

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ FÉDÉRALE TOULOUSE MIDI-PYRÉNÉES

Délivré par :

*l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC)*

---

Présentée et soutenue le *jj/mm/aaaa* par :

**Florian SANSOU**

---

**Control actif de la turbulence sur un micro drone convertible**

---

### JURY

MME SOPHIE TARBOURIECH	Directrice de recherche LAAS-CNRS	Présidente du jury
M. PAOLO ROBUFFO	Directeur de recherche IRISA-CNRS	Rapporteur
GIORDANO	Professeur des universités Sorbonne Université	Rapporteur
M. PASCAL MORIN	Enseignant chercheur IMT ATLANTIQUE	Examinateur
PHILIPPE CHEVREL	Ingénieur de recherche ONERA	Directeur de thèse
M. FABRICE DEMOURANT	Enseignant chercheur ENAC	Co-directeur de thèse
M. GAUTIER		
HATTENBERGER		

---

**École doctorale et spécialité :**

*EDSYS : Automatique 4200046*

**Unité de Recherche :**

*École Nationale d'Aviation Civile*

**Directeur(s) de Thèse :**

*M. Fabrice DEMOURANT et M. Gautier HATTENBERGER*

**Rapporteurs :**

*M. Paolo ROBUFFO GIORDANO et M. Pascal MORIN*



## Remerciements

A faire en dernier :-)



# Table des matières

<b>Liste des figures</b>	<b>ix</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des algorithmes</b>	<b>xiii</b>
<b>Liste des abréviations</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1    Micros drones convertibles . . . . .	1
0.1.1    Domaine de vol . . . . .	1
0.1.2    Types d'architecture des drones convertibles . . . . .	2
0.2    Propriétés des <i>tailsitters</i> et des <i>freewings</i> . . . . .	6
0.2.1    Actionnement . . . . .	6
0.2.2    Aérodynamique . . . . .	6
0.3    Modélisations . . . . .	7
0.4    Commandes . . . . .	9
0.5    Système de drone : Paparazzi . . . . .	10
0.5.1    Les capteurs d'un autopilote . . . . .	10
0.5.2    Le microcontrôleur d'un autopilote . . . . .	11
0.5.3    Les logiciels d'un autopilote . . . . .	12
0.5.4    Le segment sol . . . . .	12
0.5.5    Le logiciel embarqué . . . . .	12
<b>1 Objectifs</b>	<b>13</b>
1.1    Contexte opérationnel . . . . .	13
1.2    Contexte de la thèse . . . . .	14
1.3    Résumé . . . . .	16
<b>2 Modélisation d'un drone convertible : DarkO</b>	<b>17</b>
2.1    Modèle du drone DarkO . . . . .	17
2.1.1    Modèle non-linéaire complet . . . . .	19
2.1.2    Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse . . . . .	22
2.2    Identification des paramètres du modèle . . . . .	24
2.2.1    Modélisation des actionneurs . . . . .	26

2.3	Équilibres stationnaires . . . . .	27
2.3.1	Équilibre stationnaire sans vent . . . . .	27
2.3.2	Équilibre stationnaire en présence de vent . . . . .	29
2.4	Dynamiques linéarisés . . . . .	33
2.4.1	Dynamique linéarisé sans vent . . . . .	33
2.4.2	Dynamique linéarisé en présence de vent . . . . .	35
2.5	Conclusion du Chapitre 2 . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Commande hybride</b>	<b>45</b>
3.1	Motivation . . . . .	45
3.2	Contrôleur par retour d'état non-linéaire . . . . .	46
3.3	Contrôleur par retour d'état linéaire . . . . .	47
3.4	Conception d'une commande locale-globale basée sur l'hystérésis . . . . .	49
3.5	Conclusion du Chapitre 3 . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Étude longitudinale sur une maquette à trois degrés de liberté</b>	<b>55</b>
4.1	Présentation de la maquette expérimentale . . . . .	55
4.1.1	Motivation de cette maquette . . . . .	55
4.1.2	Description physique, capteur et actionnement . . . . .	56
4.1.3	Simulation des mouvements du drone . . . . .	59
4.2	Contrôle linéaire, PI à 3 DOF . . . . .	60
4.2.1	Description du schéma de contrôle . . . . .	60
4.2.2	Optimisation $H_\infty$ . . . . .	62
4.3	Maquette expérimentale . . . . .	62
4.3.1	$H_\infty$ -based optimization . . . . .	62
4.4	Résultats . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Commande proportionnelle intégrale d'un drone convertible à 6 degrés de liberté</b>	<b>65</b>
5.1	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof . . . . .	65
5.2	Integral-based linear control . . . . .	65
5.2.1	Description of the control scheme . . . . .	65
5.2.2	Zero-wind $H_\infty$ -based controller tuning . . . . .	69
5.2.3	Multimodel $H_\infty$ -based controller tuning . . . . .	70
5.3	Experimental flight with open wind tunnel . . . . .	74
5.4	Maquette expérimentale : 6 Dof . . . . .	75
5.5	Résultats . . . . .	75

---

<b>6 Modélisation d'un drone à aile libre rotation libre</b>	<b>83</b>
6.1 Design et modélisation d'un drone : Colibri . . . . .	83
6.2 Design and modelling of Colibri UAV . . . . .	83
6.3 State estimation . . . . .	88
6.3.1 Sensors placement . . . . .	88
6.3.2 Angular speed estimation . . . . .	89
6.3.3 Wing state estimation . . . . .	90
6.3.4 Fuselage orientation estimation . . . . .	92
<b>7 Commande d'un drone à aile libre rotation libre</b>	<b>95</b>
7.1 Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone . . . . .	95
7.2 Experimentation . . . . .	96
7.3 Commande Udwadia-Kalaba . . . . .	97
7.4 Vols expérimentaux . . . . .	97
<b>Conclusion</b>	<b>99</b>
<b>A Exemple d'annexe</b>	<b>101</b>
A.1 Exemple d'annexe . . . . .	101
<b>Bibliographie</b>	<b>103</b>



# Liste des figures

1	Structure <i>quadplanes</i> proposée par [Avy 2023]. . . . .	3
2	Structure <i>Tiltrotor</i> proposée par [Flores 2014], dans deux configurations, vol stationnaire et d'avancement. . . . .	4
3	Structure <i>tiltrotor</i> proposée par [Smeur 2020, Fernandez 2023b, Pfleimlin 2006]. . . . .	5
4	Structure <i>tiltwings</i> proposée par [Dufour 2024, Ostermann 2012]. . .	5
5	Représentation de la pression dynamique sur la voilure de DarkO lors d'un vol d'avancement. . . . .	7
6	Représentation temporelle des modèles de perturbations de vent. . .	9
7	Todo. . . . .	10
8	Todo. . . . .	12
1.1	Phase de vol d'un drone <i>tailsitters</i> , DarkO. . . . .	15
2.1	Vue de dessus d'un autopilote Apogee v1.00. . . . .	18
2.2	Repère de référence de DarkO avec une représentation schématique des actionneurs. . . . .	19
2.3	Réponse entrée-sortie de l'ensemble moteur/hélice. . . . .	25
2.4	Montage d'un pendule bifilaire pour l'identification de l'inertie ( $\mathbf{J}$ ) de DarkO. . . . .	25
2.5	Identification de l'inertie ( $\mathbf{J}$ ), à partir des mesures issues du pendule bifilaire 2.4. . . . .	26
2.6	Montage de DarkO sur un banc de mesure face à une soufflerie ouverte.	27
2.7	Les paramètres ( $\tau, \delta, \theta$ ) de l'ensemble des points d'équilibres (surface) obtenue à l'aide du Théorème 1 et de l'Algorithme 1 pour un vent constant horizontal et vertical ( $w_{rx}, w_{rz}$ ), avec les saturations des actionneurs (rose). . . . .	33
2.8	Section des surfaces de la Figure 2.7 pour $w_{rz} = 0 \text{ m s}^{-1}$ . . . . .	34
3.1	Simulation de la loi de commande non-linéaire avec la dynamique de DarkO (2.1). . . . .	48
3.2	Simulation du modèle complet (2.1) (continue) et simplifié (2.14) (pointillé) avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{lin}}$ défini dans (3.2) et comme une condition initiale $\tilde{\mathbf{x}}_0$ dans le bassin d'attraction. . . . .	50

3.3	Simulation divergente du modèle complet (2.1) avec $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{lin}}$ défini dans (3.2) et une condition initiale $\tilde{\mathbf{x}}_0$ en dehors du bassin d'attraction.	51
3.4	Simulation en boucle fermée avec le contrôleur hybride (3.4).	53
4.1	Montage à un degrés de liberté.	57
4.2	Modèle de DarkO à un seul degré de liberté devant le WindShape.	57
4.3	Architecture d'essai en vol virtuel : WindShape (a) ; capteur de vitesse (b) ; capteur de force et couple (c) ; encodeur rotatif (d) ; servomoteur (e) ; moteur <i>brushless</i> + ESC (f) ; LabJack (g) ; ordinateur de contrôle (h)	58
4.4	Proposed integral-based controller.	61
5.1	Proposed integral-based controller with the wind perturbation $\mathbf{w}$ , a plant-input perturbation $\mathbf{d}$ and a plant-output perturbation $\nu$ .	66
5.2	Simulation of the non-linear model (2.1) (solid line) and the linearized model (2.32) (dashed line) with increasing constant wind steps with the controller tuned using the zero-wind optimization of Section 5.2.2.	76
5.3	Diagrams of the singular values of the transfer functions in (5.8) at the first iteration of Algorithm 3.	77
5.4	Simulation of the non-linear model (2.1) (solid line) and the linearized model (2.32) (dashed line) with increasing constant wind steps with the controller tuned using the multimodel optimization of Algorithm 3 in Section 5.2.3.	78
5.5	DarkO's experimental flight in front of the open wind tunnel.	79
5.6	Experiment of the DarkO UAV in front of the wind tunnel with increasing constant wind levels (lower plot).	80
5.7	Statistical visualization of the hovering performance.	81
6.1	Inertial (I) and wing (W) reference frames and the Colibri architecture.	84
6.2	Inertial (I), fuselage (F) and wing (W) reference frames and forces acting on the Colibri UAV.	85
6.3	Position and orientation simulation of the multi-body UAV Colibri in closed loop with a simple double-loop controller.	93
6.4	Angular position measurement (black,top plot), wing gyro velocity measurement (blue,bottom plot), finite difference velocity estimation (green, bottom plot) and high-gain estimates (red curves)	94

---

7.1	Colibri experimental prototype. . . . .	97
7.2	Position and orientation of the reference frame wing in the first six graphs and pivot angle measurement on the last graph below during real flight. . . . .	98



# Liste des tableaux

1	Comparaison des architectures de drone. . . . .	2
1.1	Évolution des autopilotes paparazzi sur dix ans. . . . .	13
2.1	Paramètres numériques identifiés du modèle DarkO. . . . .	20
5.1	Standard deviation of the modeled sensor noise added to the simulated measurements. . . . .	68
5.2	Values of the positive weighting scalars $W_1$ – $W_5$ used in the execution of Algorithm 3. . . . .	72
6.1	Numerical parameters of the Colibri model. . . . .	84



# Liste des algorithmes

1	Obtention des paramètres d'équilibre en (2.17). . . . .	30
2	Détermination des matrices de la linéarisation de (2.32) . . . . .	42
3	Iterative multimodel controller gain tuning. . . . .	72



# Liste des abréviations

*API* Interface de programmation d'applications (*Application Programming Interface*)

*ESC* Contrôleurs électroniques de vitesse (*Electronic Speed Controller*)

*GPS* Géo-positionnement par satellite (*Global Positioning System*)

*IMU* Centrales inertielles (*Inertial Measurement Units*)

*MAV* Micro drone (*Micro Air Vehicle*)

*MCU* Microcontrôleurs (*Microcontroller Unit*)

*MCU* Microcontrôleurs (*Microcontroller Unit*)

*NED* Nord Est Bas (*North, East, Down*)

*PWM* Modulation de largeur d'impulsions (*Pulse Width Modulation*)

*VTOL* Drones à décollage et atterrissage verticaux (*Vertical Take-Off and landing*)



# Introduction

Ces dernières années, le domaine des drones s'est considérablement développé. En effet, de nombreux progrès ont été réalisés dans la conduite de vols autonomes, lesquels permettent de réaliser de nombreuses tâches longues, répétitives ou dangereuses, de manière plus sûre que des avions ou des systèmes télépilotés. Les drones ont fait leurs preuves dans de nombreuses applications civiles, alors qu'ils étaient auparavant conçus à des fins de surveillance et de destruction dans le secteur militaire.

La possibilité d'utiliser des systèmes de vols autonomes dans le secteur civil a été rendu possible par l'accessibilité croissante, proposée par l'industrie, de solutions à faible coût pour les applications d'imagerie aérienne. Ainsi, ce sont dans des domaines aussi variés que l'agriculture de précision, l'inspection des infrastructures civiles ou encore les opérations de sécurité que les drones autonomes sont aujourd'hui mobilisés, devenant alors un riche sujet de recherche.

La miniaturisation des équipements électroniques et mécaniques est à l'origine de l'essor d'une classe de drones de plus en plus petits. Souvent qualifiés de *Micro Air Vehicle* (MAV), leur petite taille leur permet d'intervenir dans des espaces confinés ou contraints. Ils n'ont, cependant, qu'une charge utile restreinte, souvent limitée à l'emport d'une caméra ou d'un colis de faible masse. Leur faible autonomie restreignant leur usage, la recherche s'est alors concentrée sur une solution permettant d'optimiser leur utilisation. En cela, les drones à décollage et atterrissage verticaux (*Vertical take-off and landing*; VTOL) répondent aux exigences.

## 0.1 Micros drones convertibles

### 0.1.1 Domaine de vol

Tout l'intérêt d'un drone convertible réside dans sa capacité à décoller et atterrir verticalement, tout en conservant une bonne efficacité énergétique en vol d'avancement, grâce à une aile. Cette aile a l'avantage de générer de la portance, laquelle s'oppose au poids du drone et permet d'assurer sa sustentation. La contrepartie de la génération de la portance est la traînée qui s'oppose à l'avancement et doit être contrée par une force de traction générée par les hélices. Nous pouvons définir l'efficacité énergétique comme le ratio entre le temps de vol et l'énergie électrique

nécessaire pour effectuer ce vol.

Afin de souligner la prééminence de l'efficacité énergétique de ce modèle convertible, il convient de la comparer avec celle d'un drone quadrirotor qui assure sa sustentation uniquement grâce à des hélices (à l'instar d'un hélicoptère), et à celle d'un drone à voilure fixe.

Architecture	Vitesse m s <sup>-1</sup>	Stationnaire	Temps de vol	Consommation
Convertible	[0 - 30]	Possible	Quelques heures	Faible
Quadrirotor	[0 - 16]	Possible	Quelques minutes	Forte
Voilure fixe	[8 - 30]	Impossible	Plusieurs heures	Variable

TABLE 1 – Comparaison des architectures de drone.

Nous observons qu'un drone convertible possède un domaine de vol bien plus important qu'un drone à voilure fixe, lequel ne sera pas en mesure de voler à très basse vitesse, et qu'un quadrirotor, dont l'autonomie va être limitée par sa consommation. En alliant autonomie et vol stationnaire, le modèle convertible répond aux exigences des missions civiles et militaires.

### 0.1.2 Types d'architecture des drones convertibles

La conception structurelle et aérodynamique d'un drone est le facteur principal permettant des transitions stables et fluides. De plus, il est nécessaire d'optimiser l'architecture pour une mission, de manière à être le plus efficace. Au vu de la diversité des tâches à réaliser, un grand nombre de modèles ont été proposés, lesquels sont généralement catégorisables en trois classes : *tiltrotor*, *tailsitter*, *tiltwing*. En ce qu'il s'agit des prémisses des convertibles, il paraît opportun d'ajouter aux trois grandes catégories précédemment citées dans les états de l'art [Saeed 2018, Ducard 2021, Misra 2022], la catégorie *quadplanes*.

#### *Quadplanes*

Les *quadplanes* résultent de la fusion d'un avion et d'un quadrirotor (comme visible sur la figure 1), ce qui permet un découplage de l'actionnement en fonction de la phase de vol. Le premier système de propulsion est composé de quatre hélices générant une force verticale permettant le contrôle lors des phases de décollage, d'atterrissement et stationnaire. Le second système de propulsion est composé d'une hélice propulsive supplémentaire afin de maintenir le vol d'avancement.

L'avantage de ce type d'architecture est sa grande robustesse. Effectivement, aucune pièce en mouvement n'est nécessaire pour réaliser la transition, ce que réduit



FIGURE 1 – Structure *quadplanes* proposée par [Avy 2023].

le risque de défaillance mécanique. Toutefois, l'inconvénient réside dans son manque d'efficacité. Lors d'un vol d'avancement, la portance sera générée par l'aile. Ainsi, il est possible de désactiver les rotors qui génèrent des perturbations aérodynamiques et des trainées parasites. Les axes des moteurs se retrouvent orthogonaux au flux d'air généré par le déplacement du drone, ce qui correspond au cas le plus défavorable en termes de trainée. De plus, la surcharge engendrée par l'emport de moteurs supplémentaires se traduit par une diminution de la charge utile transportable.

En termes de contrôle, un atout indéniable est la séparation des actionnements en fonction des phases de vols. Ainsi, l'architecture de commande sera basée sur un mécanisme de commutation permettant de choisir la loi de commande appropriée sur un critère de vitesse air. Ce critère est pertinent en ce qu'il est lié à la capacité de l'aile à générer de la portance induite par le flux d'air. Ainsi, à basse vitesse, le drone se stabilise avec l'actionnement quadrirotor et la loi de commande associée. Dans les vitesses plus importantes, la commutation de la loi permet de contrôler le drone en mode avion. Toutefois, le passage d'une loi à l'autre reste le point clé de la commande et demeure complexe et critique.

### ***Tiltrotor***

Les *tiltrotors* nécessitent l'utilisation d'un actionneur dédié à la modification de l'orientation des moteurs. Les rotors sont montés sur des arbres basculants actionnés et la transition du vol stationnaire au vol d'avancement (ou inversement) s'effectue progressivement en fonction de l'inclinaison du rotor. Les deux configurations sont représentées sur la figure 2. Ainsi, l'angle entre le souffle des hélices et l'aile peut être ajusté à chaque instant. Cet angle joue un rôle important dans le contrôle

des forces et des moments aérodynamiques : sa maîtrise permet de mieux gérer, non seulement, les performances aérodynamiques du vol lors des transitions, mais aussi la stabilité du système sur l'ensemble du domaine de vol. Malgré le fait que les *tiltrotor* embarquent un actionneur uniquement dédié à la transition, ce qui augmente la masse du drone, cette architecture est intéressante car elle permet d'utiliser les mêmes actionneurs pour assurer la sustentation en stationnaire et pour générer la traction en mode avion.

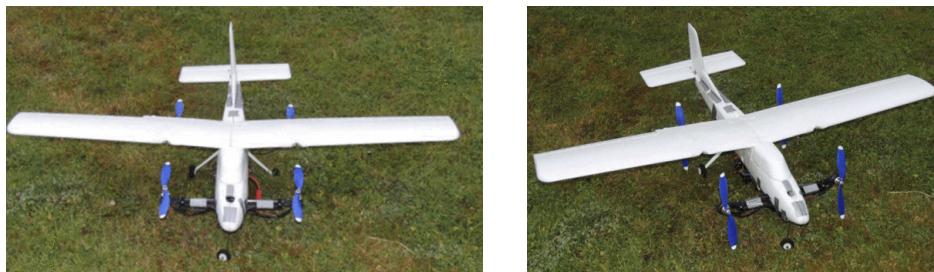


FIGURE 2 – Structure *Tiltrotor* proposée par [Flores 2014], dans deux configurations, vol stationnaire et d'avancement.

### ***Tailsitter***

Contrairement au *tiltrotor* qui se pose sur le fuselage de l'avion (figure 2), les *tailsitter* se posent à la verticale (voir figure centrale 3). Durant la transition du mode stationnaire au vol d'avancement, la structure entière bascule vers l'avant modifiant l'angle d'incidence de la voilure. Selon la configuration du *tailsitter*, la transition peut être réalisée soit par la génération du moment aérodynamique créé par les élévons, soit par le couple créé par le système de propulsion. Pendant le vol d'avancement, en position horizontale, le *tailsitter* vole comme un avion conventionnel sans dérive. En utilisant des techniques aérodynamiques classiques, les concepteurs peuvent optimiser le profil de l'aile du *tailsitter* pour le rendre plus endurant afin de réduire la consommation d'énergie. Grâce à ce processus d'optimisation aérodynamique, le *tailsitter* peut effectuer des missions de vol de plus d'une heure.

Ce modèle semble être la configuration la plus aboutie des drones convertibles, car il utilise les mêmes actionneurs dans tout le domaine de vol. Ainsi, aucune masse superflue n'est embarquée.

### ***Tiltwing***

La particularité des *tiltwings* réside dans le fait que les rotors sont inclinés en même temps que les ailes (voir figure 4). Un actionneur supplémentaire et puissant



FIGURE 3 – Structure *tiltrotor* proposée par [Smeur 2020, Fernandez 2023b, Pflimlin 2006].

est donc nécessaire pour surmonter le couple de l'aile afin de la positionner dans l'orientation souhaitée. La commande de cet actionneur doit être prise en compte lors de la conception des lois de commande. Pendant le décollage, l'atterrissement et les vols stationnaires, les ailes doivent être positionnées vers le haut afin de produire une force de poussée opposée au vecteur gravité. Dans ces phases de vol, lorsque les ailes sont orientées vers le haut, l'aéronef est plus vulnérable au vent et les lois de commande doivent rejeter ces perturbations. Dans la littérature, il existe plusieurs configurations d'ailes basculantes et différentes approches de contrôle conçues pour stabiliser leur dynamique de vol.

cite



FIGURE 4 – Structure *tiltwings* proposée par [Dufour 2024, Ostermann 2012].

Par ailleurs, les *freewing* sont une gamme en cours de développement à l'intérieur de l'architecture des *tiltwing*. Ils sont actionnés comme des *tiltwing*, excepté au niveau de l'axe de rotation entre l'aile et le fuselage. Cette rotation est laissée libre, ce degré de liberté permettant à l'aile de changer librement son incidence. Il en résulte un gain de masse car il est possible de supprimer l'actionneur puissant et lourd nécessaire à la rotation de l'aile. De plus, l'aile étant libre de s'orienter, les turbulences ont un impact plus faible sur la structure, ce qui rend les vols plus stables [Welstead 2012, Axtén 2021, Axtén 2023].

## 0.2 Propriétés des *tailsitters* et des *freewings*

D'un point de vue mécanique, les *tailsitters* et les *freewings* sont caractérisés comme des systèmes sous-actionnés avec une dynamique fortement couplée. Ces caractéristiques mécaniques rendent le processus de modélisation et d'identification difficile. Cela peut s'expliquer par le fait que, pour ce type de système, une entrée de commande donnée agit simultanément sur différentes dynamiques. Ainsi, l'identification de l'influence d'une entrée de commande donnée sur une dynamique particulière reste un processus important qui nécessite plus d'attention.

### 0.2.1 Actionnement

Dans ces deux architectures, il est courant de trouver des actionneurs basés sur des effets aérodynamiques. Ces actionneurs ont l'avantage d'être peu consommateurs en énergie. Ils sont mus par des servomoteurs qui consomment peu d'électricité proportionnellement au couple qu'ils génèrent. Dans le cas des ailes volantes, les surfaces aérodynamiques sont souvent placées sur la partie arrière des ailes et peuvent être utilisées symétriquement à l'instar de volets, ou anti-symétriquement comme des ailerons. Dans les phases de décollage, de vol stationnaire ou d'atterrissage, la plateforme est maintenue en vol par les hélices : il est donc nécessaire de dimensionner les groupes moteurs-hélices pour qu'ils puissent générer assez de force. En fonction des configurations, les moments peuvent être obtenus par des différentiels sur l'utilisation des moteurs ou bien par des surfaces aérodynamiques. Dans le cas de surfaces soufflées par le flux d'air des hélices, il existe un couplage des actionneurs qui complexifie la modélisation et le contrôle de ces architectures.

### 0.2.2 Aérodynamique

Lors d'un vol d'avancement, ces architectures assurent le maintien du vol en pâlier, en générant une force de portance grâce à leur surface alaire. Cette portance, s'opposant au poids, permet de maintenir une trajectoire. La force de trainée engendrée par l'aile et le fuselage est compensée par la composante horizontale de la poussée. En vol stationnaire, le poids est compensé par la traction de l'hélice. La relation d'équilibre est plus complexe lorsque nous évaluons l'ensemble des points d'équilibre lors de la transition d'un mode à l'autre. La transition équilibrée est assurée par le mélange correct des forces aérodynamiques et de propulsion.

Les interactions aérodynamiques entre l'hélice et la surface de l'aile sont connues pour être complexes et difficiles à modéliser. La vitesse induite par le souffle de l'hé-

l'effet de l'hélice entraîne une variation locale de l'angle d'attaque et des variations de pression dynamique au niveau des sections d'aile immergées, d'où une distribution différente de la portance. L'analyse de l'interaction entre l'hélice, l'aile et les élévons doit permettre d'obtenir de bonnes caractéristiques de vol et de tirer profit des combinaisons.

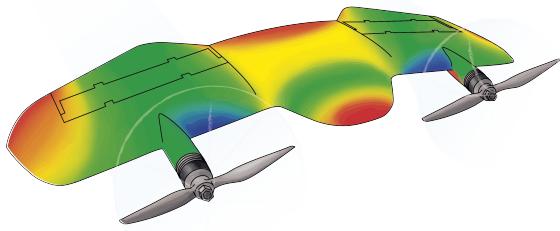


FIGURE 5 – Représentation de la pression dynamique sur la voilure de DarkO lors d'un vol d'avancement.

L'identification de ces effets aérodynamiques nécessite, pour chaque point de vol, les informations de l'air environnant, les valeurs des entrées de commande et les mesures des forces et moments aérodynamiques agissant sur le système. Le moyen le plus précis et le plus fiable d'identifier les phénomènes aérodynamiques est probablement de mener des campagnes en soufflerie, lesquelles sont particulièrement chronophages et coûteuses.

### 0.3 Modélisations

Dans le cas des drones convertible basculant, le modèle aérodynamique doit être correct dans les phases de transition. Cela nécessite l'extension de l'aérodynamique classique (faible incidence) à un angle d'attaque élevé et à un fonctionnement à faible vitesse. En outre, l'effet du souffle de l'hélice sur les profils aérodynamiques du véhicule doit être compris et pris en compte dans le modèle du système. Par exemple, les travaux de [Rohr 2021] sur un *tiltwing* identifient les zones d'interaction entre l'hélice et l'aile. Ils séparent clairement la génération de force et de couple lesquelles sont obtenues par la partie soufflée et non-soufflée de l'aile.

Des fonctions non linéaires continues décrivant les coefficients de portance et de traînée aérodynamiques sur toute la plage de l'angle d'attaque pour les *tiltrotors* ont été dérivées dans [Ducard 2014] et pour les *tiltwing* dans [Lustosa 2019, Lustosa 2017].

Il existe de nombreuses conceptions possibles pour un drone convertible. Bien que tous les modèles aient une structure commune, il existe des différences majeures dans la formulation réelle des termes de force et de couple. Celles-ci dépendent de la disposition des moteurs ou des hélices, de l'existence ou non de surfaces de contrôle aérodynamiques et de la forme du véhicule.

Un modèle précis est nécessaire pour les conceptions classiques de contrôle basées sur un modèle et en particulier pour les approches d'inversion dynamique ou de contrôle prédictif de modèle. Cependant, un modèle précis va nécessiter une campagne d'identification approfondie en soufflerie ou en vol en environnement contraint. Il se peut également que la complexité du modèle ne permette pas une utilisation directe dans le contrôle à cause de limitation matérielle des calculateurs embarqué.

Dans notre cas, nous nous sommes intéressés à l'impact du vent sur les architectures mentionnées précédemment. Il est donc nécessaire de modéliser le vent. Dans le cas de vent constant ou de cisaillement de vent, un modèle à échelons semble tout à fait approprié pour représenter le changement brusque de vitesse de vent. Pour les rafales, nous utiliserons plusieurs modèles, tel que le modèle "Chapeau mexicain" ou les "ondelettes de Morlet".

La fonction définissant le chapeau mexicain est :

$$\Psi_{mex}(t) = w_m - \frac{A_g}{2} (1 - \cos(2\pi f_g(t - t_{0,mex}))) \sin(3\pi f_g(t - t_{0,mex})) \quad (1)$$

et la fonction ondelette de Morlet est défini par :

$$\Psi_{mor}(t) = w_m + A_g \exp(-(t + t_{0,mor})) \cos(5 * (t - t_{0,mor})) \quad (2)$$

où  $w_m$  est le vent moyen sans perturbation,  $t_{0,mex}$  représente l'instant de début de perturbation et  $t_{0,mor}$  l'instant où la perturbation est maximale,  $A_g$  est l'intensité maximale de la perturbation et  $f_g$  est la fréquence de la perturbation. Les tracés de la figure 6 montrent la représentation temporelle des deux fonctions pour les valeurs

$w_m = 1 \text{ m s}^{-1}$ ,  $t_{0,mex} = 2 \text{ s}$ ,  $t_{0,mor} = 5 \text{ s}$ ,  $A_g = 1 \text{ m s}^{-1}$  et  $f_g = 0.8 \text{ rad s}^{-1}$ .

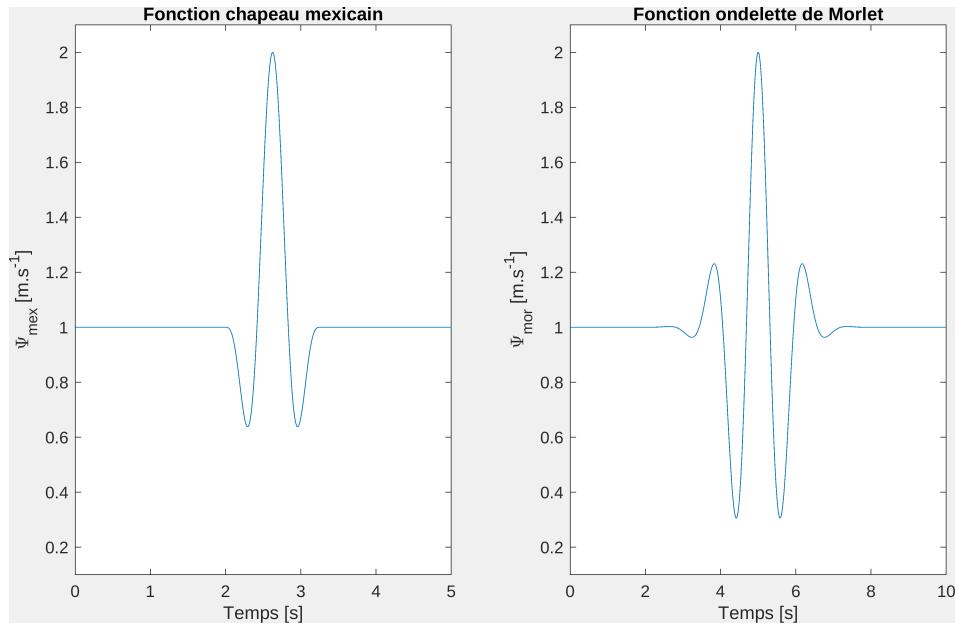


FIGURE 6 – Représentation temporelle des modèles de perturbations de vent.

Le modèle de Dryden est défini

$$\Phi_{u_g}(\Omega) = \sigma_u^2 \frac{2L_u}{\pi} \frac{1}{1 + (L_u\Omega)^2} \quad (3a)$$

$$\Phi_{v_g}(\Omega) = \sigma_v^2 \frac{2L_v}{\pi} \frac{1 + 12(L_v\Omega)^2}{(1 + 4(L_v\Omega)^2)^2} \quad (3b)$$

$$\Phi_{w_g}(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{2L_w}{\pi} \frac{1 + 12(L_w\Omega)^2}{(1 + 4(L_w\Omega)^2)^2} \quad (3c)$$

Le modèle de von Kármán

$$\Phi_{u_g}(\Omega) = \sigma_u^2 \frac{2L_u}{\pi} \frac{1}{(1 + (1.339L_u\Omega)^2)^{\frac{5}{6}}} \quad (4a)$$

$$\Phi_{v_g}(\Omega) = \sigma_v^2 \frac{2L_v}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(2.678L_v\Omega)^2}{(1 + (2.678L_v\Omega)^2)^{\frac{11}{6}}} \quad (4b)$$

$$\Phi_{w_g}(\Omega) = \sigma_w^2 \frac{2L_w}{\pi} \frac{1 + \frac{8}{3}(2.678L_w\Omega)^2}{(1 + (2.678L_w\Omega)^2)^{\frac{11}{6}}} \quad (4c)$$

## 0.4 Commandes

La figure 7 illustre les effets des actionneurs sur la dynamique de l'attitude des *tailsitters*. La rotation autours de l'axe  $x_b$  peut être contrôlé par des braquages

add axes on picture

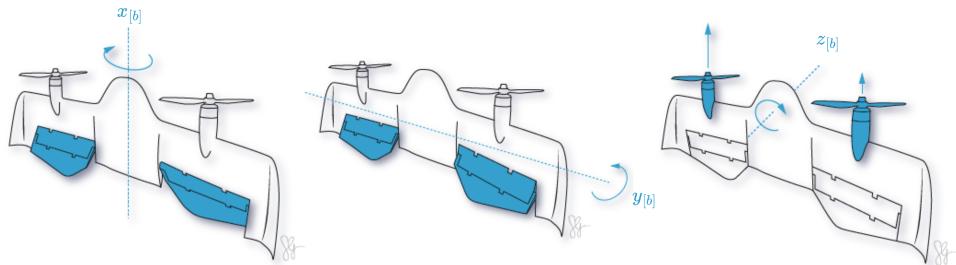


FIGURE 7 – Todo.

de volets asymétriques, l'angle de tangage (axe  $y_b$ ) par des braquages de volets symétriques et la rotation autour de l'axe  $z_b$  est contrôlée par un dispositif de poussée différentielle, ce qui permet d'obtenir un angle de tangage plus élevé. La rotation autour de l'axe de lacet est contrôlée par une configuration de poussée différentielle, qui crée un couple temporaire non nul autour de son axe. Le dispositif de poussée différentielle engendre une différence entre les rotations de l'hélice gauche et de l'hélice droite, et modifie ainsi la vitesse de rotation de l'avion et donc le comportement aérodynamique autour des volets.

## 0.5 Système de drone : Paparazzi

Un drone est composé de plusieurs pièces assemblées entre elle pour former la structure sur laquelle sont fixé des actionneurs, un autopilote et une charge utile (colis, caméra, capteur, etc.). L'élément central est l'autopilote qui assure la communication entre tous les éléments. Nous pouvons décomposer l'autopilote en deux parties, la partie matérielle et la partie logicielle. Le matériel est constitué d'un circuit imprimé (PCB) sur lequel des composants sont installé pour assurer les tâches relatives au vol. Ainsi, nous pouvons détailler les capteurs embarqués et le microcontrôleur avec l'ensemble de ses ports de communication.

### 0.5.1 Les capteurs d'un autopilote

Un autopilote comporte généralement un accéléromètre, un gyroscope, un magnétomètre et un baromètre.

**L'accéléromètre** à trois axes permet de mesurer l'ensemble de force appliquée sur le véhicule à l'exception du poids. Il est possible d'obtenir la position du drone

par double intégration de la mesure de l'accéléromètre, toutefois la position dérive rapidement en raison des bruits de mesure.

**Le gyroscope** à trois axes permet de mesurer les vitesses de rotation du véhicule. Il est possible d'obtenir l'orientation du drone par intégration de la mesure du gyroscope, toutefois l'orientation dérive rapidement en raison des bruits de mesure.

**Le magnétomètre** à trois axes indique la direction du nord magnétique. Il permet de se diriger par rapport à une référence connue. Le principal inconvénient de ce capteur est leur perturbation par les masses magnétiques environnantes ainsi que par les champs magnétiques parasites, induits par la proximité de moteurs électriques par exemple. Il est donc difficile de les utiliser à l'intérieur d'un bâtiment. L'influence magnétique de l'engin porteur et les perturbations dues à d'éventuels moteurs électriques peuvent être éliminées en qualifiant, de manière statique, les erreurs dues aux masses métalliques du véhicule et aux moteurs électriques (en fonction des tensions et courants d'alimentation).

**Le baromètre** est un capteur d'altitude basée sur la mesure de la pression atmosphérique.

Il est courant de retrouver plusieurs capteurs dans un même boîtier, que l'on nomme centrale inertie (Inertial Measurement Units, IMU). Elles sont composées au minimum d'un accéléromètre 3-axes et d'un gyroscope 3-axes, mais il est courant de trouver avec un magnétomètre 3-axes.

**Le GPS** est monté en extérieur de l'autopilote, ce système de géo-positionnement par satellite (*Global Positioning System*, GPS) permet d'obtenir un positionnement absolu du drone.

### 0.5.2 Le microcontrôleur d'un autopilote

Le microcontrôleur (Microcontroller Unit, MCU) est la pièce maîtresse de l'autopilote car elle permet d'effectuer l'ensemble des traitements nécessaires à la conduite du vol.

De plus il possède plusieurs ports de communication pour récupérer les données de capteur ou envoyer des ordres aux actionneurs.

dshot

### 0.5.3 Les logiciels d'un autopilote

Tout le fonctionnement d'un drone repose sur le logiciel qui permet de le faire voler, il se décompose en deux catégories, la partie sol et la partie embarquée.

### 0.5.4 Le segment sol

### 0.5.5 Le logiciel embarqué

Le logiciel embarqué

fusion de donnée estimation d'état

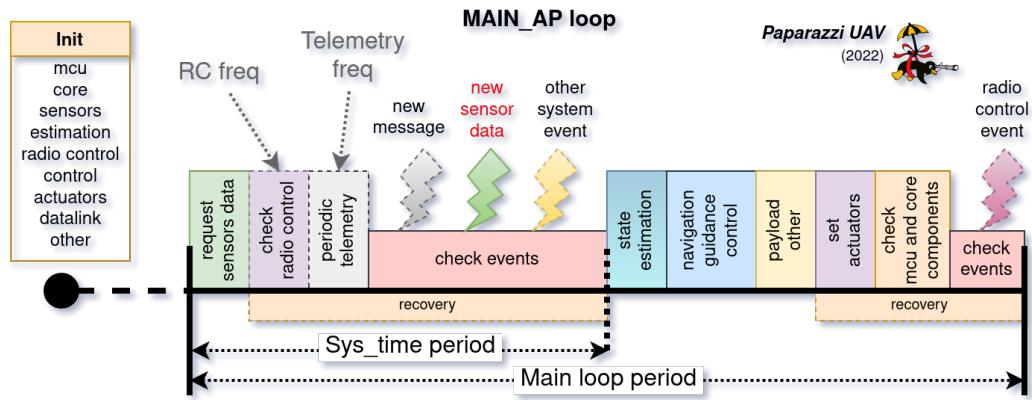


FIGURE 8 – Todo.

# CHAPITRE 1

# Objectifs

---

## Sommaire

1.1	Contexte opérationnel	13
1.2	Contexte de la thèse	14
1.3	Résumé	16

## 1.1 Contexte opérationnel

Tout l'intérêt des drones est leur capacité à se maintenir stabilisé sans intervention humaine. Ainsi, les opérateurs peuvent se concentrer sur la mission, sans devoir consacrer une grande attention au pilotage du drone.

Les nombreux progrès dans les systèmes d'estimation état permettent de connaître précisément l'orientation et la position des drones pour assurer la stabilisation, le guidage et la navigation. Les progrès sont liés à l'amélioration continue des capteurs, notamment des centrales inertielles constitué d'un accéléromètre, d'un gyroscope et d'un magnétomètre.

La Table 1.1 montre l'évolution des vitesses des microcontrôleurs (Microcontroller Unit, MCU) embarqué sur les autopilotes et de la réduction du bruit des capteurs inertIELS.

Type	Date	MCU	Vitesse	Capteur	Bruit RMS
Apogee	2013	STM32F4	168 MHz	MPU-9150	Gyro : 0.06 dps Accel : 4 mg
Chimera	2016	STM32F7	216 MHz	MPU-9250	Gyro : 0.1 dps Accel : 8 mg
Tawaki 1	2019	STM32F7	216 MHz	ICM-20600	Gyro : 0.04 dps Accel : 1 mg
Tawaki 2	2023	STM32H7	480 MHz	ICM-42688-P	Gyro : 0.028 dps Accel : 0.70 mg

TABLE 1.1 – Évolution des autopilotes paparazzi sur dix ans.

Sur une période de dix ans, nous pouvons observer que les microcontrôleurs ont doublé leur vitesse d'exécution, que les fabricants ont divisé par deux le bruit moyen sur les gyroscopes et par quatre le bruit moyen des accéléromètres. Ces évolutions continues permettent une amélioration de l'estimation du drone utilisée pour la stabilisation. Il en résulte une stabilité accrue et de nouvelles possibilités pour la commande des drones.

## 1.2 Contexte de la thèse

De nombreux travaux ont été menés sur les *tailsitters*, avec l'objectif de couvrir l'intégralité du domaine de vol. Nous pouvons citer en exemple le *tailsitter* à double rotor appelé « T-Wing » [Stone 2002, Stone 2008], un autre tail-sitter appelé « MAVion » [Lustosa 2015], ou le « JLion » et le « KH-Lion » [Ke 2017b]. Ces drones partagent une architecture similaire basée sur une aile supportant deux moteurs sur le bord d'attaque et soufflant deux élévons situés sur le bord de fuite. Cette architecture offre une plus grande robustesse que les *tiltrotors*, qui nécessitent des pièces mobiles, ce qui les rend plus fragiles et un actionneur puissant pour faire tourner l'ensemble moteur-hélice. La complexité inhérente à ces architectures nécessite un travail de modélisation en raison des nombreuses non-linéarités et couplages impliqués, en particulier en termes de modélisation des effets aérodynamiques. Dans ce contexte, l'interférence aérodynamique entre l'aile fixe et les rotors a été modélisée dans [Droandi 2015, Simmons 2022, Aref 2018], et les forces et moments d'hélice générés à des angles d'attaque élevés sont abordés dans [Fernandez 2023a]. Cependant, ces modèles sont complexes et ne sont que partiellement utilisables pour la conception des commandes.

Un autre point important est la représentation de l'attitude du drone. Il est possible de représenter son orientation par des angles d'Euler [Escareno 2006, Guerrero 2009, Zhang 2017], ce qui permet une compréhension intuitive, mais une singularité apparaît dans certaines phases de vol. Compte tenu de la grande manœuvrabilité, il est préférable de représenter l'attitude par un quaternion unitaire, ce qui élimine toute singularité [Ke 2017a]. De nombreuses publications modélisent les effets aérodynamiques en fonction de l'angle d'attaque et du dérapage générés par les hélices [Escareno 2007, Chiappinelli 2018]. Il est possible de choisir un autre modèle pour les interactions aérodynamiques entre les moteurs, les ailes et les élévons, comme présenté dans [Lustosa 2019]. La technique de modélisation présentée dans [Lustosa 2019] permet de disposer d'un modèle global couvrant l'ensemble de l'enveloppe de vol, grâce à ce que l'on appelle l'approche théorique  $\Phi$ . Bien que

l'approche théorique  $\Phi$  ne permette pas de prédire la chute brutale de la force de portance avec un angle d'attaque (AoA) croissant (qui est causée par un flux d'air turbulent) [Tal 2022], elle permet de représenter le drone avec suffisamment de précision pour capturer le comportement lors de manœuvres agressives.

Ce dernier est constitué des phases de vol suivantes :

1. Décollage vertical
2. Transition entre le vol stationnaire et le vol d'avancement
3. Vol d'avancement
4. Transition entre le vol d'avancement et le vol stationnaire
5. Atterrissage vertical

Bien que l'on puisse observer une symétrie dans la phase ① et ⑤, qui correspondent au décollage et à l'atterrissage vertical, une différence fondamentale est observée. Lors du décollage, la vitesse du drone engendrera un flux d'aire sur l'aile orienté dans le même sens que le flux d'air généré par les hélices. Cependant, lors de l'atterrissage, le flux d'air va se trouver inversé, le drone devant descendre, ce qui engendre une vitesse opposée à la direction du flux d'air des hélices. Cette inversion génère une instabilité qui doit être compensée par le contrôleur.

Le vecteur  $\vec{W}$  représente la perturbation de vent qui peut affecter le vol sur l'intégralité des cinq phases de vol. Toutefois, on observe que dans les phases décollage ①, de transition ② et ④ et d'atterrissage ⑤ le drone offre une grande surface verticale sujette au vent. Ainsi, il est nécessaire de traiter l'impact du vent sur cette architecture.

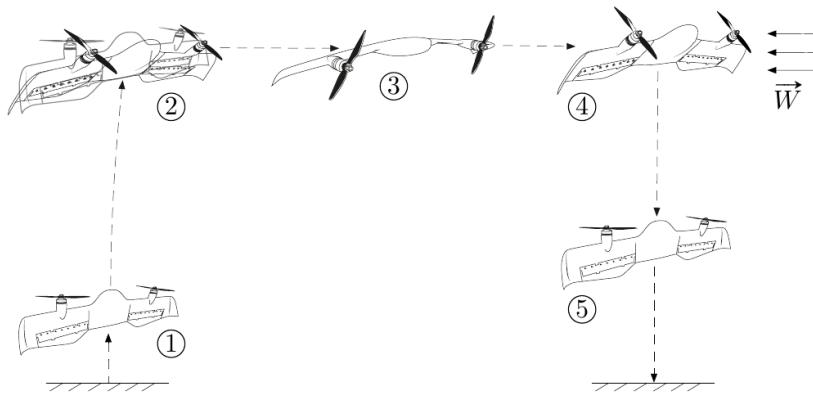


FIGURE 1.1 – Phase de vol d'un drone *tailsitters*, DarkO.

Actuellement, nous pouvons mentionner deux types d'architecture de commande ayant fonctionné sur ce tailsitter. La première est basée sur une inversion incrémentale

tale de la dynamique du drone (*Incremental Non-linear Dynamic Inversion*, INDI) et la seconde est basée sur le technique sans modèle (*Model free control*, MFC).

Les deux architectures sur lesquelles se sont concentré nos recherches sont celle de DarkO, un *tailsitters* et celle de Colibri un *freewings* basé sur une aile inspiré de DarkO en rotation libre autour d'un fuselage qui sera maintenu horizontal.

### 1.3 Résumé

et de perturba-  
n et metrique de  
intient de posi-  
n

## CHAPITRE 2

# Modélisation d'un drone convertible : DarkO

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Modèle du drone DarkO</b>	<b>17</b>
2.1.1	Modèle non-linéaire complet	19
2.1.2	Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse	22
<b>2.2</b>	<b>Identification des paramètres du modèle</b>	<b>24</b>
2.2.1	Modélisation des actionneurs	26
<b>2.3</b>	<b>Équilibres stationnaires</b>	<b>27</b>
2.3.1	Équilibre stationnaire sans vent	27
2.3.2	Équilibre stationnaire en présence de vent	29
<b>2.4</b>	<b>Dynamiques linéarisés</b>	<b>33</b>
2.4.1	Dynamique linéarisé sans vent	33
2.4.2	Dynamique linéarisé en présence de vent	35
<b>2.5</b>	<b>Conclusion du Chapitre 2</b>	<b>41</b>

---

## 2.1 Modèle du drone DarkO

DarkO, drone conçu et développé à l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC) de Toulouse (France), est un exemple clair de drone convertible avec une architecture dite *tailsitter*. DarkO est assemblé à partir de plusieurs pièces d'Onyx imprimées en 3D (un matériau très robuste composé de fibres de carbone omnidirectionnelles). Toutes les pièces sont emboîtées sur un seul axe, de sorte que le drone puisse facilement être démonté pour remplacer des pièces ou accéder à l'électronique embarquée.

L'autopilote embarqué est une carte Apogee<sup>1</sup> fabriquée à l'ENAC, voir Fig. 2.1.

---

1. <https://wiki.paparazziuav.org/wiki/Apogee/v1.00>

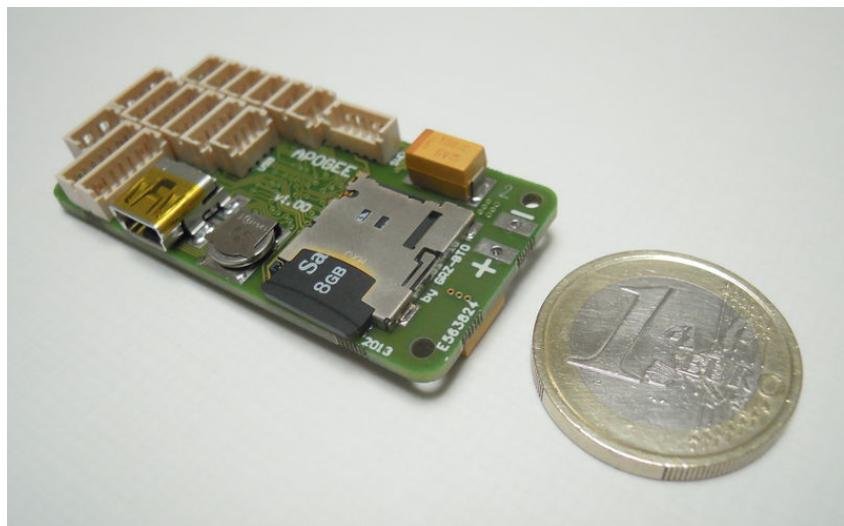


FIGURE 2.1 – Vue de dessus d'un autopilote Apogee v1.00.

L'autopilote offre la possibilité d'enregistrer les données de bord sur une carte mémoire SD, à la fréquence de contrôle de 500 Hz, ce qui permet un post-traitement efficace des données acquises. Le protocole de communication utilisé entre l'autopilote et les contrôleurs électroniques de vitesse (ESC) est le Dshot 600. Les ESC sont des AIKON AK32 35A flasher avec un firmware AM32. La communication sol-bord est réalisée via un canal bidirectionnel basé sur des modules XBee-PRO S1.

Les actionneurs de DarkO peuvent être décomposés en deux catégories. La première est composée de deux hélices (T-Motor T5147) placées symétriquement à l'avant de l'aile (illustrées en **noir** dans la Fig. 2.2) et alimentées par deux moteurs électriques (T-Motor F30 2300kv) générant une traction selon l'axe  $x_b$ . La seconde catégorie est relative aux actionneurs aérodynamiques. Ainsi, le drone possède deux élevons, placés à l'arrière de l'aile (illustrés en **bleu** dans la Fig. 2.2), agissant en tant que surfaces de contrôle. Les élevons génèrent des forces et des moments en modifiant leur incidence relativement au flux d'air dans lequel ils sont placés. Ce flux d'air peut être généré par le vent relatif (lié à la vitesse du drone), le vent extérieur, mais aussi par le souffle des hélices. Les élevons sont commandés par deux servomoteurs MKS DS65K.

La figure 2.2 montre le modèle de DarkO, ainsi qu'un repère de référence inertiel *North, east, down* (NED) (ou repère terrestre) “i” lié à la surface de la Terre, et un repère corps ‘b’ attaché au drone, avec  $x_b$  correspondant à l'axe de roulis (l'axe des hélices dans le plan  $z_b = 0$ ),  $y_b$  l'axe de tangage (la direction des ailes),  $z_b$  l'axe de lacet. En utilisant la même notation que dans [Lustosa 2019], le couple

uver un syno-  
me

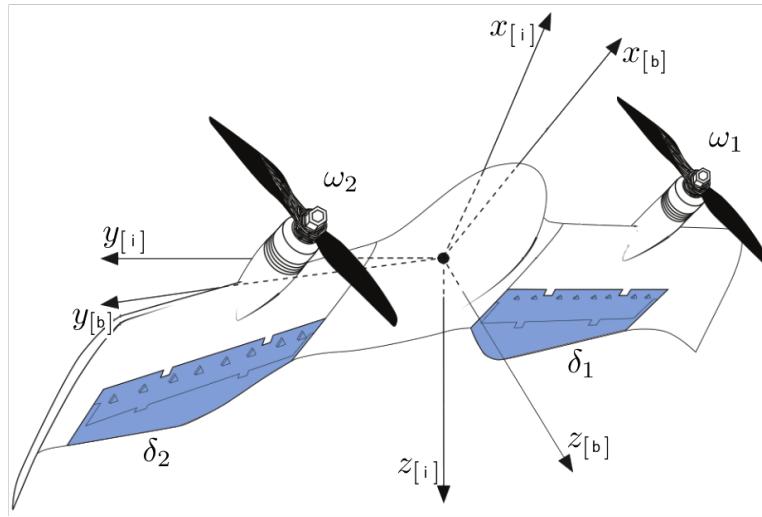


FIGURE 2.2 – Repère de référence de DarkO avec une représentation schématique des actionneurs.

hélice/élévateur gauche et droit sont désignés par les indices  $i = 1$  (gauche) et  $i = 2$  (droite). La convention de signe sera définie comme positive pour les positions des élévons  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  lorsqu'ils créent un moment à cabrer avec les hélices tournant dans des directions opposées avec des vitesses angulaires  $\omega_1 > 0$  et  $\omega_2 < 0$ , respectivement.

### 2.1.1 Modèle non-linéaire complet

En exploitant la modélisation présentée dans [Lustosa 2019] et [Olszanecki Barth 2020], un modèle précis de la dynamique de DarkO décrit la position  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  du centre de gravité et sa vitesse  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^3$ , son orientation, bien représentée par un quaternion  $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4 : |\mathbf{q}| = 1\}$ , et de sa vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}_b$ , représentée dans le repère du corps, qui satisfait  $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes [\begin{smallmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{smallmatrix}]$ , où  $\otimes$  représente le produit hamiltonien (voir [Lustosa 2019, Olszanecki Barth 2020] ou le tutoriel [Hua 2013] pour plus de détails). En choisissant l'état global comme produit hamiltonien

$$\mathbf{x} := (\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_b),$$

le modèle mathématique, dérivé dans [Lustosa 2019], dépend d'un ensemble de paramètres énumérés dans le tableau 2.1, où nous indiquons également la valeur obtenue à partir d'une identification du système [Sansou 2022a]. Le modèle dynamique peut être écrit comme ci-dessous :

Paramètres et coefficients	Valeurs	Unités
$m$ (Masse du drone)	0.519	kg
$b$ (Envergure)	0.542	m
$c$ (Corde aérodynamique)	0.13	m
$\mathbf{B} = \text{diag}(b, c, b)$	$\text{diag}(0.542, 0.13, 0.542)$	m
$S$ (Surface de l'aile)	0.026936	$\text{m}^2$
$S_{\text{wet}}$ (Surface soufflée)	0.0180	$\text{m}^2$
$S_p$ (Surface des hélices)	0.0127	$\text{m}^2$
$\mathbf{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$	$\text{diag}(0.0067, 0.0012, 0.0082)$	$\text{kg m}^2$
$k_f$ (Poussée des hélices)	1.7800e-8	$\text{kg m}$
$k_m$ (Moment des hélices)	2.1065e-10	$\text{kg m}^2$
$p_x$ (Position en $x$ des hélices)	0.065	m
$p_y$ (Position en $y$ des hélices)	0.162	m
$a_y$ (Position en $y$ de la portance)	0.1504	m
$\xi_f$ (Portance des élevons)	0.2	—
$\xi_m$ (Moment des élevons)	1.4	—
$\rho$ (Densité de l'air)	1.225	$\text{kg m}^{-3}$
$C_d$ (Trainé)	0.1644	—
$C_y$ (Latéral)	0	—
$C_\ell$ (Portance)	5.4001	—
$\Delta_r$ (Centrage du drone)	-0.0145	m

TABLE 2.1 – Paramètres numériques identifiés du modèle DarkO.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v} \quad (2.1a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -mg + \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{F}_b, \quad (2.1b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \boldsymbol{\omega}_b \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_b, \quad (2.1d)$$

où  $\mathbf{g} := [0 \ 0 \ 9.81]^\top$  désigne le vecteur de gravité,  $m \in \mathbb{R}$  est la masse,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est le moment d'inertie diagonal (voir Tableau 2.1) et en partitionnant le quaternion  $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$  comme  $\mathbf{q} := [\eta \ \boldsymbol{\epsilon}^\top]^\top$ , la matrice de rotation correspondante est  $\mathbf{R}(\mathbf{q}) \in SO(3) := \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbb{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1\}$  est défini comme (voir [Hua 2013])

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) := \mathbb{I}_3 + 2\eta[\boldsymbol{\epsilon}]_\times + 2[\boldsymbol{\epsilon}]_\times^2. \quad (2.2)$$

D'après [Lustosa 2019], le vecteur de force  $\mathbf{F}_b$  et le vecteur de moment  $\mathbf{M}_b$  dans (2.1) dépendent (i) de l'état du système  $\mathbf{x}$ , (ii) de la perturbation  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ , représentant la vitesse du vent dans le référentiel inertiel, et (iii) de la commande

des actionneurs (voir Figure 2.2), comprenant la vitesse de rotation des deux hélices  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$  et la déflexion des élevons  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ . Considérons d'abord l'effet des commandes des actionneurs. Chaque hélice génère une poussée  $\mathbf{T}_i$  orientée dans la direction  $x$  du repère corps et un moment  $\mathbf{N}_i$  selon le même axe :

$$\mathbf{T}_i := \begin{bmatrix} \tau_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} k_f \omega_i^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_i := (-1)^i \frac{k_m}{k_f} \mathbf{T}_i, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

La position de chaque élévon  $\delta_i \in \mathbb{R}$  est assignée par un servomoteur qui impose un niveau d'efficacité (en termes de déviation du courant d'air) quantifié par deux matrices antisymétriques :

$$\Delta_i^f := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_f \delta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ -\xi_f \delta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_i^m := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_m \delta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ -\xi_m \delta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Les paramètres constants  $k_f, k_m, \xi_f, \xi_m$  apparaissant dans (2.3) et (2.4) sont listés dans la Table 2.1.

Avec les quantités ci-dessus, nous pouvons réarranger la dynamique donnée dans le tableau suivant [Lustosa 2019, eqns (97), (98)] (voir aussi [Sansou 2022a]) et exprimer  $\mathbf{F}_b$  et  $\mathbf{M}_b$  dans (2.1) comme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b := \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Phi^{(\text{fv})} ((\Delta_1^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_1 + (\Delta_2^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_2) \\ + \frac{1}{4} \rho S \Phi^{(\text{fv})} (\Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3) \|\mathbf{v}_b\| \mathbf{v}_b \\ + \frac{1}{4} \rho S \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3) \mathbf{B} \|\mathbf{v}_b\| \boldsymbol{\omega}_b, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}_b &:= \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + \left[ \begin{smallmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{T}_1 + \left[ \begin{smallmatrix} p_x \\ -p_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{T}_2 & (2.6) \\
&- \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left( \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} (\boldsymbol{\Delta}_1^m - \mathbb{I}_3) + \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} (\boldsymbol{\Delta}_1^m + \mathbb{I}_3) \right) \boldsymbol{T}_1 \\
&- \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left( \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} (\boldsymbol{\Delta}_2^m - \mathbb{I}_3) + \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} (\boldsymbol{\Delta}_2^m + \mathbb{I}_3) \right) \boldsymbol{T}_2 \\
&+ \frac{1}{4} \rho S \left( \left( \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} \right) \boldsymbol{\Delta}_1^m \right. \\
&\quad \left. + \left( \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} \right) \boldsymbol{\Delta}_2^m - 2 \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} \right) \|\boldsymbol{v}_b\| \boldsymbol{v}_b \\
&+ \frac{1}{4} \rho S \left( \left( \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{m}\omega)} \right) \boldsymbol{\Delta}_1^m \right. \\
&\quad \left. + \left( \left[ \begin{smallmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{smallmatrix} \right]_{\times} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} + \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{m}\omega)} \right) \boldsymbol{\Delta}_2^m - 2 \boldsymbol{B} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{m}\omega)} \right) \boldsymbol{B} \|\boldsymbol{v}_b\| \boldsymbol{\omega}_b,
\end{aligned}$$

où  $\boldsymbol{v}_b := \boldsymbol{R}^{\top}(\boldsymbol{q})(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$  représente la vitesse de l'air vu par le drone exprimé dans le repère du corps. Dans [Lustosa 2019], la valeur  $\|\boldsymbol{v}_b\|$  apparaissant dans les expressions de  $\boldsymbol{F}_b$  et  $\boldsymbol{M}_b$  est remplacé par la valeur  $\eta = \sqrt{\|\boldsymbol{v}_b\|^2 + \mu c^2 \|\boldsymbol{\omega}_b\|^2}$ , avec  $\mu \in \mathbb{R}$  étant un paramètre lié à l'identification du modèle. Toutefois, dans le cas de DarkO, l'identification fournit  $\mu = 0$  [Sansou 2022a]. Ainsi, nous présentons ici une description simplifiée. La matrice des coefficients aérodynamiques constants  $\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} & \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} & \boldsymbol{\Phi}^{(\text{m}\omega)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ , est défini dans [Olszanecki Barth 2020, eqs. (6)–(9)] comme  $\boldsymbol{\Phi}^{(\text{fv})} := \text{diag}(C_d, C_y, C_{\ell})$  et

$$\begin{aligned}
&\left[ \begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Phi}^{(\text{mv})} & \boldsymbol{\Phi}^{(\text{m}\omega)} \end{array} \right] := \\
&\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0.1396 & 0 & 0.0573 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta_r}{c} C_{\ell} & 0 & 0.6358 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0405 & 0 & 0.0019 \end{array} \right],
\end{aligned}$$

les valeurs numériques des constantes figurant dans le tableau 2.1 (ces valeurs numériques n'ont pas été indiquées dans [Lustosa 2019] et [Olszanecki Barth 2020] et sont données ici pour permettre de reproduire les résultats de nos simulations).

### 2.1.2 Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse

Dans la mesure où nous allons nous intéresser au maintien du drone en stationnaire, c'est-à-dire avec une vitesse du drone faible, nous pouvons simplifier la dynamique (2.1) en négligeant les effets aérodynamiques quadratiques dûs à la vi-

tesse  $\mathbf{v}_b$  et à la vitesse angulaire  $\boldsymbol{\omega}_b$  dans (2.5) et (2.6). Nous définissons le vecteur de commande :

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix}^\top, \quad (2.7)$$

lequel permet d'obtenir le modèle basse vitesse comportant les effets majeurs non-linéaires du vent :

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (2.8a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q})\left(\mathbf{M}_f(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_f(\mathbf{u})\|\mathbf{w}\|\mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w})\right), \quad (2.8b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_b \end{bmatrix}, \quad (2.8c)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_m(\mathbf{u})\|\mathbf{w}\|\mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w}), \quad (2.8d)$$

où les vecteurs  $\mathbf{M}_f(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{M}_m(\mathbf{u})$ , et les matrices  $\mathbf{D}_f(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{D}_m(\mathbf{u})$  proviennent de l'annulation des termes dépendant de la vitesse angulaire dans l'équation (2.5) et (2.6). Ils peuvent être développés en

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f(\mathbf{u}) &:= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Phi^{(\text{fv})} \left( (\Delta_1^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_1 + (\Delta_2^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_d\right) (\tau_1 + \tau_2) \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_\ell \xi_f (\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) &:= \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \mathbf{T}_1 + \begin{bmatrix} p_x \\ -p_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \mathbf{T}_2 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left( \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_1^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} (\mathbb{I}_3 + \Delta_1^m) \right) \mathbf{T}_1 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left( \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_2^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} (\mathbb{I}_3 + \Delta_2^m) \right) \mathbf{T}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{k_f} (\tau_1 - \tau_2) + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_\ell \xi_f (\delta_1 \tau_1 - \delta_2 \tau_2) \\ \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Delta_r C_\ell \xi_m (\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2) \\ (p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_d) (\tau_1 - \tau_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{4}\rho S \Phi^{(fv)} \left( \Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3 \right) \\ &= \frac{1}{4}\rho S \begin{bmatrix} -2C_d & 0 & C_d\xi_f(\delta_1 + \delta_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_\ell\xi_f(\delta_1 + \delta_2) & 0 & -2C_\ell \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{4}\rho S \left( \left( \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_x \Phi^{(fv)} + \mathbf{B}\Phi^{(mv)} \right) \Delta_1^m \right. \\ &\quad \left. + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_x \Phi^{(fv)} + \mathbf{B}\Phi^{(mv)} \right) \Delta_2^m - 2\mathbf{B}\Phi^{(mv)} \right) \\ &= \frac{1}{4}\rho S \begin{bmatrix} -a_y C_d \xi_m (\delta_1 - \delta_2) & 0 & 0 \\ \Delta_r C_\ell \xi_m (\delta_1 + \delta_2) & 0 & 2\Delta_r C_\ell \\ 0 & 0 & -a_y C_\ell \xi_m (\delta_1 - \delta_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où l'on observe l'effet non linéaire d'un vent non nul, qui est non linéaire avec  $\mathbf{q}$ ,  $\|\mathbf{v}_b\|$  et  $\mathbf{w}$ . Comme dans [Olszanecki Barth 2020, eqn. (10)] et selon la formule de Diederich, nous obtenons  $C_\ell = C_d + \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{1 + (\frac{AR}{2})^2}}$  où  $AR = \frac{b^2}{S}$  est l'allongement de l'aile. Nous observons le couplage des actionneurs ( $\delta_1\tau_1 + \delta_2\tau_2$ ) dans les expressions des matrices  $\mathbf{M}_f(\mathbf{u})$  et  $\mathbf{M}_m(\mathbf{u})$ .

## 2.2 Identification des paramètres du modèle

Les valeurs numériques du tableau 2.1 ont été obtenues par une campagne d'identification du modèle [Sansou 2022a]. En particulier, le coefficient  $k_f$  a été identifié à partir de l'équation (2.3), qui relie la vitesse de rotation du moteur  $\omega_i$  à la traction générée, à la vitesse de rotation minimale et maximale et à la constante de temps de la chaîne d'actionnement du moteur.

Pour effectuer, l'identification des 3 coefficients principaux (diagonaux) de la matrice d'inertie, nous avons réalisé un montage d'un système de pendule bifilaire. Cette méthode est largement utilisée dans le domaine des drones [Jardin 2007], et est basée sur la période d'oscillation autour de chacun des trois axes ( $x_b, y_b, z_b$ ) du drone, lequel est suspendu par deux fils, ce qui forme un pendule de torsion comme le montre la Fig. 2.4.

Lors de la mesure, l'autopilote est utilisé pour réaliser une acquisition, à 500 Hz, de l'orientation du drone. Le drone est positionné avec un angle non nul vis-à-vis de la position d'équilibre du pendule bifilaire puis il est lâché sans vitesse initiale. Le couple de rappel engendré par les deux fils engendre des oscillations amorties

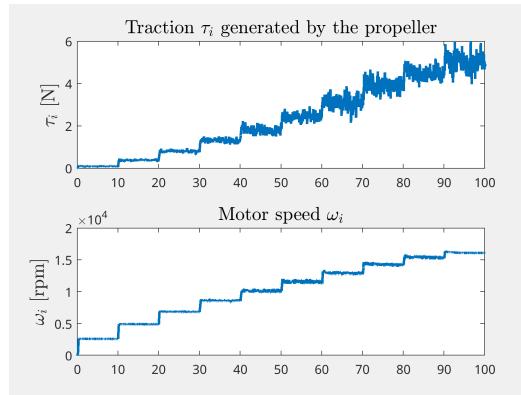


FIGURE 2.3 – Réponse entrée-sortie de l’ensemble moteur/hélice.

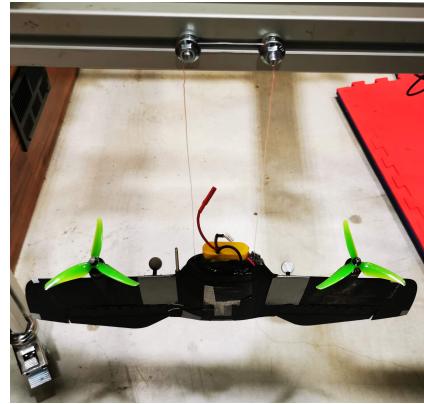


FIGURE 2.4 – Montage d’un pendule bifilaire pour l’identification de l’inertie ( $\mathbf{J}$ ) de DarkO.

(Voir la figure 2.5). Il est nécessaire de connaître la longueur des fils  $h$  ainsi que leur écartement  $D$  pour réaliser l’identification. Ces valeurs sont mesurées directement sur le banc de mesure pour chacune des trois configurations.

Une fois la mesure réalisée, nous utilisons l’outil *Simulink Design Optimization* pour obtenir les valeurs de l’amortissement visqueux  $C$ , et de l’inertie sur l’axe mesuré  $I$  à partir du modèle suivant :

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\dot{\theta} + \left(\frac{mgD^2}{4Ih}\right) \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - 0.5\left(\frac{D}{h}\right)^2(1 - \cos \theta)}} = 0$$

où  $\theta$  est l’angle mesuré par l’autopilote à l’aide du code d’estimation d’état utilisant le gyroscope, l’accéléromètre et l’Optitrack.

Les autres coefficients ont été estimés à l’aide d’un montage sur un capteur

ajouter explication  
sur l’identification

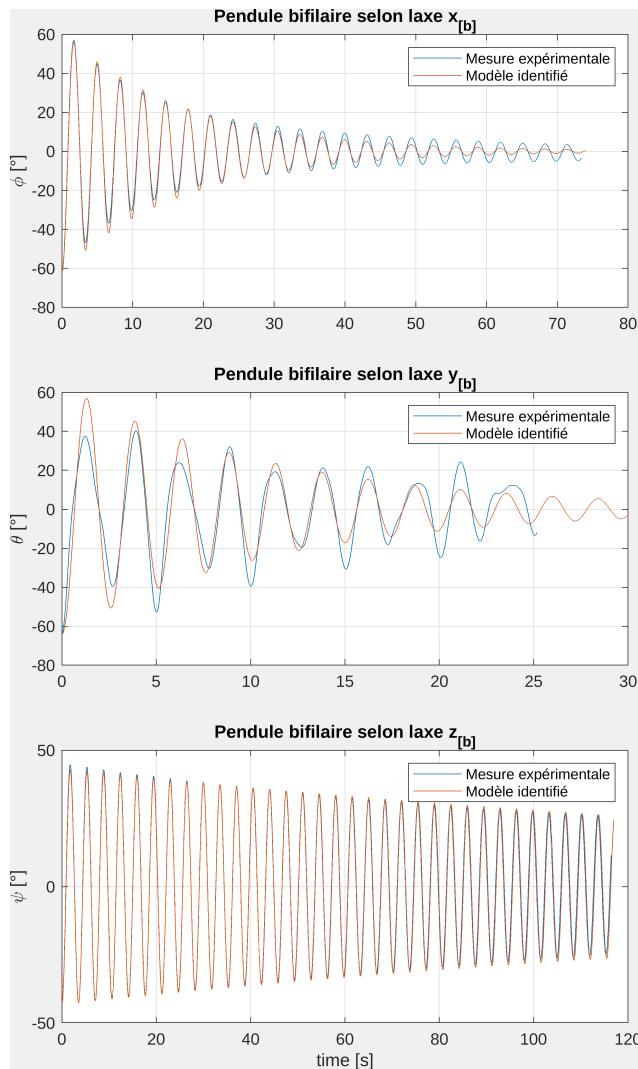


FIGURE 2.5 – Identification de l'inertie ( $J$ ), à partir des mesures issues du pendule bifilaire 2.4.

de force et moment à 6 DOF. Ces mesures permettent d'estimer la surface. Il est intéressant de noter que la surface soufflée par les hélices représente 67 % de la surface totale du drone.

### 2.2.1 Modélisation des actionneurs

Les actionneurs de DarkO ont des dynamiques qui limitent leur action en terme d'amplitude et de vitesse.

Pour les moteurs électriques générant la traction par les hélices, il existe deux causes de saturation. Une saturation à haute vitesse liée à la tension maximale

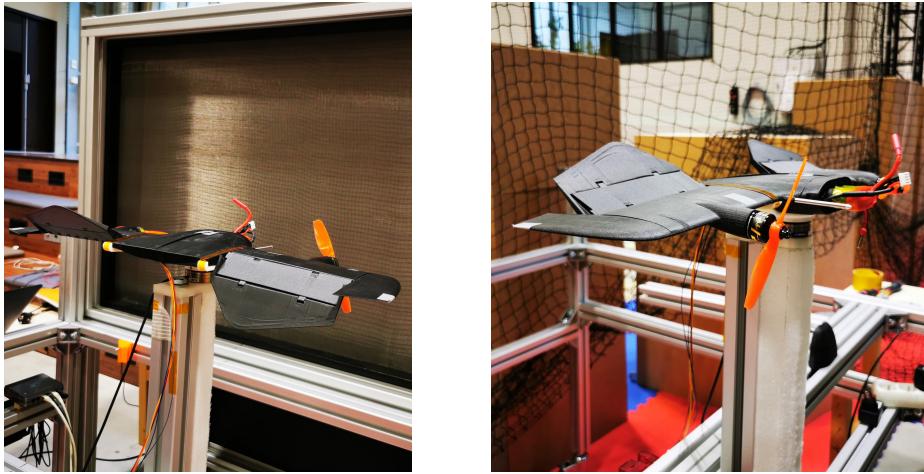


FIGURE 2.6 – Montage de DarkO sur un banc de mesure face à une soufflerie ouverte.

du moteur et une saturation basse vitesse liée à la vitesse minimale de commutation de bobine du moteur, pour maintenir la rotation. De plus, ces saturations permettent d'obtenir un modèle réaliste à énergie finie. Elles correspondent à la contrainte suivante :  $\omega_i \in [2500, 16000] \text{ rpm} = [262, 1675] \text{ rad s}^{-1}$ ,  $i = 1, 2$ . En termes de dynamique, nous avons représenté la chaîne d'actionnement du moteur (composée de l'ESC, du moteur et de l'hélice) par une fonction de transfert du premier ordre ayant une constante de temps égale à 0.0125 s, ce qui fournit un système d'actionnement assez agressif.

Les saturations impactant les élevons proviennent des limites physiques des servomoteurs et du débattement limité par la forme de l'UAV,  $\delta_i \in [-30 ; 30]^\circ$ ,  $i = 1, 2$ . La saturation la plus importante ici est peut-être la bande passante de l'actionneur (due à l'actionnement du servomoteur), qui est modélisée par une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps 0.05 s.

## 2.3 Équilibres stationnaires

### 2.3.1 Équilibre stationnaire sans vent

Nous proposons une modification du vecteur de commande, dans le cas d'un équilibre sans vent  $\mathbf{w}_{\text{eq}} = 0$ , basé sur le couplage des actionneurs.

$$\mathbf{u}_{\text{nowind}} := [\tau_1 \ \tau_2 \ \delta_1 \tau_1 \ \delta_2 \tau_2]^\top \quad (2.13)$$

Nous soulignons que le vecteur  $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$  dans (2.13) correspond à une transformation non inversible des actionneurs de DarkO correspondant à  $\mathbf{u} := [\tau_1 \ \tau_2 \ \delta_1 \ \delta_2]^\top$  ((2.7)). Néanmoins, si l'on impose les contraintes de saturation décrites dans la section 2.2.1, il est possible de déterminer de manière unique  $\mathbf{u}$  à partir d'une valeur souhaitée de  $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$  dans (2.13), car les valeurs positives non nulles de  $\tau_1$  et  $\tau_2$  peuvent être déterminées à partir des deux premières composantes de  $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$ , puis  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont facilement construites à partir des deux dernières composantes de  $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$ .

Nous obtenons un modèle linéaire vis-à-vis de sa commande, dérivé de (2.8) en imposant  $\mathbf{w} = 0$ ,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \quad (2.14a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes [\begin{smallmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{smallmatrix}] \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \quad (2.14b)$$

avec les matrices

$$[\mathbf{F} \mid \mathbf{M}] := \left[ \begin{array}{cccc|cccc} a_f & a_f & 0 & 0 & a_m & -a_m & b_m & -b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_m & c_m \\ 0 & 0 & b_f & b_f & d_m & -d_m & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (2.15)$$

et les scalaires

$$\left[ \begin{array}{c|c} a_f & b_f \\ \hline a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} 1 - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_d & -\frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_\ell \xi_f \\ \hline \frac{k_m}{k_f} & \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_\ell \xi_f \\ \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Delta_r C_\ell \xi_m & p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_d \end{array} \right].$$

Tous les couples d'équilibre  $(\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$  sont paramétré par une rotation arbitraire autour de l'axe  $z_{[i]}$  définie par  $\beta \in [-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}]$ . Le point d'équilibre a pour expression

$$\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}} = \frac{mg}{(1 - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_d)} [1 \ 1 \ 0 \ 0]^\top \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{q}_{\text{eq}} = [\eta_{\text{eq}} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}}^\top]^\top = \left[ \begin{array}{c} \sqrt{\frac{1}{2}-\beta} \ \beta \ \frac{2\beta^2-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\beta}} \ \beta \end{array} \right]^\top. \quad (2.16b)$$

En présence d'un vent nul, le degré de liberté  $\beta$  permet d'orienter le drone dans n'importe quelle direction horizontale.

### 2.3.2 Équilibre stationnaire en présence de vent

À partir des modèles (2.1) et (2.8), nous caractérisons un équilibre stationnaire en présence d'un vent constant  $\mathbf{w}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$  exprimé dans le repère inertiel, tel que  $[w_x] \neq 0$ , c'est-à-dire qu'il existe toujours un vent horizontal non nul. Ainsi, pour chaque position de référence  $\mathbf{p}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^3$ , un ensemble de couple état/commande possible est  $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}}) = (\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{p}_{\text{eq}}, \mathbf{v}_{\text{eq}}, \mathbf{q}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\omega}_{\text{b},\text{eq}})$  obtenu à l'aide de

$$\mathbf{u}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} \tau & \tau & \delta & \delta \end{bmatrix}^\top \quad (2.17a)$$

$$\mathbf{q}_{\text{eq}} = \mathbf{q}_{\text{eq}\psi} \otimes \mathbf{q}_{\text{eq}\theta} \quad (2.17b)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{b},\text{eq}} = 0, \quad \mathbf{v}_{\text{eq}} = 0, \quad (2.17c)$$

où nous définissons deux quaternions  $\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}$  et  $\mathbf{q}_{\text{eq}\theta}$  permettant d'exprimer l'ensemble des conditions de vent dans le repère inertiel vers un repère tourné où le vent est toujours contenu dans le plan  $x - z$ . Grâce à cette transformation, nous exprimons un ensemble continu d'équilibre en présence de vent.

$$\mathbf{q}_{\text{eq}\theta} := \begin{bmatrix} \cos(\frac{\theta}{2}) & 0 & \sin(\frac{\theta}{2}) & 0 \end{bmatrix}^\top \quad (2.18)$$

$$\mathbf{q}_{\text{eq}\psi} := \begin{bmatrix} \cos(\frac{\psi}{2}) & 0 & 0 & \sin(\frac{\psi}{2}) \end{bmatrix}^\top. \quad (2.19)$$

Les paramètres de l'équilibre sont la rotation horizontale  $\psi = \arctan(w_x, w_y)$ , l'angle d'inclinaison  $\theta$ , la poussée des hélices  $\tau$ , et la déflexion des élévons  $\delta$ . Ils peuvent être obtenus à partir de l'algorithme 1.

**Théorème 1.** *Pour tout vent constant,  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top \in \mathbb{R}^3$  ayant une composante horizontale non nulle  $[w_x]$ , les équations (2.19)–(2.18) avec  $\theta$ ,  $\tau$  et  $\delta$  sélectionné selon l'Algorithme 1 caractérisent un couple d'équilibre  $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$  pour la dynamique non linéaire (2.1) et (2.8).*

*Démonstration.* Dans un premier temps, notons qu'avec l'expression de  $\mathbf{R}$  (2.2) et l'expression de  $\psi$  dans l'étape 1 de l'Algorithme 1, on peut définir la perturbation à l'équilibre tournée  $\mathbf{w}_{\text{r},\text{eq}} := \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{\text{eq}} := \mathbf{R}^\top (\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}) \mathbf{w}_{\text{eq}}$  (voir (2.20) dans l'Algorithme 1), qui correspond à la rotation nécessaire pour aligner l'axe  $x_{[\text{b}]}$  du repère corps avec la direction du vent. Une fois que le drone est face au vent, il subit un vent avec une composante latérale  $y$  nulle et il peut ajuster son angle d'inclinaison  $\theta$  afin de générer la poussée et la portance nécessaires pour compenser les effets du

**Algorithme 1** Obtention des paramètres d'équilibre en (2.17).

**Entrée :** Vecteur vent  $\mathbf{w}_{\text{eq}} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top$

**Sortie :** Paramètres  $\psi, \theta, \tau, \delta$  dans (2.17)

- 1: Détermine l'angle  $\psi = \text{atan}2(w_x, w_y)$  de manière à obtenir  $\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}$  dans (2.19)
- 2: Détermine la perturbation tournée  $\mathbf{w}_r$  avec la composante  $y$  nulle, en utilisant  
 $\mathbf{R}_\psi := \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ , selon

$$\mathbf{w}_{r,\text{eq}} := \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} := \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}) \mathbf{w}_{\text{eq}} = \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{\text{eq}} \quad (2.20)$$

- 3: Détermine l'angle d'inclinaison  $\theta$  de manière à obtenir  $\mathbf{q}_{\text{eq}\theta}$  dans (2.17b) :

$$\theta = -\tan^{-1} \left( \frac{w_{rz}}{w_{rx}} + \frac{2mg}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (1 - \frac{\xi_f}{\xi_m}) w_{rx}} \right) \quad (2.21)$$

- 4: Pour des raisons de commodité, nous définissons les scalaires

$$\begin{bmatrix} a | b \\ c | d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2S_{\text{wet}} C_\ell mg \sin \theta \xi_f & 2S_{\text{wet}} C_d C_\ell \rho \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_x^b \\ -4SS_p C_\ell \rho \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_x^b \xi_f & \frac{b\xi_f}{2} \end{bmatrix}$$

et grâce à ces scalaires  $(a, b, c, d)$ , déterminons la traction des hélices  $\tau$  dans (2.17a) comme

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{S_p}{2S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f (4S_p - S_{\text{wet}} C_d)} \left( a + b + c + d + \sqrt{(a + b + c - d)^2 - 4(d^2 + ac - bd)} \right. \\ & \left. - \frac{4w_z^b d}{w_x^b} (d + c) + \frac{4w_z^b ad \cos \theta}{w_x^b C_\ell \sin \theta} \left( C_d - \frac{4S_p}{S_{\text{wet}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où

$$\begin{bmatrix} w_x^b \\ w_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{rx} \cos \theta - w_{rz} \sin \theta \\ w_{rx} \sin \theta + w_{rz} \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- 5: Déterminons la déflexion des élévons  $\delta$  comme

$$\delta = \frac{2mg \sin \theta}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_d \xi_f w_z^b} + \frac{w_x^b}{\xi_f w_z^b} - \frac{(4 - \frac{S_{\text{wet}}}{S_p} C_d)}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_d \xi_f w_z^b} \tau. \quad (2.23)$$

**Retourne :**  $\psi, \theta, \tau, \delta$

vent dans les directions longitudinale et verticale (l'effet latéral est nul en raison de l'orientation spécifique de l'appareil  $\psi$ ). Avec cette rotation  $\psi$ , il est possible d'exprimer le vent dans le repère corps comme étant

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{\text{eq}}^{\text{b}} &:= \begin{bmatrix} w_x^{\text{b}} \\ 0 \\ w_z^{\text{b}} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}_{\text{eq}\theta}) \mathbf{w}_{\text{r,eq}} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} w_{\text{rx}} \\ 0 \\ w_{\text{rz}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{\text{rx}} \cos \theta - w_{\text{rz}} \sin \theta \\ 0 \\ w_{\text{rx}} \sin \theta + w_{\text{rz}} \cos \theta \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.24)$$

Nous insistons sur le fait que  $w_x^{\text{b}}$  est toujours négatif et différent de zéro, car le drone est orienté dans la direction du vent grâce à la rotation engendré par  $\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}$ , et suite à l'hypothèse  $\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \neq 0$ .

L'équation (2.8a) montre qu'il est nécessaire d'avoir  $\mathbf{v}_{\text{eq}} = 0$  pour maintenir l'équilibre stationnaire. En multipliant (2.8b) par  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{eq}})$  donné dans (2.24), nous l'exprimons dans le repère corps. Comme nous appliquons la même commande  $\tau_1 = \tau_2 = \tau$  aux deux moteurs et la même commande au deux élévons  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , nous obtenons pour les deux modèles (2.1) et (2.8), l'équilibre des forces selon l'axe  $x_{[\text{b}]}$  donné par

$$(2 - \frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} C_d) \tau - \frac{1}{2} \rho S \| \mathbf{w}_{\text{eq}} \| C_d (w_x^{\text{b}} - \xi_f \delta w_z^{\text{b}}) - mg \sin(\theta) = 0 \quad (2.25)$$

et l'équilibre des forces selon l'axe  $z_{[\text{b}]}$  donné par

$$-\frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} \xi_f C_\ell \tau \delta - \frac{1}{2} \rho S \| \mathbf{w}_{\text{eq}} \| C_\ell (w_z^{\text{b}} + \xi_f \delta w_x^{\text{b}}) + mg \cos(\theta) = 0 \quad (2.26)$$

De manière similaire, à partir de (2.1d) et (2.8d), l'équilibre des moments autour de l'axe  $y_{[\text{b}]}$  permet d'obtenir

$$\frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} \Delta_r \xi_m C_\ell \tau \delta + \frac{1}{2} \rho S \Delta_r \| \mathbf{w}_{\text{eq}} \| C_\ell (w_z^{\text{b}} + \xi_m \delta w_x^{\text{b}}) = 0. \quad (2.27)$$

Pour calculer la solution du triplet  $(\theta, \tau, \delta)$  des trois équations d'équilibre (2.25)–(2.27), ajoutons (2.26) multiplié par  $\Delta_r \xi_m$ , à (2.27) multiplié par  $\xi_f$ , de manière à

annuler le premier terme et à obtenir

$$\begin{aligned} \Delta_r \xi_m \left( -\frac{1}{2} \rho S \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (w_z^b + \xi_f \delta w_x^b) + mg \cos(\theta) \right) \\ + \xi_f \left( \frac{1}{2} \rho S \Delta_r \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (w_z^b + \xi_m \delta w_x^b) \right) = 0, \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_z^b + \Delta_r \xi_m mg \cos(\theta) = 0,$$

où  $(w_x^b, w_z^b)$  sont les première et troisième composantes de  $\mathbf{w}^b$  dans (2.24). Ensuite, en utilisant (2.24) et en réarrangeant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rz} \sin \theta + \left( -\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rz} + \Delta_r \xi_m mg \right) \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

qui est satisfaite par

$$\theta = -\tan^{-1} \left( \frac{\rho S \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rz} - 2 \xi_m mg}{\rho S \| \mathbf{w}_{eq} \| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rx}} \right). \quad (2.28)$$

Cette dernière expression coïncide avec la sélection (2.21) dans l'Algorithme 1 après quelques manipulations. À partir de (2.21), nous pouvons calculer les commandes à l'équilibre en substituant (2.25) dans (2.26). Après quelques simplifications, la force nécessaire de traction des hélices  $\tau$  pour maintenir la position d'équilibre corresponds à l'expression (2.22). Finalement, avec la valeur de  $\tau$  dans (2.22), nous pouvons obtenir la déflexion des élévons nécessaire  $\delta$  à partir de l'équation (2.26), ce qui nous donne la valeur obtenue dans (2.23).  $\square$

Il est intéressant de noter que pour chaque couple de vent  $(w_{rz}, w_{rx})$  correspond une orientation d'équilibre (2.17b), (2.21) est indépendante de l'entrée  $\mathbf{u}_{eq}$ . En outre, il convient de souligner que pour toutes les valeurs de vent raisonnables, l'équation (2.22) correspond à la racine positive d'un polynôme du second ordre, l'autre racine étant toujours négative, ce qui conduit à une condition de poussée négative physiquement impossible.

À partir de l'expression analytique (2.17) de l'équilibre du drone pour différentes conditions de vent  $\mathbf{w}$ , nous reportons, sur la Fig. 2.7, les valeurs correspondantes de  $\theta, \delta, \tau$  pour des valeurs de vitesse de vent horizontale allant de 0 à  $-20 \text{ m s}^{-1}$  et pour

des valeurs de vitesse de vent verticale allant de  $-6$  à  $6 \text{ m s}^{-1}$ . L'angle d'incidence  $\theta$  diminue de  $90^\circ$  à  $-4.65^\circ$ .  $\theta = 90^\circ$  correspond à un vol stationnaire sans vent. La traction  $\tau$  atteint son minimum à  $w_{rx} = -12.8 \text{ m s}^{-1}$ , ce qui correspond à une condition de vol qui minimise la consommation d'énergie, car les moteurs sont la principale source de consommation électrique.

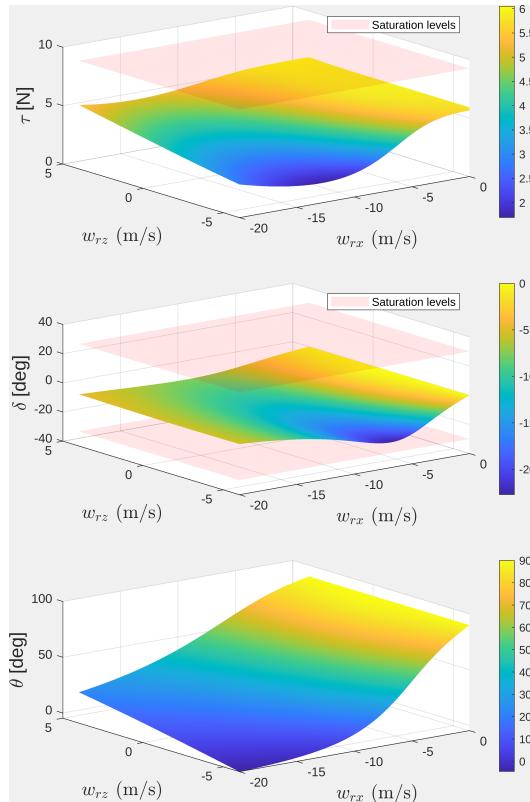


FIGURE 2.7 – Les paramètres  $(\tau, \delta, \theta)$  de l'ensemble des points d'équilibres (surface) obtenue à l'aide du Théorème 1 et de l'Algorithm 1 pour un vent constant horizontal et vertical ( $w_{rx}, w_{rz}$ ), avec les saturations des actionneurs (rose).

Il est possible de faire une coupe des surfaces présentée dans (2.7) pour une vitesse verticale nulle  $w_{rx} = 0$ , ce qui nous donne le résultat de la Figure 2.8

## 2.4 Dynamiques linéarisés

### 2.4.1 Dynamique linéarisé sans vent

Considérons le cas sans vent discuté dans la section 2.3.1 pour lequel nous utilisons le vecteur de commande  $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$  et le vecteur de commande à l'équilibre  $\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}$  défini dans l'équation (2.16a) et rappelons la transformation du vecteur

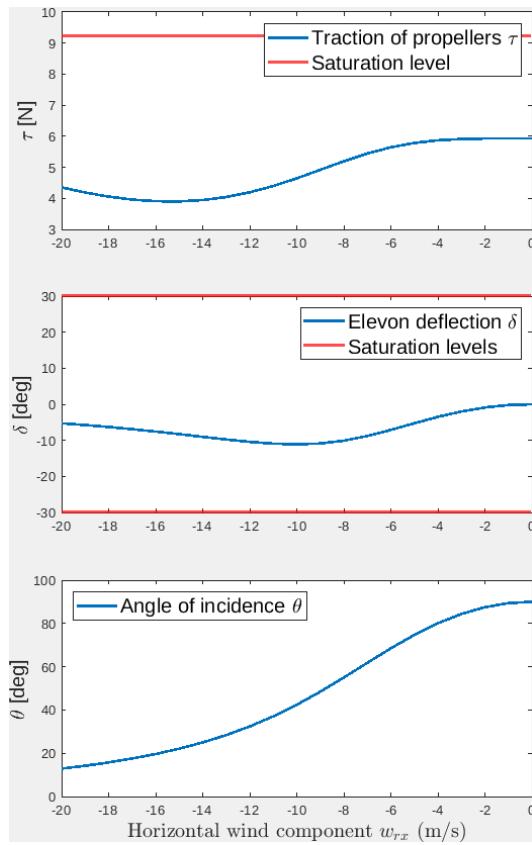


FIGURE 2.8 – Section des surfaces de la Figure 2.7 pour  $w_{rz} = 0 \text{ m s}^{-1}$ .

de commande suivante  $\mathbf{u}_{\text{nowind}} := \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \delta_1 \tau_1 & \delta_2 \tau_2 \end{bmatrix}^\top$ , la dynamique linéarisé dans le cas sans vent est

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_0 (\mathbf{u}_{\text{nowind}} - \mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}), \quad (2.29)$$

où l'expression de  $\mathbf{A}_0$  est

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_w \Big|_{w=0} = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_3 & \mathbb{I}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbf{A}_{v\epsilon} & \mathbb{0}_3 \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbf{A}_{\epsilon\omega} \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

avec les matrices suivantes

$$\mathbf{A}_{\epsilon\omega} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{A}_{v\epsilon} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -2g & 0 \\ g & 0 & g \\ 0 & -2g & 0 \end{bmatrix},$$

alors que l'expression de  $\mathbf{G}_0$  est

$$\mathbf{G}_0 := \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} \\ 0 & 0 & a_g & a_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_g & b_g & 0 & 0 \\ \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} \\ c_g & -c_g & d_g & -d_g \\ 0 & 0 & e_g & e_g \\ f_g & -f_g & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

avec

$$\left[ \begin{array}{c|c} a_g & b_g \\ \hline c_g & d_g \\ \hline e_g & f_g \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} -\frac{S_{\text{wet}}}{4mS_p} C_\ell \xi_f & \frac{1}{m} (1 - \frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} C_d) \\ \hline \frac{k_m}{J_x k_f} & \frac{S_{\text{wet}} a_y}{4J_x S_p} C_\ell \xi_f \\ \hline \frac{S_{\text{wet}} \Delta_r}{4J_y S_p} C_\ell \xi_m & \frac{1}{J_z} (p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_d) \end{array} \right].$$

### 2.4.2 Dynamique linéarisé en présence de vent

Pour chacun des équilibres caractérisés dans le Théorème 1, nous détaillons les équations linéarisées du mouvement par rapport au modèle non linéaire simplifié à faible vitesse (2.8). Une approche directe conduirait à des équations linéarisées qui dépendent de l'angle  $\psi$  caractérisé à l'étape 1 de l'Algorithme 1. Au lieu de cela, nous définissons ici les coordonnées incrémentales dans un cadre de référence inertiel convenablement tourné, de sorte que la dynamique linéarisée soit indépendante de l'angle  $\psi$ . Plus précisément, pour chaque condition de vent d'équilibre  $\mathbf{w}_{\text{eq}}$  associé à l'équilibre  $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{p}_{\text{eq}}, \mathbf{v}_{\text{eq}}, \mathbf{q}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\omega}_{\text{b,eq}})$  caractérisé en (2.19)–(2.18), désignant les composantes scalaire et vectorielle du quaternion en (2.17b) comme  $\mathbf{q}_{\text{eq}} = (\eta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}})$ , et à partir de la matrice de rotation  $\mathbf{R}_\psi := \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{eq}\psi})$  introduite au début de la preuve du Théorème 1, nous étudions ici la dynamique incrémental linéaire du vecteur d'état

tourné :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &:= (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b) = \left( \mathbf{R}_\psi^\top (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{eq}), \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{v}, \mathbf{R}_\psi^\top (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{eq}), \boldsymbol{\omega}_b \right), \\ \tilde{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq}, \quad \tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{R}_\psi^\top (\mathbf{w} - \mathbf{w}_{eq}).\end{aligned}\quad (2.31)$$

Notez que la rotation en (2.31) possède la propriété  $\mathbf{R}_\psi^\top \boldsymbol{\epsilon}_{eq} = [0 \sin(\frac{\theta}{2}) 0]^\top$ , ce qui simplifie grandement le mouvement linéarisé.

En exploitant le fait que les vitesses linéaire et angulaire  $(\mathbf{v}_{eq}, \boldsymbol{\omega}_{b,eq})$  doit être nulle à l'équilibre (voir (2.17)), nous prouvons ci-dessous que la dynamique linéarisée de l'état (2.31) est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_w \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_w \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{E}_w \tilde{\mathbf{w}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{vv} & \mathbf{A}_{v\epsilon} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{\epsilon\omega} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{\omega\epsilon} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{G}_v \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{G}_\omega \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_v \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_\omega \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}},\end{aligned}\quad (2.32)$$

avec les matrices  $\mathbf{A}_{vv}$ ,  $\mathbf{A}_{v\epsilon}$ ,  $\mathbf{A}_{\epsilon\omega_b}$ ,  $\mathbf{A}_{\omega\epsilon}$ ,  $\mathbf{G}_v$ ,  $\mathbf{G}_\omega$ ,  $\mathbf{E}_v$ ,  $\mathbf{E}_\omega$  construite en suivant l'Algorithm 2.

**Théorème 2.** Pour tout vent constant,  $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top \in \mathbb{R}^3$  ayant une composante horizontale non nulle  $[w_x]$ , et le doublet d'équilibre qui découle  $(\mathbf{u}_{eq}, \mathbf{x}_{eq})$  de la dynamique (2.8), tels que caractérisés dans (2.19)-(2.18), la dynamique linéarisée du vecteur état incrémental (2.31) est donné par (2.32) avec les matrices construites comme dans l'Algorithm 2.

*Démonstration.* Tout d'abord, en exploitant la matrice de rotation  $\mathbf{R}_\psi := \mathbf{R}(\mathbf{q}_{eq\psi})$  utilisé dans (2.31), nous transformons la dynamique non linéaire (2.8) en coordonnées tournées

$$(\mathbf{p}_r, \mathbf{v}_r, \mathbf{q}_r) := \left( \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{p}, \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{v}, \mathbf{q}_{eq\psi}^{-1} \otimes \mathbf{q} \right), \quad \mathbf{w}_r := \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w} \quad (2.33)$$

où  $\boldsymbol{\omega}_b$  reste inchangée car elle est exprimée dans le repère du corps. Quelques observations permettent de simplifier la dynamique transformée (2.8) :

- nous avons  $\mathbf{R}_\psi^\top m\mathbf{g} = m\mathbf{g}$  car la rotation de  $\psi$  est autour de l'axe  $z_{[i]}$  ;
- comme  $\mathbf{q}_r = \mathbf{q}_{eq\psi}^{-1} \otimes \mathbf{q}$ , alors  $\mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_r)$  ;
- comme  $\mathbf{v}_b := \mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$  (comme défini après l'équation (2.6)), alors  $\|\mathbf{v}_b\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r\|$
- enfin  $\mathbf{R}^\top(\mathbf{q})\mathbf{w} = \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r)\mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{R}_\psi \mathbf{w}_r = \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r)\mathbf{w}_r$ .

Sur la base des observations ci-dessus, nous pouvons dériver la version tournée

des équations (2.8) comme étant

$$\dot{\mathbf{p}}_r = \mathbf{v}_r, \quad (2.34a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_r = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_r) \left( \mathbf{M}_f(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r) (\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r) \right), \quad (2.34b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_r = \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix} \right), \quad (2.34c)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_m(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r) (\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r) \quad (2.34d)$$

Avec ces nouvelles coordonnées, les vecteurs d'état incrémental (2.31) peut être exprimés comme étant

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \left( \mathbf{p}_r - \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{p}_{eq}, \mathbf{v}_r, \boldsymbol{\epsilon}_r - \mathbf{R}_\psi^\top \boldsymbol{\epsilon}_{eq}, \boldsymbol{\omega}_b \right), \\ \tilde{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{eq}, \quad \tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{w}_r - \mathbf{w}_{r,eq} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où  $\mathbf{w}_{r,eq} = \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{eq} = \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix}$ , déjà défini dans (2.20), et  $\mathbf{R}_\psi^\top \boldsymbol{\epsilon}_{eq} = [0 \sin(\frac{\theta}{2}) 0]^\top$  ont tous deux une structure peu dense intéressante.

En se concentrant sur la dynamique tournée (2.34) et l'expression (2.35) des variables incrémentales, la preuve du théorème revient à montrer que la linéarisation de (2.34) autour de l'équilibre tourné

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{r,eq} &= \left( \mathbf{p}_{r,eq}, \mathbf{v}_{r,eq}, \boldsymbol{\epsilon}_{r,eq}, \boldsymbol{\omega}_{br,eq} \right) \\ &= \left( \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{p}_{eq}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{w}_{r,eq} = \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.36)$$

coïncide avec l'équation (2.32) et les expressions de l'Algorithme 2.

Dans ce but, inspirée par [Tregouet 2015, Proof of Lemma 1], pour linéariser la dynamique du quaternion  $\mathbf{q}_r = [\eta_r \ \boldsymbol{\epsilon}_r^\top]^\top$  évoluant dans  $\mathbb{S}^3$ , nous remplaçons  $\eta_r$  par sa valeur positive lié à la norme unitaire du quaternion. Ainsi,  $\eta_r = (1 - \boldsymbol{\epsilon}_r^\top \boldsymbol{\epsilon}_r)^{\frac{1}{2}}$ . Concentrons-nous d'abord sur la matrice  $\mathbf{A}_w$  dans (2.32). Les trois premières lignes sont simplement  $[\mathbb{0}_3 \ \mathbb{I}_3 \ \mathbb{0}_3 \ \mathbb{0}_3]$ , du fait de la linéarité de l'équation (2.34a). Pour le second bloc de ligne, nous nous concentrons sur l'équation (2.34b) et nous commençons par caractériser  $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{r,eq})$ , dont la structure est relativement vide de  $\boldsymbol{\epsilon}_{r,eq}$ . En particulier, nous rappelons dans (2.24) en utilisant l'expression  $\mathbf{R}$  dans (2.2), nous

pouvons écrire

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{r,eq}}) = \mathbf{R}_\theta := \begin{bmatrix} 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 & 0 & 2\bar{\epsilon}_2\bar{\eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\bar{\epsilon}_2\bar{\eta} & 0 & 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

où  $\bar{\epsilon}_2 = \sin \frac{\theta}{2}$  représente le deuxième élément de  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{r,eq}}$  selon (2.36) et  $\bar{\eta} = \sqrt{1 - \bar{\epsilon}_2^2} = \cos \frac{\theta}{2}$ .

Avec cette expression de  $\mathbf{R}_\theta$ , nous pouvons dériver l'expression de (2.34b), en utilisant la notation abrégée  $\cdot|_{\text{eq}}$  pour caractériser l'évaluation d'une fonction (matricielle ou vectorielle) à l'équilibre (2.36),

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{vv} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{m} \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{r}}) \left( \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \| \mathbf{w}_{\text{r}} \| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{\text{r}}) (\mathbf{v}_{\text{r}} - \mathbf{w}_{\text{r}}) \right) \right) \Big|_{\text{eq}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left( \frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \| \mathbf{w}_{\text{eq}} \| \mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{v}_{\text{r}} \right) \Big|_{\text{eq}}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

qui, compte tenu de l'égalité  $\mathbf{D}_{f,\text{eq}} = \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}})$ , il est facile de montrer qu'elle coïncide avec la matrice  $\mathbf{A}_{vv}$  donnée en (2.50) dans l'Algorithme 2.

Nous nous concentrerons maintenant sur  $\mathbf{A}_{v\epsilon}$  de la matrice  $\mathbf{A}_w$ , qui doit être calculée à partir de (2.34b) de manière similaire à (2.37), comme

$$\mathbf{A}_{v\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \left( \frac{1}{m} \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{r}}) \left( \mathbf{M}_f(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \| \mathbf{w}_{\text{r}} \| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{\text{r}}) \mathbf{w}_{\text{r}} \right) \right) \Big|_{\text{eq}}. \quad (2.38)$$

Pour évaluer la partie droite de (2.38), nous démarrons de l'expression de  $\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}([\frac{\eta}{\epsilon}])$  dans (2.2), après la substitution de  $\eta = \sqrt{1 - \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}} \neq 0$  (nous rappelons que pour tous les équilibres caractérisés, nous avons  $\eta \neq 0$ ), nous pouvons calculer la dérivée généralisée

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{R}_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v}) &:= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{R} \left( \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} \\ &= 2\eta [\mathbf{v}]_\times \left( \frac{\boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^\top}{1 - \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}} - \mathbb{I}_3 \right) - 4\mathbf{v}\boldsymbol{\epsilon}^\top + 2\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{v}^\top + 2\boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{v} \mathbb{I}_3, \end{aligned} \quad (2.39)$$

qui implique donc

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{R}^\top \left( \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \mathbf{R} \left( \begin{bmatrix} \sqrt{1 - \boldsymbol{\epsilon}^\top \boldsymbol{\epsilon}} \\ \boldsymbol{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \mathbf{v} = \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{v}). \quad (2.40)$$

Pour évaluer (2.38), il sera utile de dériver la forme simplifiée suivante

$$\begin{aligned} & \partial \mathbf{R}_\epsilon \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 0 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= 2 \begin{bmatrix} 0 & \left(\bar{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}}\right) \mathbf{v}_3 & 0 \\ -\bar{\eta} \mathbf{v}_3 & 0 & \bar{\eta} \mathbf{v}_1 \\ 0 & \left(\frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} - \bar{\eta}\right) \mathbf{v}_1 & 0 \end{bmatrix} + 2\bar{\epsilon}_2 \begin{bmatrix} 0 & -2\mathbf{v}_1 & 0 \\ \mathbf{v}_1 & 0 & \mathbf{v}_3 \\ 0 & -2\mathbf{v}_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Nous pouvons définir deux forces  $(f_d, f_\ell)$  qui agissent sur le drone à l'équilibre, exprimées dans le repère corps, et qui dépendent du vent  $\mathbf{w}$  et des deux entrées similaires des élévons  $\delta$ . Ces deux forces sont la traînée et la portance générées par l'écoulement de l'air sur l'aile. Elles résultent du développement de l'expression  $\mathbf{D}_f(\mathbf{u})\|\mathbf{v}_b\|\mathbf{v}_b$  provenant (2.34b) avec  $\mathbf{D}_f(\mathbf{u})$  De (2.11) :

$$\begin{bmatrix} f_d \\ 0 \\ f_\ell \end{bmatrix} = -\mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{eq})\|\mathbf{w}_{eq}\|\mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{w}_{r,eq}, \quad (2.42)$$

qui après calcul coïncide avec l'expression (2.48) donner dans l'Algorithme 2.

À partir des deux forces  $(f_d, f_\ell)$  dans (2.42), il est possible de déterminer leurs dérivées partielles par rapport à la composante  $\bar{\epsilon}_2$  du quaternion, qui représente le tangage du drone. En utilisant (2.40), nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_d}{\partial \bar{\epsilon}_2} \\ 0 \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial \bar{\epsilon}_2} \end{bmatrix} = -\mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{eq})\|\mathbf{w}_{eq}\| \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\epsilon, \mathbf{w}_{r,eq}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

qui après calcul en utilisant l'égalité  $\mathbf{D}_{f,eq} = \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{eq})$ , coïncide avec l'équation (2.48), donné dans l'Algorithme 2.

En suivant des calculs similaires, la force  $f_m$  générée par les moteurs, liée à la traction des hélices et à la traînée générée par l'écoulement de l'air sur l'aile, et la force  $f_e$  générée par les élévons, liée à l'écoulement de l'air créé par les hélices, sont obtenues à partir de (2.9) sont défini par

$$\begin{bmatrix} f_m \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix} = \mathbf{M}_f(\mathbf{u}_{eq}), \quad (2.44)$$

qui, après calculs, coïncident avec les sélections de (2.49), données dans l'Algorithme 2.

En utilisant les définitions (2.39), (2.40), ainsi que les expressions (2.41), (2.42), (2.44), et leurs formes équivalentes indiquées dans (2.48), (2.49) données dans l'Al-

gorithme 2, nous pouvons finalement calculer à partir de (2.38)

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{v\epsilon} = & \frac{1}{m} (\partial \mathbf{R}_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{M}_f(\mathbf{u}_{eq})) - \partial \mathbf{R}_\epsilon(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{eq}) \|\mathbf{w}_{eq}\| \mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{w}_{eq}) \\ & - \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_{r,eq}\| \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{w}_{r,eq}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ) \Big|_{eq}. \end{aligned}$$

qui fournit l'expression (2.51) dans l'Algorithme 2 après quelques calculs exploitant également  $\mathbf{D}_{text{tf},eq} = \mathbf{D}_{text{tf}}(\mathbf{u}_{eq})$ .

Nous nous concentrons maintenant sur la matrice  $\mathbf{A}_{\omega\epsilon}$  de  $\mathbf{A}_w$ , et nous rappelons que, en raison des propriétés du produit de quaternion (voir, par exemple, [Hua 2013]),  $[\eta] \otimes [\omega_b] = [\epsilon^\top]_{\eta \mathbb{I}_3 + [\epsilon] \times}$ . À partir des deux termes inférieurs de la matrice du côté droit de cette dernière équation, en développant (2.34c) et en calculant  $\mathbf{A}_{\omega\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \omega_b} \left( \frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes [\omega_b] \right) \Big|_{eq}$ , nous obtenons les deux termes de l'expression (2.51) donnée dans l'Algorithme 2.

Nous nous concentrons maintenant sur la matrice  $\mathbf{A}_{\omega\epsilon}$  de  $\mathbf{A}_w$ , qui doit être calculée à partir de (2.34d). Comme seul le dernier terme de la partie droite dépend de  $\boldsymbol{\epsilon}$  (par l'intermédiaire de  $\mathbf{q}_r$ ), nous obtenons

$$\mathbf{A}_{\omega\epsilon} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_m(\mathbf{u}_{eq}) \|\mathbf{w}_r\| \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \left( \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r)(\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r) \right) \Big|_{eq}. \quad (2.45)$$

Pour calculer l'expression explicite de (2.45), nous exploitons à nouveau (2.40) et (2.41), et utilisons l'expression de  $\mathbf{D}_m$  dans (2.12), ainsi que les identités  $\bar{\eta}^2 - \bar{\epsilon}_2^2 = \cos \theta$  et  $2\bar{\eta}\bar{\epsilon}_2 = \sin \theta$ , qui fournissent, après quelques simplifications, l'expression (2.52), donnée dans l'Algorithme 2.

Passons maintenant à la dérivation des entrées de la matrice  $\mathbf{G}_w$  dans (2.32), dont les composantes peuvent être dérivées de (2.34b) et (2.34d). En utilisant les quatre entrées de  $\mathbf{u}$  dans (2.7), et en se basant également sur la structure de  $\mathbf{M}_f$ ,  $\mathbf{D}_f$ , dans (2.9), (2.11), la forme explicite pour

$$\mathbf{G}_v = \frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{M}_f(\mathbf{u}) - \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_{eq}^b \right) \Big|_{eq}, \quad (2.46)$$

peut être calculée comme dans (2.53), après quelques factorisations.

De même, sur la base des matrices  $\mathbf{M}_m$ ,  $\mathbf{D}_m$  dans (2.10), (2.12), nous pouvons calculer

$$\mathbf{G}_\omega = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left( \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{D}_m(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_{eq}^b \right) \Big|_{eq} \quad (2.47)$$

comme dans (2.54), après quelques factorisations.

Déterminons enfin l'expression de  $\mathbf{E}_v$  dans (2.32). Notons d'abord que nous pouvons écrire  $\|\mathbf{w}_r\|\mathbf{w}_r = \mathbf{w}_r\sqrt{\mathbf{w}_r^\top \mathbf{w}_r}$ , de sorte que

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} \|\mathbf{w}_r\|\mathbf{w}_r = \|\mathbf{w}_r\| \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{w}_r \mathbf{w}_r^\top}{\|\mathbf{w}_r\|} = \|\mathbf{w}_r\| \left( \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{w}_r \mathbf{w}_r^\top}{\mathbf{w}_r^\top \mathbf{w}_r} \right).$$

À l'aide de (2.34b) et (2.34d) et de l'expression de  $\mathbf{w}_r$  dans (2.33) et en suivant des calculs similaires aux cas précédents, nous obtenons l'expression (2.55) (indiquée dans l'Algorithme 2), pour  $\mathbf{E}_v = -\frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} (\mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\|\mathbf{w}_r) \Big|_{\text{eq}}$  et  $\mathbf{E}_w = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} (\mathbf{D}_m(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\|\mathbf{w}_r) \Big|_{\text{eq}}$ , où nous rappelons que  $\mathbf{D}_{m,\text{eq}} = \mathbf{D}_m(\mathbf{u}_{\text{eq}})$ .  $\square$

## 2.5 Conclusion du Chapitre 2

Conclusion sur la modification du vecteur de commande

---

**Algorithme 2** Détermination des matrices de la linéarisation de (2.32)

**Entrées** : Vecteur de vent  $\mathbf{w}_{\text{eq}} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top$  et

d'équilibre  $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$  provenant de (2.17) et de l'Algorithmme 1.

**Sorties** : Matrices  $\mathbf{A}_w$ ,  $\mathbf{G}_w$ ,  $\mathbf{E}_w$  dans (2.32)

- 1: Sélectionner les paramètres  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $\delta$  de (2.17) à l'aide de l'Algorithmme 1 et de  $\bar{\epsilon}_2 = \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\bar{\eta} = \cos \frac{\theta}{2}$ .
- 2: Avec les valeurs de (2.24), (2.11), (2.12), définissons :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_\psi &:= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} &:= \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{\text{eq}}, \quad \begin{bmatrix} w_x^b \\ w_z^b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} w_{rx} \cos \theta - w_{rz} \sin \theta \\ w_{rz} \cos \theta + w_{rx} \sin \theta \end{bmatrix} \\ \left[ \mathbf{D}_{f,\text{eq}} \middle| \mathbf{D}_{m,\text{eq}} \right] &:= \frac{\rho S}{2} \begin{bmatrix} -C_d & 0 & C_d \xi_f \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta_r C_\ell \xi_m \delta \\ -C_\ell \xi_f \delta & 0 & -C_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \Delta_r C_\ell \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- 3: Définissons les forces de portance et de trainé ainsi que leurs dérivées par rapport à  $\epsilon_2$  (défini dans l'étape 1), comme

$$\begin{bmatrix} f_d & \frac{\partial f_d}{\partial \epsilon_2} \\ 0 & 0 \\ f_\ell & \frac{\partial f_\ell}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix} := -\|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \mathbf{D}_{f,\text{eq}} \begin{bmatrix} w_x^b \left(4\bar{\eta} - \frac{2\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}}\right) w_{rz} - 8\bar{\epsilon}_2 w_{rx} \\ 0 \\ w_z^b \left(4\bar{\eta} - \frac{2\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}}\right) w_{rx} - 8\bar{\epsilon}_2 w_{rz} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

- 4: Définissons les forces des moteurs et des élevons comme

$$\begin{bmatrix} f_m \\ f_e \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \left(\frac{S_{\text{wet}} C_d}{2 S_p} - 2\right) \tau \\ -\frac{S_{\text{wet}} \tau \delta \xi_f C_\ell}{2 S_p} \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

- 5: Sélectionnons les matrices  $\mathbf{A}_w$  dans (2.32) comme :

$$\mathbf{A}_{vv} = \frac{\|\mathbf{w}_{\text{eq}}\|}{m} \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_{f,\text{eq}} \mathbf{R}_\theta^\top \quad (2.50)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{v\epsilon}^{1,2} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,1} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,3} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{3,2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2\bar{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} & 4\bar{\epsilon}_2 & 2\bar{\epsilon}_2^2 - 1 & 2\bar{\epsilon}_2 \bar{\eta} \\ -2\bar{\eta} & -2\bar{\epsilon}_2 & 0 & 0 \\ 2\bar{\epsilon}_2 & -2\bar{\eta} & 0 & 0 \\ -4\bar{\epsilon}_2 & 2\bar{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} & -2\bar{\epsilon}_2 \bar{\eta} & 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e + f_\ell \\ f_m + f_d \\ \frac{\partial f_d}{\partial \epsilon_2} \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{v\epsilon} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{1,2} & 0 \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,1} & 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,3} \\ 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{3,2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\epsilon\omega} = \frac{\bar{\eta}}{2} \mathbb{I}_3 + \frac{\bar{\epsilon}_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{A}_{\omega\epsilon} = \frac{\rho S C_\ell \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| (w_x^b - \xi_m \delta w_z^b)}{J_y \bar{\eta}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$


---

---

6: Sélectionnons les matrices  $\mathbf{G}_w$  dans (2.32) comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_v &= \frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta [\mathbf{G}_{v\tau} | \mathbf{G}_{v\delta}], \quad \mathbf{G}_{v\tau} := \begin{bmatrix} 1 - \frac{S_{\text{wet}} C_d}{4 S_p} \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f \delta}{2 S_p} \end{bmatrix} [1]^\top \\ \mathbf{G}_{v\delta} &:= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \rho S C_d \xi_f \|w_{\text{eq}}\| w_z^b \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f \tau}{2 S_p} + \frac{1}{4} \rho S C_\ell \xi_f \|w_{\text{eq}}\| w_x^b \end{bmatrix} [1]^\top\end{aligned}\quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_\omega &= \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{G}_{\omega\tau} \ \mathbf{G}_{\omega\delta}], \quad \mathbf{G}_{\omega\delta} := \frac{S_{\text{wet}} C_\ell \tau}{4 S_p} \begin{bmatrix} a_y \xi_f & -a_y \xi_f \\ \Delta_r \xi_m & \Delta_r \xi_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \frac{\rho S \|w_{\text{eq}}\| \xi_m}{4} \begin{bmatrix} a_y C_d w_x^b & -a_y C_d w_x^b \\ \Delta_r C_\ell w_x^b & \Delta_r C_\ell w_x^b \\ a_y C_\ell w_z^b & -a_y C_\ell w_z^b \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_{\omega\tau} &:= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{k_f} + \frac{S_{\text{wet}}}{4 S_p} a_y \xi_f C_\ell \delta \\ 0 \\ p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4 S_p} a_y C_d \end{bmatrix} [1]^\top + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S_{\text{wet}}}{4 S_p} \Delta_r \xi_m C_\ell \delta \\ 0 \end{bmatrix} [1]^\top\end{aligned}\quad (2.54)$$

7: Sélectionnons les matrices  $\mathbf{E}_w$  de (2.32) comme :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_v \\ \mathbf{E}_\omega \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{vv} \\ \mathbf{J} \|w_{\text{eq}}\| \mathbf{D}_{m,\text{eq}} \mathbf{R}_\theta^\top \end{bmatrix} \left( \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{R}_\psi^\top w_{\text{eq}} w_{\text{eq}}^\top \mathbf{R}_\psi}{w_{\text{eq}}^\top w_{\text{eq}}} \right) \quad (2.55)$$

---

**Retourne :**  $\mathbf{A}_w, \mathbf{G}_w, \mathbf{E}_w$



## CHAPITRE 3

# Commande hybride

---

## Sommaire

---

3.1	Motivation	45
3.2	Contrôleur par retour d'état non-linéaire	46
3.3	Contrôleur par retour d'état linéaire	47
3.4	Conception d'une commande locale-globale basée sur l'hystérésis	49
3.5	Conclusion du Chapitre 3	52

---

## 3.1 Motivation

Basée sur les capacités d'un *tailsitter*, il est légitime de se poser la question du mode de vol utilisé pour rejoindre un point. Effectivement, le drone a la possibilité de se déplacer en stationnaire ou bien en vol d'avancement. Lors d'un déplacement en stationnaire, le drone est vertical donc il se retrouve fortement sujet aux perturbations. Il est donc nécessaire d'avoir une grande région d'attraction autour de la position d'équilibre pour assurer un rejet des perturbations et une stabilisation.

Nous avons donc proposé une stratégie de commande pour stabiliser le drone en position stationnaire. Cette stratégie repose sur une dynamique discrète permettant le passage d'une loi de commande non-linéaire présenté dans [Michieletto 2020] et qui fournit une grande région d'attraction et une seconde loi basée sur la dynamique linéarisée et fournissant une agressivité supérieure pour réaliser l'approche finale. Les deux contrôleurs sont réunis par un mécanisme hybride qui permet de conserver les performances en régime permanent de la conception linéarisée avec la grande région d'attraction garantie par la conception non linéaire. Notre solution est testée en simulant le modèle non linéaire complet.

Nous allons nous concentrer dans cette partie à la stabilisation stationnaire du drone ainsi nous nous appuyons sur la dynamique simplifiée décrite dans la section

2.1.2 avec la simplification  $\mathbf{w} = 0$  qui permet d'obtenir la dynamique simplifier sans vent (2.14).

### 3.2 Contrôleur par retour d'état non-linéaire

Nous illustrons dans cette section une loi de contrôle dynamique non linéaire inspirée du résultat de [Michieletto 2020]. Pour que cette loi de contrôle non linéaire soit applicable, les matrices  $F$  et  $M$  mentionné dans (2.14) doit permettre de définir une direction dite de moment zéro  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^4$  garantissant  $|F\bar{\mathbf{u}}| = 1$  et  $M\bar{\mathbf{u}} = 0$ , et la matrice inverse à droite  $M^r$  de  $M$  satisfaisant  $MM^r = I$  et  $FM^r = 0$ . Dans notre cas, il est immédiat de voir que la direction du moment zéro  $\bar{\mathbf{u}} = \frac{\sqrt{2}}{2a_f} [1 \ 1 \ 0 \ 0]^\top$  satisfait les conditions, alors que le fait que  $\text{rank}(F) = 2$  (donc que le noyau de  $F$  ( $\ker F$ ) est de dimension 2) rend impossible l'obtention de la matrice inverse à droite  $M^r$  de  $M$  entièrement contenu dans  $\ker F$ .

En raison de cela, nous déterminons  $M^r$  en paramétrisant (de manière conservatrice) les pseudo-inverses à droites de  $M$  comme  $M^r := KM^\top(MKM^\top)^{-1}$  où la matrice  $K \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  est symétrique et satisfait  $MKM^\top \geq I$  (pour assurer l'inversibilité). Avec cette paramétrisation, le but est de minimiser la norme de  $FM^r = FKM^\top(MKM^\top)^{-1}$ , ce qui est bien réalisé en minimisant la norme de  $FKM^\top$ , du fait que la contrainte sur  $MKM^\top \geq I$  garantissant que le facteur  $(MKM^\top)^{-1}$  a une norme plus petite que 1. En effectuant un complément de Schur, cette minimisation est obtenue en résolvant le programme semi-défini suivant :

$$\min_{K,\kappa} \kappa, \text{ subject to : } MKM^\top \geq I, \begin{bmatrix} \kappa I & FKM^\top \\ MK^\top F^\top & \kappa I \end{bmatrix} \geq 0,$$

qui minimise  $\kappa$  tout en assurant  $FKM^\top MK^\top F^\top \leq \kappa^2 I$ . En résolvant cette optimisation, on obtient, pour les matrices spécifiques considérées,

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -737 & 171 & -171 \\ -737 & 0 & -171 & 171 \\ 171 & -171 & 1583.5 & -43.73 \\ -171 & 171 & -43.73 & 1583.5 \end{bmatrix}, M^r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3.19 \\ 0 & 0 & 3.19 \\ -4.51 & -27.75 & -1.48 \\ 4.51 & -27.75 & 1.48 \end{bmatrix}$$

conduisant à  $\kappa = 39,7$ . Avec cette sélection basée sur l'optimalité, la conception dynamique non linéaire de [Michieletto 2020] peut être appliquée efficacement en obtenant des réponses qui sont presque impossibles à distinguer du cas entièrement découpé  $FM^r = 0$ . Il convient de noter qu'une approche similaire, négligeant essentiellement les termes supplémentaires agissant sur la dynamique de translation, est également suggérée dans l'étude [Hua 2013]. Sur la base du choix de  $M^r$  et de  $\bar{\mathbf{u}}$

décrit ci-dessus, en appliquant la loi de commande de [Michieletto 2020, eqn (19)], l'entrée  $\mathbf{u}$  devient :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{nl}} := M^r \boldsymbol{\tau}_r + \bar{\mathbf{u}} \mathbf{f}, \quad (3.1)$$

où  $\boldsymbol{\tau}_r$  et  $\mathbf{f}$  sont fournis par le contrôleur proposé dans [Michieletto 2020].

La sélection de  $M^r$  basée sur l'optimalité peut être interprété de manière intéressante lorsque l'on observe le produit  $M^r \boldsymbol{\tau}_r = M^r [\tau_{r,x} \ \tau_{r,y} \ \tau_{r,z}]^t op$ . Premièrement, pour obtenir un moment  $\tau_{r,z}$  autour de l'axe  $z_b$ , nous utilisons principalement l'action différentielle de la poussée ; deuxièmement, un moment  $\tau_{r,y}$  autour de l'axe  $y_b$  est généré par une utilisation symétrique des deux volets, avec une grande efficacité ; enfin, un moment  $\tau_{r,x}$  autour de l'axe  $x_b$  provient d'une utilisation différentielle des volets.

Enfin, par rapport à la solution proposée dans [Michieletto 2020], pour prendre partiellement en compte les effets de saturation énoncé dans la section 2.2.1, le bouclage décrit dans [Michieletto 2020] a été augmentée d'une stratégie de saturation d'erreur ne permettant jamais à l'erreur de position  $\mathbf{e}_p$  utilisé dans [Michieletto 2020, eqn. (22)] de dépasser la valeur maximale de 3 mètres. Les autres gains de réglage nécessaires à la solution de [Michieletto 2020] ont été sélectionnés en suivant une procédure de réglage des gains proportionnel et dérivé qui a conduit à  $k_{pp} = 0.5$ ,  $k_{pd} = 1.2$ ,  $k_{ap} = 0.08$ ,  $k_{ad} = 0.1$  et  $k_\Delta = 1$ .

La figure 3.1 montre la réponse du système en termes de positions et d'orientation (deux lignes du haut) et d'efforts des actionneurs (deux lignes du bas) lorsque le système part de la condition initiale  $\mathbf{x}(0) = [\mathbf{p}(0) \ \mathbf{v}(0) \ \mathbf{q}(0) \ \omega_b(0)]^\top = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0.9140 \ 0.1134 \ -0.3728 \ 0.1134 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  avec une position d'équilibre cible de  $\mathbf{p}_{\text{eq}} = [4 \ 5 \ 6]^T$  et  $\mathbf{q}_{\text{eq}} = [\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0 \ -\frac{\sqrt{2}}{2} \ 0]^T$ . Une réponse adéquate peut être observée, qui reste assez éloignée des saturations des actionneurs (voir section 2.2.1). L'augmentation des gains peut accélérer la réponse, mais produit des oscillations d'attitude indésirables. Il est donc intéressant de combiner ce contrôleur non linéaire (qui fournit une grande région d'attraction) avec un contrôleur plus agressif, conçu sur la base de la dynamique linéarisée sans vent (2.29).

### 3.3 Contrôleur par retour d'état linéaire

Sur la base des observations de la section précédente et étant donné une position cible correspondant à un équilibre  $\mathbf{p}_{\text{eq}}$ ,  $\mathbf{q}_{\text{eq}}$  tel que caractérisé dans l'équation 2.16, nous concevons ici un contrôleur par retour d'état linéaire capable de produire une

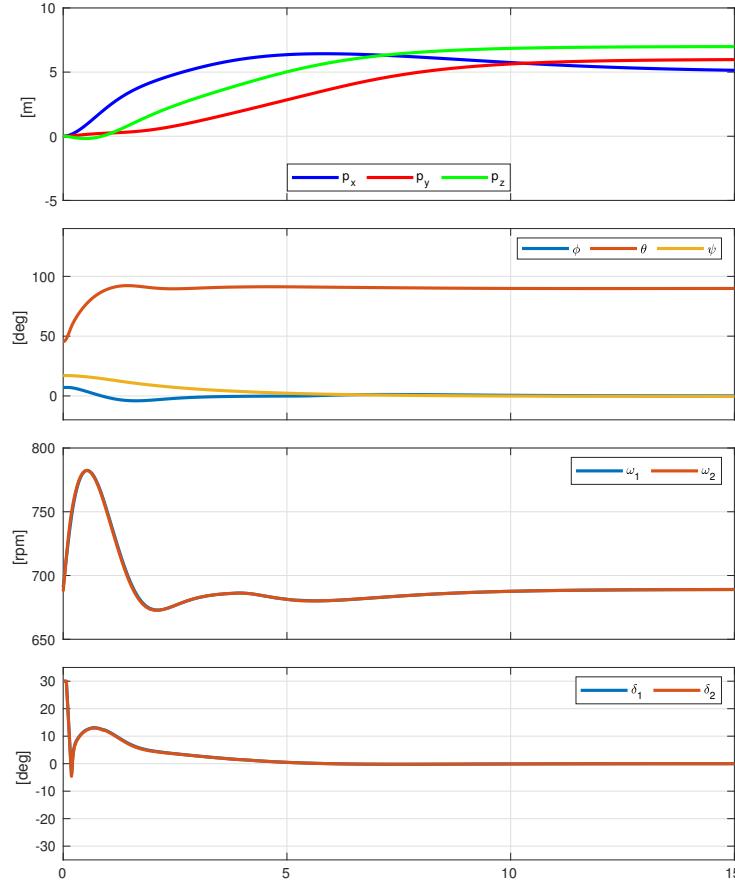


FIGURE 3.1 – Simulation de la loi de commande non-linéaire avec la dynamique de DarkO (2.1).

réponse plus agressive. Pour cela, nous nous concentrons sur la dynamique linéarisée (2.29) et proposons une loi de commande de la forme :

$$\mathbf{u}_{\text{lin}} := \mathbf{u}_{\text{eq}} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}, \quad (3.2)$$

où  $\tilde{\mathbf{x}}$  a été introduit dans (2.29) et  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 12}$  est un gain de retour d'état qui peut être sélectionné, sur la base des matrices  $\mathbf{A}_0$  et  $\mathbf{G}_0$  apparaissant dans (2.29), de telle sorte que la boucle fermée du retour d'état  $A_{\text{cl}} := \mathbf{A}_0 - \mathbf{G}_0 \mathbf{K}$  soit exponentiellement stable.

Dans notre cas, nous avons utilisé une sélection LQR, associée aux matrices de pondération  $\mathbf{Q} = I_{12}$  et  $\mathbf{R} = I_4$ , qui donne une réponse en boucle fermée désirable. La conception LQR fournit également une matrice définie positive  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$  (solution de l'équation algébrique de Riccati) garantissant que  $\mathbf{A}_{\text{cl}}^\top \mathbf{S} + \mathbf{S} \mathbf{A}_{\text{cl}} < 0$ . Il

### 3.4. Conception d'une commande locale-globale basée sur l'hystérésis 49

est donc possible d'utiliser  $S$  pour former une fonction de Lyapunov. En particulier, il est bien connu d'après le théorème d'approximation linéaire que la fonction  $V(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^\top S \tilde{\mathbf{x}}$  est également une fonction de Lyapunov certifiant la stabilité exponentielle locale de  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$  pour la dynamique non-linéaire. Plus précisément, il existe un scalaire positif  $\bar{v} \in \mathbb{R}$  tel que, le long de la dynamique (2.1), nous avons :

$$V(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \bar{v} \quad \Rightarrow \quad \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) := \langle \nabla V(\tilde{\mathbf{x}}), \dot{\tilde{\mathbf{x}}} \rangle < 0, \quad (3.3)$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{x}} \neq 0$ ; en d'autres termes, le sous-ensemble de  $V(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \bar{v}$  est contenu dans le bassin d'attraction de l'équilibre  $\mathbf{x}_{\text{eq}}$ .

La détermination du plus grand scalaire  $\bar{v}$  assurant (3.3) est un problème complexe et des bornes inférieures conservatrices peuvent être déterminées en quantifiant l'effet des non-linéarités sur la dynamique. Puisque  $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}$  est une fonction de  $\mathbf{x}$ , il est assez facile d'évaluer algébriquement  $\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}})$  pour un grand nombre d'extraction aléatoires de la variable  $\tilde{\mathbf{x}}$ , afin d'obtenir une estimation probabiliste du plus grand scalaire  $\bar{v}$ . Des garanties rigoureuses sur ces sélections peuvent être obtenues en appliquant les résultats de [Tempo 2013], mais une évaluation de 10000 échantillons a confirmé que la valeur  $\bar{v} = 400$  est une bonne sélection satisfaisant (3.3).

La figure 3.2 montre une simulation commençant à l'origine avec un drone vertical et des vitesses linéaires et angulaires initiales nulles. La position cible est  $\mathbf{p}_{\text{eq}} = [4, 5, 6]$  avec une stabilisation en vol stationnaire (drone vertical) avec  $\beta = 0$ . La ligne pointillée représente la position de la cible sur chaque axe. Le dernier graphique montre la décroissance exponentielle souhaitable de  $V$ . La figure 3.2 montre à la fois la simulation du modèle complet (continue) (2.1) et du modèle non linéaire simplifié (2.14) (en pointillé), ce qui montre des différences dans la phase transitoire. Lorsqu'on fournit une position cible plus importante  $\mathbf{p}_{\text{eq}} = [8, 9, 10]$  (avec la même orientation), la condition initiale se situe en dehors du bassin d'attraction et une divergence apparaît, comme le montre la figure 3.3.

## 3.4 Conception d'une commande locale-globale basée sur l'hystérésis

Inspirés par les stratégies locales-globales présentées dans [Goebel 2012, Ex. 1. 7], similaire à la solution présentée dans [Andreetto 2016], nous utilisons un mécanisme hybride pour basculer entre le contrôleur local agressif (3.2) (tant que l'état se trouve dans le bassin d'attraction de l'équilibre) et le contrôleur non linéaire moins agressif (3.1), qui fournit une plus grande région d'attraction (et peut être

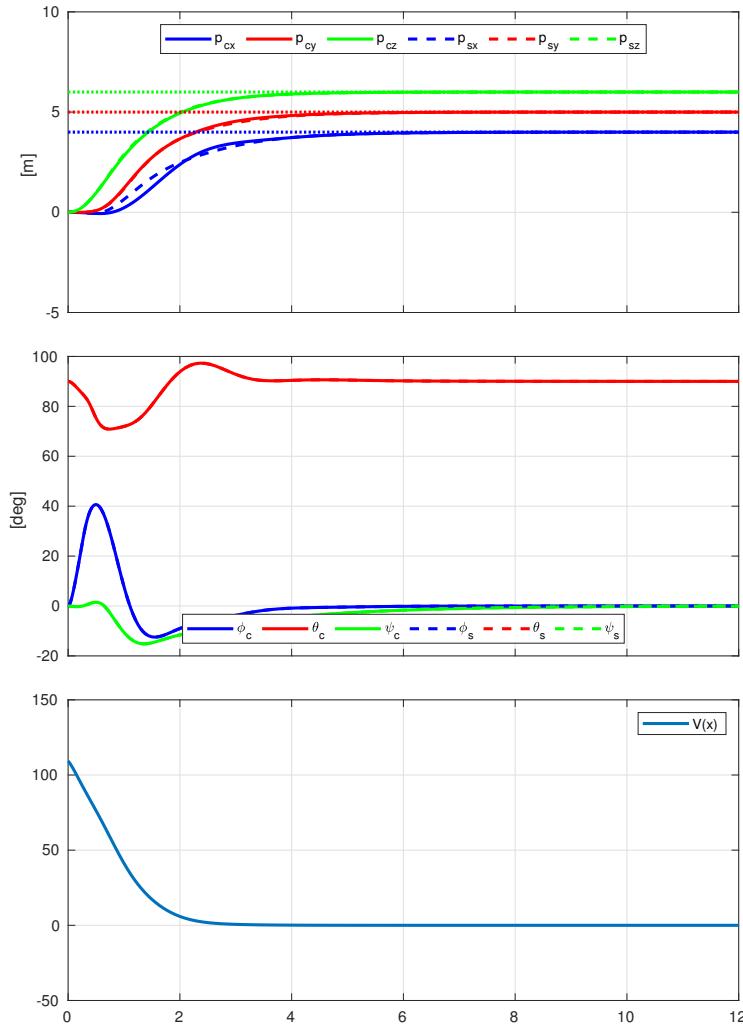


FIGURE 3.2 – Simulation du modèle complet (2.1) (continue) et simplifié (2.14) (pointillé) avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{lin}}$  défini dans (3.2) et comme une condition initiale  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  dans le bassin d'attraction.

appelé, par abus de langage, le « contrôleur global »). À cette fin, nous ajoutons à l'état du contrôleur une variable d'état logique  $\ell \in \{0, 1\}$ , qui régit le choix de l'entrée de contrôle entre (3.1) et (3.2) tel que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{hyb}} := \ell \mathbf{u}_{\text{nl}} + (1 - \ell) \mathbf{u}_{\text{lin}}, \quad (3.4)$$

### 3.4. Conception d'une commande locale-globale basée sur l'hystérésis

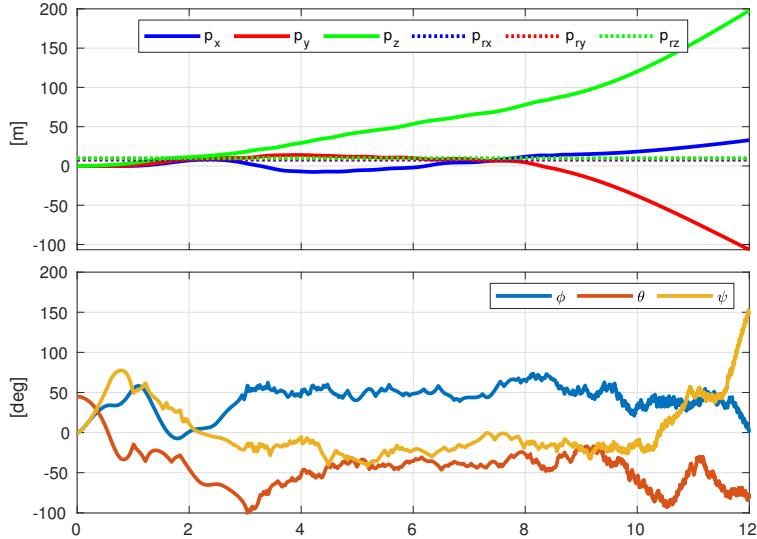


FIGURE 3.3 – Simulation divergente du modèle complet (2.1) avec  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{lin}}$  défini dans (3.2) et une condition initiale  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  en dehors du bassin d'attraction.

Nous nous assurons, grâce à la dynamique hybride, que  $\ell$  ne peut prendre que des valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Sa dynamique est définie par :

$$\begin{cases} \dot{\ell} = 0, & \chi \in \mathcal{C} \\ \ell^+ = 1 - \ell, & \chi \in \mathcal{D} \end{cases}$$

où  $\chi = [\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}, l]$  est l'état complet de la boucle fermée et  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  sont, respectivement, les ensembles continus et discret, définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &:= \mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1, \quad \mathcal{D} := \mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}_1, \\ \mathcal{C}_0 &:= \{\chi \in \mathbb{R}^{14} : V(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \bar{v} \text{ and } \ell = 0\} \\ \mathcal{C}_1 &:= \{\chi \in \mathbb{R}^{14} : V(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \underline{v} \text{ and } \ell = 1\} \\ \mathcal{D}_0 &:= \{\chi \in \mathbb{R}^{14} : V(\tilde{\mathbf{x}}) \geq \bar{v} \text{ and } \ell = 0\} \\ \mathcal{D}_1 &:= \{\chi \in \mathbb{R}^{14} : V(\tilde{\mathbf{x}}) \leq \underline{v} \text{ and } \ell = 1\} \end{aligned}$$

où  $V(\tilde{\mathbf{x}}) := \tilde{\mathbf{x}}^\top S \tilde{\mathbf{x}}$  a été défini dans la section précédente,  $\bar{v} = 400$  a été déterminé pour satisfaire (3.3) et  $\underline{v}$  est toute constante positive satisfaisant  $\underline{v} < \bar{v}$  (un choix plus grand de  $\underline{v}$  augmente la marge d'hystérésis, mais retarde le changement de loi de commande). Dans notre cas, nous choisissons  $\underline{v} = 350$ .

Le résultat suivant est une conséquence immédiate des résultats de [Goebel 2012,

Ex. 1.7] et des propriétés de nos modèles linéaires et non linéaires.

**Proposition 1.** *Avec l'action du bouclage hybride (3.4), la boucle fermée présente le même bassin d'attraction que celui associé au contrôleur non linéaire (3.1), quand elle utilise le contrôleur linéaire (3.2).*

Nous avons réalisé plusieurs simulations de la boucle fermée à l'aide de la *toolbox* Matlab [Sanfelice 2013]. Les simulations sont effectuées avec le modèle complet du drone (2.1), comprenant tous les effets aérodynamiques non linéaires. Un exemple de simulation est présenté dans la Figure 3.4, où nous initialisons le drone à l'origine avec une orientation nulle sauf pour l'angle de tangage fixé à 45 degrés. L'orientation de la cible est en configuration de vol stationnaire vertical et la position de la cible est assignée à  $\mathbf{p}_{\text{eq}} = [50, 25, 12.5]$ .

Nous observons que sur la période  $t$  dans  $[0, 38]$ , le drone présente une convergence élégante, mais lente vers la position cible souhaitée en utilisant le contrôleur global ( $\ell = 1$ ). À ce moment-là, l'état discret  $\ell$  entre dans l'ensemble  $\mathcal{D}_1$  et le contrôleur local plus agressif est activé jusqu'à la convergence vers l'équilibre souhaité.

Pour obtenir des simulations réalistes, les mesures sont affectées par le bruit des capteurs. La robustesse intrinsèque de la rétroaction hybride, établie dans le [Chapitre 7]<sup>65</sup>, est confirmée par le maintien des performances malgré le bruit de mesure.

### 3.5 Conclusion du Chapitre 3

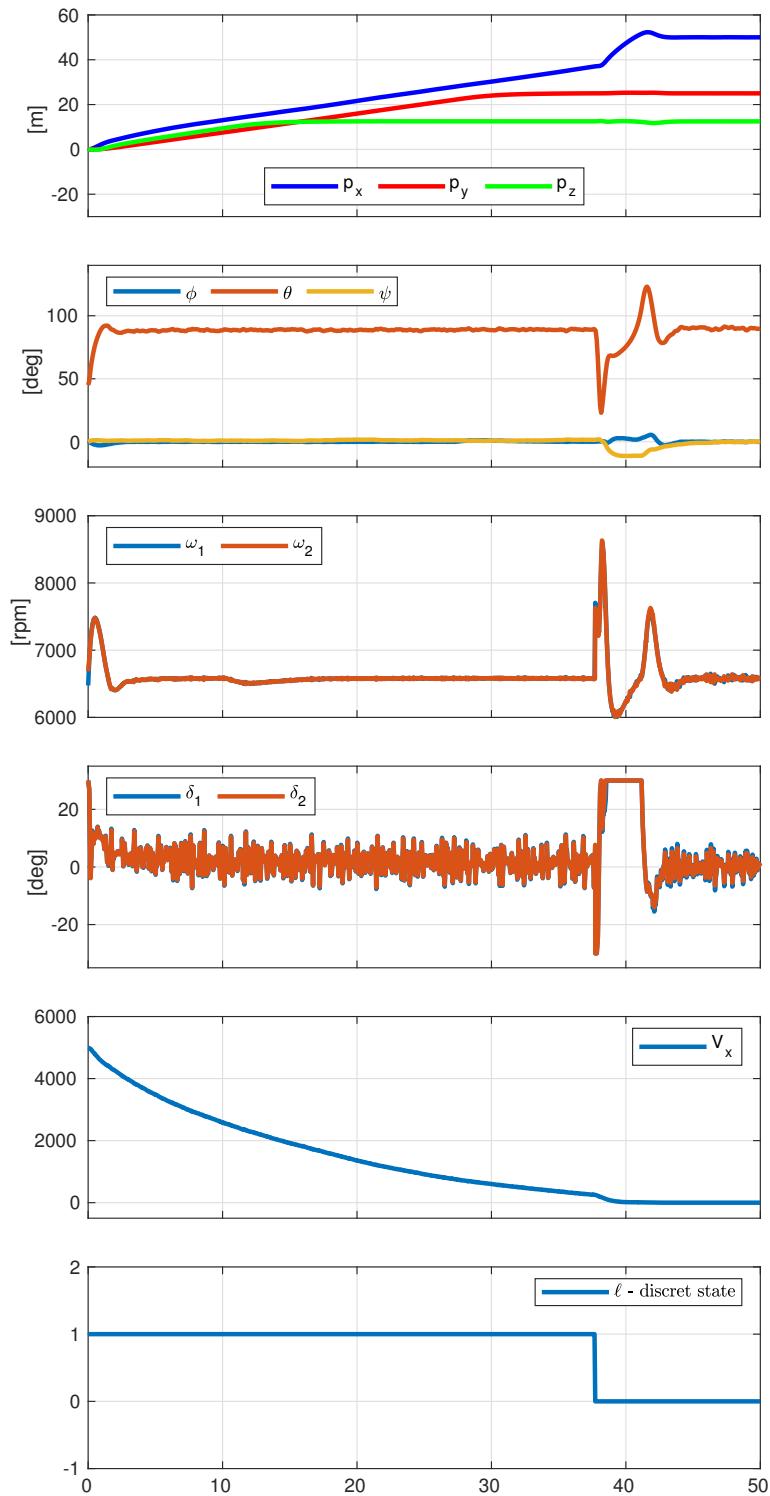


FIGURE 3.4 – Simulation en boucle fermée avec le contrôleur hybride (3.4).



## CHAPITRE 4

# Étude longitudinale sur une maquette à trois degrés de liberté

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Présentation de la maquette expérimentale . . . . .</b>	<b>55</b>
4.1.1	Motivation de cette maquette . . . . .	55
4.1.2	Description physique, capteur et actionnement . . . . .	56
4.1.3	Simulation des mouvements du drone . . . . .	59
<b>4.2</b>	<b>Contrôle linéaire, PI à 3 DOF . . . . .</b>	<b>60</b>
4.2.1	Description du schéma de contrôle . . . . .	60
4.2.2	Optimisation $H_\infty$ . . . . .	62
<b>4.3</b>	<b>Maquette expérimentale . . . . .</b>	<b>62</b>
4.3.1	$H_\infty$ -based optimization . . . . .	62
<b>4.4</b>	<b>Résultats . . . . .</b>	<b>64</b>

## 4.1 Présentation de la maquette expérimentale

### 4.1.1 Motivation de cette maquette

Des simulations en boucle fermée avec le contrôleur (3.4) développé dans 3.4, montrent qu'en présence d'un vent horizontal constant dans le plan  $(x_{[b]}, z_{[b]})$ , le drone modifie son angle de tangage. Ce comportement a également été observé lors d'essais en soufflerie avec le dispositif expérimental [Olszanecki Barth 2020]. Intuitivement, une réduction de l'angle d'attaque entraîne une diminution de la surface exposée au vent, de manière à réduire la force de traînée, ce qui a une forte incidence sur la position. Dans le même temps, le flux d'air dû au vent constant génère une portance, compensée par une réduction de la poussée de l'hélice et une

réduction conséquente de la consommation du drone. L'objectif de la maquette décrite ici est d'évaluer expérimentalement l'effet du vent sur le dispositif DarkO.

#### 4.1.2 Description physique, capteur et actionnement

Le prototype développé comprend des pièces imprimées en 3D en Onyx et PLA (acide polylactique, un polyester thermoplastique). Il est spécialement conçu pour réaliser des expériences devant une soufflerie avec un comportement semblable à celui de DarkO en raison de leur forme similaire (voir Fig. 4.2). La partie centrale, qui contient l'avionique embarquée (pilote automatique, GPS, etc.) dans le DarkO, a été remplacée ici par un joint tournant à un degré de liberté (voir Fig. 4.1). Les ailes sont les mêmes que celles du DarkO, avec les contrôleurs électroniques de vitesse (ESC), régissant la vitesse du moteur *brushless*, placés dans les ailes. Comme décrit dans la section 4.1.1, nous souhaitons représenter et étudier le degré de liberté de l'axe  $y_b$  du drone DarkO. Le tube principal en carbone reliant les deux ailes est utilisé comme axe de rotation. Ce tube est fixé sur deux roulements espacés de 28.5 mm afin d'obtenir une fixation solide de l'ensemble. Cet axe de rotation est équipé d'un codeur optique rotatif en quadrature pour mesurer précisément l'orientation de l'appareil. L'avantage de ce capteur est qu'il ne produit pas de couple résistant sur l'axe de rotation. Ce codeur offre 4000 impulsions par tour, ce qui donne une résolution de  $0.09^\circ/pulse$ .

Comme le montre la figure 4.1, l'indexeur et le support sont percés de manière à ce que la rotation puisse être bloquée à des positions connues ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ , etc.) par une vis sur l'indexeur qui s'insère dans les trous du support. Le verrouillage de l'appareil permet une initialisation correcte de l'encodeur incrémental. Le verrouillage permet également de placer l'appareil dans des positions exactes spécifiques afin d'identifier les coefficients aérodynamiques.

Le mécanisme est également équipée d'un capteur de force et de moment à 6 degrés de liberté (DOF), qui permet de mesurer la force exercée sur le dispositif expérimental par le support. Le banc d'essai expérimental est également équipé d'un fil chaud pour mesurer la vitesse de l'air affectant par la maquette.

La photo de la figure 4.2 montre le dispositif expérimental dans son environnement de test. Le drone est placé devant une soufflerie ouverte, appelée WindShape, qui génère un vent horizontal compris entre 2 et  $16 \text{ m s}^{-1}$ . Ainsi, lors de nos tests, nous considérons que la composante verticale du vent est nulle. Le drone est placé au centre de la WindShape, dans la zone d'écoulement la plus laminaire, tandis que le capteur à fil chaud est placé aussi près que possible du drone.

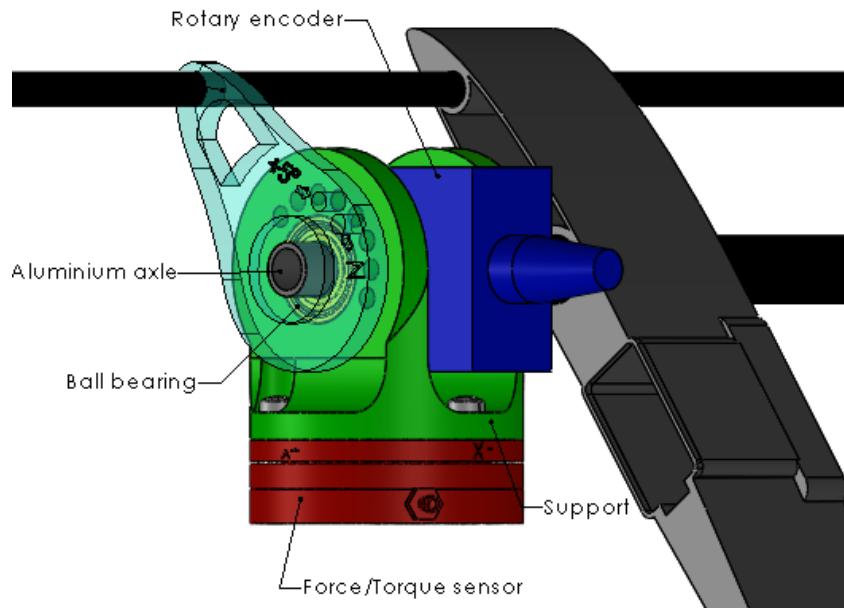


FIGURE 4.1 – Montage à un degrés de liberté.

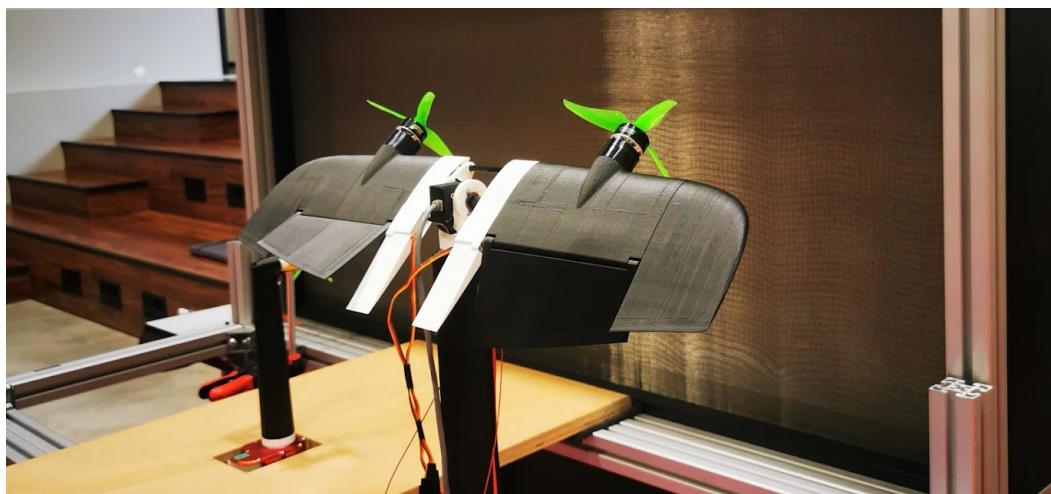


FIGURE 4.2 – Modèle de DarkO à un seul degré de liberté devant le WindShape.

La géométrie du dispositif expérimental permet de placer les câbles d'alimentation et de signal près du centre de rotation afin de minimiser leurs effets de friction sur la structure. Malgré cela, le système de rotation interfère inévitablement avec le drone, en créant des forces parasites, notamment de la traînée. La surface projetée de l'articulation étant faible par rapport à la surface de l'aile, la traînée générée par ce support est faible par rapport à la traînée de l'aile et des hélices, et peut donc

être négligée.

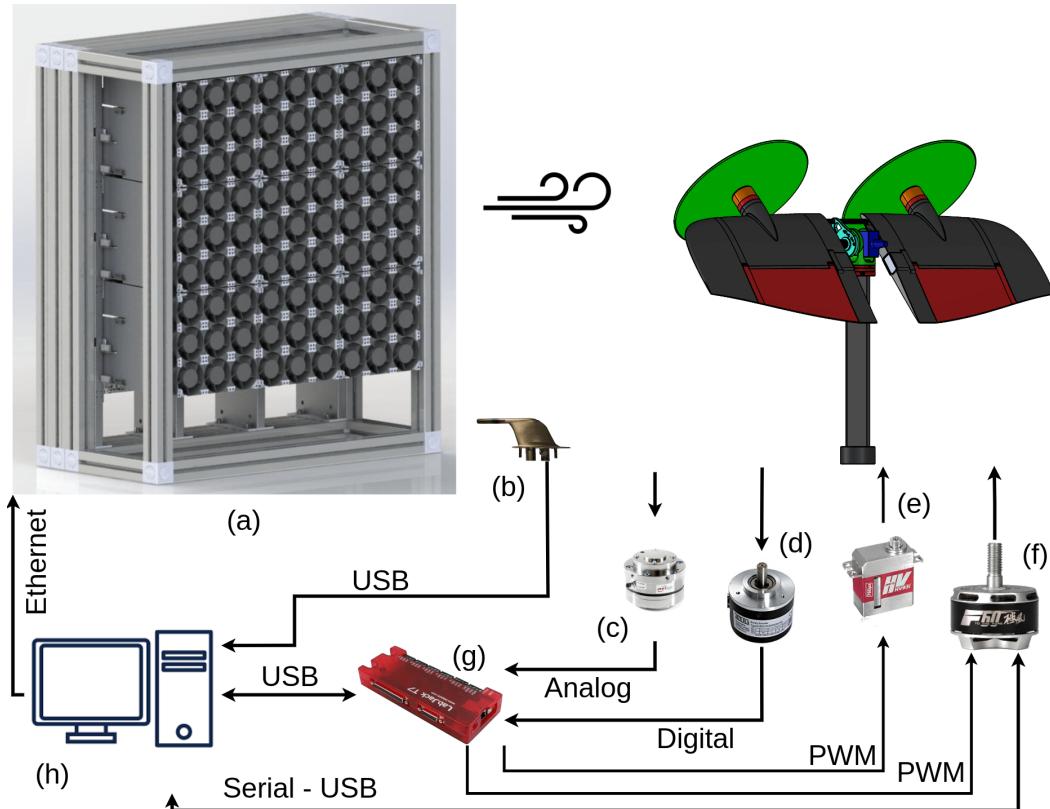


FIGURE 4.3 – Architecture d'essai en vol virtuel : WindShape (a) ; capteur de vitesse (b) ; capteur de force et couple (c) ; encodeur rotatif (d) ; servomoteur (e) ; moteur *brushless* + ESC (f) ; LabJack (g) ; ordinateur de contrôle (h)

Un diagramme schématique des composants du dispositif expérimental et de leur interconnexion est présenté à la Fig. 4.3, qui est expliquée ci-dessous en se référant aux différents sous-systèmes avec leur lettre correspondante (a)-(i).

Les moteurs (f) sont alimentés par une batterie externe de 12v 20Ah et les servomoteurs (e) sont alimentés par 5v via un module d'acquisition LabJack T7 [LabJack 2001, ] (g). Le module LabJack (g) concentre la plupart des signaux des capteurs et des actionneurs : six entrées analogiques pour le capteur de force/couple (c), deux entrées numériques en quadrature pour l'encodeur rotatif (d), une entrée analogique (ou une liaison série selon le capteur) pour le capteur de vitesse (b), deux sorties numériques PWM (Pulse Width Modulation) pour les moteurs (f) et deux sorties numériques PWM pour les servomoteurs (e).

Les élévons sont commandées par des servomoteurs qui ne fournissent pas de

signal de mesure de la position ; nous utilisons donc le point de consigne, en supposant que l'actionneur est parfait, ce qui est raisonnable, en raison de la saturation logicielle imposée à l'entrée commandée des gouvernes de profondeur et du dimensionnement correct des servomoteurs par rapport aux forces impliquées. Le LabJack (g) possède une interface de programmation d'application (API), permettant une connexion à distance avec un ordinateur. Le LabJack (g) possède une interface de programmation d'applications (API) , permettant une connexion avec un ordinateur. Nous avons développé un code Python qui communique avec le LabJack afin de récupérer les valeurs des capteurs, de calculer la commande à appliquer aux servomoteurs selon le schéma de contrôle présenté ci-dessous et de générer les signaux de sortie pour les servomoteurs. Les données collectées par le LabJack sont enregistrées afin d'être utilisées pour le post-traitement et de générer le graphique présenté dans la section 7.2.

Pour générer le vent, nous utilisons un dispositif WindShape, qui dispose également d'une API lui permettant d'être contrôlé via un réseau Ethernet. Le code Python développé peut assigner la vitesse du vent WindShape et donc agir sur le modèle. Il est ainsi possible de tester un ensemble de configurations de vol stationnaire et leurs transitoires associés dans la même campagne d'essais, sans aucune action sur le modèle.

#### 4.1.3 Simulation des mouvements du drone

Le prototype étant relié à un support fixe, il n'est pas possible de reproduire expérimentalement le mouvement de translation. Nous avons donc inclus une simulation logicielle du mouvement en intégrant les mesures de force disponibles au niveau de la fixation. En particulier, la vitesse de translation (respectivement la position) du drone est obtenue par intégration simple (respectivement double) des données mesurées par le capteur de force. Par souci de simplicité, nous négligeons l'influence aérodynamique de la vitesse (simulée) sur l'aile. En particulier, à partir des équations (2.1a) et (2.1b), nous obtenons le modèle simplifié suivant

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{g} + \frac{1}{m} \left( R(\boldsymbol{q})(F\boldsymbol{u} + D_f(\delta)R^\top(\boldsymbol{q})\|\boldsymbol{w}\|\boldsymbol{w}) \right) \quad (4.1a)$$

$$= \boldsymbol{g} + \frac{1}{m} \boldsymbol{F}_{meas}, \quad (4.1b)$$

où  $\boldsymbol{F}_{meas}$  représente les forces mesurées par le capteur dans le repère inertiel corrigé du biais. Pour calibrer la correction du biais, lors de l'initialisation, les forces mesurées sont moyennées sur 6000 échantillons, le modèle étant bloqué dans une

position stable (angle de tangage à  $0^\circ$ , c'est-à-dire orientation verticale). Pour éliminer le biais de la force mesurée à chaque mesure, nous soustrayons l'effet de la gravité sur le modèle de la mesure. Une masse artificielle  $m$  est attribuée à la dynamique du logiciel dans la boucle conformément à (4.1b), ce qui permet de tester plusieurs configurations afin de mieux apprécier l'influence de la masse du drone sur d'éventuels événements transitoires de saturation. Cela permet d'étudier des scénarios impliquant la masse non négligeable de la batterie, qui n'est pas présente dans notre modèle. Bien que cette manipulation soit aisée, elle ne représente pas parfaitement la réalité car nous ne tenons pas compte de la répartition des masses dans le drone et donc des modifications de l'inertie. La vitesse et la position transitoire du drone sont ensuite obtenues par intégration numérique simple et double de l'accélération comme dans (4.1), en utilisant une intégration numérique trapézoïdale.

## 4.2 Contrôle linéaire, PI à 3 DOF

Dans la section 3.4, nous avons proposé un bouclage proportionnel stabilisant une position de vol stationnaire en l'absence de vent (perturbation). Nous proposons ici une extension incluant une action intégrale, adaptée au fonctionnement avec une perturbation non mesurée représentée par un vent constant. L'objectif est de stabiliser le drone à la position de référence, en rejetant une perturbation de vent constant inconnue.

### 4.2.1 Description du schéma de contrôle

Nous expérimentons la situation avec le vent agissant uniquement le long de l'axe  $x_i$ , avec le drone orienté vers le vent, c'est-à-dire avec des angles de roulis et de lacet nuls. Dans cette configuration, le vent n'agit que sur la vitesse linéaire le long des axes  $x_b$  et  $z_b$ , et ne génère qu'un moment autour de l'axe  $y_b$ . Un examen attentif de la commande et des matrices d'entrée des perturbations  $F$ ,  $M$  dans (2.15) suggère une architecture de commande efficace pour rejeter une perturbation constante. En effet, les élévons et les hélices peuvent être utilisés symétriquement pour générer respectivement un moment autour de l'axe  $y_b$  et une force le long de l'axe  $x_b$ , compensant ainsi l'effet de la perturbation. Néanmoins, il reste une force le long de l'axe  $z_b$  à compenser, et une action intégrale peut converger asymptotiquement vers la force désirée, même avec une perturbation du vent non mesurée  $\mathbf{w}$ . Nous pouvons ainsi stabiliser le drone à une position de vol stationnaire, différente de l'équilibre

sans vent. La solution de contrôle exploite le degré de liberté de l'angle de tangage pour compenser l'effet du vent.

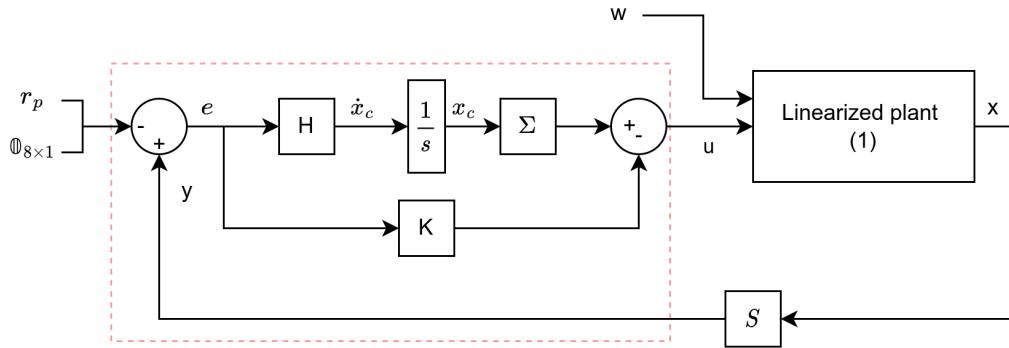


FIGURE 4.4 – Proposed integral-based controller.

Le contrôleur proposé, représenté sur la figure 5.1, correspond à

améliorer les équations

$$\dot{x}_c = H(y - \begin{bmatrix} r_p \\ 0_{8 \times 1} \end{bmatrix}), \quad (4.2)$$

$$y = Sx, \quad (4.3)$$

$$u = \Sigma x_c + K(y - \begin{bmatrix} r_p \\ 0_{8 \times 1} \end{bmatrix}), \quad (4.4)$$

$$S = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_7 & 0_{7 \times 5} \\ 0_{4 \times 8} & \mathbb{I}_4 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad (4.6)$$

où  $x_c \in \mathbb{R}^2$  est l'état de l'intégrateur ;  $r_p \in \mathbb{R}^3$  est la référence constante comprenant une position cible pour le mouvement de translation ;  $S$  est une matrice de sélection de sortie, qui supprime la composante de l'angle de tangage de la sortie mesurée (n'affectant que la linéarisation par quaternion) pour former  $y$  ;  $\Sigma$  est une matrice d'allocation d'entrée qui permet d'affecter la première composante de l'état de l'intégrateur à la commande du moteur et la seconde composante à la commande de la gouverne de profondeur.  $K$ ,  $H$  sont des gains constants à sélectionner

de manière à ce que la matrice linéaire de la boucle fermée

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A & \mathbb{0}_{12 \times 2} \\ HS & \mathbb{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} G \\ \mathbb{0}_{2 \times 4} \end{bmatrix} \left( K \begin{bmatrix} S & \mathbb{0}_{11 \times 2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{4 \times 12} & \Sigma \end{bmatrix} \right), \quad (4.7)$$

caractérisant la boucle fermée linéaire soit Hurwitz, afin d'assurer la stabilisation avec la dynamique linéarisée liée au scénario sans vent (2.14).

De manière synthétique, la matrice (4.7) décrit la boucle fermée illustrée à la Fig. 5.1 : un retour de sortie avec 11 sorties, comprenant les trois positions, les trois vitesses linéaires, deux des trois angles ( $\epsilon_1$  et  $\epsilon_3$ ) et les trois vitesses angulaires. Cette structure peut être considérée comme une solution proportionnelle-intégrale MIMO résultant d'une observation attentive de la dynamique linéarisée du drone, ce qui permet un nombre minimal d'intégrateurs intégrés dans le contrôleur. Ce contrôle devrait permettre de rejeter les perturbations constantes tout en ayant une robustesse satisfaisante. Le gain  $K$  correspond au terme proportionnel et le gain  $H$  pondère le terme intégral, induisant une convergence vers la cible. La matrice d'allocation  $\Sigma$  conduit à une utilisation symétrique des hélices et des ailerons. Il faut alors ajuster  $K$  et  $H$  pour obtenir un compromis satisfaisant entre robustesse et rejet des perturbations. Nous mettons en œuvre une synthèse multi-objectifs basée sur une méthode d'optimisation  $H_\infty$ , décrite ci-après.

difier la com  
nde pour expli  
er la commande à  
OF

#### 4.2.2 Optimisation $H_\infty$

Pour effectuer une sélection robuste de  $K$  et  $H$ , nous caractérisons d'abord plusieurs fonctions de transfert dans la figure 5.1.

La sortie de mesure  $y$  est utilisée pour la rétroaction, l'entrée  $u$  est la somme de l'entrée intégrale  $\Sigma x_c$  et de l'action proportionnelle  $Ke$ . La sortie  $z$  correspond aux signaux de performance de sortie à contrôler ( $e, w, u, y, r_p$ ). Grâce aux fonctions de pondération  $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_4)$ , la conception de  $H$  et  $K$  vise à rejeter une perturbation ou un échelon à basse fréquence  $w$  agissant sur  $y$ . En bref, l'objectif de la conception est d'amener  $y$  à zéro malgré la perturbation à basse fréquence sur  $w$ .

### 4.3 Maquette expérimentale

#### 4.3.1 $H_\infty$ -based optimization

To perform a robust selection of  $K$  and  $H$ , we first characterize several transfers functions in Fig. 5.1. The measurement output  $y$  is used for feedback, the input  $u$

is the sum of the integral input  $\Sigma x_c$  and the proportional action  $Ke$ . The output  $z$  corresponds to the output performance signals to control ( $e, w, u, y, r_p$ ). Thanks to weighting functions  $W = \text{diag}(W_1, \dots, W_4)$ , the design of  $H$  and  $K$  aims to reject a low frequency perturbation or step  $w$  acting on  $y$ . In short, the design goal is to bring  $y$  to zero despite the low frequency disturbance on  $w$ .

From the Nyquist criterion, we know that the margin corresponds to the minimal distance between the singularity (real point -1) and the product between the controller (C) and the plant (P). Consequently, we define the input modulus margin as  $MM_u = \min_{\omega \in R} |1 - CP|$  and the output modulus margin as  $MM_y = \min_{\omega \in R} |1 - PC|$  for a positive feedback. We first introduce the output sensitivity function  $T_{r \rightarrow \epsilon} = S_y = (1 - PC)^{-1}$ , so that  $\|S_y\|_\infty = MM_y^{-1}$  and the input sensitivity function  $T_{d \rightarrow u} = S_u = (1 - CP)^{-1}$ , so that  $\|S_u\|_\infty = MM_u^{-1}$ . Consequently, the minimization of the  $H_\infty$ -norm of  $S_u$  or  $S_y$ , leads to improving the input and output modulus margins. As our system is MIMO, we give importance to both the input and output sensitivity functions, because they do not commute. We also define the transfer functions  $T_{r \rightarrow u} = CS_y = S_u C$  and  $T_{w \rightarrow y}$ . In order to guarantee a satisfactory trade-off between robustness and performance, we select the weighting functions  $W_1, W_2, W_3$  and  $W_4$  linked to  $\|W_1 T_{r \rightarrow \epsilon}(s)\|_\infty \leq 1$  and  $\|W_2 T_{d \rightarrow u}(s)\|_\infty \leq 1$ , corresponding to robustness margins at the inputs and outputs,  $\|W_3 T_{r \rightarrow u}(s)\|_\infty \leq 1$  limiting the control effort,  $\|W_4 T_{w \rightarrow y}(s)\|_\infty \leq 1$  ensuring suitable wind disturbance rejection. Specifically, the weighting functions are tuned as

$$W_1 = 0.5, \quad W_2 = 0.5, \quad W_3 = 0.8, \quad W_4 = 0.5. \quad (4.8)$$

The values of  $W_1$  and  $W_2$  ensure  $MM_u > 6 \text{ dB}$  and  $MM_y > 6 \text{ dB}$ ,  $W_3$  and  $W_4$  are tuned to obtain a satisfactory trade-off between the different specifications. The weight  $W_4$  allows managing, among other things, the speed of the rejection.

With selections (4.8), we cast the design problem for  $K$  and  $H$  as an  $H_\infty$  synthesis under order constraint, providing good input and output specifications for the closed loop :

$$\begin{aligned} \min_C \quad & \left\| \begin{array}{c} W_1 T_{r \rightarrow \epsilon}(P, C) \\ W_2 T_{d \rightarrow u}(P, C) \\ W_3 T_{r \rightarrow u}(P, C) \\ W_4 T_{w \rightarrow y}(P, C) \end{array} \right\|_\infty, \text{ subject to} \\ & C \in \mathbb{R}^{11 \times 4} \text{ stabilizes } P \text{ internally,} \end{aligned} \quad (4.9)$$

where  $P$  is the augmented plant containing the integral action and the linearized UAV dynamics. In addition, we impose constraints on the gains  $K$  and  $H$  ensuring that the closed loop with experimental device only evolves in the  $(x,z)$  plane, compatibly.

We solved (4.9) using Systune [Apkarian 2006, ]. Based on non-smooth optimization, Systune dealing with several non-convex scenarios, such as the structured control architecture where we optimize the gain matrices  $K$ ,  $H$ . The optimization algorithm returns optimized selections of

$$\begin{bmatrix} H \\ K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.902 & 0 & 7.201 & -9.043 & 0 & 33.244 & 0 & 0 & 0 & 4.696 & 0 \\ 0.425 & 0 & -1.620 & 2.024 & 0 & -7.480 & 0 & 0 & 0 & -1.045 & 0 \\ 0.035 & 0 & -0.728 & -1.853 & 0 & -4.445 & 0 & 0 & 0 & -0.323 & 0 \\ 0.035 & 0 & -0.728 & -1.853 & 0 & -4.445 & 0 & 0 & 0 & -0.323 & 0 \\ 0.217 & 0 & -0.164 & 1.074 & 0 & -0.527 & 0 & 0 & 0 & -0.773 & 0 \\ 0.217 & 0 & -0.164 & 1.074 & 0 & -0.527 & 0 & 0 & 0 & -0.773 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Introducing a closed-loop spectral abscissa  $\alpha = -0.2381$  for  $A_{cl}$  in (4.7).

## 4.4 Résultats

## CHAPITRE 5

# Commande proportionnelle intégrale d'un drone convertible à 6 degrés de liberté

---

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof</b>	<b>65</b>
<b>5.2</b>	<b>Integral-based linear control</b>	<b>65</b>
5.2.1	Description of the control scheme	65
5.2.2	Zero-wind $H_\infty$ -based controller tuning	69
5.2.3	Multimodel $H_\infty$ -based controller tuning	70
<b>5.3</b>	<b>Experimental flight with open wind tunnel</b>	<b>74</b>
<b>5.4</b>	<b>Maquette expérimentale : 6 Dof</b>	<b>75</b>
<b>5.5</b>	<b>Résultats</b>	<b>75</b>

## 5.1 Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof

### 5.2 Integral-based linear control

#### 5.2.1 Description of the control scheme

A careful inspection of the control and the disturbance input matrices  $\mathbf{G}_w$  and  $\mathbf{E}_w$  in model (2.32) (see the output of Algorithm 2) suggests an effective control architecture to reject a constant wind disturbance  $\mathbf{w}$ . Indeed, the ailerons and the propellers can be used symmetrically to generate respectively a moment about the  $y_{[b]}$  axis, verifying equation (2.27) and a force along the  $x_{[b]}$  axis, verifying equation (2.25), thus compensating for the disturbance effect. Nevertheless, there is still a force along the  $z_{[b]}$  axis to be compensated for by verifying equation (2.26), and

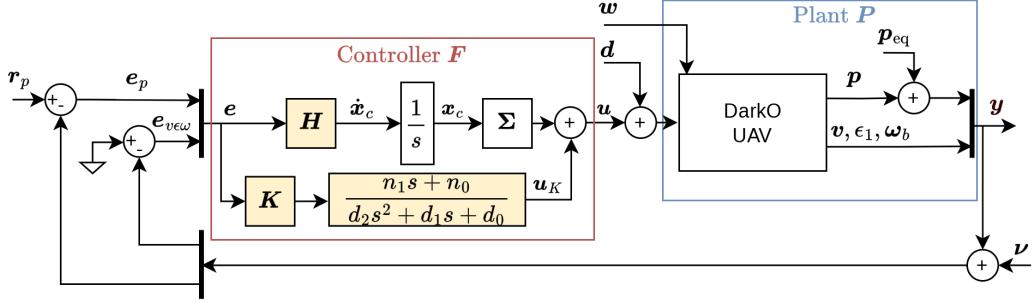


FIGURE 5.1 – Proposed integral-based controller with the wind perturbation  $\mathbf{w}$ , a plant-input perturbation  $\mathbf{d}$  and a plant-output perturbation  $\nu$ .

an integral action can asymptotically converge to the desired force, even with a non-measured wind disturbance  $\mathbf{w}$ . We may thus stabilize the UAV at a hovering equilibrium as characterized in Theorem 1. Since we don't measure the wind  $\mathbf{w}$ , the values of  $\psi$  and  $\theta$  in Algorithm 1 are unknown. The proposed controller, shown in Fig. 5.1, uses integral action to obtain these two unknown angles. Its feedback loop involves the following error variables output, which should converge to zero in any hovering position :

$$\mathbf{e}_p = \mathbf{r}_p - \mathbf{p}, \quad \mathbf{e}_{v\omega} = - \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \tilde{\epsilon} \\ \tilde{\omega}_b \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

where  $\mathbf{r}_p \in \mathbb{R}^3$  is the constant position reference comprising a target position for the translational motion (note that  $\mathbf{r}_p$  is the reference input to the control scheme).

The error variables in (5.1) can be represented as in the block diagram of Fig. 5.1 by defining the output  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{10}$  of the linearized plant dynamics (2.32), having the incremental state vector  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$ , as follows

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{eq} \\ \mathbf{0}_{7 \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} := \begin{bmatrix} \mathbb{I}_6 & \mathbf{0}_{6 \times 1} & \mathbf{0}_{6 \times 2} & \mathbf{0}_{6 \times 3} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & 1 & \mathbf{0}_{1 \times 2} & \mathbf{0}_{1 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} & \mathbf{0}_{3 \times 1} & \mathbf{0}_{3 \times 2} & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

where the output matrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{10 \times 12}$  removes the  $\tilde{\epsilon}_2$  and  $\tilde{\epsilon}_3$  components from the state vector  $\tilde{\mathbf{x}}$ .

As shown in Fig. 5.1, the controller dynamic equations are based on the measu-

red error  $\mathbf{e}$  as follows

$$\mathbf{e} = [e_p^\top \ e_{\text{view}}^\top]^\top, \quad \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{H}\mathbf{e}, \quad \mathbf{u} = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x}_c + \mathbf{u}_K,$$

$$\boldsymbol{\Sigma} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{u}_K = \frac{n_1 s + n_0}{d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \mathbf{K}\mathbf{e}, \quad (5.3)$$

where  $\mathbf{x}_c \in \mathbb{R}^2$  is the integral action state;  $\boldsymbol{\Sigma}$  is an input allocation matrix that allows assigning the first component of the integrator state to the propellers action and the second component to the elevons action. Scalars  $n_1, n_0, d_2, d_1, d_0$  are respectively the numerator and denominator coefficients of a filter used to avoid a direct input-output transmission that would amplify high-frequency measurement noise. This filter induces a strictly proper controller, for increased robustness to additive uncertainties. We define the controller  $\mathbf{F}$  having dimensions  $4 \times 10$  having transfer matrix  $\mathbf{F}(s) = T_{e \rightarrow u}(s)$  as described in (5.3) and interconnected as in Fig. 5.1. The plant  $\mathbf{P}$  having dimensions  $10 \times 4$  represents the linearized DarkO dynamics. The output of the plant  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{10 \times 1}$  is used as the input of controller  $\mathbf{F}$ .

In view of the symmetries of the actuators on the UAV, we have constrained the structure of matrix  $\mathbf{K}$  in (5.3), associated with the controller's proportional action, in order to use the actuators in a physically meaningful way as follows :

$$\mathbf{K}_{\text{struct}} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_2 & k_3 & k_4 & -k_5 & k_6 & -k_7 & k_8 & k_9 & -k_{10} \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & -k_8 & -k_9 & k_{10} \\ -k_{11} & -k_{12} & k_{13} & -k_{14} & -k_{15} & -k_{16} & k_{17} & -k_{18} & k_{19} & -k_{20} \\ -k_{11} & k_{12} & k_{13} & -k_{14} & k_{15} & k_{16} & -k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{20} \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

In particular, a position error on the  $z_{[i]}$  axis of the NED world frame (see Fig. 2.2) results in a symmetric use of the two propellers that generates a force along the  $x_{[b]}$  axis of the UAV. The symmetric use of the two motors is reflected by the same-sign in coefficients  $k_3$  and  $k_6$  on columns 3 and 6 of  $\mathbf{K}$ , corresponding respectively to the position and velocity errors on the  $z_{[i]}$  axis. Similarly, a position or speed error along the drone's lateral axis  $y_{[b]}$  will be compensated for by an antisymmetric use of the motors, as reflected by the coefficients  $k_2$  and  $k_5$  and their opposite signs on columns 2 and 5 of  $\mathbf{K}$ . An angular velocity error about the  $x_{[b]}$  axis must be compensated for by an antisymmetric use of the elevons, as reflected by coefficient  $k_{18}$  having opposite signs on column 8 of  $\mathbf{K}$ . Parallel arguments explain the remaining coefficients of matrix  $\mathbf{K}$  in (5.4). An advantage of the structure in (5.4) is the reduction of the number of variables to be optimized, from 40 to 20 scalar gains.

The closed loop shown in Fig. 5.1, is an output feedback with 10 outputs, consisting of the three linear positions, the three linear velocities, one of the three attitude

angles ( $\epsilon_1$ ) and the three angular velocities. This structure can be seen as a MIMO proportional-integral feedback. The parameters to be tuned in controller  $\mathbf{F}$  (5.3) are the proportional gain  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{4 \times 10}$  in (5.4), the integral gain  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{2 \times 10}$  and the filter parameters  $n_1, n_0, d_2, d_1, d_0$ , as highlighted in yellow in Fig. 5.1. A suitable tuning method should ensure desirable disturbance rejection and satisfactory robustness to unmodeled dynamics. These two goals lead to a trade-off because disturbance rejection requires an aggressive tuning while robustness properties are ensured by a frequency roll-off strategy. We discuss next two optimization-based tuning methods. The first one is issued from the ideas proposed in [Sansou 2022b], which did not need the linearized dynamics of Theorems 1 and 2, and is summarized in Section 5.2.2. It is a multi-objective synthesis with  $H_\infty$  constraints based on the zero-wind model discussed in Remarks ?? and ?? and derived in [Sansou 2022b]. We will show that this first method fails to stabilize the drone in certain wind ranges, due to the lack of knowledge of the dynamics characterized in Theorems 1 and 2. The second tuning method, presented in Sec. 5.2.3, is an iterative multi-objective synthesis with  $H_\infty$  constraints, based on a collection of models associated with different wind conditions and derived based on Theorems 1 and 2, through Algorithms 1 and 2. In our numerical validation, reported in Sections 5.2.2 and 5.2.3

Measurement	Value	Units
$p$	$2.5 \times 10^{-4}$	m
$\tilde{v}$	$1.2 \times 10^{-3}$	$\text{m s}^{-1}$
$\tilde{\epsilon}$	$4.7 \times 10^{-4}$	
$\tilde{\omega}_b$	$2.7 \times 10^{-3}$	$\text{rad s}^{-1}$

TABLE 5.1 – Standard deviation of the modeled sensor noise added to the simulated measurements.

(see in particular Fig. 5.2 and Fig. 5.4), measurement noise is added to the output to produce practically reasonable numerical results. The standard deviations of the adopted noise levels are reported in Table 5.1. Moreover, in addition to reporting the simulation results of the linear feedback of Fig. 5.1 with the linearized model (2.32), in Sections 5.2.2 and 5.2.3, we also simulate the closed loop by replacing the linearized plant  $\mathbf{P}$  with the nonlinear model (2.1) including many real-world effects. When replacing the linearized plant with the nonlinear dynamics (2.1), whose state is  $\mathbf{x} = (\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_b) \in \mathbb{R}^{13}$ , we replace the linear output  $\mathbf{y}$  with the following

surrogate nonlinear version

$$\mathbf{y}_{\text{NL}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{v} \\ \epsilon_1 \\ \omega_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_6 & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 1} & 0_{6 \times 2} & 0_3 \\ 0_{1 \times 3} & 0 & 1 & 0_{1 \times 2} & 0_{1 \times 3} \\ 0_3 & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 2} & \mathbb{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{p} \\ \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{v} \\ \mathbf{q}_{\text{eq}\psi}^{-1} \otimes \mathbf{q} \\ \omega_b \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

In the next sections we denote the modulus margin of a transfer matrix  $s \mapsto T_{v \rightarrow z}$  as  $\Delta_m(T_{v \rightarrow z}) = \min_{\omega \in R} \sigma_{\min}(T_{v \rightarrow z}(j\omega))$ .

### 5.2.2 Zero-wind $H_\infty$ -based controller tuning

For tuning the controller based on the zero wind, we use the linear plant model detailed in Remark ??,  $\mathbf{P}(s) = T_{u \rightarrow y}(s)$ , obtained from equations (2.29) and (5.2) as

$$\mathbf{P}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I}_{12} - \mathbf{A}_0)^{-1} \mathbf{G}_0.$$

With reference to Fig. 5.1, we introduce transfer matrices that correspond to robustness objectives : the output sensitivity function as  $T_{v \rightarrow e} = (\mathbb{I}_{10} + \mathbf{P}\mathbf{F})^{-1}$  having dimensions  $10 \times 10$ , so that,  $\|T_{v \rightarrow e}\|_\infty = \Delta_m(T_{v \rightarrow e})^{-1}$  and the input sensitivity function  $T_{d \rightarrow u} = (\mathbb{I}_4 + \mathbf{F}\mathbf{P})^{-1}$  having dimensions  $4 \times 4$ , so that  $\|T_{d \rightarrow u}\|_\infty = \Delta_m(T_{d \rightarrow u})^{-1}$ . Consequently, the minimization of the  $H_\infty$ -norm of  $T_{v \rightarrow e}$  or  $T_{d \rightarrow u}$ , corresponds to increasing the input and output modulus margins. Since plant  $\mathbf{P}$  is MIMO, we give importance to both the input and the output sensitivity functions which do not coincide, because  $\mathbf{P}$  and  $\mathbf{F}$  do not commute. We also define the transfer matrix  $T_{v \rightarrow u}$  having dimensions  $4 \times 10$  linked to the impact of the measurement noise  $v$  on the control input  $\mathbf{u}$ , and  $T_{d \rightarrow y}$  having dimensions  $10 \times 4$  representing the impact of the input disturbance  $\mathbf{d}$  on the plant output  $\mathbf{y}$ . We solve the same problem as in our preliminary work [Sansou 2022b, eqn. (13)] using the **Systune** software [Apkarian 2006], however we use the control diagram presented in section 5.2.1 which includes a filter on the proportional action and a different number of outputs. We also include in the plant  $\mathbf{P}$  the linear actuators dynamics discussed in Remark ??.

Successive steps of increasing horizontal and vertical wind intensity (ranging from zero to  $-6 \text{ m s}^{-1}$ ) are applied, as shown in the lower plot of Fig. 5.2. The selected wind pairs  $(w_x, w_z)$  are represented by red dots on the surfaces in Fig. 2.7, where we can see that the equilibrium  $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$  is reached without saturating the actuators. We only focus on the negative part of the vertical wind speed because it is the most limiting one. Indeed, the drone is lifted by the rising vertical wind

(whose sign is negative in the NED frame), so it needs less traction on the propellers to compensate for the gravity. The motors generate less airflow over the elevons, which reduces their efficiency, leads to saturation, and destabilizes the drone. The aim of the control system is to keep the UAV at the hovering position (defined as  $\mathbf{r}_p = [0, 0, 0]^\top$ ), despite the increasing horizontal and vertical wind  $w_x$  and  $w_z$ . Fig. 5.2 both linear simulations with the linearized plant dynamics (2.32) (dashed) and nonlinear simulations with the accurate model (2.1) (solid). Both the linear and nonlinear simulations consistently show that the controller performs well at low wind speed (in fact, the tuning is performed based on the zero-wind model). However, when the wind speed  $w_x$  and  $w_z$  exceed  $-5 \text{ m s}^{-1}$ , the hovering position becomes unstable and the drone oscillates and diverges. The tilt angles  $\theta$  are used to represent the attitude to give a better insight of the vehicle behavior, however the nonlinear simulation of the nonlinear dynamics (2.1) is carried out with unit quaternions. The instability observed in the simulation results of Fig. 5.2 confirms the experimental instabilities reported in [Sansou 2022b] where we used this same tuning method, and confirms the importance of Theorems 1 and 2 in Section 2.1, for an appropriate tuning of the controller gains, which is performed in the next section.

### 5.2.3 Multimodel $H_\infty$ -based controller tuning

The simulation results obtained with the zero-wind tuning method (see Fig. 5.2) together with the experimental instabilities observed in [Sansou 2022b] confirm the need for a controller gain tuning procedure exploiting the parametrized non-zero wind linearizations of Theorems 1 and 2. Focusing again on the control scheme of Fig. 5.1, we now explicitly consider the (linearized) wind effect on the plant, and we consider the linearized plant dynamics (2.32) with output (5.2) and with the selections in Algorithm 2 as

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_w(s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_u(s; w) & \mathbf{P}_w(s; w) \end{bmatrix} \\ &:= \mathbf{C}(s\mathbb{I}_{12} - \mathbf{A}_w)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_w & \mathbf{E}_w \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{5.6}$$

whose input is the concatenation of the control input  $\mathbf{u}$  and the wind disturbance input  $\mathbf{w}$ . As the model depends on the wind speed  $\mathbf{w}$ , we introduce a new transfer matrix  $T_{w \rightarrow y}$  having dimensions  $10 \times 3$ , which corresponds to the transfer matrix between the wind input  $\mathbf{w}$  and the plant output  $\mathbf{y}$ , quantifying the effect of the wind disturbance on the UAV feedback loop. With the set of transfers matrices

defined in Sec. 5.2.2 and the new transfer matrix  $T_{w \rightarrow y}$ , we use the algorithmic approach in [Apkarian 2006, Apkarian 2013], named “`systune`”, which uses non-smooth optimization techniques to deal with non-convex tuning problems, such as our structured control architecture where we optimize the gain matrices  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{H}$  and the filter parameters  $n_1$ ,  $n_0$ ,  $d_2$ ,  $d_1$ ,  $d_0$  (in yellow on the figure 5.1). As reported in [Apkarian 2013, eq. (2)], we solve a multi-objective optimization problem, by exploiting the Matlab implementation well explained in [Apkarian 2013, §3]. In particular, based on a set  $\mathcal{W}$  comprising a finite collection of pairs  $(w_x, w_z)$ , with  $w_x \in [0, 8] \text{ m s}^{-1}$  and  $w_z \in [-4, 4] \text{ m s}^{-1}$ , we consider the ensuing set of linearized plants (5.6) and solve the following convex optimization, where scalars  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$ ,  $W_4$  and  $W_5$  are weighting factors to be tuned to obtain a satisfactory trade-off between robustness (associated with  $W_2$ ,  $W_3$  and  $W_4$ ) and performance (associated with  $W_1$  and  $W_5$ )

$$\gamma^* = \min_{\mathbf{F}} \max_{w \in \mathcal{W}} \left| \begin{array}{c} \|W_1 T_{v \rightarrow e}(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_2 T_{d \rightarrow u}(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_3 T_{v \rightarrow u}(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_4 T_{d \rightarrow y}(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_5 T_{w \rightarrow y}(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})\|_\infty \end{array} \right|_\infty, \text{ subject to} \quad (5.7)$$

$$\mathbf{F} \text{ stabilizes internally } \mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_w, \mathbf{F}), \forall w \in \mathcal{W},$$

where  $\mathcal{F}_\ell(\mathbf{P}_w, \mathbf{F})$  denotes the linear feedback interconnection of Fig. 5.1 for a specific value of  $w$  (this is consistent with the classical robust control notation [Apkarian 2006, Apkarian 2013]). Notice that, with reference to [Apkarian 2013, eq. (2)], we only specify soft constraints and we do not specify any hard constraint.

The optimization problem (5.7) becomes increasingly cumbersome, from a computational viewpoint, as we increase the cardinality of the set of wind conditions considered in  $\mathcal{W}$ . In fact, a brute force approach including a fine grid of points in  $\mathcal{W}$  leads to a computationally intractable optimization. Instead, we follow here the iterative procedure overviewed in Algorithm 3, where  $\mathcal{W}$  is initially selected as a sparse grid comprising  $3 \times 3 = 9$  points (step 1) and then a synthesis step (step 2) is repeatedly followed by a (computationally simple) analysis step (step 3) where controller  $\mathbf{F}$  is fixed. Step 3 identifies the violating points by using a finer validation grid  $\mathcal{W}_v$  and adds them to the optimization set  $\mathcal{W}$ . The algorithm terminates after some iterations, when no points of the validation grid violate the constraints.

Executing Algorithm 3 for the DarkO models of Theorems 1 and 2 with the selection of the positive weighting scalars  $W_1$ – $W_5$  reported in Table ??, returned

**Algorithme 3** Iterative multimodel controller gain tuning.

---

**Input :**  $\mathbf{A}_w, \mathbf{G}_w, \mathbf{E}_w$  the output matrices of Algorithm 2 and the positive weighting scalars  $W_1-W_5$

**Output :**  $\mathbf{K}, \mathbf{H}$  and the filter gains

- 1: (Initialization) Initialize  $\mathcal{W}$  as a grid comprising all the pairs  $w_x \in \{0, -4, -8\}$  and  $w_z \in \{-4, 0, 4\}$
- 2: (Synthesis) Solve the optimization (5.7) with the software **systune**
- 3: (Analysis) Define a validation grid  $\mathcal{W}_v$  by discretizing the interval  $(w_x, w_y) \in [0, 8] \times [-4, 4]$  with a discretization step of 1 and using the controller  $\mathbf{F}$  obtained from the previous step, compute, for each  $w_v \in \mathcal{W}_v$ ,

$$\gamma_v = \left| \begin{array}{c} \|W_1 T_{v \rightarrow e}(\mathbf{P}_{w_v}, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_2 T_{d \rightarrow u}(\mathbf{P}_{w_v}, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_3 T_{v \rightarrow u}(\mathbf{P}_{w_v}, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_4 T_{d \rightarrow y}(\mathbf{P}_{w_v}, \mathbf{F})\|_\infty \\ \|W_5 T_{w \rightarrow y}(\mathbf{P}_{w_v}, \mathbf{F})\|_\infty \end{array} \right|_\infty , \quad (5.8)$$

and augment  $\mathcal{W}$  with the corresponding point if  $\gamma_v > 1$  or  $\gamma_v$  is undefined (namely if  $\mathbf{F}$  is not internally stabilizing).

- 4: (Termination) If  $\mathcal{W}$  has not been augmented at the previous step, then move to step 5, otherwise move to step 2.
  - 5: **Return :**  $\mathbf{K}, \mathbf{H}$  and filter parameters  $n_1, n_0, d_2, d_1, d_0$
- 

Weighting scalars	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
Values	18	16	11	26	5

TABLE 5.2 – Values of the positive weighting scalars  $W_1-W_5$  used in the execution of Algorithm 3.

the following selection after 2 iterations :

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{K}^\top & \mathbf{H}^\top \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{cccc|cc} -3.86 & -3.86 & 0.79 & 0.79 & 0.02 & 0.48 \\ 1.43 & -1.43 & 1.71 & -1.71 & -0.47 & -1.63 \\ 4.06 & 4.06 & -2.07 & -2.07 & -0.45 & 0.52 \\ -6.86 & -6.86 & -11.60 & -11.60 & -0.14 & 1.40 \\ -10.75 & 10.75 & -1.89 & 1.89 & 3.35 & 5.69 \\ 27.20 & 27.20 & -4.29 & 4.29 & -1.84 & 3.79 \\ -12.32 & 12.32 & -3.46 & 3.46 & 3.72 & 6.81 \\ -5.84 & 5.84 & -2.29 & 2.29 & 1.58 & 3.13 \\ -5.19 & 5.19 & 5.79 & 5.79 & 2.86 & -1.54 \\ -6.52 & 6.52 & 0.08 & -0.08 & 0.08 & 2.82 \end{array} \right], \\ \left[ \begin{array}{c|c} n_1 & n_0 \\ \hline d_2 & d_1 \\ \hline d_0 \end{array} \right] &= \left[ \begin{array}{c|c} -429 & -389 \\ \hline 1 & 6475 \\ \hline 4905 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

For the first iteration of Algorithm 3, after a candidate controller  $\mathbf{F}$  has been evaluated at step 2, Fig. 5.3 shows in blue the bode diagrams of the maximum singular values of  $T_{v \rightarrow e}$ ,  $T_{d \rightarrow u}$ ,  $T_{v \rightarrow u}$ ,  $T_{d \rightarrow y}$ , and  $T_{w \rightarrow y}$  (associated with the value of  $\gamma_v$ ) reported in (5.8) at the analysis step 3, to be compared to the inverse of the five weights  $W_1 \dots W_5$ , represented by the green horizontal lines. The diagrams in red correspond to the points that violate the constraints and that are added to the set  $\mathcal{W}$  for the next iteration. The few diagrams in magenta, instead, correspond to the 9 points considered in  $\mathcal{W}$  for the first iteration of the synthesis step 2. The red diagrams in Fig. 5.3 clearly illustrate that the iterative algorithm manages to detect the critical values of wind speed ( $w_x, w_z$ ) to be added to the optimization set  $\mathcal{W}$ .

The singular values of the output and the input sensitivity function (respectively  $T_{r \rightarrow e}$  and  $T_{d \rightarrow u}$ ) are shown in Fig. 5.3 top line. The graph in the third line represents the singular value of the transfer between the wind disturbance  $\mathbf{w}$  and the drone output  $\mathbf{y}$ . The singular value tangent to the constraint is that for the highest wind condition a.g.  $(w_x, w_z) = (-8, -4) \text{ m s}^{-1}$ .

With the tuning reported in (5.9), as obtained with Algorithm 3, we report in Fig. 5.4 parallel simulation results to those already shown in Fig. 5.2 for the zero-wind tuning method discussed in Section 5.2.2. Once again we simulate both the nonlinear plant (2.1) (solid lines) and the linearized plant (2.32) (dashed line). As compared to Fig. 5.2, the simulations of Fig. 5.4 show that the controller tuning based on Theorems 1 and 2 solves the instability issues and manages to stabilize the hovering condition in all of the considered wind scenarios. We also note from Fig. 5.4 shows a more aggressive action, indeed the control input  $u$  (both thrust and deflections) is more affected by the measurement noise. The effectiveness of the control scheme tuned on the basis of Algorithm 3 is also confirmed by the experimental results reported in the next section.

### 5.3 Experimental flight with open wind tunnel

DarkO's experimental flight took place in a dedicated space (see Fig. 5.5) with an Optitrack localization system based on a NED convention as per Figure 2.2. We used an open-vein wind generator to obtain wind steps that we measured with a hot-wire probe (the vertical bar in Fig. 5.5). Although this wind information is recorded on board the drone to synchronize the data, we do not use this measurement in the control law. The measurement frequency of this wind probe is only 0.5 Hz, so we only have one measurement every two seconds. The state estimation is carried out using an inertial navigation system to merge the Inertial Measurement Unit (IMU) + Optitrack sensor data in order to obtain an accurate estimation of the output  $\mathbf{y}$  in Fig. 5.1. However, the drone's angular velocity  $\boldsymbol{\omega}_b$  is measured based on the IMU's gyrometer, which provides noisy measurements, therefore we added a second order Butterworth low-pass filter with cut-off frequency of 20 Hz to smoothen out the output  $\boldsymbol{\omega}_b$ . The Butterworth filter is considered in the linearized dynamics when optimizing the controller gains following Algorithm 3.

We also used the ESCs associated with the performance shown in Figure 2.3 for the propellers actuation. The two ESCs were flashed with the open-source code available in the GitHub repository AM32-MultiRotor-ESC-firmware<sup>1</sup>. The advantage of this firmware, as compared with the commercial code, is that it exploits a low-level PID feedback of the speed of rotation of the motor, which is calculated at the same speed as the motor phase commutation. We adapted the speed loop code in the firmware, following the approach of [Franchi 2017], featuring an adaptive bias and adaptive gain algorithm (ABAG). In this way, we compensate the battery discharge effects and obtain an accurate realization of the commanded speed. Before this modification, the integral action of the stabilizing feedback of Fig. 5.1 compensated for the motor speed loss caused by the battery voltage reduction during flight. This integral compensation was indirectly generated by the altitude loss of the UAV caused by the reduced traction. The advantages of the ABAG solution are high responsiveness and adaptability, as the propeller dimensions can be changed without needing to modify the actuation gains.

We carried out a flight experiment where DarkO was manually put into a stabilized hovering mode in front of the wind tunnel, then we switched on the control law of Algorithm 3. As the drone had to be stabilized at least 30 cm away from the wind tunnel, a manual command was gradually applied to avoid overshooting, which could damage the wind tunnel. Once DarkO was close enough to the set-

<sup>1</sup>. <https://github.com/FlorianSan/AM32-MultiRotor-ESC-firmware>

point  $r_p$  of Fig. 5.1, we switched on the proposed controller, obtaining the results in Fig. 5.6. During the follow-up experimentation phase, as shown in the lower plot of Fig. 5.6, we stepwise increased the wind speed, waiting 20 seconds between each pair of consecutive steps, up to a final wind speed of  $7 \text{ m s}^{-1}$ .

Figs 5.6 and 5.7 show that the drone maintains its position despite the increasing wind speed. We can note a few important points, in agreement with the simulations : the motor traction decreases when increasing the wind speed. The control scheme takes advantage of the lift generated by the wind to support the drone, so that less energy is needed to stabilize the hovering position. The drone maintains its tilt angle at a value that is unknown a priori to the control law and naturally stems from the integral action that asymptotically attains the required value of the drone's pitch angle  $\theta$ . To stabilize the position, the UAV uses the elevons to cancel the pitch moment generated by the shape of the wing, subjected to a horizontal wind, without reaching the saturation limits. We also notice a slight asymmetry of the effectiveness of the actuators, which is effectively compensated by the proportional action of the control scheme.

## 5.4 Maquette expérimentale : 6 Dof

## 5.5 Résultats

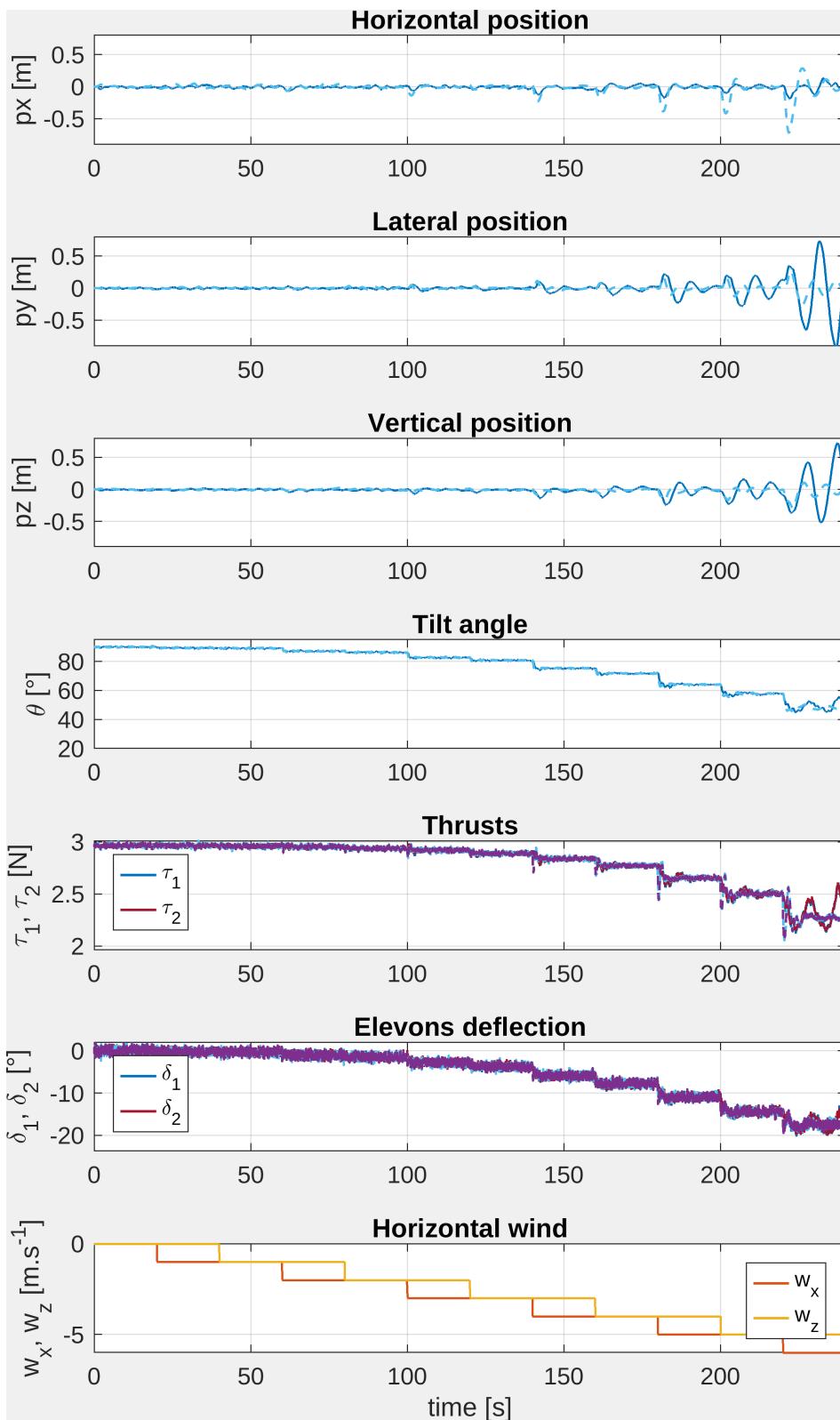


FIGURE 5.2 – Simulation of the non-linear model (2.1) (solid line) and the linearized model (2.32) (dashed line) with increasing constant wind steps with the controller tuned using the zero-wind optimization of Section 5.2.2.

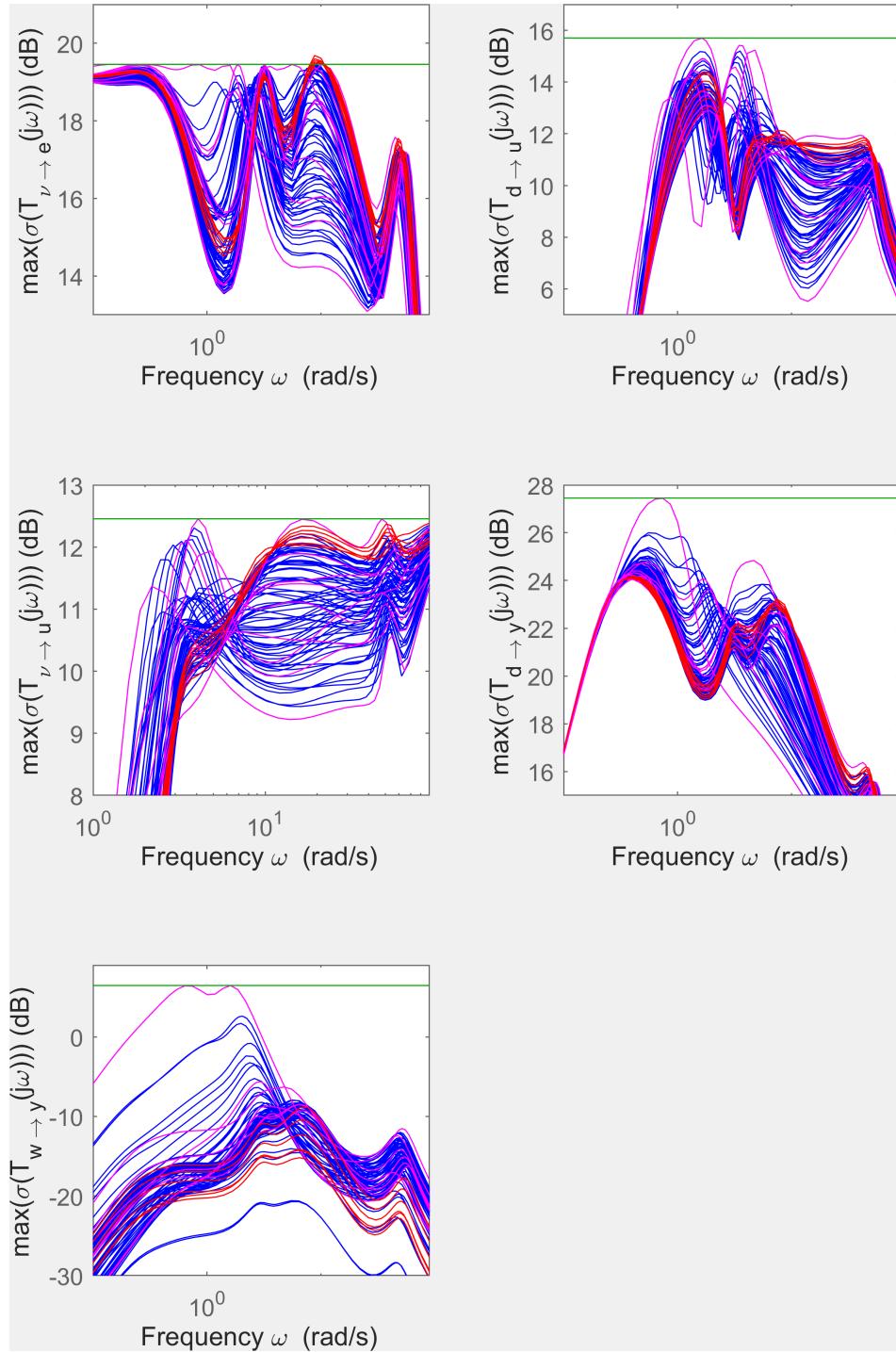


FIGURE 5.3 – Diagrams of the singular values of the transfer functions in (5.8) at the first iteration of Algorithm 3.

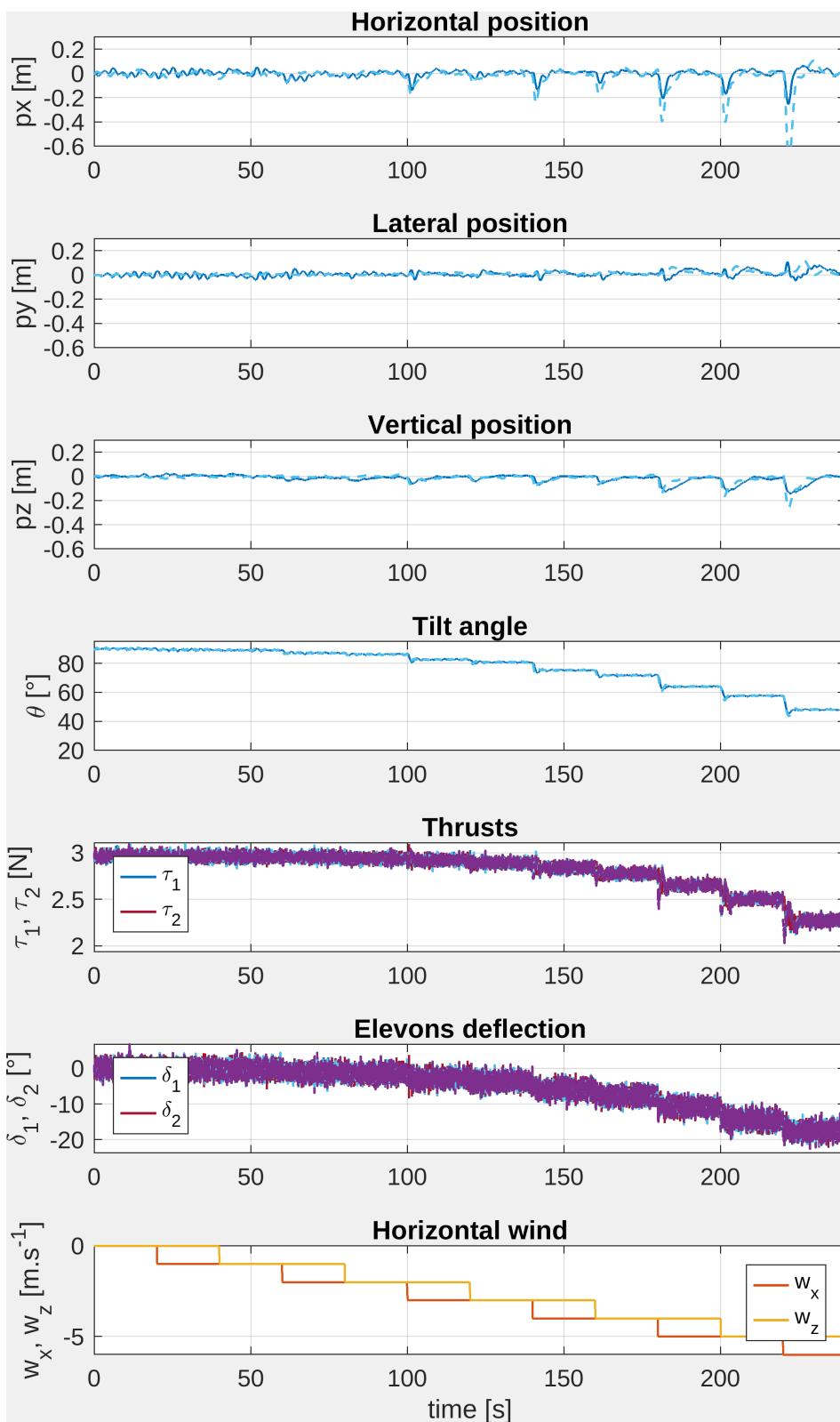


FIGURE 5.4 – Simulation of the non-linear model (2.1) (solid line) and the linearized model (2.32) (dashed line) with increasing constant wind steps with the controller tuned using the multimodel optimization of Algorithm 3 in Section 5.2.3.

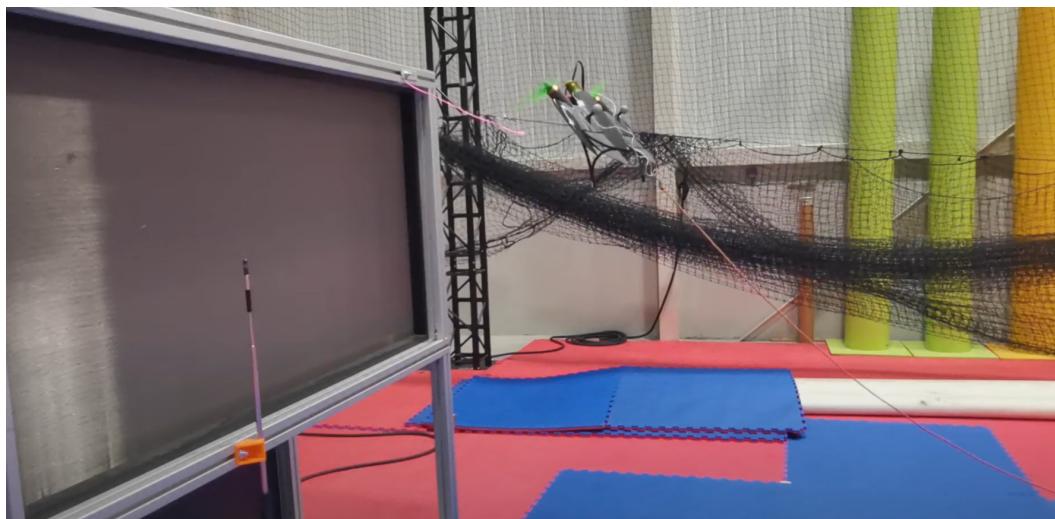


FIGURE 5.5 – DarkO's experimental flight in front of the open wind tunnel.

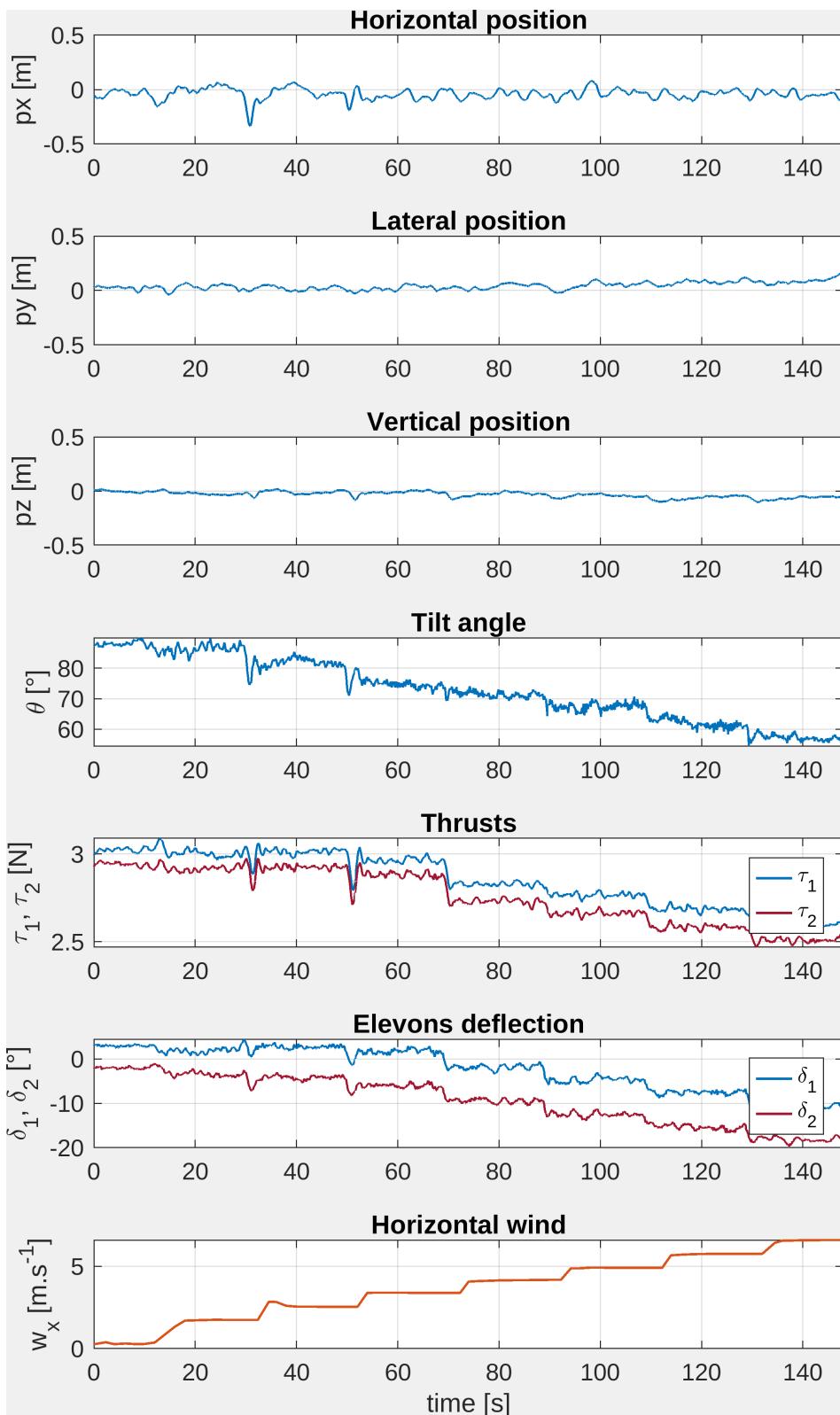


FIGURE 5.6 – Experiment of the DarkO UAV in front of the wind tunnel with increasing constant wind levels (lower plot).

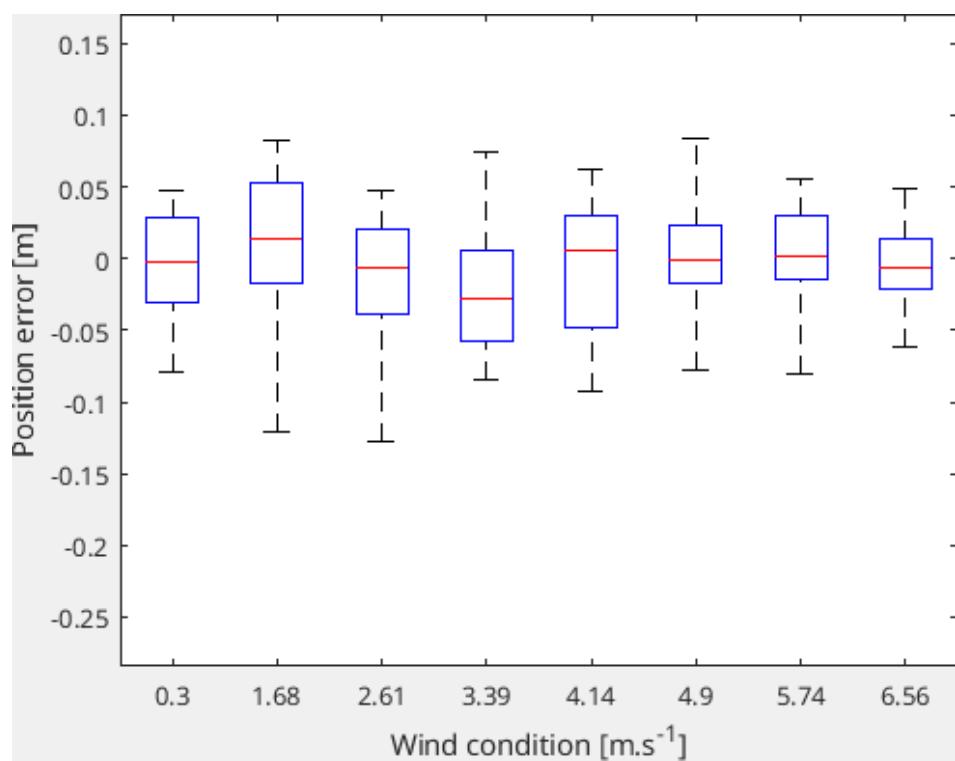


FIGURE 5.7 – Statistical visualization of the hovering performance.



## CHAPITRE 6

# Modélisation d'un drone à aile libre rotation libre

---

## Sommaire

<b>6.1 Design et modélisation d'un drone : Colibri . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>6.2 Design and modelling of Colibri UAV . . . . .</b>	<b>83</b>
<b>6.3 State estimation . . . . .</b>	<b>88</b>
6.3.1 Sensors placement . . . . .	88
6.3.2 Angular speed estimation . . . . .	89
6.3.3 Wing state estimation . . . . .	90
6.3.4 Fuselage orientation estimation . . . . .	92

## 6.1 Design et modélisation d'un drone : Colibri

### 6.2 Design and modelling of Colibri UAV

The Colibri drone is derived from a tail-sitter drone with a wing that generates lift during the forward flight. This wing has several actuators : four motors  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  and two elevons  $\delta_l$  and  $\delta_r$ . We can define the control vector  $u_W$  of the wing based on Figure 6.1 as  $u_W = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ \delta_l \ \delta_r]^\top$ . A fuselage linked by a pivot is secured at the aerodynamic centre of the wing. This fuselage supports the autopilot, the battery, a motor and a tail to keep it horizontal. In Figure 6.1, all the aerodynamic control surfaces are shown in pink and the propellers are shown in green. There are three reference frames attach to the drone. (I) is a NED inertial reference frame (or world frame) linked to the earth's surface, (W) is a wing reference frame attached to the drone wing and (F) is a fuselage reference frame attached to the drone fuselage.

Some of the characteristic dimensions are shown in Table 6.1. Note that the motors are positioned symmetrically on the wing, which means that the position

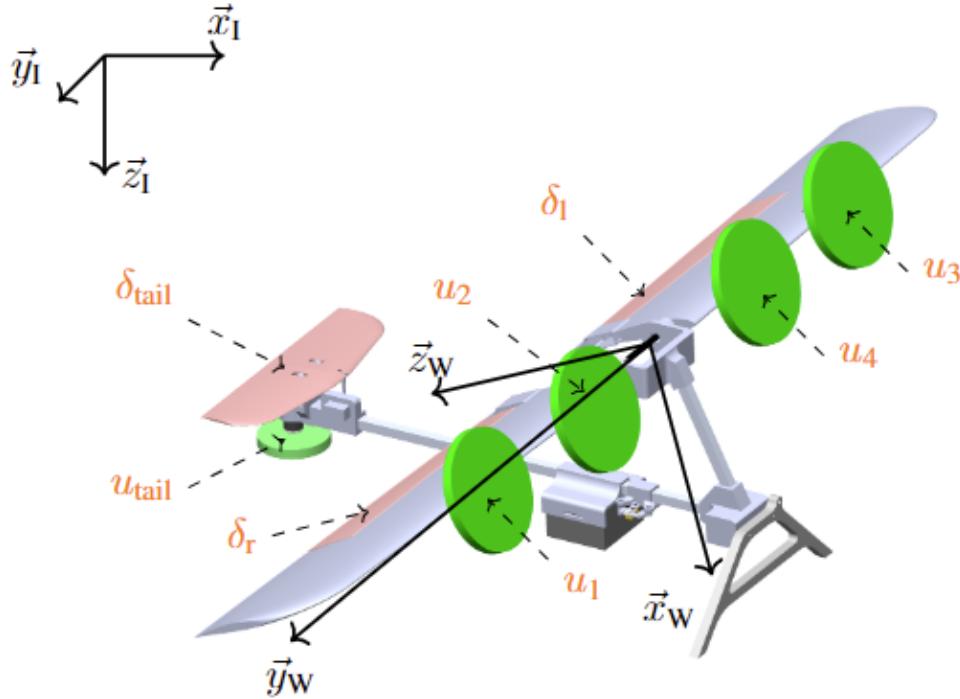


FIGURE 6.1 – Inertial (I) and wing (W) reference frames and the Colibri architecture.

can be described by focusing on one side.

Parameter	Value	Units
$m_W$ (wing mass)	0.53	kg
$m_F$ (fuselage mass)	1.17	kg
$J_W = diag(J_x^W, J_y^W, J_z^W)$	$diag(0.1677, 0.0052, 0.1634)$	$kg\ m^2$
$J_F = diag(J_x^F, J_y^F, J_z^F)$	$diag(0.0191, 0.0161, 0.0343)$	$kg\ m^2$
$k_f$ (propeller thrust coeff.)	1.7800e-8	$kg\ m$
$d_{MO_W}$	$[0.383, 0, -0.167]^\top$	m
$d_{GO_W}$	$[0.052, 0, -0.171]^\top$	m

TABLE 6.1 – Numerical parameters of the Colibri model.

The modelling is based on the results of [Udwadia 2006, Section 2.15]. The algorithm for computing matrices  $M$ ,  $A$ ,  $Q$  and  $B$  is in [Udwadia 2012], which provides us the equations of motion of a constrained multibody system :

$$\ddot{x} = \hat{M}^\dagger \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I - A^\dagger A)M \\ A \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} Q \\ B \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

whose expression is valid as long as  $\hat{M}$  has full rank and where  $A$ ,  $M$ ,  $Q$  and  $B$  are described next.

We will use quaternions  $q = [\eta \ \epsilon^\top]^\top \in \mathbb{S}^3 := \{q \in \mathbb{R}^4 : |q| = 1\}$  to represent the

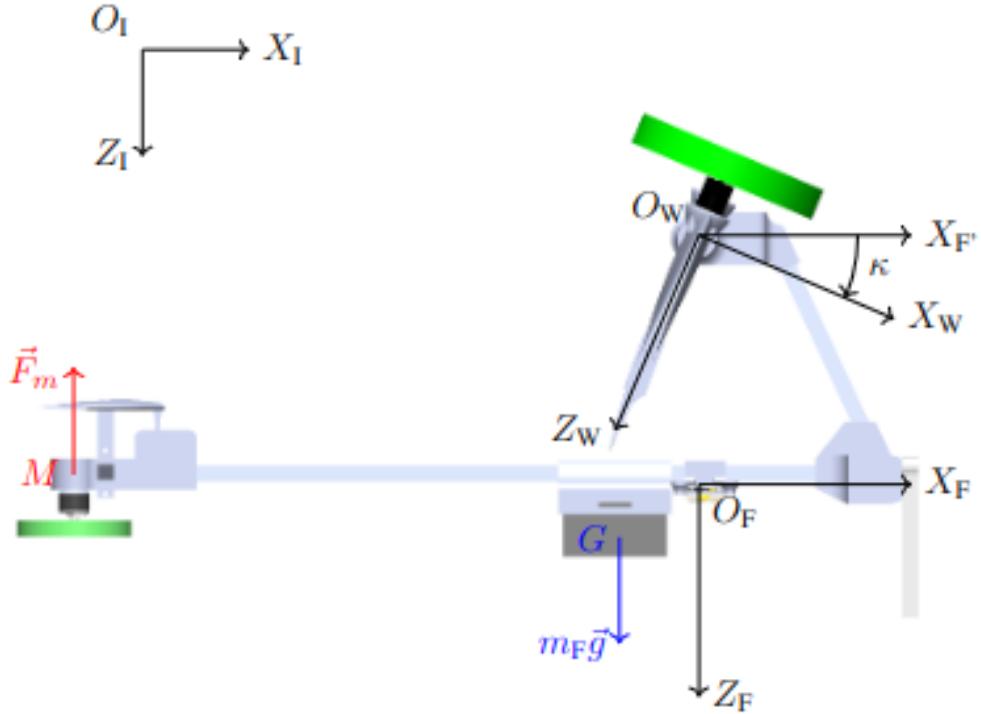


FIGURE 6.2 – Inertial (I), fuselage (F) and wing (W) reference frames and forces acting on the Colibri UAV.

orientations of the two bodies. The ensuing rotation matrix  $R(q) \in SO(3) := \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : R^\top R = I, \det(R) = 1\}$  is uniquely defined as  $R(q) := I + 2\eta [\epsilon]_\times + 2 [\epsilon]^2 = [R_1 \ R_2 \ R_3]$ .

According to Figure 6.1 and 6.2, define the vectors  $p_F = \overrightarrow{O_I O_F}$ ,  $p_W = \overrightarrow{O_I O_W}$ ,  $d_{FW} = \overrightarrow{O_F O_W}$  satisfying  $d_{FW} = p_W - p_F$  and  $d_{MO_W} = \overrightarrow{MO_W}$ ,  $d_{GO_W} = \overrightarrow{GO_W}$ .

The overall state vector is  $(x, v) \in \mathbb{R}^{28}$  with  $x = (p_W, q_W, p_F, q_F) \in \mathbb{R}^{14}$  and  $v = (v_W, \dot{q}_W, v_F, \dot{q}_F) = (\dot{p}_W, \dot{q}_W, \dot{p}_F, \dot{q}_F) = \dot{x} \in \mathbb{R}^{14}$ , where  $v_W = \dot{p}_W \in \mathbb{R}^3$  represents the linear velocity of the wing in the inertial reference frame,  $\dot{q}_W \in \mathbb{R}^4$  is the derivative of the quaternion,  $q_W \in \mathbb{R}^4$  representing the orientation of the wing,  $v_F = p_F \in \mathbb{R}^3$  is the linear velocity of the fuselage in the inertial reference frame and  $\dot{q}_F \in \mathbb{R}^4$  is the derivative of the quaternion  $q_F \in \mathbb{R}^4$  representing the fuselage orientation. It can be seen that the state vector is not minimal. It should be noted

that the angular velocity  $\omega \in \mathbb{R}^3$  can be obtained from the quaternion derivative  $\dot{q}$  using equation [Udwadia 2012, equation (2.7)] recalled here :

$$\omega = H(q)\dot{q}$$

where  $H(q) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  is a matrix defined by  $H(q) = 2 \begin{bmatrix} -\epsilon & \eta I_3 - [\epsilon]_\times \end{bmatrix}$ . For deriving the equations of motion, recalling that  $R_i(q) \in \mathbb{R}^3, i = 1, 2, 3$  are the three columns of a rotation matrix associated with quaternion  $q$ , define matrices  $L_i^W(q_W) = \frac{\partial R_i}{\partial q}(q_W) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ ,  $L_i^F(q_F) = \frac{\partial R_i}{\partial q}(q_F) \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  and  $L_{O_F^W} = \sum_{i=1}^3 d_{FW}(i)L_i^F(q_F)$ ,  $i \in 1, 2, 3$ , where  $d_{FW}(i)$  denotes the  $i$ -th component of vector  $d_{FW} = p_W - p_F$ . Since  $O_W$  is located at the wing's center of rotation, the distance  $d_{FW}$  is a constant, since  $O_W$  and  $O_F$  can be assumed to belong to the same solid (the fuselage). We deduce, with homogeneity,  $\dot{L}_{O_F^W} = \sum_{i=1}^3 d_{FW}(i)L_i^F(\dot{q}_F)$ . With these definitions, select the matrices in (6.1) as

$$M = \begin{bmatrix} m_W I_3 & \mathbb{0}_{3 \times 4} & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_{3 \times 4} \\ \mathbb{0}_{4 \times 3} & H_W^\top J_W H_W & \mathbb{0}_{4 \times 3} & \mathbb{0}_4 \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_{3 \times 4} & m_F I_3 & \mathbb{0}_{3 \times 4} \\ \mathbb{0}_{4 \times 3} & \mathbb{0}_4 & \mathbb{0}_{4 \times 3} & H_F^\top J_F H_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{14 \times 14}, \quad (6.2)$$

where we denoted  $H_W = H(q_W)$ ,  $H_F = H(q_F)$ , and

$$Q = \begin{bmatrix} m_W g e_3 + R(q_W) F_b \\ -2 \dot{H}_W^\top J_W \dot{H}_W \dot{q}_W + H_W^\top M_W \\ m_F g e_3 + R(q_F) F_F \\ -2 \dot{H}_F^\top J_F \dot{H}_F \dot{q}_F + H_F^\top M_F \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{14}, \quad (6.3)$$

where  $\dot{H}_W$  denote  $H(\dot{q}_W)$ , coinciding with the time derivative of  $H(q_W)$  and  $\dot{H}_F$  denote  $H(\dot{q}_F)$ , coinciding with the time derivative of  $H(q_F)$ . Moreover,  $F_b$  and  $M_b$  represent, respectively, all the forces and moments acting on the wing. The expressions of  $M$  and  $Q$  are taken from [Lustosa 2019, equations (45) and (57)] where the  $\phi$  theory is developed, a parametrisation that allows the classical angles of incidence and sideslip to be subtracted and the hover singularity to be avoided. For lack of space, they will not be more detailed. Finally,  $F_F = F_m$  et  $M_F$  represent respectively the set of non-gravitational forces and moments acting on the fuselage expressed in the frame  $O_W$ . In particular,  $F_m = -k_f u_{tail}^2$  is the force generated by the motor located at the tail of the fuselage and  $u_{tail}$  is the motor rotation speed,

while

$$M_F = m_F g e_3 \times d_{GO_W} + F_m \times d_{MO_W}, \quad (6.4)$$

where  $d_{MO_W}$  is the distance between the motor location and the center of rotation and  $d_{GO_W}$  is the distance between the location of the fuselage's center of gravity and the center of rotation.

The set of constraints associated with the nonminimality or the state  $(x, v)$  and by the pivot connection between the two bodies is given by :

$$\begin{cases} \varphi_1 := q_W^\top q_W - 1 = 0 \\ \varphi_2 := q_F^\top q_F - 1 = 0 \\ \varphi_3 := R_2(q_W)^\top R_3(q_F) = 0 \\ \varphi_4 := R_2(q_W)^\top R_1(q_F) = 0 \\ \varphi_5 := p_F + d_{FA} + p_W = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

The first two constraints impose the unit norm of the quaternions  $q_F$  and  $q_W$ . The third and fourth constraints are related to a moving pivot constraint, i.e. the orthogonality of two vectors is imposed. The last one is a positional constraint so that the point of the centre of rotation belonging to the wing coincides with the point defined in the fuselage. This constraint is based on a three-dimensional geometric closure.

It is more convenient to express the set of constraints as a stable dynamical system converging to zero, so we convert each one of the constraints in the form :

$$\ddot{\varphi}_i + \delta_1 \dot{\varphi}_i + \delta_2 \varphi_i = 0, i \in 1, 2, 3, 4, 5, \quad (6.6)$$

with the selections  $(\delta_1, \delta_2) = (0.5, 8)$  being the coefficients of a stable polynomial, so that, regardless of the selection  $\varphi_i(0) = 0$ , we have  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_i(t) = 0$ . By differentiating constraints (6.5) twice and factoring them out in the form  $A(x, \dot{x})\ddot{x} = B(x, \dot{x})$ , we obtain the expression of  $A(x, \dot{x})$  reported in equation (6.7) and  $B(x, \dot{x})$  reported in the equation (6.8) at the start of the next page.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{1 \times 3} & q_W^\top & \mathbb{0}_{1 \times 3} & \mathbb{0}_{1 \times 4} \\ \mathbb{0}_{1 \times 3} & \mathbb{0}_{1 \times 4} & \mathbb{0}_{1 \times 3} & q_F^\top \\ \mathbb{0}_{1 \times 3} & R_3(q_F)^\top L_2^W(q_W) & \mathbb{0}_{1 \times 3} & R_2(q_W)^\top L_3^F(q_F) \\ \mathbb{0}_{1 \times 3} & R_1(q_F)^\top L_2^W(q_W) & \mathbb{0}_{1 \times 3} & R_2(q_W)^\top L_3^F(q_F) \\ \mathbb{I}_3 & L_{O_F^W} & -\mathbb{I}_3 & \mathbb{0}_{3 \times 4} \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

The simulation of a drone remains complex, as it is naturally unstable. We have chosen to use the control law proposed in [Sansou 2022b] extended to 6 DOF dynamics to stabilize the system. This PI-based control stabilizes the wing. Another control law based on a proportional-derivative feedback stabilizes the fuselage to keep it horizontal. The closed-loop simulation results are shown in Figure 6.3. Considering the degrees of freedom of the pivot link, the coupling between the two bodies is clearly visible from the lower three plots. Indeed, the roll and yaw angles  $(\phi_F, \psi_F)$  and  $(\phi_W, \psi_W)$  of the fuselage and wing coincide perfectly, while the pitch angles  $(\theta_F, \theta_W)$  are radically different.

### 6.3 State estimation

In order to stabilise this two-body UAV system, it is necessary to know the position and orientation of the two bodies. Due to the pivot link between the wing and the fuselage, the difference between the orientation of the wing and the orientation of the fuselage is simply a rotation about the pitch axis of the wing. The two other orientations (roll and yaw) coincide. The position of the fuselage's centre of gravity can be deduced from the position of the wing's centre of gravity and the angle between the fuselage and the wing. This angle is measured by a quadrature rotary encoder (CUI Devices AMT22, Absolute Encoders, 12 bit, SPI), which returns a quantized angular measurement with a step size of  $0.09^\circ$ . Given this angular measurement, we discuss below the estimation of the speed information, so as to reconstruct the state of the UAV.

#### 6.3.1 Sensors placement

A first question pertains to the sensors placements : the IMU (accelerometer, gyroscope and magnetometer) can be installed on the fuselage or on the wing. Installing the IMU on the wing means that the measurements can be taken directly in the desired reference frame, but the measurements are noisier because the IMU

is attached to the structure supporting the motors. Given the size of the wing, their flexibility can generate resonances and can perturb the measurements. Installing the IMU on the fuselage reduces vibrations, but means that the measurements must be transformed in the wing reference frame. The corresponding transformation can be computed from the rotary encoder measurement, providing the angle between the wing and the fuselage, and also from the measurements taken with the CAD software, providing precise information about the distances between the wing and fuselage frames. Our final choice is to attach the IMU to the fuselage. Another consideration is that the autopilot board, which already have an integrated IMU, is also supposed to be connected to the payload and other sensors attached to the fuselage. It is thus limiting the number of cables at the pivot point to the actuators commands and power supply.

### 6.3.2 Angular speed estimation

As explained above, we can measure the angle  $\kappa \in \mathbb{R}$  between the wing and the fuselage using the rotary encoder. Then, to estimate the angular velocity we use the high-gain observer proposed in [Nicosia 1990] (see also [Chitour 2002] for the use of high-gain observers to estimate time derivatives). This method is preferable to a finite difference derivative, as the quantized information generated by the rotary encoder can result in bursts in the estimated angular velocity values.

Denote by  $\kappa \in \mathbb{R}$  the measured position variable, by  $\omega_\kappa := \dot{\kappa} \in \mathbb{R}$  its derivative, to be estimated, and by  $\xi = [\kappa, \omega_\kappa]^\top \in \mathbb{R}^2$  their juxtaposition in a single vector. Denote also  $\hat{\xi}$  the estimate of  $\xi$  as follows :

$$\hat{\xi} = [\hat{\kappa}, \hat{\omega}_\kappa]^\top \in \mathbb{R}^2.$$

Following [Nicosia 1990], the estimator dynamics is given by

$$\dot{\hat{\xi}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\xi} + \begin{bmatrix} k_p \\ \frac{\epsilon_\kappa}{k_p} \\ k_v \\ \frac{k_v}{\epsilon_\kappa^2} \end{bmatrix} (\kappa - \hat{\kappa}), \quad (6.9)$$

where  $\kappa$  is the angular measurement recovering from the sensors,  $k_p$  and  $k_v$  are two positive scalars gains such that the characteristic equation  $s^2 + k_v s + k_p = 0$  has roots with negative real part. For our estimators, we have selected  $k_p = 1$  and  $k_v = 1.3$  so as to get a damping factor  $\zeta = 0.65$  leading to a slightly underdamped response as a suitable trade-off between a fast rise time and a mildly oscillatory response. The high-gain scaling factor  $\epsilon_\kappa$  can be conveniently adjusted in order to obtain a trade-

off between smoothing action (obtained by increasing  $\epsilon_\kappa$ ) and reduction of the time lag of the estimator (obtained by reducing  $\epsilon_\kappa$ ). Moreover, the smoothing action of the proposed approach mitigates the effect of the quantized position measurements. We have selected  $\epsilon_\kappa = 0.05$  for our experiments. Figure 6.4 shows the experimental results obtained after implementation of the high-gain filter (6.9) in the case of a flight generating high-amplitude angular oscillations. We carried out differentiation by finite difference (in green) in post-treatment to compare the results. Due to the quantized nature of the rotary encoder, we observe that the angular velocity obtained by finite difference is very noisy. We can see that the high-gain filter makes it possible to estimate the angular velocity more accurately (in red), albeit with a slight delay. Thanks to the addition of an extra IMU on the wing in a specific flight test, it is possible to compare the velocity estimate with the wing's gyroscope (MPU9250) measurements, visible on the bottom graph of Figure 6.4 (blue trace). We can see that the gyroscope readings are somewhat noisy, due in particular to the vibrations generated by the motors.

In order to perform the necessary transformation among the reference frames, define the quaternion  $q_{\hat{\kappa}} \in \mathbb{S}^3$  as follows :

$$q_{\hat{\kappa}} = \left[ \cos\left(\frac{\hat{\kappa}}{2}\right) \ 0 \ \sin\left(\frac{\hat{\kappa}}{2}\right) \ 0 \right]^\top \quad (6.10)$$

### 6.3.3 Wing state estimation

Based on the estimated angle  $\hat{\kappa}$  and the estimated angular velocity  $\hat{\omega}_\kappa$ , it is possible to transform the measurements from the fuselage to the wing frame. All the sensors are installed on the autopilot board, which is itself attached to the fuselage. However, as mention in introduction, we want to use INDI to stabilize the wing. So this control law requires the state information in the wing reference frame, where all the forces are applied (aerodynamic and traction). Then, two viable solution are possible : perform the state estimation in the fuselage reference frame and rotate the estimation, using the estimate of the angle  $\hat{\kappa}$ , or rotate the raw measurements in advance to express them in the wing reference frame, and then perform the state estimation on the latter. Given the current architecture of the software in the Paparazzi<sup>1</sup> system, it is cumbersome to have two joint state estimation structures, so it is difficult to implement the first solution, where the controller directly retrieves the current state estimation. For this reason, we have chosen to estimate the state of the wing from data measured on the fuselage. To this end, we detail below the

---

1. [https://github.com/enacuavlab/paparazzi/tree/rot\\_state\\_est](https://github.com/enacuavlab/paparazzi/tree/rot_state_est)

coordinate transformation for the three sensors : gyroscope, accelerometer and magnetometer.

For the gyroscope-based angular rate measurements, we may compute the angular velocity of the wing expressed in the wing frame as

$$\omega_W = R(q_{\hat{\kappa}}) \left( \omega_{gyro}^F + \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{\omega}_\kappa \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (6.11)$$

where  $\omega_{gyro}^F$  is the angular velocity measured by the gyro on the fuselage, expressed in the fuselage frame,  $\hat{\omega}_\kappa$  is the estimated angular velocity of the wing relative to the fuselage, as per (6.9), and  $q_{\hat{\kappa}}$  is the quaternion defined in (6.10). Expression (6.11) is similar to a composition of angular velocities and a reference frame transformation.

For the acceleration measurement with the accelerometer, we may use the following relation Expression (6.12) is obtained from the rate of change transport theorem [Brizard 2004], where we find the Euler acceleration term  $\omega_F \times d_{AF}$  and the centripetal acceleration term  $\omega_F \times (\omega_F \times d_{AF})$ . Coriolis Acceleration  $2\omega_F \times \frac{d(d_{FW})}{dt} \Big|_{O_F}$  and the rate of acceleration  $\frac{d^2(d_{FW})}{d^2t} \Big|_{O_F}$  are zero because  $d_{FW}$  is contant.

$$a_W = R(q_{\hat{\kappa}}) \left( a_{acc}^F + \dot{\omega}_{gyro}^F \times d_{FW} + \omega_{gyro}^F \times (\omega_{gyro}^F \times d_{FW}) \right) \quad (6.12)$$

where  $a_{acc}^F \in \mathbb{R}^3$  is the acceleration measured by the accelerometer on the fuselage, expressed in the fuselage frame and  $\omega_{gyro}^F$ , the angular velocity of the fuselage, same as the equation (6.11). The angular acceleration  $\dot{\omega}_{gyro}^F$  in (6.12) is computed by a finite difference.

For the magnetometer measurements, we have

$$E_W = R(q_{\hat{\kappa}}) E_{mag} \quad (6.13)$$

where  $E_{mag} \in \mathbb{R}^3$  is the magnetometer output, expressed in the fuselage frame and  $E_W \in \mathbb{R}^3$  is the computed measurement expressed in the wing frame.

To obtain the wing state estimate, we use a sensor measurement fusion algorithm : extended Kalman filter<sup>2</sup> (EKF) which provide an estimate of the following states :  $p_W$ ,  $v_W$ ,  $q_W$  from measurements transformed in the wing reference frame  $\omega_W$  (eq. (6.11)),  $a_W$  (eq. (6.12)),  $E_W$  (eq. (6.13)) and external vision system pose data, which provides a precise measurement of the drone's position  $p_W$  and speed

---

2. <https://github.com/PX4/PX4-ECL/tree/master>

$v_W$  in the inertial reference frame (I).

#### 6.3.4 Fuselage orientation estimation

To determine the orientation of the fuselage, we may perform a composition between the quaternion representing the orientation of the wing  $q_W$  result of EKF and the quaternion constructed from the filtered measurement of the rotary encoder  $q_{\hat{\kappa}}$  in (6.10),

$$q_F = q_W \otimes q_{\hat{\kappa}} \quad (6.14)$$

where the operator  $\otimes$  denotes the quaternion product. The knowledge of  $q_F$  is needed to keep the fuselage perfectly horizontal.

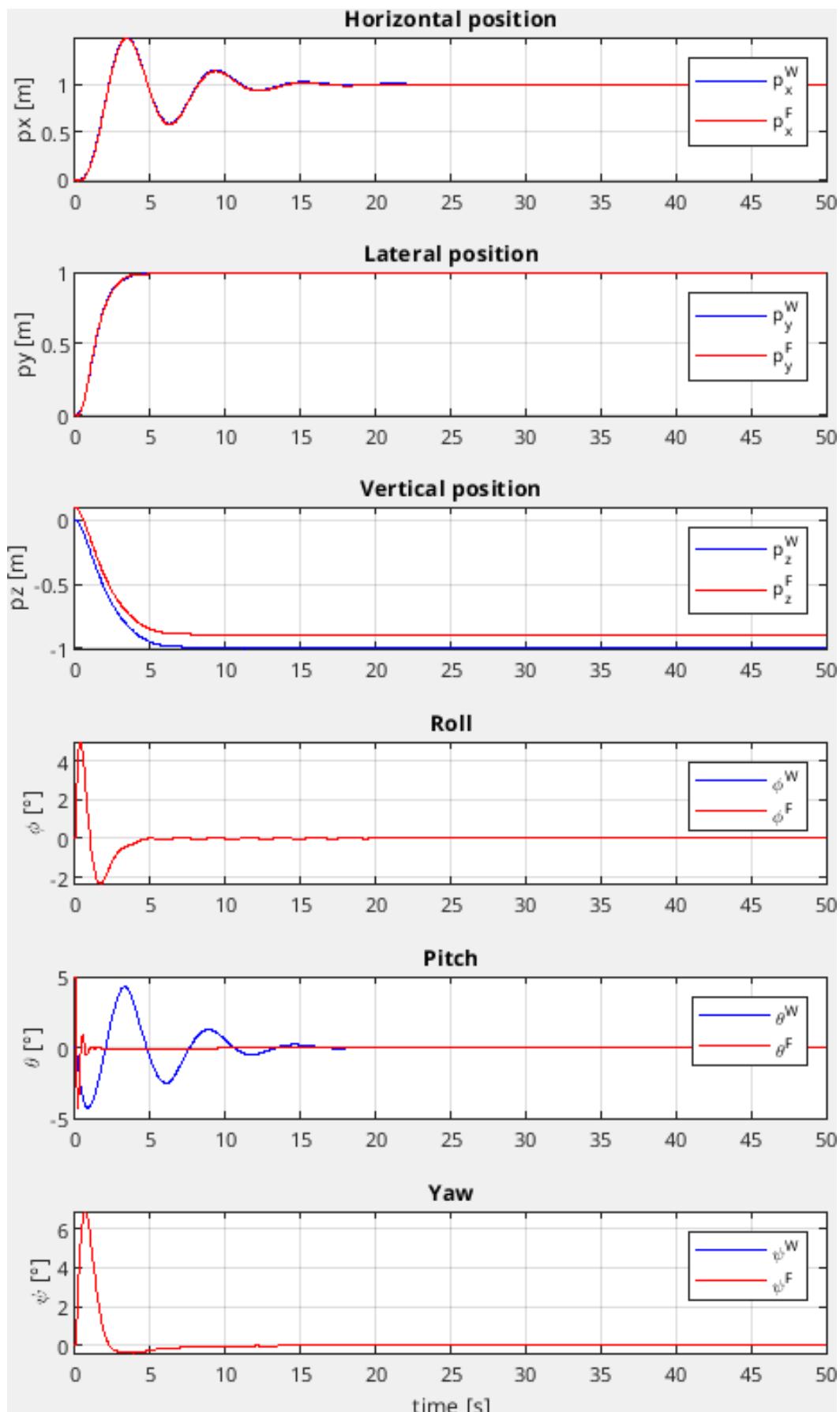


FIGURE 6.3 – Position and orientation simulation of the multi-body UAV Colibri in closed loop with a simple double-loop controller.

$$B = \begin{bmatrix} -\delta_1 q_W^\top \dot{q}_W - \frac{\delta_2}{2}(q_W^\top q_W - 1) - \dot{q}_W^\top \dot{q}_W \\ -\delta_1 q_F^\top \dot{q}_F - \frac{\delta_2}{2}(q_F^\top q_F - 1) - \dot{q}_F^\top \dot{q}_F \\ -R_3(q_F)^\top \dot{L}_2^W \dot{q}_W - R_2(q_W)^\top \dot{L}_3^F \dot{q}_F - 2\dot{q}_W^\top L_2^W^\top L_3^F \dot{q}_F - \delta_1(R_3(q_F)^\top L_2^W \dot{q}_W + R_2(q_W)^\top L_3^F \dot{q}_F) - \delta_2 \varphi_3 \\ -R_1(q_F)^\top \dot{L}_2^W \dot{q}_W - R_2(q_W)^\top \dot{L}_1^F \dot{q}_F - 2\dot{q}_W^\top L_2^W^\top L_1^F \dot{q}_F - \delta_1(R_1(q_F)^\top L_2^W \dot{q}_W + R_2(q_W)^\top L_1^F \dot{q}_F) - \delta_2 \varphi_4 \\ \dot{L}_{O_F^W} \dot{q}_F - \delta_1(v_W + \dot{L}_{O_F^W} \dot{q}_W - v_F) - \delta_1 \varphi_5 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

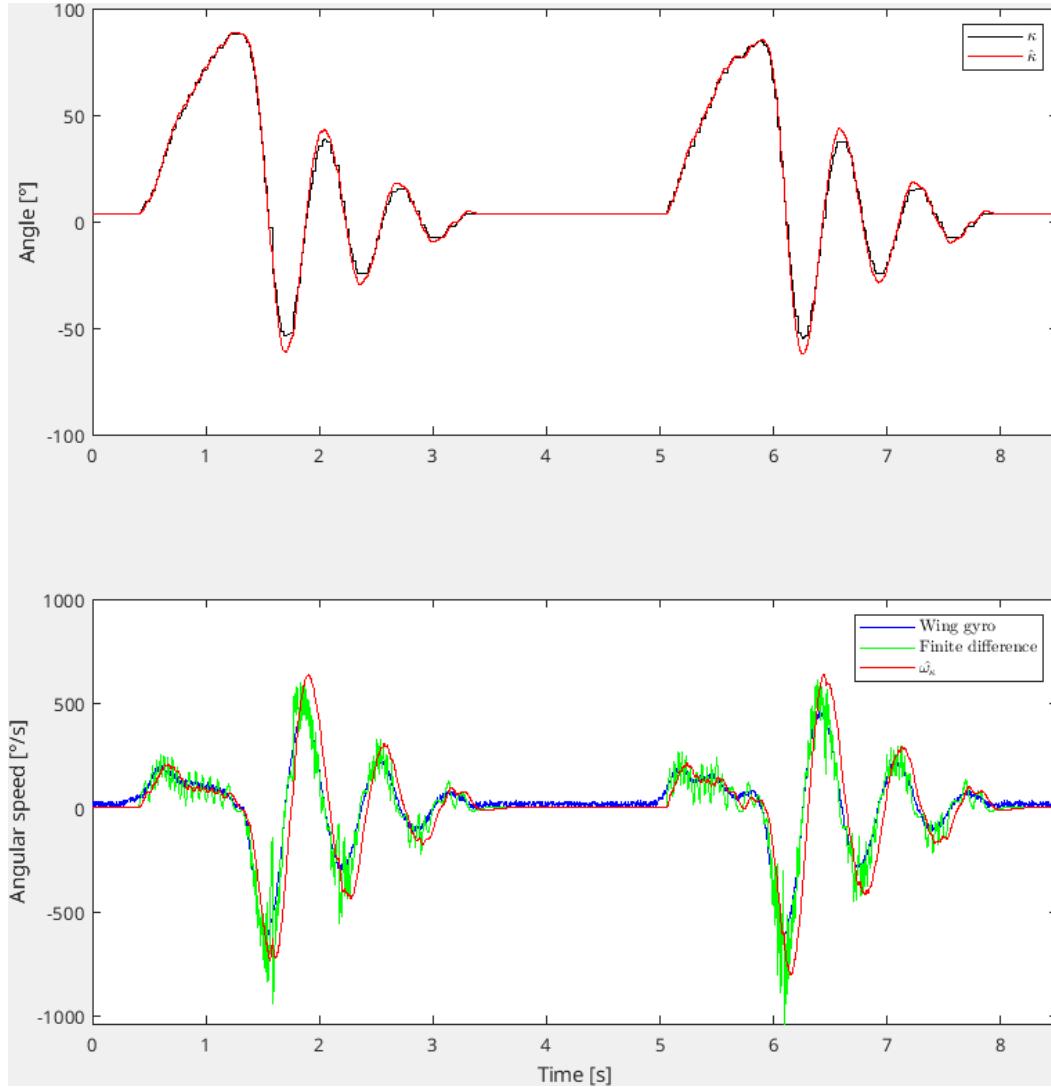


FIGURE 6.4 – Angular position measurement (black,top plot), wing gyro velocity measurement (blue,bottom plot), finite difference velocity estimation (green, bottom plot) and high-gain estimates (red curves)

## CHAPITRE 7

# Commande d'un drone à aile libre rotation libre

---

## Sommaire

---

7.1	Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone . . . . .	95
7.2	Experimentation . . . . .	96
7.3	Commande Udwadia-Kalaba . . . . .	97
7.4	Vols expérimentaux . . . . .	97

---

## 7.1 Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone

The theory of Incremental Nonlinear Dynamic Inversion (INDI) used in the context of micro-UAVs is presented in [Smeur 2016]. We use the notation proposed in [Smeur 2020], without providing extra details, due to length constraints. The central underlying assumption is that the so-called timescale separation principle holds w.r.t. the actuator dynamics and the dynamics of aerodynamic forces and moments. The control signal can then be computed incrementally using the actuator effectiveness matrix  $G$ .

$$u_W = u_W + G^\dagger(\nu - \begin{bmatrix} \dot{\omega}_W \\ T_W \end{bmatrix}) \quad (7.1)$$

where  $\dot{\omega}_W \in \mathbb{R}^3$  is the measured angular acceleration obtain by finite difference from equation (6.11),  $T_W \in \mathbb{R}$  is the current thrust,  $\nu$  is define in [Smeur 2020, equation

(4)] and  $G$  is the control effectiveness matrix, determined as follows :

$$\begin{bmatrix} \partial\phi \\ \partial\theta \\ \partial\psi \\ \partial T \end{bmatrix} = Gu_f = \begin{bmatrix} -7.5 & -15 & 7.5 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ -0.6 & -0.6 & -0.6 & -0.6 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_f$$

This selection of efficiency matrix has been determined for the hovering flights, but it is necessary to carry out a different study for the forward flight.

To stabilise the fuselage, we use a PD feedback from the angle  $\theta_F$  formed between the fuselage and the horizontal, which we want to keep at zero. This is obtained by converting the quaternion  $q_F$  of equation (6.14) into an Euler angle by following the 'ZYX' Euler convention. The PD feedback provides the reference  $u_{tail}$  for the angular speed of the motor generating the force  $F_m$  (see Figure 6.2), as follows

$$u_{tail} = u_{eq} + k_p \theta_F + k_d \dot{\theta}_F,$$

where  $u_{eq}$  is the equilibrium motor command to keep the fuselage horizontal in the absence of disturbance and  $k_p$ ,  $k_d$  are tunable scalar gains. The value  $u_{eq}$  was obtained by applying a moment theorem to the fuselage at the point  $O_w$ . In fact, the two moments that come into effect on the fuselage are the torque due to the thrust force of the tail motor and the torque due to the position of the fuselage's centre of gravity. The gains  $k_p$  et  $k_d$  were adjusted in flight to ensure satisfactory flight behaviour. We obtain  $\dot{\theta}_F$  from  $\omega_{gyro}^F = [\dot{\phi}_F \ \dot{\theta}_F \ \dot{\psi}_F]^\top$ .

## 7.2 Experimentation

An experimental prototype was developed, as shown in Figure 7.1. A selection of the experimental results in controlled flight is shown in Figure 7.2.

About Figure 7.2, from 0 s to 8 s, the drone is on the ground. From 8 s to 16 s, the drone takes off to reach a height of 2 metres visible from the third plot. This height is reached after a 10 % overshoot. The drone is held in this position for 54 s. Incidence oscillations are observed in the fifth and last plot, generating oscillations in the drone's horizontal position. This is due to the coupling between the two bodies, which is not properly stabilized. From 70 s, the UAV starts heading towards the point  $p_c = [3 \ 0.9 \ -1.5]^\top$  and  $\psi_c = 90^\circ$ .

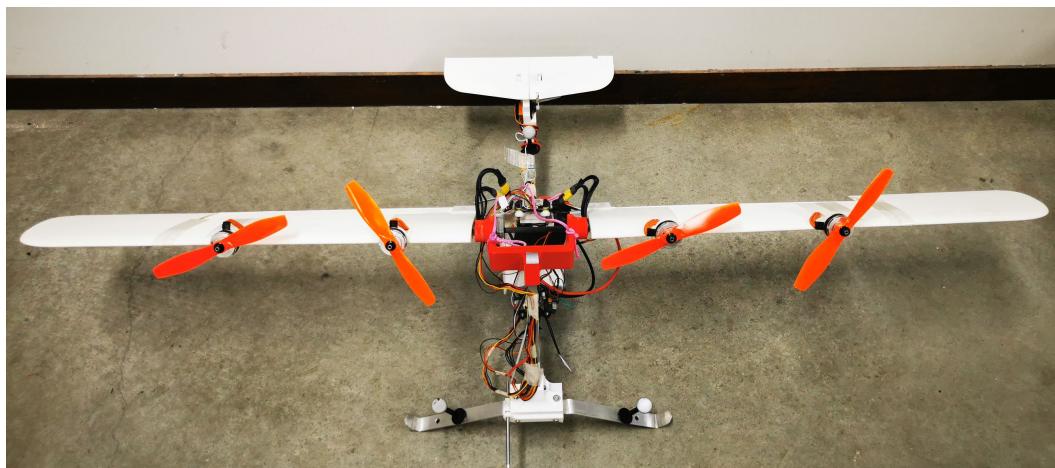


FIGURE 7.1 – Colibri experimental prototype.

### **7.3 Commande Udwadia-Kalaba**

### **7.4 Vols expérimentaux**

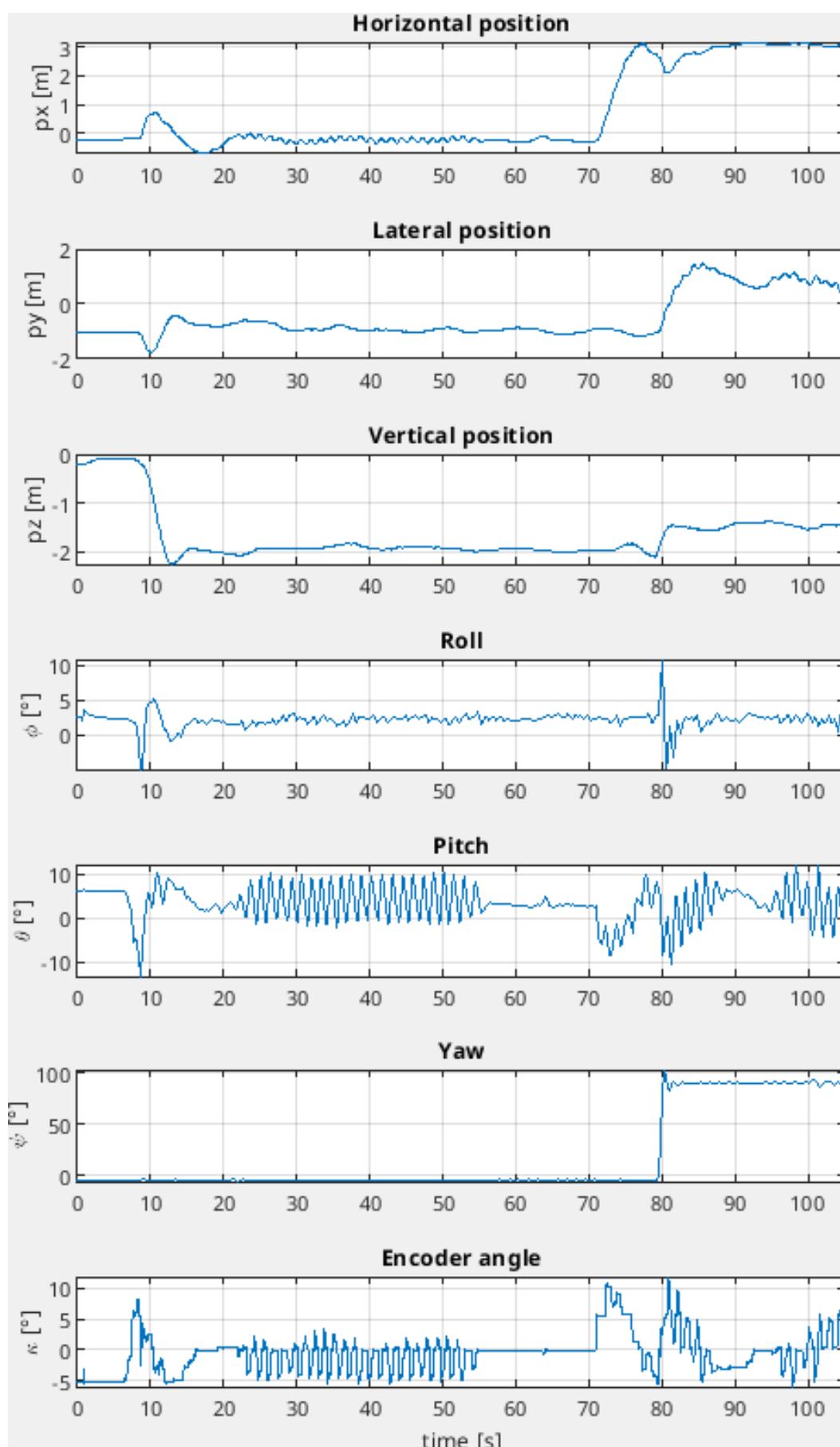


FIGURE 7.2 – Position and orientation of the reference frame wing in the first six graphs and pivot angle measurement on the last graph below during real flight.

# Conclusion

Ce manuscrit de thèse rapporte



## ANNEXE A

# Exemple d'annexe

---

### A.1 Exemple d'annexe



# Bibliographie

- [Andreetto 2016] Andreetto, M., Fontanelli, D. et Zaccarian, L. *Quasi time-optimal hybrid trajectory tracking of an n-dimensional saturated double integrator.* Dans IEEE Conference on Control Applications, pages 550–555, 2016. (Cité en page 49.)
- [Apkarian 2006] Apkarian, P. et Noll, D. *Nonsmooth  $H_\infty$  Synthesis.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 51, no. 1, pages 71–86, 2006. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2005.860290>. (Cité en pages 64, 69 et 71.)
- [Apkarian 2013] Apkarian, P. *Tuning controllers against multiple design requirements.* Dans 2013 American Control Conference, pages 3888–3893, 2013. (Cité en page 71.)
- [Aref 2018] Aref, P., Ghoreyshi, M., Jirasek, A., Satchell, M. J. et Bergeon, K. *Computational Study of Propeller-Wing Aerodynamic Interaction.* Aerospace, vol. 5, no. 3, 2018. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.3390/aerospace5030079>. (Cité en page 14.)
- [Avy 2023] Avy. 2023. [En ligne]. Disponible : <https://avy.eu/>. (Cité en pages vii et 3.)
- [Axtén 2021] Axtén, R. et Johnson, E. *Vtol freewing testbed vehicle in hover and forward flight.* Dans AIAA Scitech 2021 Forum, AIAA Scitech 2021 Forum, pages 1–19. American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, AIAA, 2021. Publisher Copyright : © 2021, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc, AIAA. All rights reserved. ; AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2021 ; Conference date : 11-01-2021 Through 15-01-2021. (Cité en page 5.)
- [Axtén 2023] Axtén, R. M., Khamvilai, T. et Johnson, E. N. *VTOL Freewing Design and Adaptive Controller Development.* Dans AIAA SCITECH 2023 Forum, 2023. (Cité en page 5.)
- [Brizard 2004] Brizard, A. J. *Motion in a non-inertial frame.* Saint Michael's College, Colchester, VT, 2004. (Cité en page 91.)
- [Chiappinelli 2018] Chiappinelli, R. et Nahon, M. *Modeling and Control of a Tail-sitter UAV.* Dans 2018 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS), pages 400–409, 2018. (Cité en page 14.)

- [Chitour 2002] Chitour, Y. *Time-varying high-gain observers for numerical differentiation.* IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 47, no. 9, pages 1565–1569, 2002. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/TAC.2002.802740>. (Cité en page 89.)
- [Droandi 2015] Droandi, G., Zanotti, A., Gibertini, G., Grassi, D. et Campanardi, G. *Experimental investigation of the rotor-wing aerodynamic interaction in a tiltwing aircraft in hover.* The Aeronautical Journal, vol. 119, no. 1215, page 591–612, 2015. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1017/S0001924000010708>. (Cité en page 14.)
- [Ducard 2014] Ducard, G. et Hua, M.-D. *Modeling of an unmanned hybrid aerial vehicle.* Dans 2014 IEEE Conference on Control Applications (CCA), pages 1011–1016, 2014. (Cité en page 7.)
- [Ducard 2021] Ducard, G. J. J. et Allenspach, M. *Review of designs and flight control techniques of hybrid and convertible VTOL UAVs.* Aerospace Science and Technology, vol. 118, page 107035, November 2021. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2021.107035>. (Cité en page 2.)
- [Dufour 2024] Dufour. 2024. [En ligne]. Disponible : <https://www.dufour.aero/aero2>. (Cité en pages vii et 5.)
- [Escareno 2006] Escareno, J., Salazar, S. et Lozano, R. *Modelling and Control of a Convertible VTOL Aircraft.* Dans Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control, pages 69–74, 2006. (Cité en page 14.)
- [Escareno 2007] Escareno, J., Stone, R., Sanchez, A. et Lozano, R. *Modeling and control strategy for the transition of a convertible tail-sitter UAV.* Dans European Control Conference, pages 3385–3390, 2007. (Cité en page 14.)
- [Fernandez 2023a] Fernandez, L. F., Bronz, M., Bartoli, N. et Lefebvre, T. *Assessment of Methods for Propeller Performance Calculation at High Incidence Angles.* Dans AIAA SCITECH 2023 Forum, 2023. (Cité en page 14.)
- [Fernandez 2023b] Fernandez, L. F. T., Bronz, M., Bartoli, N. et Lefebvre, T. *Development of a Mission-Tailored Tail-Sitter MAV.* Unmanned systems, vol. 12, no. 03, pages 611–625, November 2023. [En ligne]. Disponible : <https://hal.science/hal-04612206>. (Cité en pages vii et 5.)
- [Flores 2014] Flores, G., Lugo, I. et Lozano, R. *6-DOF hovering controller design of the Quad Tiltrotor aircraft : Simulations and experiments.* Dans 53rd IEEE Conference on Decision and Control, pages 6123–6128, 2014. (Cité en pages vii et 4.)

- [Franchi 2017] Franchi, A. et Mallet, A. *Adaptive Closed-loop Speed Control of BLDC Motors with Applications to Multi-rotor Aerial Vehicles*. Dans IEEE International Conference on Robotics and Automation, Singapour, Singapour, May 2017. (Cité en page 74.)
- [Goebel 2012] Goebel, R., Sanfelice, R. G. et Teel, A. R. Hybrid dynamical systems : Modeling, stability, and robustness. Princeton University Press, New Jersey, 2012. (Cité en pages 49 et 52.)
- [Guerrero 2009] Guerrero, J. A., Lozano, R., Romero, G., Lara-Alabajares, D. et Wong, K. C. *Robust control design based on sliding mode control for hover flight of a mini tail-sitter Unmanned Aerial Vehicle*. Dans 2009 35th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics, pages 2342–2347, 2009. (Cité en page 14.)
- [Hua 2013] Hua, M.-D., Hamel, T., Morin, P. et Samson, C. *Introduction to feedback control of underactuated VTOL vehicles : A review of basic control design ideas and principles*. IEEE Control Systems, vol. 33, pages 61–75, February 2013. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/MCS.2012.2225931>. (Cité en pages 19, 20, 40 et 46.)
- [Jardin 2007] Jardin, M. et Mueller, E. *Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum*. Dans AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2007. (Cité en page 24.)
- [Ke 2017a] Ke, Y. et Chen, B. M. *Full envelope dynamics modeling and simulation for tail-sitter hybrid UAVs*. Dans 2017 36th Chinese Control Conference (CCC), pages 2242–2247, 2017. (Cité en page 14.)
- [Ke 2017b] Ke, Y., Wang, K., Gong, K., Lai, S. et Chen, B. M. *Model based robust forward transition control for tail-sitter hybrid unmanned aerial vehicles*. Dans 2017 13th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), pages 828–833, 2017. (Cité en page 14.)
- [LabJack 2001] LabJack. *T7*. 2001. [En ligne]. Disponible : <https://labjack.com/products/t7>. Accessed : 2022-09-19. (Cité en page 58.)
- [Lustosa 2015] Lustosa, L., Defaÿ, F. et Moschetta, J. *Longitudinal study of a tilt-body vehicle : modeling, control and stability analysis*. Dans Proc. of International Conference on Unmanned Aircraft Systems, pages 816–824, Denver, Colorado, US, June 2015. (Cité en page 14.)
- [Lustosa 2017] Lustosa, L. R. *La Phi-théorie : une approche pour la conception de lois de commande de vol des véhicules convertibles*. PhD thesis, Toulouse,

- ISAE, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Moschetta, Jean-Marc et Defaÿ, François Automatique, Dynamique des fluides Toulouse, ISAE 2017. (Cité en page 7.)
- [Lustosa 2019] Lustosa, L. R., Defaÿ, F. et Moschetta, J.-M. *Global Singularity-Free Aerodynamic Model for Algorithmic Flight Control of Tail Sitters*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 42, no. 2, pages 303–316, February 2019. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.2514/1.G003374>. (Cité en pages 7, 14, 18, 19, 20, 21, 22 et 86.)
- [Michieletto 2020] Michieletto, G., Cenedese, A., Zaccarian, L. et Franchi, A. *Hierarchical nonlinear control for multi-rotor asymptotic stabilization based on zero-moment direction*. Automatica, vol. 117, page 108991, 2020. (Cité en pages 45, 46 et 47.)
- [Misra 2022] Misra, A., Jayachandran, S., Kenche, S., Katoch, A., Suresh, A., Gundabattini, E., Selvaraj, S. K. et Legesse, A. A. *A Review on Vertical Take-Off and Landing (VTOL) Tilt-Rotor and Tilt Wing Unmanned Aerial Vehicles (UAVs)*. Journal of Engineering, vol. 2022, no. 1, page 1803638, 2022. [En ligne]. Disponible : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2022/1803638>. (Cité en page 2.)
- [Nicosia 1990] Nicosia, S., Tornambe, A. et Valigi, P. *Experimental results in state estimation of industrial robots*. Dans 29th IEEE Conference on Decision and Control, pages 360–365 vol.1, 1990. (Cité en page 89.)
- [Olszanecki Barth 2020] Olszanecki Barth, J. M., Condomines, J.-P., Bronz, M., Moschetta, J.-M., Join, C. et Fliess, M. *Model-free control algorithms for micro air vehicles with transitioning flight capabilities*. International Journal of Micro Air Vehicles, vol. 12, pages 1–22, April 2020. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1177/1756829320914264>. (Cité en pages 19, 22, 24 et 55.)
- [Ostermann 2012] Ostermann, T., Holsten, J., Dobrev, Y. et Moormann, D. *Control concept of a tiltwing uav during low speed manoeuvring*. Dans Proceeding of the 28th International Congress of the Aeronautical Sciences : ICAS Brisbane, Australia, volume 1190, 2012. (Cité en pages vii et 5.)
- [Pfimlin 2006] Pfimlin, J.-M. *Commande d'un minidrone à hélice carénée : de la stabilisation dans le vent à la navigation autonome*. Theses, SUPAERO, November 2006. (Cité en pages vii et 5.)
- [Rohr 2021] Rohr, D., Studiger, M., Stastny, T., Lawrance, N. R. J. et Siegwart, R. *Nonlinear Model Predictive Velocity Control of a VTOL Tiltwing UAV*.

- IEEE Robotics and Automation Letters, vol. 6, no. 3, pages 5776–5783, 2021.  
[En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/LRA.2021.3084888>. (Cité en page 7.)
- [Saeed 2018] Saeed, A. S., Younes, A. B., Cai, C. et Cai, G. *A survey of hybrid Unmanned Aerial Vehicles.* Progress in Aerospace Sciences, vol. 98, pages 91–105, April 2018. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1016/j.paerosci.2018.03.007>. (Cité en page 2.)
- [Sanfelice 2013] Sanfelice, R., Copp, D. et Nanez, P. *A toolbox for simulation of hybrid systems in Matlab/Simulink : Hybrid Equations (HyEQ) Toolbox*, 2013. (Cité en page 52.)
- [Sansou 2022a] Sansou, F. *Commande hybride d'un drone convertible pour des déplacements sous optimaux*. Master Thesis. ENAC Toulouse, 2022. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.48550/ARXIV.2203.15387>. (Cité en pages 19, 21, 22 et 24.)
- [Sansou 2022b] Sansou, F., Demourant, F., Hattenberger, G., Loquen, T. et Zaccarian, L. *Open wind tunnel experiments of the DarkO tail-sitter longitudinal stabilization with constant wind*. IFAC-PapersOnLine, vol. 55, no. 22, pages 1–6, 2022. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.03.001>. 22nd IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace ACA 2022. (Cité en pages 68, 69, 70 et 88.)
- [Simmons 2022] Simmons, B. M. et Murphy, P. C. *Aero-Propulsive Modeling for Tilt-Wing, Distributed Propulsion Aircraft Using Wind Tunnel Data*. Journal of Aircraft, vol. 59, no. 5, pages 1162–1178, 2022. (Cité en page 14.)
- [Smeur 2016] Smeur, E. J. J., Chu, Q. et de Croon, G. C. H. E. *Adaptive Incremental Nonlinear Dynamic Inversion for Attitude Control of Micro Air Vehicles*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 39, no. 3, pages 450–461, 2016. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.2514/1.G001490>. (Cité en page 95.)
- [Smeur 2020] Smeur, E. J. J., Bronz, M. et de Croon, G. C. H. E. *Incremental Control and Guidance of Hybrid Aircraft Applied to a Tailsitter Unmanned Air Vehicle*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 43, no. 2, pages 274–287, 2020. [En ligne]. Disponible : <https://doi.org/10.2514/1.G004520>. (Cité en pages vii, 5, 95 et 96.)

- [Stone 2002] Stone, H. et Wong, K. C. *Preliminary Design of a Tandem-Wing Tail-Sitter UAV Using Multi-Disciplinary Design Optimisation*. Dans International Aerospace Congress, 2002. (Cité en page 14.)
- [Stone 2008] Stone, R. H., Anderson, P., Hutchison, C., Tsai, A., Gibbens, P. et Wong, K. C. *Flight Testing of the T-Wing Tail-Sitter Unmanned Air Vehicle*. Journal of Aircraft, vol. 45, no. 2, pages 673–685, 2008. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.2514/1.32750>. (Cité en page 14.)
- [Tal 2022] Tal, E. et Karaman, S. *Global Incremental Flight Control for Agile Maneuvering of a Tailsitter Flying Wing*. arXiv preprint arXiv :2207.13218, 2022. (Cité en page 15.)
- [Tempo 2013] Tempo, R., Calafiore, G. et Dabbene, F. Randomized algorithms for analysis and control of uncertain systems : with applications. Springer, 2013. (Cité en page 49.)
- [Tregouet 2015] Tregouet, J.-F., Arzelier, D., Peaucelle, D., Pittet, C. et Zaccarian, L. *Reaction Wheels Desaturation Using Magnetorquers and Static Input Allocation*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 23, no. 2, pages 525–539, February 2015. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/TCST.2014.2326037>. (Cité en page 37.)
- [Udwadia 2006] Udwadia, F. E. et Phohomsiri, P. *Explicit Equations of Motion for Constrained Mechanical Systems with Singular Mass Matrices and Applications to Multi-Body Dynamics*. Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 462, no. 2071, pages 2097–2117, 2006. [En ligne]. Disponible : <http://www.jstor.org/stable/20208995>. (Cité en page 84.)
- [Udwadia 2012] Udwadia, F. E. et Schutte, A. D. *A unified approach to rigid body rotational dynamics and control*. Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 468, no. 2138, pages 395–414, 2012. [En ligne]. Disponible : <http://www.jstor.org/stable/41345881>. (Cité en pages 84 et 86.)
- [Welstead 2012] Welstead, J. et Crouse, G. *A Segmented Freewing Concept for UAS Gust Alleviation in Adverse Environments*. Dans AIAA Infotech@Aerospace Conference, 2012. (Cité en page 5.)
- [Zhang 2017] Zhang, S., Fei, Q., Liang, J. et Geng, Q. *Modeling and control for longitudinal attitude of a twin-rotor tail-sitter unmanned aerial vehicle*. Dans 2017 13th IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), pages 816–821, 2017. (Cité en page 14.)

---

**Résumé :** resume

**Mots clés :** mots, clefs

---

---

**Abstract :** abstrat

**Keywords :** key, words

---

