

Université Fédérale



Toulouse Midi-Pyrénées

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ FÉDÉRALE TOULOUSE MIDI-PYRÉNÉES

Délivré par :

l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC)

Présentée et soutenue le *jj/mm/aaaa* par :

Florian SANSOU

Control actif de la turbulence sur un micro drone convertible

JURY

MME SOPHIE TARBOURIECH	Directrice de recherche LAAS-CNRS	Présidente du jury
M. PAOLO ROBUFFO	Directeur de recherche IRISA-CNRS	Rapporteur
GIORDANO M. PASCAL MORIN	Professeur des universités Sorbonne Université	Rapporteur
PHILIPPE CHEVREL	Enseignant chercheur IMT ATLANTIQUE	Examineur
M. FABRICE DEMOURANT	Ingénieur de recherche ONERA	Directeur de thèse
M. GAUTIER HATTENBERGER	Enseignant chercheur ENAC	Co-directeur de thèse

École doctorale et spécialité :

EDSYS : Automatique 4200046

Unité de Recherche :

École Nationale d'Aviation Civile

Directeur(s) de Thèse :

M. Fabrice DEMOURANT et M. Gautier HATTENBERGER

Rapporteurs :

M. Paolo ROBUFFO GIORDANO et M. Pascal MORIN

Remerciements

A faire en dernier :-)

Table des matières

Liste des figures	v
Liste des tableaux	vii
Liste des algorithmes	ix
Liste des abréviations	xi
Introduction	1
1 Généralité sur les drones convertible	3
1.1 Gen	3
2 Objectifs de commande	5
2.1 section1	5
3 Modélisation d'un drone convertible : DarkO	7
3.1 Modèle du drone DarkO	7
3.1.1 Modèle non-linéaire complet	9
3.1.2 Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse	12
3.2 Identification des paramètres du modèle	14
3.2.1 Modélisation des actionneurs	14
3.3 Équilibres stationnaires	15
3.3.1 Équilibre stationnaire sans vent	15
3.3.2 Équilibre stationnaire en présence de vent	17
3.4 Dynamiques linéarisés	22
3.4.1 Dynamique linéarisé sans vent	22
3.4.2 Dynamique linéarisé en présence de vent	23
3.5 Conclusion du Chapitre 3	28
4 Commande hybride	31
4.1 Motivation	31
4.2 Schéma de commande hybride	31
4.3 Simulations	31

5	Étude longitudinale sur une maquette à trois degrés de liberté	33
5.1	Motivation	33
5.2	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral	33
5.3	Maquette expérimentale	33
5.4	Résultats	33
6	Commande proportionnelle intégrale d'un drone convertible à 6 degrés de liberté	35
6.1	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof	35
6.2	Maquette expérimentale : 6 Dof	35
6.3	Résultats	35
7	Modélisation d'un drone à aile libre rotation libre	37
7.1	Design et modélisation d'un drone : Colibri	37
7.2	Estimation d'état	37
8	Commande d'un drone à aile libre rotation libre	39
8.1	Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone	39
8.2	Commande Udwadia-Kalaba	39
8.3	Vols expérimentaux	39
	Conclusion	41
A	Exemple d'annexe	43
A.1	Exemple d'annexe	43
	Bibliographie	45

Liste des figures

3.1	Vue de dessus d'un autopilote Apogee v1.00.	8
3.2	Repère de référence de DarkO avec une représentation schématique des actionneurs.	9
3.3	Input-output response of an Esc-Motor-Propeller assembly.	14
3.4	Bifilar pendulum mounting for the identification of \mathbf{J}	15
3.5	Bifilar pendulum identification of \mathbf{J}	16
3.6	Parameters (θ, δ, τ) of the equilibrium point (surface) established in Theorem 1 and Algorithm 1 for constant horizontal and vertical wind (w_{rx}, w_{rz}) , and actuators saturation levels (red).	21
3.7	Parameters (θ, δ, τ) of the equilibrium point (blue) established in Theorem 1 and Algorithm 1 for a constant horizontal wind w_{rx} , and actuators saturation levels (red).	22

Liste des tableaux

3.1	Paramètres numériques identifiés du modèle DarkO.	10
-----	---	----

Liste des algorithmes

1	Obtention des paramètres d'équilibre en (3.16).	18
2	Design of the linearization matrices in (3.31)	29

Liste des abréviations

ESC Contrôleurs électroniques de vitesse (*Electronic Speed Controller*)

Introduction

A faire

Généralité sur les drones convertible

Sommaire

1.1	Gen	3
-----	---------------	---

1.1 Gen

Parler des élévons
comme une mélé
aileron volet

Objectifs de commande

Sommaire

2.1	section1	5
-----	--------------------	---

2.1 section1

rejet de perturbation, model based control

Modélisation d'un drone convertible : DarkO

Sommaire

3.1	Modèle du drone DarkO	7
3.1.1	Modèle non-linéaire complet	9
3.1.2	Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse	12
3.2	Identification des paramètres du modèle	14
3.2.1	Modélisation des actionneurs	14
3.3	Équilibres stationnaires	15
3.3.1	Équilibre stationnaire sans vent	15
3.3.2	Équilibre stationnaire en présence de vent	17
3.4	Dynamiques linéarisés	22
3.4.1	Dynamique linéarisé sans vent	22
3.4.2	Dynamique linéarisé en présence de vent	23
3.5	Conclusion du Chapitre 3	28

3.1 Modèle du drone DarkO

DarkO est un drone conçu et développé à l'École Nationale de l'Aviation Civile (ENAC) de Toulouse (France), est un exemple clair de drone convertible avec une architecture dite *tailsitter*. DarkO est assemblé à partir de plusieurs pièces d'Onyx imprimées en 3D (un matériau très robuste composé de fibres de carbone omnidirectionnelles). Toutes les pièces sont emboîtées sur un seul axe, de sorte que le drone puisse facilement être démonté pour remplacer des pièces ou accéder à l'électronique embarquée.

L'autopilote embarqué est une carte Apogee¹ fabriquée à l'ENAC, voir Fig. 3.1.

L'autopilote offre la possibilité d'enregistrer les données de bord sur une carte mémoire SD, à la fréquence de contrôle de 500 Hz, ce qui permet un post-traitement

1. <https://wiki.paparazziuav.org/wiki/Apogee/v1.00>

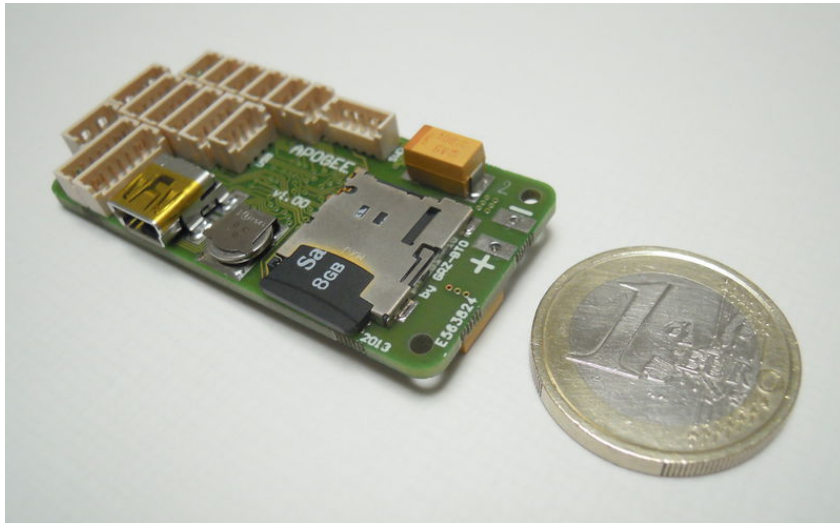


FIGURE 3.1 – Vue de dessus d'un autopilote Apogee v1.00.

efficace des données acquises. Le protocole de communication utilisé entre l'autopilote et les contrôleurs électroniques de vitesse (ESC) est le Dshot 600. Les ESC sont des AIKON AK32 35A flasher avec un firmware AM32. La communication sol-bord est réalisée via un canal bidirectionnel basé sur des modules XBee-PRO S1.

Les actionneurs de DarkO peuvent être décomposé en deux catégories. La première est composée de deux hélices (T-Motor T5147) placées symétriquement à l'avant de l'aile (illustrées en **noir** dans la Fig. 3.2) alimentées par deux moteurs électriques (T-Motor F30 2300kv) générant une traction selon l'axe x_b . La seconde catégorie est relative aux actionneurs aérodynamiques ainsi le drone possède deux élévons, placés à l'arrière de l'aile (illustrés en **bleu** dans la Fig. 3.2), agissant en tant que surfaces de contrôle. Les élévons génèrent des forces et des moments en modifiant leurs incidences relativement au flux d'air dans lequel ils sont placé. Ce flux d'air peut être généré par le vent relatif (liée à la vitesse du drone), le vent extérieur, mais aussi par le souffle des hélices. Les élévons sont commandés par deux servomoteurs MKS DS65K.

La figure 3.2 montre le modèle de DarkO, ainsi qu'un repère de référence inertiel NED (ou repère terrestre) "i" lié à la surface de la Terre, et un repère corps "b" attaché au drone, avec x_b correspondant à l'axe de roulis (l'axe des hélices dans le plan $z_b = 0$), y_b l'axe de tangage (la direction des ailes), z_b l'axe de lacet. En utilisant la même notation que dans [Lustosa 2019], le couple hélice/élevateur gauche et droit sont désignés par les indices $i = 1$ (gauche) et $i = 2$ (droite). La convention de signe sera définie comme positive pour les positions des élévons δ_1, δ_2 lorsqu'ils créent un moment à cabrer avec les hélices tournant dans des directions

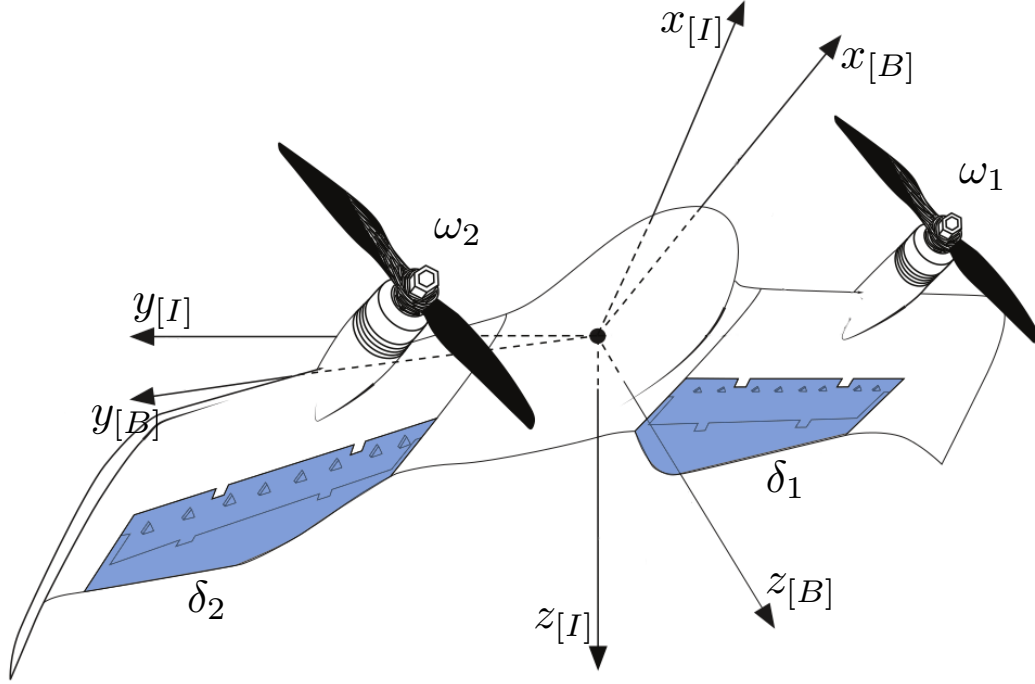


FIGURE 3.2 – Repère de référence de DarkO avec une représentation schématique des actionneurs.

opposées avec des vitesses angulaires $\omega_1 > 0$ et $\omega_2 < 0$, respectivement.

3.1.1 Modèle non-linéaire complet

En exploitant la modélisation présentée dans [Lustosa 2019] et [Olszanecki Barth 2020], un modèle précis de la dynamique de DarkO décrit la position $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ du centre de gravité et sa vitesse $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^3$, en plus de son orientation, bien représentée par un quaternion $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 := \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4 : |\mathbf{q}| = 1\}$ et de sa vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_b$ représentée dans le repère du corps, qui satisfait $\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes [\boldsymbol{\omega}_b]$, où \otimes représente le produit de Hamilton (voir [Lustosa 2019, Olszanecki Barth 2020] ou le tutoriel [Hua 2013] pour plus de détails). En choisissant l'état global comme $\mathbf{x} := (\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{q}, \boldsymbol{\omega}_b)$, le modèle mathématique dérivé dans [Lustosa 2019], dépend d'un ensemble de paramètres énumérés dans le tableau 3.1, où nous indiquons également la valeur obtenue à partir d'une identification du système [Sansou 2022]. Le modèle dynamique peut être écrit comme ci-dessous :

Paramètres et coefficients	Valeurs	Unités
m (Masse du drone)	0.519	kg
b (Envergure)	0.542	m
c (Corde aérodynamique)	0.13	m
$\mathbf{B} = \text{diag}(b, c, b)$	$\text{diag}(0.542, 0.13, 0.542)$	m
S (Surface de l'aile)	0.026936	m ²
S_{wet} (Surface soufflée)	0.0180	m ²
S_p (Surface de hélice)	0.0127	m ²
$\mathbf{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$	$\text{diag}(0.0067, 0.0012, 0.0082)$	kg m ²
k_f (Poussée des hélices)	1.7800e-8	kg m
k_m (Moment des hélices)	2.1065e-10	kg m ²
p_x (Position en x des hélices)	0.065	m
p_y (Position en y des hélices)	0.162	m
a_y (Position en y de la portance)	0.1504	m
ξ_f (Portance des élevons)	0.2	–
ξ_m (Moment des élevons)	1.4	–
ρ (Densité de l'air)	1.225	kg m ⁻³
C_d (Trainée)	0.1644	–
C_y (Lateral)	0	–
C_ℓ (Portance)	5.4001	–
Δ_r (Centrage du drone)	-0.0145	m

TABLE 3.1 – Paramètres numériques identifiés du modèle DarkO.

$$\begin{cases} m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{F}_b, \\ \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_{\times} \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_b, \end{cases} \quad (3.1a)$$

$$(3.1b)$$

où $\mathbf{g} := [0 \ 0 \ 9.81]^\top$ désigne le vecteur de gravité, $m \in \mathbb{R}$ est la masse, $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ est le moment d'inertie diagonal (voir Tableau 3.1) et en partitionnant le quaternion $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$ comme $\mathbf{q} := [\eta \ \boldsymbol{\epsilon}^\top]^\top$, la matrice de rotation correspondante est $\mathbf{R}(\mathbf{q}) \in SO(3) := \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbb{I}_3, \det(\mathbf{R}) = 1\}$ est défini comme (voir [Hua 2013])

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) := \mathbb{I}_3 + 2\eta [\boldsymbol{\epsilon}]_{\times} + 2[\boldsymbol{\epsilon}]_{\times}^2. \quad (3.2)$$

D'après [Lustosa 2019] le vecteur de force et de moment \mathbf{F}_b et \mathbf{M}_b dans (3.1) dépendent (i) de l'état du système \mathbf{x} , (ii) de la perturbation $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$, représentant la vitesse du vent dans le référentiel inertiel, et (iii) de la commande des actionneurs (voir Figure 3.2), comprenant la vitesse de rotation des deux hélices $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et la déflexion des élevons $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$. Considérons d'abord l'effet des commandes des actionneurs. Chaque hélice génère une poussée \mathbf{T}_i orienté dans la direction x du

repère corps et un moment \mathbf{N}_i selon le même axe :

$$\mathbf{T}_i := \begin{bmatrix} \tau_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} k_f \omega_i^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_i := (-1)^i \frac{k_m}{k_f} \mathbf{T}_i, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

La position de chaque éleçon $\delta_i \in \mathbb{R}$ est assignée par un servomoteur qui impose un niveau d'efficacité (en termes de déviation du courant d'air) quantifié par deux matrices antisymétriques :

$$\Delta_i^f := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_f \delta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ -\xi_f \delta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta_i^m := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \xi_m \delta_i \\ 0 & 0 & 0 \\ -\xi_m \delta_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.4)$$

$i = 1, 2$. Les paramètres constants k_f , k_m , ξ_f , ξ_m apparaissant dans (3.3) et (3.4) sont listés dans la Table 3.1.

Avec les quantités ci-dessus, nous pouvons réarranger la dynamique donnée dans le tableau suivant [Lustosa 2019, eqns (97), (98)] (voir aussi [Sansou 2022]) et exprimer \mathbf{F}_b et \mathbf{M}_b dans (3.1) comme

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_b &:= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Phi^{(\text{fv})} \left((\Delta_1^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_1 + (\Delta_2^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho S \Phi^{(\text{fv})} \left(\Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3 \right) \|\mathbf{v}_b\| \mathbf{v}_b \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho S \Phi^{(\text{mv})} \left(\Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3 \right) \mathbf{B} \|\mathbf{v}_b\| \boldsymbol{\omega}_b, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b &:= \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \mathbf{T}_1 + \begin{bmatrix} p_x \\ -p_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \mathbf{T}_2 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left(\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_1^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{fv})} (\Delta_1^m + \mathbb{I}_3) \right) \mathbf{T}_1 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left(\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_2^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{fv})} (\Delta_2^m + \mathbb{I}_3) \right) \mathbf{T}_2 \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho S \left(\left(\begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{fv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \right) \Delta_1^m \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{fv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \right) \Delta_2^m - 2\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \right) \|\mathbf{v}_b\| \mathbf{v}_b \\ &\quad + \frac{1}{4} \rho S \left(\left(\begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{mv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{m}\omega)} \right) \Delta_1^m \right. \\ &\quad \left. + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_{\times} \Phi^{(\text{mv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{m}\omega)} \right) \Delta_2^m - 2\mathbf{B} \Phi^{(\text{m}\omega)} \right) \mathbf{B} \|\mathbf{v}_b\| \boldsymbol{\omega}_b, \end{aligned} \quad (3.6)$$

où $\mathbf{v}_b := \mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ représente la vitesse de l'air vu par le drone exprimé dans le repère du corps. Dans [Lustosa 2019], la valeur $\|\mathbf{v}_b\|$ apparaissait dans les expressions de \mathbf{F}_b et \mathbf{M}_b est remplacé par la valeur $\eta = \sqrt{\|\mathbf{v}_b\|^2 + \mu c^2 \|\boldsymbol{\omega}_b\|^2}$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ étant un paramètre lié à l'identification du modèle, mais dans le cas de DarkO [Sansou 2022], l'identification fournit $\mu = 0$, c'est pourquoi nous présentons ici une description simplifiée. La matrice des coefficients aérodynamiques constants $\boldsymbol{\Phi} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}^{(fv)} & \boldsymbol{\Phi}^{(mv)\top} \\ \boldsymbol{\Phi}^{(mv)} & \boldsymbol{\Phi}^{(m\omega)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$, est défini dans [Olszanecki Barth 2020, eqs. (6)–(9)] comme $\boldsymbol{\Phi}^{(fv)} := \text{diag}(C_d, C_y, C_\ell)$ et

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \boldsymbol{\Phi}^{(mv)} & & & \boldsymbol{\Phi}^{(m\omega)} & & \end{array} \right] := \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0.1396 & 0 & 0.0573 \\ 0 & 0 & -\frac{\Delta_r}{c} C_\ell & 0 & 0.6358 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0405 & 0 & 0.0019 \end{array} \right],$$

les valeurs numériques des constantes figurant dans le tableau 3.1 (ces valeurs numériques n'ont pas été indiquées dans [Lustosa 2019] et [Olszanecki Barth 2020] et sont données ici pour permettre de reproduire les résultats de nos simulations).

3.1.2 Modèle non linéaire simplifiée à basse vitesse

Comme nous allons nous intéresser au maintien du drone en stationnaire, où la vitesse du drone est faible, nous pouvons simplifier la dynamique (3.1) en négligeant les effets aérodynamique quadratique dû à la vitesse \mathbf{v}_b et à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_b$ dans (3.5) et (3.6). Nous définissons le vecteur de commande :

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \delta_1 & \delta_2 \end{bmatrix}^\top, \quad (3.7)$$

qui permet d'obtenir le modèle basse vitesse comportant majeur les effets non linéaires du vent

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad (3.8a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q})(\mathbf{M}_f(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_f(\mathbf{u})\|\mathbf{w}\|\mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w})), \quad (3.8b)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes [\boldsymbol{\omega}_b^0], \quad (3.8c)$$

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_m(\mathbf{u})\|\mathbf{w}\|\mathbf{R}^\top(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w}), \quad (3.8d)$$

où les vecteurs $\mathbf{M}_f(\mathbf{u})$ et $\mathbf{M}_m(\mathbf{u})$, et les matrices $\mathbf{D}_f(\mathbf{u})$ et $\mathbf{D}_m(\mathbf{u})$ proviennent de l'annulation des termes dépendant de la vitesse angulaire dans l'équation (3.5) et

(3.6). Ils peuvent être développés en

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f(\mathbf{u}) &:= \mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2 + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Phi^{(\text{fv})} \left((\Delta_1^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_1 + (\Delta_2^f - \mathbb{I}_3) \mathbf{T}_2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_d\right) (\tau_1 + \tau_2) \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_\ell \xi_f (\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(\mathbf{u}) &:= \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \mathbf{T}_1 + \begin{bmatrix} p_x \\ -p_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \mathbf{T}_2 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left(\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_1^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} (\mathbb{I}_3 + \Delta_1^m) \right) \mathbf{T}_1 \\ &\quad - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \left(\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} (\Delta_2^m - \mathbb{I}_3) + \begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} (\mathbb{I}_3 + \Delta_2^m) \right) \mathbf{T}_2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{k_m}{k_f} (\tau_1 - \tau_2) + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_\ell \xi_f (\delta_1 \tau_1 - \delta_2 \tau_2) \\ \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Delta_r C_\ell \xi_m (\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2) \\ \left(p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_d \right) (\tau_1 - \tau_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{4} \rho S \Phi^{(\text{fv})} (\Delta_1^f + \Delta_2^f - 2\mathbb{I}_3) \\ &= \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} -2C_d & 0 & C_d \xi_f (\delta_1 + \delta_2) \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_\ell \xi_f (\delta_1 + \delta_2) & 0 & -2C_\ell \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_m(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{4} \rho S \left(\begin{bmatrix} 0 \\ a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \right) \Delta_1^m \\ &\quad + \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -a_y \\ 0 \end{bmatrix}_\times \Phi^{(\text{fv})} + \mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \right) \Delta_2^m - 2\mathbf{B} \Phi^{(\text{mv})} \\ &= \frac{1}{4} \rho S \begin{bmatrix} -a_y C_d \xi_m (\delta_1 - \delta_2) & 0 & 0 \\ \Delta_r C_\ell \xi_m (\delta_1 + \delta_2) & 0 & 2\Delta_r C_\ell \\ 0 & 0 & -a_y C_\ell \xi_m (\delta_1 - \delta_2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

où l'on observe l'effet non linéaire d'un vent non nul, qui est non linéaire avec \mathbf{q} , $\|\mathbf{v}_b\|$ et \mathbf{u} . Comme dans [Olszanecki Barth 2020, eqn. (10)] et selon la formule de Diederich, nous obtenons $C_\ell = C_d + \frac{\pi AR}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{AR}{2}\right)^2}}$ où $AR = \frac{b^2}{S}$ est l'allongement de l'aile. Nous observons le couplage des actionneurs $(\delta_1 \tau_1 + \delta_2 \tau_2)$ dans les expressions des matrices $\mathbf{M}_f(\mathbf{u})$ et $\mathbf{M}_m(\mathbf{u})$.

3.2 Identification des paramètres du modèle

Les valeurs numériques du tableau 3.1 ont été obtenues par une campagne d'identification du modèle [Sansou 2022]. En particulier, le coefficient k_f a été identifié à partir de l'équation (3.3), qui relie la vitesse de rotation du moteur ω_i à la traction générée, à la vitesse de rotation minimale et maximale et à la constante de temps de la chaîne d'actionnement du moteur. Les éléments diagonaux de l'inertie \mathbf{J} ont été mesurés à l'aide d'un système de pendule bifilaire. Cette méthode est largement utilisée dans le domaine des drones [Jardin 2012], et est basée sur la période d'oscillation autour de chacun des trois axes (x_b , y_{textb} , z_b) du drone suspendu par deux fils, ce qui forme un pendule de torsion comme le montre la Fig. 3.4. Il est intéressant de noter que la surface soufflée par les hélices représente 67 % de la surface totale du drone.

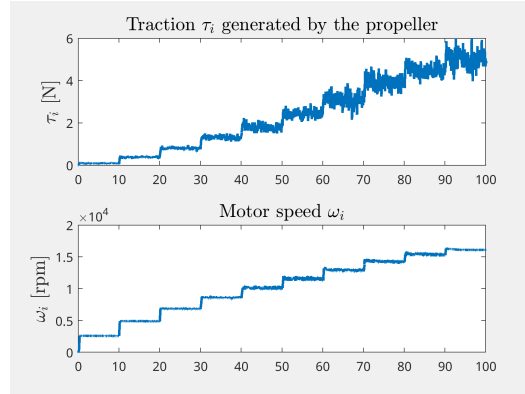


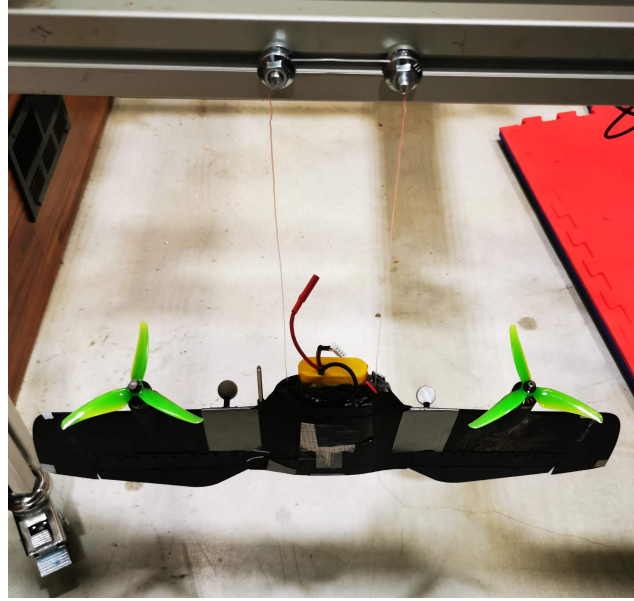
FIGURE 3.3 – Input-output response of an Esc-Motor-Propeller assembly.

uter explication
l'identification

3.2.1 Modélisation des actionneurs

Les actionneurs de DakO ont des dynamiques qui limite leurs actions en terme d'amplitude et de vitesse.

Pour les moteurs électriques générant la traction par les hélices, il existe deux causes de saturation. Une saturation à haute vitesse liée à la tension maximale du moteur et une saturation basse vitesse lié à la vitesse minimale de commutation de bobine du moteur pour maintenir la rotation. De plus, ces saturations permettent d'obtenir une modèle réaliste à énergie finie. Elle correspond à la contrainte suivante $\omega_i \in [2500, 16000] \text{ rpm} = [262, 1675] \text{ rad s}^{-1}$, $i = 1, 2$. En termes de dynamique, nous avons représenté la chaîne d'actionnement du moteur (composée de l'ESC, du moteur et de l'hélice) par une fonction de transfert du premier ordre ayant une constante de temps égale à 0.0125 s, ce qui fournit un système d'actionnement assez

FIGURE 3.4 – Bifilar pendulum mounting for the identification of \mathbf{J} .

agressif.

Les saturations impactant les éleçons proviennent des limites physiques des servomoteurs et du débattement limité par la forme de l'UAV, $\delta_i \in [-30 ; 30]^\circ$, $i = 1, 2$. La saturation la plus importante ici est peut-être la bande passante de l'actionneur (due à l'actionnement du servomoteur), qui est modélisée par une fonction de transfert du premier ordre avec une constante de temps 0.05 s.

3.3 Équilibres stationnaires

3.3.1 Équilibre stationnaire sans vent

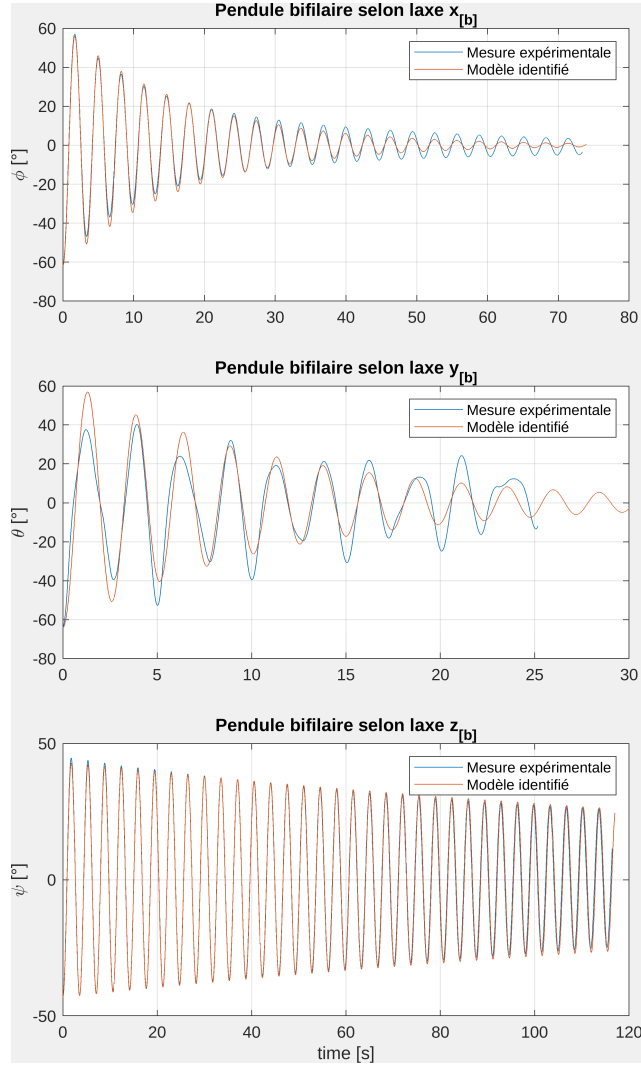
Nous proposons une modification du vecteur de commande, dans le cas d'un équilibre sans vent $\mathbf{w}_{\text{eq}} = 0$, basé sur le couplage des actionneurs.

$$\mathbf{u}_{\text{nowind}} := \begin{bmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \delta_1 \tau_1 & \delta_2 \tau_2 \end{bmatrix}^\top \quad (3.13)$$

Nous obtenons un modèle linéaire vis-à-vis de sa commande, dérivé de (3.8) en imposant $\mathbf{w} = 0$,

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{v}, \quad m\dot{\mathbf{v}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q})\mathbf{F}\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \quad (3.14a)$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix} \quad \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{M}\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \quad (3.14b)$$

FIGURE 3.5 – Bifilar pendulum identification of \mathbf{J} .

avec les matrices

$$\left[\mathbf{F} \mid \mathbf{M} \right] := \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_f & a_f & 0 & 0 & a_m & -a_m & b_m & -b_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_m & c_m \\ 0 & 0 & b_f & b_f & d_m & -d_m & 0 & 0 \end{array} \right]$$

et les scalaires

$$\left[\begin{array}{c|c} a_f & b_f \\ \hline a_m & b_m \\ \hline c_m & d_m \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 - \frac{S_{wet}}{4S_p} C_d & -\frac{S_{wet}}{4S_p} C_\ell \xi_f \\ \hline \frac{k_m}{k_f} & \frac{S_{wet}}{4S_p} a_y C_\ell \xi_f \\ \hline \frac{S_{wet}}{4S_p} \Delta_r C_\ell \xi_m & p_y + \frac{S_{wet}}{4S_p} a_y C_d \end{array} \right].$$

Tous les couples d'équilibre $(\mathbf{u}_{\text{nowind}}, \mathbf{x}) = (\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$ sont paramétré par une rotation arbitraire autour de l'axe $z_{[i]}$ défini par $\beta \in \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$. Le point d'équilibre a pour expression

$$\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}} = \frac{mg}{\left(1 - \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} C_d\right)} [1 \ 1 \ 0 \ 0]^\top \quad (3.15a)$$

$$\mathbf{q}_{\text{eq}} = [\eta_{\text{eq}} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}}^\top]^\top = \left[\sqrt{\frac{1}{2}-\beta} \ \beta \ \frac{2\beta^2-1}{2\sqrt{\frac{1}{2}-\beta}} \ \beta \right]^\top. \quad (3.15b)$$

En présence d'un vent nul, le degré de liberté β permet d'orienter le drone dans n'importe quelle direction horizontale.

3.3.2 Équilibre stationnaire en présence de vent

À partir des modèles (3.1) et (3.8), nous caractérisons un équilibre stationnaire en présence d'un vent constant $\mathbf{w}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ exprimé dans le repère inertiel, tel que $\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \neq 0$, c'est-à-dire qu'il existe toujours un vent horizontal non nul. Ainsi, pour chaque position de référence $\mathbf{p}_{\text{eq}} \in \mathbb{R}^3$, un ensemble de couple état/commande possible est $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}}) = (\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{p}_{\text{eq}}, \mathbf{v}_{\text{eq}}, \mathbf{q}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\omega}_{\text{b,eq}})$ obtenu à l'aide de

$$\mathbf{u}_{\text{eq}} = [\tau \ \tau \ \delta \ \delta]^\top \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{q}_{\text{eq}} = \mathbf{q}_{\text{eq}\psi} \otimes \mathbf{q}_{\text{eq}\theta} \quad (3.16b)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{b,eq}} = 0, \quad \mathbf{v}_{\text{eq}} = 0, \quad (3.16c)$$

où

$$\mathbf{q}_{\text{eq}\theta} := \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \ 0 \ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \ 0 \right]^\top \quad (3.17)$$

we define the quaternion $\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}$ associated with a horizontal rotation $\psi = \arctan(w_x, w_y)$ of the inertial reference frame towards the (nonzero) horizontal wind direction :

traduire et ameliorer l'explication

$$\mathbf{q}_{\text{eq}\psi} := \left[\cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \ 0 \ 0 \ \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \right]^\top. \quad (3.18)$$

et l'angle d'inclinaison θ , la poussée des hélices τ , et la déflexion des élevons δ peuvent être obtenu à partir de l'algorithme 1.

Théorème 1. *Pour tout vent constant, $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top \in \mathbb{R}^3$ ayant une composante horizontale non nulle $\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix}$, les equations (3.18)–(3.17) avec θ , τ et δ sélectionné selon l'Algorithme 1 caractérisent un couple d'équilibre $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$ pour la*

Algorithme 1 Obtention des paramètres d'équilibre en (3.16).

Entrée : Vecteur vent $\mathbf{w}_{\text{eq}} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top$

Sortie : Paramètres $\psi, \theta, \tau, \delta$ dans (3.16)

- 1: Détermine l'angle $\psi = \text{atan2}(w_x, w_y)$ de manière à obtenir $\mathbf{q}_{\text{eq}\psi}$ dans (3.18)
- 2: Détermine la perturbation tournée \mathbf{w}_r avec la composante y nulle, en utilisant

$$\mathbf{R}_\psi := \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ selon}$$

$$\mathbf{w}_{r,\text{eq}} := \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} := \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{\text{eq}\psi})\mathbf{w}_{\text{eq}} = \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{\text{eq}} \quad (3.19)$$

- 3: Détermine l'angle d'inclinaison θ de manière à obtenir $\mathbf{q}_{\text{eq}\theta}$ dans (3.16b) :

$$\theta = -\tan^{-1} \left(\frac{w_{rz}}{w_{rx}} + \frac{2mg}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (1 - \frac{\xi_f}{\xi_m}) w_{rx}} \right) \quad (3.20)$$

- 4: Pour des raisons de commodité, nous définissons les scalaires

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} 2S_{\text{wet}} C_\ell m g \sin \theta \xi_f & 2S_{\text{wet}} C_d C_\ell \rho \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_x^b \\ -4SS_p C_\ell \rho \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_x^b \xi_f & \frac{b\xi_f}{2} \end{bmatrix}$$

et grâce à ces scalaires (a, b, c, d) , déterminons la traction des hélices τ dans (3.16a) comme

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{S_p}{2S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f (4S_p - S_{\text{wet}} C_d)} \left(a + b + c + d + \left[(a + b + c - d)^2 - 4(d^2 + ac - bd) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{4w_z^b d}{w_x^b} (d + c) + \frac{4w_z^b a d \cos \theta}{w_x^b C_\ell \sin \theta} \left(C_d - \frac{4S_p}{S_{\text{wet}}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

où

$$\begin{bmatrix} w_x^b \\ w_z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{rx} \cos \theta - w_{rz} \sin \theta \\ w_{rx} \sin \theta + w_{rz} \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- 5: Déterminons la déflexion des élevons δ comme

$$\delta = \frac{2mg \sin \theta}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_d \xi_f w_z^b} + \frac{w_x^b}{\xi_f w_z^b} - \frac{(4 - \frac{S_{\text{wet}}}{S_p} C_d)}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_d \xi_f w_z^b} \tau. \quad (3.22)$$

Retourne : $\psi, \theta, \tau, \delta$

dynamique non linéaire (3.1) et (3.8).

Démonstration. Dans un premier temps, notons qu'avec l'expression de \mathbf{R} (3.2) et l'expression de ψ dans l'étape 1 de l'Algorithme 1, on peut définir la perturbation à l'équilibre tournée $\mathbf{w}_{r,eq} := \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{eq} := \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{eq\psi})\mathbf{w}_{eq}$ (voir (3.19) dans l'Algorithme 1), qui correspond à la rotation nécessaire pour aligner l'axe $x_{[b]}$ du repère corps avec la direction du vent. Une fois que le drone est face au vent, il subit un vent avec une composante latérale y nulle et il peut ajuster son angle d'inclinaison θ afin de générer la poussée et la portance nécessaires pour compenser les effets du vent dans les directions longitudinale et verticale (l'effet latéral est nul en raison de l'orientation spécifique de l'appareil ψ). Avec cette rotation ψ , il est possible d'exprimer le vent dans le repère corps comme étant

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{eq}^b &:= \begin{bmatrix} w_x^b \\ 0 \\ w_z^b \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_{eq\theta})\mathbf{w}_{r,eq} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{rx} \cos \theta - w_{rz} \sin \theta \\ 0 \\ w_{rx} \sin \theta + w_{rz} \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Nous insistons sur le fait que w_x^b est toujours négatif et différent de zéro, car le drone est orienté dans la direction du vent grâce à la rotation engendré par $\mathbf{q}_{eq\psi}$, et suite à l'hypothèse $\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \neq 0$.

L'équation (3.8a) montre qu'il est nécessaire d'avoir $\mathbf{v}_{eq} = 0$ pour maintenir l'équilibre stationnaire. En multipliant (3.8b) par $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{eq})$ donné dans (3.23), nous l'exprimons dans le repère corps. Comme nous appliquons la même commande $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ aux deux moteurs et la même commande au deux élevons $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, nous obtenons pour les deux modèles (3.1) et (3.8), l'équilibre des forces selon l'axe $x_{[b]}$ donné par

$$\left(2 - \frac{S_{wet}}{2S_p} C_d\right) \tau - \frac{1}{2} \rho S \|\mathbf{w}_{eq}\| C_d \left(w_x^b - \xi_f \delta w_z^b\right) - mg \sin(\theta) = 0 \quad (3.24)$$

et l'équilibre des forces selon l'axe $z_{[b]}$ donné par

$$-\frac{S_{wet}}{2S_p} \xi_f C_\ell \tau \delta - \frac{1}{2} \rho S \|\mathbf{w}_{eq}\| C_\ell \left(w_z^b + \xi_f \delta w_x^b\right) + mg \cos(\theta) = 0 \quad (3.25)$$

De manière similaire, à partir de (3.1b) et (3.8d), l'équilibre des moments autour

de l'axe $y_{[b]}$ permet d'obtenir

$$\frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} \Delta_r \xi_m C_\ell \tau \delta + \frac{1}{2} \rho S \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (w_z^b + \xi_m \delta w_x^b) = 0. \quad (3.26)$$

Pour calculer la solution du triplet (θ, τ, δ) des trois équations d'équilibre (3.24)–(3.26), ajoutons (3.25) multiplié par $\Delta_r \xi_m$, à (3.26) multiplié par ξ_f , de manière à annuler le premier terme et à obtenir

$$\begin{aligned} \Delta_r \xi_m \left(-\frac{1}{2} \rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (w_z^b + \xi_f \delta w_x^b) + mg \cos(\theta) \right) \\ + \xi_f \left(\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (w_z^b + \xi_m \delta w_x^b) \right) = 0, \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_z^b + \Delta_r \xi_m mg \cos(\theta) = 0,$$

où (w_x^b, w_z^b) sont les première et troisième composantes de \mathbf{w}^b dans (3.23). Ensuite, en utilisant (3.23) et en réarrangeant, nous obtenons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rx} \sin \theta + \left(-\frac{1}{2} \rho S \Delta_r \right. \\ \left. \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rz} + \Delta_r \xi_m mg \right) \cos \theta = 0, \end{aligned}$$

qui est satisfaite par

$$\theta = -\tan^{-1} \left(\frac{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rz} - 2 \xi_m mg}{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| C_\ell (\xi_f - \xi_m) w_{rx}} \right). \quad (3.27)$$

Cette dernière expression coïncide avec la sélection (3.20) dans l'Algorithme 1 après quelques manipulations. À partir de (3.20), nous pouvons calculer les commandes à l'équilibre en substituant (3.24) dans (3.25). Après quelques simplifications, la force nécessaire de traction des hélices τ pour maintenir la position d'équilibre correspond à l'expression (3.21). Finalement, avec la valeur de τ dans (3.21), nous pouvons obtenir la déflexion des élevons nécessaire δ à partir de l'équation (3.25), ce qui nous donne la valeur obtenue dans (3.22). \square

Il est intéressant de noter que pour chaque couple de vent (w_{rz}, w_{rx}) correspond une orientation d'équilibre (3.16b), (3.20) est indépendante de l'entrée \mathbf{u}_{eq} . En outre, il convient de souligner que pour toutes les valeurs de vent raisonnables, l'équation (3.21) correspond à la racine positive d'un polynôme du second ordre,

l'autre racine étant toujours négative, ce qui conduit à une condition de poussée négative physiquement impossible.

À partir de l'expression analytique (3.16) de l'équilibre du drone pour différentes conditions de vent \mathbf{w} , nous reportons, sur la Fig. 3.6, les valeurs correspondantes de θ , δ , τ pour des valeurs de vitesse de vent horizontale allant de 0 à -20 m s^{-1} et pour des valeurs de vitesse de vent verticale allant de -6 à 6 m s^{-1} . L'angle d'incidence θ diminue de 90° à -4.65° . $\theta = 90^\circ$ correspond à un vol stationnaire sans vent. La traction τ atteint son minimum à $w_{rx} = -12.8 \text{ m s}^{-1}$, ce qui correspond à une condition de vol qui minimise la consommation d'énergie, car les moteurs sont la principale source de consommation électrique.

traduction captio

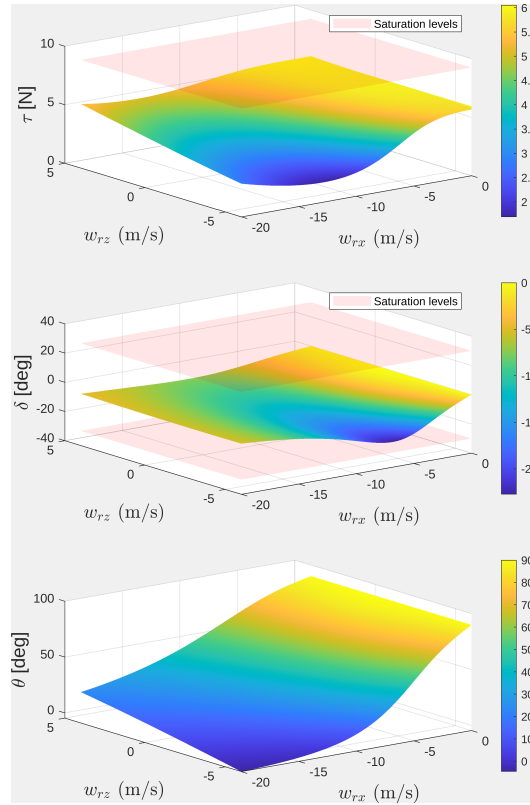


FIGURE 3.6 – Parameters (θ, δ, τ) of the equilibrium point (surface) established in Theorem 1 and Algorithm 1 for constant horizontal and vertical wind (w_{rx}, w_{rz}) , and actuators saturation levels (red).

Il est possible de faire une coupe des surfaces présentée dans (3.6) pour une vitesse verticale nulle $w_{rx} = 0$, ce qui nous donne le résultat de la Figure 3.7

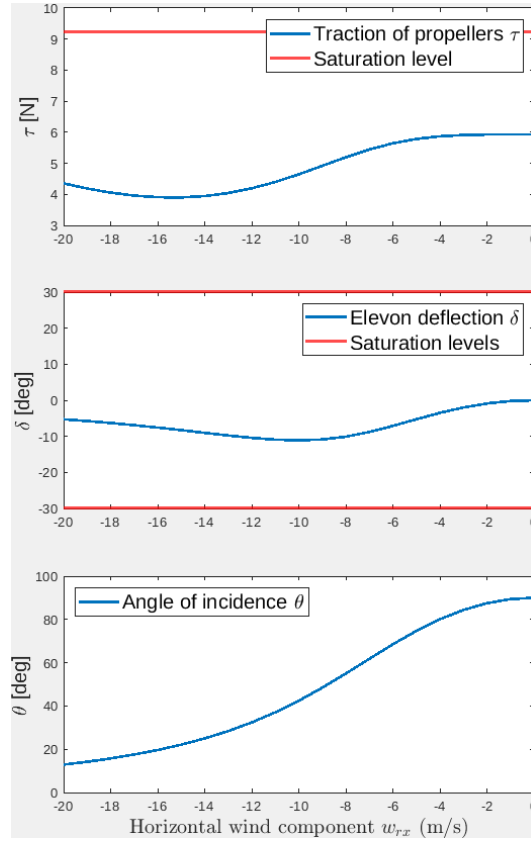


FIGURE 3.7 – Parameters (θ, δ, τ) of the equilibrium point (blue) established in Theorem 1 and Algorithm 1 for a constant horizontal wind w_{tx} , and actuators saturation levels (red).

3.4 Dynamiques linéarisés

3.4.1 Dynamique linéarisé sans vent

Considérons le cas sans vent discuté dans la section 3.3.1 pour lequel nous utilisons le vecteur de commande $\mathbf{u}_{\text{nowind}}$ et le vecteur de commande à l'équilibre $\mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}$ défini dans l'équation (3.15a) et rapellons la transformation du vecteur de comamande suivante $\mathbf{u}_{\text{nowind}} := [\tau_1 \quad \tau_2 \quad \delta_1 \tau_1 \quad \delta_2 \tau_2]^\top$, la dynamique linearisé dans le cas sans vent est

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_0 (\mathbf{u}_{\text{nowind}} - \mathbf{u}_{\text{nowind,eq}}), \quad (3.28)$$

where the expression of \mathbf{A}_0 is

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_w \Big|_{w=0} = \begin{bmatrix} \mathbb{0}_3 & \mathbb{I}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbf{A}_{v\epsilon} & \mathbb{0}_3 \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbf{A}_{\epsilon\omega} \\ \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 & \mathbb{0}_3 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

with the following selections

$$\mathbf{A}_{\epsilon\omega} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ and } \mathbf{A}_{v\epsilon} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 0 & -2g & 0 \\ g & 0 & g \\ 0 & -2g & 0 \end{bmatrix},$$

while the expression of \mathbf{G}_0 is

$$\mathbf{G}_0 := \begin{bmatrix} \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} \\ 0 & 0 & a_g & a_g \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_g & b_g & 0 & 0 \\ \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} & \mathbb{0}_{3 \times 1} \\ c_g & -c_g & d_g & -d_g \\ 0 & 0 & e_g & e_g \\ f_g & -f_g & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

with

$$\begin{bmatrix} a_g & b_g \\ c_g & d_g \\ e_g & f_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{S_{\text{wet}}}{4mS_p} C_\ell \xi_f & \frac{1}{m} (1 - \frac{S_{\text{wet}}}{2S_p} C_d) \\ \frac{k_m}{J_x k_f} & \frac{S_{\text{wet}} a_y}{4J_x S_p} C_\ell \xi_f \\ \frac{S_{\text{wet}} \Delta_r}{4J_y S_p} C_\ell \xi_m & \frac{1}{J_z} (p_y + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_d) \end{bmatrix}.$$

We emphasize that these equations coincide with the expressions given in our preliminary work [?, eqn. (22)].

3.4.2 Dynamique linéarisé en présence de vent

For each one of the equilibria characterized in Theorem 1, we derive here some linearized equations of motion with respect to the simplified nonlinear low-speed model (3.8). A direct approach would lead to linearized equations that depend on the ψ angle characterized in step 1 of Algorithm 1. Instead, we define here the incremental coordinates in a suitably rotated inertial reference frame, so that the linearized dynamics is independent of the ψ angle. More specifically, for each equi-

brium wind condition \mathbf{w}_{eq} and the ensuing equilibrium $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{p}_{\text{eq}}, \mathbf{q}_{\text{eq}})$ characterized in (3.18)–(3.17), denoting the scalar and vector components of the quaternion in (3.16b) as $\mathbf{q}_{\text{eq}} = (\eta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}})$, and based on the rotation matrix $\mathbf{R}_{\psi} := \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{eq}\psi})$ introduced at the beginning of the proof of Theorem 1, we study here the approximate linear dynamics of the rotated incremental input-state vector :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}} &:= (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\text{b}}) = \left(\mathbf{R}_{\psi}^{\top}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{\text{eq}}), \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{v}, \mathbf{R}_{\psi}^{\top}(\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}}), \boldsymbol{\omega}_{\text{b}} \right), \\ \tilde{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{eq}}, \quad \tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{R}_{\psi}^{\top}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_{\text{eq}}).\end{aligned}\tag{3.30}$$

Note that the rotation in (3.30) enjoys the useful property that $\mathbf{R}_{\psi}^{\top} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}} = [0 \sin(\frac{\theta}{2}) 0]^{\top}$, a fact that greatly simplifies the linearized motion.

Exploiting the fact that the translational and rotational speeds $(\mathbf{v}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\omega}_{\text{b,eq}})$ must be zero at the equilibrium (see (3.16)), we prove below that the approximate linearized dynamics for the state in (3.30) is given by

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}_w \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_w \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{E}_w \tilde{\mathbf{w}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbb{I}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{vv} & \mathbf{A}_{v\epsilon} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{\epsilon\omega} \\ \mathbf{0}_3 & \mathbf{0}_3 & \mathbf{A}_{\omega\epsilon} & \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{G}_v \\ \mathbf{0}_{3 \times 4} \\ \mathbf{G}_{\omega} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_v \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{E}_{\omega} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}},\end{aligned}\tag{3.31}$$

with matrices \mathbf{A}_{vv} , $\mathbf{A}_{v\epsilon}$, $\mathbf{A}_{\epsilon\omega_{\text{b}}}$, $\mathbf{A}_{\omega\epsilon}$, \mathbf{G}_v , \mathbf{G}_{ω} , \mathbf{E}_v , \mathbf{E}_{ω} constructed by following Algorithm 2.

Théorème 2. *For any constant wind, $\mathbf{w} = [w_x \ w_y \ w_z]^{\top} \in \mathbb{R}^3$ having a nonzero horizontal component $[\frac{w_x}{w_y}]$, and the ensuing equilibrium pair $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$ of dynamics (3.8), as characterized in (3.18)–(3.17), the linearized dynamics of the incremental input-state vector (3.30) is given by (3.31) with the matrices constructed as in Algorithm 2.*

Démonstration. To begin with, by exploiting the rotation matrix $\mathbf{R}_{\psi} := \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{eq}\psi})$ used in (3.30), we transform the nonlinear dynamics (3.8) into rotated coordinates

$$(\mathbf{p}_{\text{r}}, \mathbf{v}_{\text{r}}, \mathbf{q}_{\text{r}}) := \left(\mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{p}, \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{v}, \mathbf{q}_{\text{eq}\psi}^{-1} \otimes \mathbf{q} \right), \quad \mathbf{w}_{\text{r}} := \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{w}\tag{3.32}$$

while $\boldsymbol{\omega}_{\text{b}}$ remains unchanged because it is expressed in the body frame. A few observations allow simplifying the transformed dynamics (3.8) : (i) first, we have $\mathbf{R}_{\psi}^{\top} m \mathbf{g} = m \mathbf{g}$ because the rotation of ψ is about the z -axis; (ii) secondly, since $\mathbf{q}_{\text{r}} = \mathbf{q}_{\text{eq}\psi}^{-1} \otimes \mathbf{q}$, then $\mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\text{r}})$; (iii) since $\mathbf{v}_{\text{b}} := \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q})(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ (as defined after equation (3.6), then $\|\mathbf{v}_{\text{b}}\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\| - \|\mathbf{v}_{\text{r}} - \mathbf{w}_{\text{r}}\|$ (iv) finally, $\mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}) \mathbf{w} = \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}_{\text{r}}) \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{R}_{\psi} \mathbf{w}_{\text{r}} = \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}_{\text{r}}) \mathbf{w}_{\text{r}}$. Based on the observations above, we can derive the

rotated version of equations (3.8) as

$$\dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\mathbf{r}}, \quad (3.33a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_{\mathbf{r}} = -m\mathbf{g} + \mathbf{R}(\mathbf{q}_{\mathbf{r}}) \left(\mathbf{M}_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_{\mathbf{f}}(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_{\mathbf{r}}\| \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}_{\mathbf{r}})(\mathbf{v}_{\mathbf{r}} - \mathbf{w}_{\mathbf{r}}) \right), \quad (3.33b)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_{\mathbf{r}} \otimes [\omega_{\mathbf{b}}] \right), \quad (3.33c)$$

$$\mathbf{J}\dot{\omega}_{\mathbf{b}} = -[\omega_{\mathbf{b}}]_{\times} \mathbf{J}\omega_{\mathbf{b}} + \mathbf{M}_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_{\mathbf{m}}(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_{\mathbf{r}}\| \mathbf{R}^{\top}(\mathbf{q}_{\mathbf{r}})(\mathbf{v}_{\mathbf{r}} - \mathbf{w}_{\mathbf{r}}) \quad (3.33d)$$

With these new coordinates, the incremental input-state vectors in (3.30) can be expressed as

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \left(\mathbf{p}_{\mathbf{r}} - \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{p}_{\text{eq}}, \mathbf{v}_{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r}} - \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}}, \omega_{\mathbf{b}} \right), \\ \tilde{\mathbf{u}} &:= \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{eq}}, \quad \tilde{\mathbf{w}} := \mathbf{w}_{\mathbf{r}} - \mathbf{w}_{\mathbf{r},\text{eq}} \end{aligned} \quad (3.34)$$

where $\mathbf{w}_{\mathbf{r},\text{eq}} = \mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{w}_{\text{eq}} = \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix}$, already defined in (3.19), and $\mathbf{R}_{\psi}^{\top} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{eq}} = [0 \ \sin(\frac{\theta}{2}) \ 0]^{\top}$ have both a convenient sparse structure.

By focusing on the rotated dynamics (3.33) and the expression (3.34) of the incremental variables, the proof of the theorem amounts to showing that the linearization of (3.33) about the rotated equilibrium

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathbf{r},\text{eq}} &= \left(\mathbf{p}_{\mathbf{r},\text{eq}}, \mathbf{v}_{\mathbf{r},\text{eq}}, \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r},\text{eq}}, \omega_{\mathbf{br},\text{eq}} \right) \\ &= \left(\mathbf{R}_{\psi}^{\top} \mathbf{p}_{\text{eq}}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\frac{\theta}{2}) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right), \quad \mathbf{w}_{\mathbf{r},\text{eq}} = \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

coincides with equation (3.31) and the expressions in Algorithm 2. To this end, inspired by [?, Proof of Lemma 1], to linearize the dynamics of the quaternion $\mathbf{q}_{\mathbf{r}} = [\eta_{\mathbf{r}} \ \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r}}^{\top}]^{\top}$ evolving in \mathbb{S}^3 , we replace $\eta_{\mathbf{r}}$ by its positive value induced by the unit norm of the quaternion. Thus, $\eta_{\mathbf{r}} = (1 - \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r}}^{\top} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r}})^{\frac{1}{2}}$.

Let us now first focus on matrix \mathbf{A}_w in (3.31). Its first block row is evidently $[0_3 \ 0_3 \ 0_3 \ 0_3]$, due to linearity of equation (3.33a). For its second block row we focus on equation (3.33b) and start by characterizing $\mathbf{R}(\mathbf{q}_{\mathbf{r},\text{eq}})$, whose structure is relatively simple due to the sparsity of $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r},\text{eq}}$. In particular, we recall from (3.23) that, using the expression of \mathbf{R} in (3.2), we may write

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}_{\mathbf{r},\text{eq}}) = \mathbf{R}_{\theta} := \begin{bmatrix} 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 & 0 & 2\bar{\epsilon}_2\bar{\eta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2\bar{\epsilon}_2\bar{\eta} & 0 & 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

where $\bar{\epsilon}_2 = \sin \frac{\theta}{2}$ denotes the second element of $\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{r},\text{eq}}$ as per (3.35) and $\bar{\eta} = \sqrt{1 - \bar{\epsilon}_2^2} =$

$\cos \frac{\theta}{2}$.

With this expression of \mathbf{R}_θ , we may derive the following expression from (3.33b), by using the shortcut notation $\cdot|_{\text{eq}}$ to characterize the evaluation of a (matrix or vector) function at the equilibrium (3.35),

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{vv} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{m} \mathbf{R}(\mathbf{q}_r) \left(\mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r) (\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r) \right) \right) \Big|_{\text{eq}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{v}_r \right) \Big|_{\text{eq}}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

which, also considering the identity $\mathbf{D}_{f,\text{eq}} = \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}})$, is easily shown to coincide with matrix \mathbf{A}_{vv} given in (3.49) in Algorithm 2.

We now focus on the entry $\mathbf{A}_{v\epsilon}$ of \mathbf{A}_w , which should be computed, starting from (3.33b) in parallel ways to (3.36), as

$$\mathbf{A}_{v\epsilon} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\frac{1}{m} \mathbf{R}(\mathbf{q}_r) \left(\mathbf{M}_f(\mathbf{u}) + \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r) \mathbf{w}_r \right) \right) \Big|_{\text{eq}}. \quad (3.37)$$

For evaluating the right-hand side of (3.37), starting from the expression of $\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \mathbf{R}([\eta])$ in (3.2), after substituting $\eta = \sqrt{1 - \epsilon^\top \epsilon} \neq 0$ (we recall that for all of the characterized equilibria we have $\eta \neq 0$), we may compute the generic derivative

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{R}_\epsilon(\epsilon, \mathbf{v}) &:= \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbf{R} \left(\left[\sqrt{1 - \epsilon^\top \epsilon} \right] \right) \mathbf{v} \\ &= 2\eta [\mathbf{v}]_\times \left(\frac{\epsilon \epsilon^\top}{1 - \epsilon^\top \epsilon} - \mathbb{I}_3 \right) - 4\mathbf{v} \epsilon^\top + 2\epsilon \mathbf{v}^\top + 2\epsilon^\top \mathbf{v} \mathbb{I}_3, \end{aligned} \quad (3.38)$$

which also implies

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbf{R}^\top([\eta]) \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \mathbf{R} \left(\left[\sqrt{1 - \epsilon^\top \epsilon} \right] \right) \mathbf{v} = \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\epsilon, \mathbf{v}). \quad (3.39)$$

For evaluating (3.37), it will be useful to derive the following simplified form

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{R}_\epsilon \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \epsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 0 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \right) \\ = 2 \begin{bmatrix} 0 & \left(\bar{\eta} - \frac{\epsilon_2^2}{\bar{\eta}} \right) \mathbf{v}_3 & 0 \\ -\bar{\eta} \mathbf{v}_3 & 0 & \bar{\eta} \mathbf{v}_1 \\ 0 & \left(\frac{\epsilon_2^2}{\bar{\eta}} - \bar{\eta} \right) \mathbf{v}_1 & 0 \end{bmatrix} + 2\bar{\epsilon}_2 \begin{bmatrix} 0 & -2\mathbf{v}_1 & 0 \\ \mathbf{v}_1 & 0 & \mathbf{v}_3 \\ 0 & -2\mathbf{v}_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

We can define two forces (f_d, f_ℓ) acting on the drone at the equilibrium, expressed in the body frame, which depend on the wind \mathbf{w} and on the two identical elevon inputs δ . These two forces are the drag and lift generated by the airflow over the wing. They are the result of the development of the expression $\mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{v}_b\| \mathbf{v}_b$ from

(3.33b) with $\mathbf{D}_f(\mathbf{u})$ as in (3.11) :

$$\begin{bmatrix} f_d \\ 0 \\ f_\ell \end{bmatrix} = -\mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{w}_{\text{r,eq}}, \quad (3.41)$$

which, after some calculations, can be shown to coincide with the selections in (3.47), given in Algorithm 2.

From the two forces (f_d, f_ℓ) in (3.41), it is possible to determine their partial derivatives with respect to the quaternion component $\bar{\epsilon}_2$ representing the drone's pitch. Using (3.39), we obtain

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_d}{\partial \epsilon_2} \\ 0 \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix} = -\mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\epsilon, \mathbf{w}_{\text{r,eq}}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

which, after some calculations, also considering the identity $\mathbf{D}_{f,\text{eq}} = \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}})$, can be shown to coincide with the selections in (3.47), given in Algorithm 2.

Following parallel derivations, the force f_m generated by the motors, linked to the propeller traction and the drag generated by the airflow over the wing, and the force f_e generated by the elevons, linked to the airflow created by the propellers are obtained from (3.9) as

$$\begin{bmatrix} f_m \\ 0 \\ f_e \end{bmatrix} = \mathbf{M}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}), \quad (3.43)$$

which, after some calculations, can be shown to coincide with the selections in (3.48), given in Algorithm 2.

Using the definitions (3.38), (3.39), together with the sparse expressions (3.40), (3.41), (3.43), and their equivalent forms reported in (3.47), (3.48) given in Algorithm 2, we finally may compute from (3.37)

$$\mathbf{A}_{v\epsilon} = \frac{1}{m} (\partial \mathbf{R}_\epsilon(\epsilon, \mathbf{M}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}})) - \partial \mathbf{R}_\epsilon(\epsilon, \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \mathbf{R}_\theta^\top \mathbf{w}_{\text{eq}}) - \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_{\text{r,eq}}\| \partial \mathbf{R}_\epsilon(-\epsilon, \mathbf{w}_{\text{r,eq}}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) \Big|_{\text{eq}}.$$

which provides expression (3.50) in Algorithm 2 after some straightforward calculations also exploiting $\mathbf{D}_{f,\text{eq}} = \mathbf{D}_f(\mathbf{u}_{\text{eq}})$.

We now focus on the entry $\mathbf{A}_{\epsilon\omega}$ of \mathbf{A}_w , and we recall that, due to the properties of the quaternion product (see, e.g., [Hua 2013]), $[\eta] \otimes [\omega_b] = \begin{bmatrix} -\epsilon^\top \\ \eta \mathbb{I}_3 + [\epsilon]_\times \end{bmatrix} \omega_b$. From the two lower terms of the matrix at the right-hand side of this last equation, when developing (3.33c) and computing $\mathbf{A}_{\epsilon\omega} = \frac{\partial}{\partial \omega_b} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_r \otimes [\omega_b] \right) \Big|_{\text{eq}}$, we obtain the two terms in expression (3.50) given in Algorithm 2.

We now focus on the entry $\mathbf{A}_{\omega\epsilon}$ of \mathbf{A}_w , which should be computed starting from (3.33d). Since only the last term of the right hand-side depends on ϵ (through \mathbf{q}_r), we obtain

$$\mathbf{A}_{\omega\epsilon} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{D}_m(\mathbf{u}_{\text{eq}}) \|\mathbf{w}_r\| \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left(\mathbf{R}^\top(\mathbf{q}_r)(\mathbf{v}_r - \mathbf{w}_r) \right) \Big|_{\text{eq}}. \quad (3.44)$$

To compute the explicit expression of (3.44), we exploit again (3.39) and (3.40), and use the expression of \mathbf{D}_m in (3.12), together with the identities $\bar{\eta}^2 - \bar{\epsilon}_2^2 = \cos \theta$ and $2\bar{\eta}\bar{\epsilon}_2^2 = \sin \theta$, which provide, after some simplifications, the expression (3.51), given in Algorithm 2.

Let us now move on to deriving the entries of matrix \mathbf{G}_w in (3.31), whose components can be derived from (3.33b) and (3.33d). Recalling from (3.7) the four entries of \mathbf{u} , and also based on the structure of \mathbf{M}_f , \mathbf{D}_f , in (3.9), (3.11), an explicit form for

$$\mathbf{G}_v = \frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\mathbf{M}_f(\mathbf{u}) - \mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_{\text{eq}}^b \right) \Big|_{\text{eq}}, \quad (3.45)$$

can be computed as in (3.52), after some straightforward factorizations.

Similarly, based on the matrices \mathbf{M}_m , \mathbf{D}_m in (3.10), (3.12), we may compute

$$\mathbf{G}_\omega = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\mathbf{M}_m(\mathbf{u}) - \mathbf{D}_m(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_{\text{eq}}^b \right) \Big|_{\text{eq}} \quad (3.46)$$

as in (3.53), after some straightforward factorizations.

Let us finally determine the expression of \mathbf{E}_v in (3.31) as follows. First note that we may write $\|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_r = \mathbf{w}_r \sqrt{\mathbf{w}_r^\top \mathbf{w}_r}$, so that

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_r = \|\mathbf{w}_r\| \mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{w}_r \mathbf{w}_r^\top}{\|\mathbf{w}_r\|} = \|\mathbf{w}_r\| \left(\mathbb{I}_3 + \frac{\mathbf{w}_r \mathbf{w}_r^\top}{\mathbf{w}_r^\top \mathbf{w}_r} \right).$$

Then, starting from (3.33b) and (3.33d) and following similar computations to the previous cases, also using the expression of \mathbf{w}_r in (3.32), we obtain expression (3.54) (reported in Algorithm 2), for $\mathbf{E}_v = -\frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} (\mathbf{D}_f(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_r) \Big|_{\text{eq}}$ and $\mathbf{E}_w = -\mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_r} (\mathbf{D}_m(\mathbf{u}) \|\mathbf{w}_r\| \mathbf{w}_r) \Big|_{\text{eq}}$, where we recall that $\mathbf{D}_{m,\text{eq}} = \mathbf{D}_m(\mathbf{u}_{\text{eq}})$. \square

3.5 Conclusion du Chapitre 3

Algorithm 2 Design of the linearization matrices in (3.31)**Input** : Wind vector $\mathbf{w}_{\text{eq}} = [w_x \ w_y \ w_z]^\top$ andequilibrium $(\mathbf{u}_{\text{eq}}, \mathbf{x}_{\text{eq}})$ from (3.16) and Algorithm 1.**Output** : Matrices \mathbf{A}_w , \mathbf{G}_w , \mathbf{E}_w in (3.31)

- 1: Select parameters $\psi, \theta, \tau, \delta$ in (3.16) from Algorithm 1 and $\bar{\epsilon}_2 = \sin \frac{\theta}{2}$, $\bar{\eta} = \cos \frac{\theta}{2}$.
- 2: With the quantities in (3.23), (3.11), (3.12), define :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\psi &:= \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\theta := \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} w_{rx} \\ 0 \\ w_{rz} \end{bmatrix} &:= \mathbf{R}_\psi^\top \mathbf{w}_{\text{eq}}, \quad \begin{bmatrix} w_x^b \\ w_z^b \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} w_{rx} \cos \theta - w_{rz} \sin \theta \\ w_{rz} \cos \theta + w_{rx} \sin \theta \end{bmatrix} \\ [\mathbf{D}_{f,\text{eq}} | \mathbf{D}_{m,\text{eq}}] &:= \frac{\rho S}{2} \begin{bmatrix} -C_d & 0 & C_d \xi_f \delta \\ 0 & 0 & 0 \\ -C_\ell \xi_f \delta & 0 & -C_\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Delta_r C_\ell \xi_m \delta & 0 & 2 \Delta_r C_\ell \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- 3: Define the drag and lift forces, and their derivatives with respect to ϵ_2 (defined in Step 1), as

$$\begin{bmatrix} f_d & \frac{\partial f_d}{\partial \epsilon_2} \\ 0 & 0 \\ f_\ell & \frac{\partial f_\ell}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix} := -\|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \mathbf{D}_{f,\text{eq}} \begin{bmatrix} w_x^b \left(4\bar{\eta} - \frac{2\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} \right) w_{rz} - 8\bar{\epsilon}_2 w_{rx} \\ 0 \\ w_z^b \left(4\bar{\eta} - \frac{2\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} \right) w_{rx} - 8\bar{\epsilon}_2 w_{rz} \end{bmatrix}, \quad (3.47)$$

- 4: Define the motor and elevon forces as

$$\begin{bmatrix} f_m \\ f_e \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \left(\frac{S_{\text{wet}} C_d}{2S_p} - 2 \right) \tau \\ -\frac{S_{\text{wet}} \tau \delta \xi_f C_\ell}{2S_p} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

- 5: Select the entries of matrix \mathbf{A}_w in (3.31) as :

$$\mathbf{A}_{vv} = \frac{\|\mathbf{w}_{\text{eq}}\|}{m} \mathbf{R}_\theta \mathbf{D}_{f,\text{eq}} \mathbf{R}_\theta^\top \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{v\epsilon}^{1,2} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,1} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,3} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{3,2} \end{bmatrix} &:= \begin{bmatrix} 2\bar{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} & 4\bar{\epsilon}_2 & 2\bar{\epsilon}_2^2 - 1 & 2\bar{\epsilon}_2 \bar{\eta} \\ -2\bar{\eta} & -2\bar{\epsilon}_2 & 0 & 0 \\ 2\bar{\epsilon}_2 & -2\bar{\eta} & 0 & 0 \\ -4\bar{\epsilon}_2 & 2\bar{\eta} - \frac{\bar{\epsilon}_2^2}{\bar{\eta}} & -2\bar{\epsilon}_2 \bar{\eta} & 1 - 2\bar{\epsilon}_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_e + f_\ell \\ f_m + f_d \\ \frac{\partial f_d}{\partial \epsilon_2} \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial \epsilon_2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{v\epsilon} &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{1,2} & 0 \\ \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,1} & 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{2,3} \\ 0 & \mathbf{A}_{v\epsilon}^{3,2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{\epsilon\omega} = \frac{\bar{\eta}}{2} \mathbb{I}_3 + \frac{\bar{\epsilon}_2}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{A}_{\omega\epsilon} = \frac{\rho S C_\ell \Delta_r \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| (w_x^b - \xi_m \delta w_z^b)}{J_y \bar{\eta}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

- 6: Select the entries of matrix \mathbf{G}_w in (3.31) as :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_v &= \frac{1}{m} \mathbf{R}_\theta [\mathbf{G}_{v\tau} | \mathbf{G}_{v\delta}], \quad \mathbf{G}_{v\tau} := \begin{bmatrix} 1 - \frac{S_{\text{wet}} C_d}{4S_p} \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f \delta}{2S_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{G}_{v\delta} &:= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} \rho S C_d \xi_f \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_z^b \\ 0 \\ -\frac{S_{\text{wet}} C_\ell \xi_f \tau}{2S_p} + \frac{1}{4} \rho S C_\ell \xi_f \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| w_x^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^\top \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\omega &= \mathbf{J}^{-1} [\mathbf{G}_{\omega\tau} | \mathbf{G}_{\omega\delta}], \quad \mathbf{G}_{\omega\delta} := \frac{S_{\text{wet}} C_\ell \tau}{4S_p} \begin{bmatrix} a_y \xi_f & -a_y \xi_f \\ \Delta_r \xi_m & \Delta_r \xi_m \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \\ &\quad + \frac{\rho S \|\mathbf{w}_{\text{eq}}\| \xi_m}{4} \begin{bmatrix} a_y C_d w_x^b & -a_y C_d w_x^b \\ \Delta_r C_\ell w_x^b & \Delta_r C_\ell w_x^b \\ a_y C_\ell w_z^b & -a_y C_\ell w_z^b \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{G}_{\omega\tau} := \begin{bmatrix} \frac{k_m}{k_f} + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y \xi_f C_\ell \delta \\ 0 \\ n_p + \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} a_y C_\ell \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{S_{\text{wet}}}{4S_p} \Delta_r \xi_m C_\ell \delta \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^\top$$

Commande hybride

Sommaire

4.1	Motivation	31
4.2	Schéma de commande hybride	31
4.3	Simulations	31

4.1 Motivation

4.2 Schéma de commande hybride

4.3 Simulations

Étude longitudinale sur une maquette à trois degrés de liberté

Sommaire

5.1	Motivation	33
5.2	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral	33
5.3	Maquette expérimentale	33
5.4	Résultats	33

5.1 Motivation

5.2 Schéma de commande linéaire proportionnel intégral

5.3 Maquette expérimentale

5.4 Résultats

Commande proportionnelle intégrale d'un drone convertible à 6 degrés de liberté

Sommaire

6.1	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof	35
6.2	Maquette expérimentale : 6 Dof	35
6.3	Résultats	35

6.1	Schéma de commande linéaire proportionnel intégral : 6 Dof
6.2	Maquette expérimentale : 6 Dof
6.3	Résultats

Modélisation d'un drone à aile libre rotation libre

Sommaire

7.1	Design et modélisation d'un drone : Colibri	37
7.2	Estimation d'état	37

7.1 Design et modélisation d'un drone : Colibri

7.2 Estimation d'état

Commande d'un drone à aile libre rotation libre

Sommaire

8.1	Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone	39
8.2	Commande Udwadia-Kalaba	39
8.3	Vols expérimentaux	39

8.1	Inversion non linéaire incrémentale de la dynamique du drone
8.2	Commande Udwadia-Kalaba
8.3	Vols expérimentaux

Conclusion

Ce manuscrit de thèse rapporte

Exemple d'annexe

A.1 Exemple d'annexe

Bibliographie

- [Hua 2013] Hua, M.-D., Hamel, T., Morin, P. et Samson, C. *Introduction to feedback control of underactuated VTOL vehicles : A review of basic control design ideas and principles*. IEEE, Control Systems, vol. 33, pages 61–75, 02 2013. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1109/MCS.2012.2225931>. (Cité en pages 9, 10 et 27.)
- [Jardin 2012] Jardin, M. et Mueller, E. *Optimized Measurements of UAV Mass Moment of Inertia with a Bifilar Pendulum*. Dans AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2012. (Cité en page 14.)
- [Lustosa 2019] Lustosa, L. R., Defaÿ, F. et Moschetta, J.-M. *Global Singularity-Free Aerodynamic Model for Algorithmic Flight Control of Tail Sitters*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 42, no. 2, pages 303–316, February 2019. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.2514/1.G003374>. (Cité en pages 8, 9, 10, 11 et 12.)
- [Olszanecki Barth 2020] Olszanecki Barth, J. M., Condomines, J.-P., Bronz, M., Moschetta, J.-M., Join, C. et Fliess, M. *Model-free control algorithms for micro air vehicles with transitioning flight capabilities*. International Journal of Micro Air Vehicles, vol. 12, pages 1–22, April 2020. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.1177/1756829320914264>. (Cité en pages 9, 12 et 13.)
- [Sansou 2022] Sansou, F. *Commande hybride d'un drone convertible pour des déplacements sous optimaux*. Master Thesis. ENAC Toulouse, 2022. [En ligne]. Disponible : <http://dx.doi.org/10.48550/ARXIV.2203.15387>. (Cité en pages 9, 11, 12 et 14.)

Résumé : resume

Mots clés : mots, clefs

Abstract : abstrat

Keywords : key, words
