c = \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \frac{V_p}{g n_z} := k_1 (\psi_c - \psi) \right. \quad (25)$$

Si maintenant nous revenons au système complet où l'approximation $\phi \approx \phi_c$ n'est pas utilisée, il vient (nous utilisons le fait que $\delta\dot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \phi \Leftrightarrow \phi = \frac{V_p}{g n_z} \delta\dot{\psi}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta\dot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \phi \\ \dot{\phi} = p \end{array} \right. \text{ où } p = \frac{\phi_c - \phi}{\tau_\phi} = \frac{\frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} \frac{V_p}{g n_z} - \phi}{\tau_\phi} = \frac{V_p}{g n_z} \left(\frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} - \delta\dot{\psi} \right) \quad (26)$$

En dérivant la première équation et en y injectant la seconde (et en utilisant le fait que $\delta\dot{\psi} = \dot{\psi}$), nous obtenons finalement :

$$\delta\ddot{\psi} = \ddot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \dot{\phi} = \frac{g n_z}{V_p} \frac{V_p}{g n_z} \frac{\left(\frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} - \dot{\psi} \right)}{\tau_\phi} = \frac{\left(\frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi} - \dot{\psi} \right)}{\tau_\phi} \quad (27)$$

Soit :

$$\tau_\phi \ddot{\psi} + \dot{\psi} + \frac{\psi - \psi_c}{\tau_\psi} = 0 \quad (28)$$

Le polynôme caractéristique de cette équation différentielle est le suivant :

$$s^2 \tau_\phi + s + \frac{1}{\tau_\psi} = 0 \quad (29)$$

Les racines de ce polynôme sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_s = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_\phi}{\tau_\psi}}}{2 \tau_\phi} \\ \lambda_f = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_\phi}{\tau_\psi}}}{2 \tau_\phi} \end{array} \right. \quad (30)$$

Dans le cas où $\frac{\tau_\phi}{\tau_\psi} \ll 1 \Leftrightarrow \tau_\phi \ll \tau_\psi$ nous pouvons utiliser l'approximation suivante : $(1 + \epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon$. Il vient :

$$\frac{\tau_\phi}{\tau_\psi} \ll 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_s \approx \frac{-1 + \left(1 - 2 \frac{\tau_\phi}{\tau_\psi}\right)}{2 \tau_\phi} = -\frac{1}{\tau_\psi} \\ \lambda_f \approx \frac{-1 - \left(1 - 2 \frac{\tau_\phi}{\tau_\psi}\right)}{2 \tau_\phi} = \frac{-1 + \frac{\tau_\phi}{\tau_\psi}}{\tau_\phi} = -\frac{1}{\tau_\phi} + \frac{1}{\tau_\psi} \approx -\frac{1}{\tau_\phi} \end{array} \right. \quad (31)$$

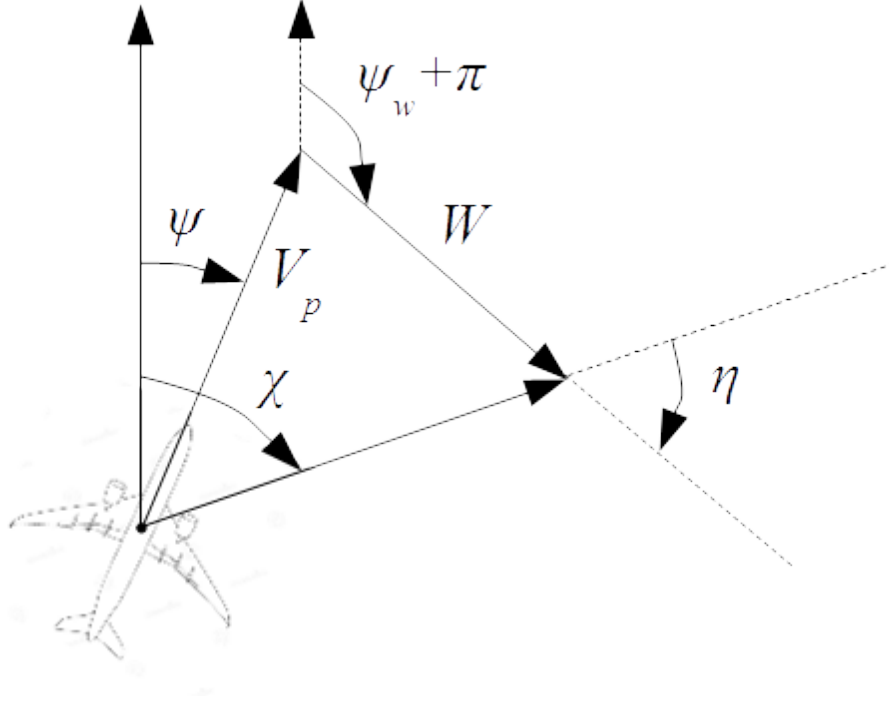


FIGURE 1 – Calcul de la dérive

4 Capture de route

Soit ψ le cap de l'avion, χ sa route et d sa dérive. Les angles ψ , χ et d sont liés par la relation suivante :

$$\chi = \psi + d \quad (32)$$

Le calcul de la dérive d en fonction de la vitesse vraie V de l'avion, de la vitesse W du vent et de sa direction $\psi_w + \pi$ peut se faire en s'aidant de la Figure 1 et de la loi des sinus (appelée aussi théorème d'Al-Khashi) :

$$\frac{\sin(d)}{W} = \frac{\sin(\eta)}{V_p} \text{ où } \eta = \psi_w + \pi - \chi \quad (33)$$

Nous obtenons finalement :

$$\sin(d) = \frac{W \sin(\eta)}{V_p} = -\frac{W \sin(\psi_w - \chi)}{V_p} = \frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \quad (34)$$

Soit :

$$d = \text{asin} \left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \right) \quad (35)$$

Notons que si la dérive d est exprimée en degré, la formule précédente se ré-écrit comme suit :

$$d(\text{deg}) = \frac{180}{\pi} \text{asin} \left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \right) \approx 60 \text{asin} \left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \right) \quad (36)$$

Il vient :

$$\chi = \psi + d = \psi + \text{asin} \left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \right) \quad (37)$$

Dés lors qu'une route de consigne χ_c est donnée, celle-ci peut être alors convertie en cap de consigne ψ_c en inversant la relation précédente :

$$\psi_c = \chi_c - \text{asin} \left(\frac{W \sin(\chi_c - \psi_w)}{V_p} \right) \quad (38)$$

Sous la contrainte que :

$$\left| \frac{W \sin(\chi_c - \psi_w)}{V_p} \right| \leq 1 \quad (39)$$

L'expression de la dérive peut être retrouvée en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned} \tan(\chi) &= \frac{\sin(\chi)}{\cos(\chi)} = \frac{V_p \sin(\psi) - W \sin(\psi_w)}{V_p \cos(\psi) - W \cos(\psi_w)} = \frac{\sin(\psi) - \frac{W \sin(\psi_w)}{V_p}}{\cos(\psi) - \frac{W \cos(\psi_w)}{V_p}} \\ \Rightarrow \sin(\chi) \cos(\psi) - \cos(\chi) \sin(\psi) &= \sin(\chi) \frac{W \cos(\psi_w)}{V_p} - \cos(\chi) \frac{W \sin(\psi_w)}{V_p} \\ \Leftrightarrow \sin(\chi - \psi) &= \frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \end{aligned} \quad (40)$$

Soit :

$$\boxed{\psi = \chi - \arcsin \left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V \cos(\gamma)} \right)} \quad (41)$$

Ainsi donner la consigne de route χ_c revient à donner une consigne de cap ψ_c comme définie en (38) à condition que la contrainte (39) soit satisfaite.

5 Capture d'axe

5.1 Dynamique de l'erreur latérale

Comme représenté sur la Figure 2 nous désignerons par la suite :

- x la position de l'avion par rapport à l'axe orienté vers le nord
- y la position de l'avion par rapport à l'axe orienté vers l'est
- χ_a l'orientation de l'axe
- x_a la position par rapport à l'axe orienté vers le nord du point par lequel passe l'axe
- y_a la position par rapport à l'axe orienté vers l'est du point par lequel passe l'axe
- e_x l'écart longitudinal de l'avion par rapport à l'axe
- e_y l'écart latéral de l'avion par rapport à l'axe

Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\chi_a) & \sin(\chi_a) \\ -\sin(\chi_a) & \cos(\chi_a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_a \\ y - y_a \end{bmatrix} \quad (42)$$

En dérivant une fois par rapport au temps l'écart e_y il vient :

$$\dot{e}_y = -\sin(\chi_a) \dot{x} + \cos(\chi_a) \dot{y} \quad (43)$$

Soient G_s la vitesse sol de l'avion et χ sa route :

$$\begin{cases} \dot{x} = G_s \cos(\chi) \\ \dot{y} = G_s \sin(\chi) \end{cases} \quad (44)$$

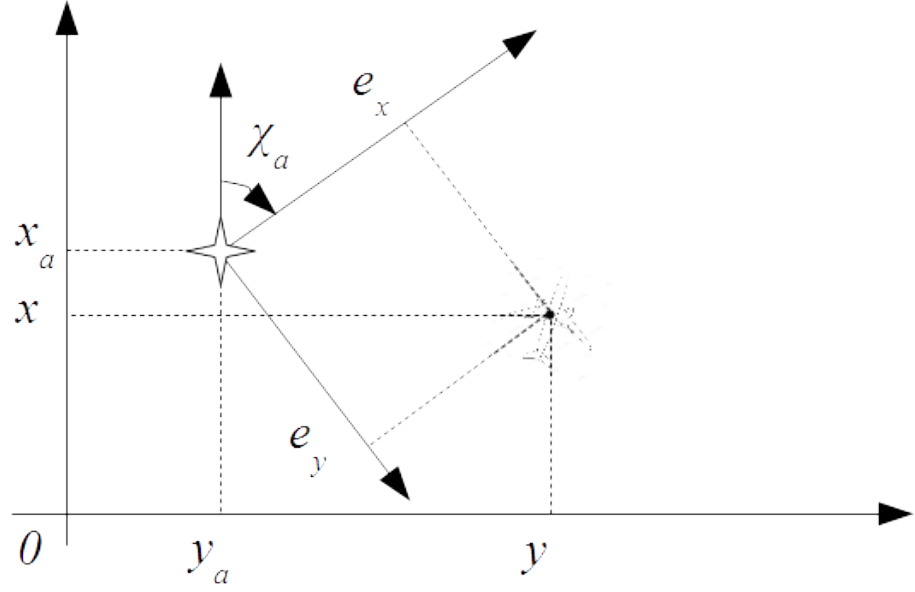


FIGURE 2 – Capture d'axe

Il vient :

$$\dot{e}_y = -G_s \sin(\chi_a) \cos(\chi) + G_s \cos(\chi_a) \sin(\chi) \quad (45)$$

Soit :

$$\boxed{\dot{e}_y = G_s \sin(\chi - \chi_a)} \quad (46)$$

5.2 Linéarisation de la dynamique de l'erreur latérale

En vue d'obtenir une représentation d'état, la dynamique de χ est obtenue en dérivant (37). En supposant $W \ll V_p$, nous pouvons faire l'approximation $\text{asin}(x) \approx x$. Dans ces conditions, la relation (37) devient :

$$\begin{cases} \chi = \psi + \text{asin}\left(\frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p}\right) \\ W \ll V_p \Rightarrow \text{asin}(x) \approx x \end{cases} \Rightarrow \chi \approx \psi + \frac{W \sin(\chi - \psi_w)}{V_p} \quad (47)$$

Soit, après dérivation, et en supposant V_p , W et ψ_w constants :

$$\dot{\chi} \approx \dot{\psi} + \frac{W}{V_p} \cos(\chi - \psi_w) \dot{\chi} \Leftrightarrow \dot{\chi} \approx \frac{\dot{\psi}}{1 - \frac{W}{V_p} \cos(\chi - \psi_w)} \quad (48)$$

Compte tenu des équations (4) relatives à la dynamique du vol latéral, il vient :

$$V_p \dot{\psi} = g n_z \sin(\phi) \Rightarrow \dot{\chi} \approx \frac{g n_z \sin(\phi)}{V_p \left(1 - \frac{W}{V_p} \cos(\chi - \psi_w)\right)} \quad (49)$$

En regroupant les expressions précédentes où nous avons supposé que $W \ll V_p$, la dynamique de l'erreur latérale e_y varie en fonction de l'inclinaison latéral ϕ selon la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_y = G_s \sin(\chi - \chi_a) \\ W \ll V_p \Rightarrow \dot{\chi} \approx \frac{g n_z \sin(\phi)}{V_p \left(1 - \frac{W}{V_p} \cos(\chi - \psi_w)\right)} \end{cases} \quad (50)$$

En linéarisant cette représentation d'état autour de $(e_y = 0, \chi = \chi_a, \phi = 0)$ et $p = 0$, nous obtenons la représentation d'état linéaire et invariante suivante, en supposant V_p , W , G_s et ψ_w constants et en posant $\delta\chi = \chi - \chi_a$:

$$\begin{cases} \delta\chi = \chi - \chi_a \approx 0 \\ W \ll V_p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{e}_y \approx G_s \delta\chi \\ \delta\dot{\chi} \approx \frac{g n_z}{V_p \left(1 - \frac{W}{V_p} \cos(\chi_a - \psi_w)\right)} \phi \end{cases} \quad (51)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \delta\chi = \chi - \chi_a \approx 0 \\ W \ll V_p \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{e}_y \\ \delta\dot{\chi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_y \\ \delta\chi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \phi \quad (52)$$

où :

$$b := \frac{g n_z}{V_p \left(1 - \frac{W}{V_p} \cos(\chi_a - \psi_w)\right)} \quad (53)$$

5.3 Correcteur PI-D

En utilisant la représentation d'état (52), nous en déduisons que la fonction de transfert $F(s) := \frac{e_y(s)}{p(s)}$ a l'expression suivante :

$$F(s) := \frac{e_y(s)}{\phi(s)} = \frac{b G_s}{s^2} \quad (54)$$

Comme représenté sur la Figure 3, nous choisissons d'utiliser un correcteur de type PI-D pour réaliser l'asservissement de l'erreur latérale e_y .

La lecture du schéma-bloc de la Figure 3 conduit à l'expression suivante pour la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\begin{aligned} e_y(s) &= F(s) \left(-K_d s e_y(s) + \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) (r(s) - e_y(s)) \right) \\ \Leftrightarrow e_y(s) \left(1 + F(s) \left(K_d s + K_p + \frac{K_i}{s} \right) \right) &= F(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right) r(s) \\ \Leftrightarrow \frac{e_y(s)}{r(s)} &= \frac{F(s) \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)}{1 + F(s) \left(K_d s + K_p + \frac{K_i}{s} \right)} \end{aligned} \quad (55)$$

Soit, compte tenu de l'expression de $F(s)$:

$$\frac{e_y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{b G_s}{s^2} \left(K_p + \frac{K_i}{s} \right)}{1 + \frac{b G_s}{s^2} \left(K_d s + K_p + \frac{K_i}{s} \right)} = \frac{b G_s (s K_p + K_i)}{s^3 + b G_s (s^2 K_d + s K_p + K_i)} \quad (56)$$

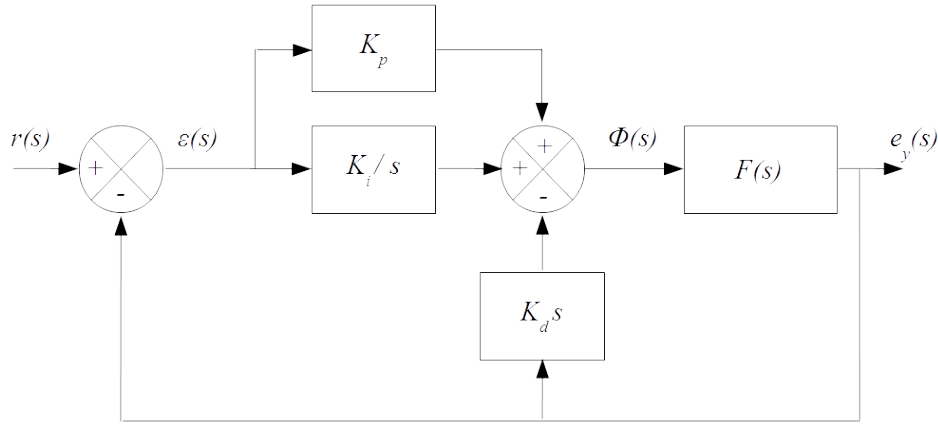


FIGURE 3 – Correcteur PI-D

5.4 Correcteur sans action intégrale

Afin d'obtenir une fonction de transfert en boucle fermée avec un numérateur constant est un polynôme au dénominateur de degré 2 avec tous ses coefficients positifs, nous choisissons $K_i = 0$.

Après une simplification par s , la fonction de transfert en boucle fermée devient :

$$\begin{aligned} \frac{e_y(s)}{r(s)} &= \frac{b G_s (s K_p)}{s^3 + b G_s (s^2 K_d + s K_p)} \\ &= \frac{b G_s K_p}{s^2 + b G_s (s K_d + K_p)} := \frac{b G_s K_p}{D(s)} \end{aligned} \quad (57)$$

Les gains K_d et K_p sont alors réglés de manière à fixer les pôles en boucle fermée. En utilisant les tables ITAE, le dénominateur est fixé comme suit :

$$D(s) = s^2 + a_1 \omega_0 s + \omega_0^2 \quad (58)$$

où ω_0 est un paramètre de réglage et où le coefficient a_1 est fixé comme suit² :

$$a_1 = 1.505 \quad (59)$$

Il vient, après identification :

$$\begin{cases} K_d = \frac{a_1 \omega_0}{b G_s} \\ K_p = \frac{\omega_0^2}{b G_s} \end{cases} \quad (60)$$

Compte tenu du fait que nous avons fait l'approximation $\phi \approx \phi_c$, le paramètre ω_0 devra être choisi de telle sorte que la partie réelle des racines de $D(s)$ soient situées nettement à droite de $-\frac{1}{\tau_\phi}$:

$$-\frac{1}{\tau_\phi} \ll \operatorname{Re} \left(-\frac{\omega_0}{2} \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4} \right) \right) \quad (61)$$

La loi de commande est donnée dans le domaine de Laplace par l'équation suivante :

$$\phi(s) \approx \phi_c(s) = -K_d s e_y(s) + K_p (r(s) - e_y(s)) \quad (62)$$

2. Y. Cao, Correcting the minimum ITAE standard forms of zero-displacement-error systems, Journal of Zhejiang University (Natural Science) Vol. 23, No.4, pp. 550-559, 1989

Soit, après inversion et en revenant dans le domaine temporel :

$$\phi_c(t) = -K_d \dot{e}_y(t) + K_p (r(t) - e_y(t)) \quad (63)$$

Compte tenu de la représentation d'état (52), nous obtenons finalement :

$$\begin{cases} \dot{e}_y(t) = G_s \delta \chi(t) \\ \delta \chi(t) = \chi(t) - \chi_a \end{cases} \Rightarrow \phi_c(t) = -K_d G_s (\chi(t) - \chi_a) + K_p (r(t) - e_y(t)) \quad (64)$$

Soit, compte tenu des expressions de K_d et K_p :

$$\boxed{\phi_c(t) = -\frac{a_1 \omega_0}{b} (\chi(t) - \chi_a) + \frac{\omega_0^2}{b G_s} (r(t) - e_y(t))} \quad (65)$$

5.5 Capture d'axe : séparation des échelles de temps

Comme dans le cas de la capture de cap, l'inconvénient principal de la commande précédente est qu'elle ne permet pas de limiter l'angle de convergence vers l'axe choisi.

Pour remédier à ce problème, nous allons utiliser une commande utilisant le principe de la séparation des échelles de temps.

En inversant la dynamique de l'erreur latérale (46), il vient :

$$\dot{e}_y = G_s \sin(\chi - \chi_a) \Rightarrow \chi = \chi_a + \text{asin}\left(\frac{\dot{e}_y}{G_s}\right) \quad (66)$$

La dynamique de l'erreur latérale e_y est alors choisie comme suit :

$$\dot{e}_y = \frac{-e_y}{\tau_e} \quad (67)$$

Nous pourrions faire l'approximation $\chi \approx \chi_c$ dès lors que $\tau_e \gg \tau_\psi$:

$$\tau_e \gg \tau_\psi \Rightarrow \chi \approx \chi_c \quad (68)$$

En faisant l'approximation $\text{asin}(x) \approx x$, la loi de commande est donc la suivante :

$$\boxed{\chi_c(t) = \chi_a - \frac{e_y(t)}{G_s \tau_e}} \quad (69)$$

Afin de limiter l'angle de convergence vers l'axe choisi à 45 deg par exemple, nous imposerons la saturation suivante :

$$-45 \text{ deg} \leq \frac{e_y}{G_s \tau_e} \leq 45 \text{ deg} \quad (70)$$

5.6 Capture d'arc de cercle

Soient (x_c, y_c) les coordonnées du centre d'un cercle et (x, y) la position de l'avion. En désignant par R le rayon du cercle sur lequel se trouve l'avion, nous pouvons écrire l'équation du cercle où il se trouve :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad (71)$$

En dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\dot{x}(x - x_c) + \dot{y}(y - y_c) = R\dot{R} \quad (72)$$

On fixe la dynamique de R de telle sorte que le rayon R converge vers le rayon souhaité R_c :

$$\dot{R} = \frac{R_c - R}{\tau_R} \quad (73)$$

De plus, à partir des équations cinématique, nous avons les relations suivantes où G_s est la vitesse sol et χ la route de l'avion :

$$\begin{cases} \dot{x} = G_s \cos(\chi) \\ \dot{y} = G_s \sin(\chi) \end{cases} \quad (74)$$

Il vient :

$$G_s \cos(\chi) (x - x_c) + G_s \sin(\chi) (y - y_c) = R \frac{R_c - R}{\tau_R} \quad (75)$$

Posons :

$$\begin{cases} x - x_c = R \cos(\chi_{Rc}) \\ y - y_c = R \sin(\chi_{Rc}) \end{cases} \quad (76)$$

Il vient :

$$\cos(\chi - \chi_{Rc}) = \frac{R_c - R}{G_s \tau_R} \quad (77)$$

Compte tenu de la séparation des échelles de temps, la route χ ainsi calculée est assimilée à une route consigne χ_c :

$$\boxed{\chi_c = \chi_{Rc} + \arccos\left(\frac{R_c - R}{G_s \tau_R}\right)} \quad (78)$$

En désignant par e_y l'écart latéral et par χ_a la direction de la perpendiculaire au rayon du cercle, posons :

$$\begin{cases} e_y = R_c - R \\ \chi_a = \chi_{Rc} + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (79)$$

L'équation (77) s'écrit alors comme suit :

$$\cos\left(\chi_c - \chi_a + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{e_y}{G_s \tau_R} \Rightarrow \chi_c = \chi_a - \arcsin\left(\frac{e_y}{G_s \tau_R}\right) \approx \chi_a - \frac{e_y}{G_s \tau_R} \quad (80)$$

On a de plus :

$$\delta\dot{\psi} = \frac{g n_z}{V_p} \phi \approx \frac{\chi_c - \chi}{\tau_\psi} = \frac{\chi_a - \frac{e_y}{G_s \tau_R} - \chi}{\tau_\psi} = \frac{-(\chi - \chi_a) - \frac{e_y}{G_s \tau_R}}{\tau_\psi} \quad (81)$$

Compte tenu de la séparation des échelles de temps, l'inclinaison ϕ ainsi calculée est assimilée à une inclinaison de consigne ϕ_c . Nous obtenons finalement :

$$\boxed{\phi_c = -\frac{V_p}{g n_z} \left(\frac{(\chi - \chi_a) + \frac{e_y}{G_s \tau_R}}{\tau_\psi} \right) := -k_1 (\chi - \chi_a) - k_2 e_y} \quad (82)$$