TD 2 – Algèbre linéaire – Polynômes

Exercice 2.1 – Intersection de droites – Déterminer, dans les cas suivants, la position des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, possiblement en fonction d'un paramètre.

a) $\begin{cases} \mathcal{D} : 3x + 2y = 2 \\ \mathcal{D}' : x + 5y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \mathcal{D} : x - 2y = 1 \\ \mathcal{D}' : -3x + 6y = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \mathcal{D} : 2x - 4y = 6 \\ \mathcal{D}' : -x + 2y = -3 \end{cases}$

d) On considère $a \in \mathbb{R}$; on étudie le couple de droites suivant

$$\begin{cases} \mathcal{D} : -\frac{3}{2}y + 5x = 3 \\ \mathcal{D}' : 2x + ay = 5 \end{cases}.$$

Exercice 2.2 – Algorithme du pivot de Gauss – Résolutions de systèmes (★) – Résoudre chacun des systèmes linéaires suivant par la méthode du pivot de Gauss telle qu'elle a été mise en place en cours. Il est indispensable de soigner la mise en page (le cadrillage de votre papier doit aider), et d'être aussi exigeant sur la dactylographie que s'il s'agissait de saisir du code.

1. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 6 \\ 2x - y + 4z = 2 \\ 4x + 3y - 2z = 14 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x - 2y + 3z = 21 \\ -2x - y + 2z = 14 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ -x - 2z = 0 \\ 4x - 8y + 4z = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ -x + 3y = 12 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 0 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 4 \\ -2x + y + 3z = -3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 1 \\ -6x + 4y - 10z = -1 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

SOLUTION(S). 1. On considère le système suivant

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 7 \\ x - y + 2z = -3 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$$

que l'on écrit sous la forme simplifiée (matricielle) suivante

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right.$$

Afin de déterminer l'ensemble des solutions du système, on applique notre algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 6 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{2} & 3 & 1 & 7 & \\ 0 & -5 & 3 & -13 & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 0 & -7 & -5 & -9 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{2} & 3 & 1 & 7 & \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -13 & \\ 0 & 0 & \boxed{46} & -46 & L_3 \leftarrow -5L_3 + 7L_2 \end{array}$$

Le système linéaire a 3 pivots, 3 équations et 3 inconnues : on a donc un système *de Cramer*. Il admet une unique solution. On continue notre algorithme pour la déterminer.

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -13 \\ 0 & 0 & \boxed{46} & -46 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{2} & 3 & 1 & 7 & \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & -13 & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & L_3 \leftarrow \frac{-1}{46}L_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{2} & 3 & 0 & 8 & L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{10} & 0 & 0 & 10 & L_1 \leftarrow 5L_1 + 3L_1 \\ 0 & \boxed{-5} & 0 & -10 & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & L_1 \leftarrow \frac{1}{10}L_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & L_2 \leftarrow \frac{-1}{5}L_2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & \end{array}$$

On a donc que l'unique solution du système est $(1, 2, -1)$.

Remarque – Lorsque l'on détermine une solution à un système, c'est toujours une bonne idée de vérifier notre calcul en testant cette solution. Ainsi ici, on peut faire le calcul suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2\times 1 & + & 3\times 2 & + & -1 & = & 7 \\ 1 & - & 2 & + & 2\times(-1) & = & -3 \\ 3\times 1 & + & 2 & - & (-1) & = & 6 \end{array}\right.$$

donc le triplet $(1,2,-1)$ est bien solution du système.

2. On considère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & - & z & = & 0 \end{array}\right.$$

que l'on écrit sous forme matricielle

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

On a, grâce à la question précédente, que ce système est équivalent à

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{46} & 0 \end{array}$$

qui admet une unique solution. Comme tous les termes constants sont égaux à 0, le système admet la solution nulle comme solution évidente. Ainsi, le système admet $(0,0,0)$ comme unique solution.

3. On considère le système suivant

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & -1 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 7 \\ 5x & + & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

On l'écrit sous forme matricielle et on utilise l'algorithme du pivot de Gauss afin de déterminer l'existence de solutions de ce système :

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & -4 & 2 \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & \\ 0 & -7 & 11 & 10 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 0 & -7 & 11 & 7 & L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{array}$$

$$\sim \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 2 & -3 & -1 & \\ 0 & -7 & 11 & 10 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

Le système présente une incompatibilité, l'équation $0 = -3$ n'admettant aucune solution. Le système n'admet donc aucune solution.

4. On considère le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & 3z & = & 6 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 2 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & 14 \end{array}\right.$$

que l'on écrit sous forme matricielle et auquel on applique l'algorithme du pivot de Gauss afin de déterminer l'existence de solutions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 6 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 6 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 10 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{-5} & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{-5} & 10 & -10 \end{array}\right)$$

Notre système admet 2 pivots, 2 équations et 3 inconnues donc, d'après le théorème fondamental du cours, le système admet une infinité de solutions. On continue notre algorithme pour déterminer l'ensemble de ces solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 6 \\ 0 & \boxed{-5} & 10 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & 0 & 5 & 10 \\ 0 & \boxed{-5} & 10 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 5L_1 + 2L_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{-1}{5}L_2 \end{array}$$

On a ainsi que x et y sont inconnues principales de notre système, et z est inconnue libre. On a ainsi que notre système de départ est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+z & = & 2 \\ y-2z & = & 2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 2-z \\ y & = & 2+2z \end{array}\right. .$$

Ainsi, l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{(2-z, 2+2z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\right\} ,$$

qui correspond géométriquement à la droite de vecteur directeur $(-1, 2, 1)$ passant par le point $(2, 2, 0)$.

5. On considère le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & z & = & 7 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 21 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & 14 \end{array}\right.$$

que l'on écrit sous forme matricielle et auquel on applique l'algorithme du pivot de Gauss afin de déterminer l'ensemble de ses solutions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \boxed{1} & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 21 \\ -2 & -1 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \boxed{1} & 7 \\ -5 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \boxed{1} & 7 \\ -5 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{array}$$

On a trois pivots, trois équations et trois inconnues : on a un système de Cramer, qui admet donc une unique solution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & \boxed{1} & 7 \\ -5 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 5L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

L'unique solution de notre système est donc le triplet $(0,0,7)$.

6. On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & & -x & - & 2z & = & 0 \\ 4x & - & 8y & + & 4z & = & 0 \end{array}\right.$$

que l'on écrit sous forme matricielle et auquel on applique l'algorithme du pivot de Gauss afin de déterminer l'ensemble de ses solutions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

On a deux pivots, deux équations et trois inconnues : d'après le théorème fondamental du cours, on a donc une infinité de solutions. Déterminons l'ensemble de ces solutions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \\ \end{array}$$

ce qui équivaut donc à

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 4y \\ z & = & -2y \end{array}\right.$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$\left\{(4y, y, -2y) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\right\} ,$$

qui est la droite de vecteur directeur $(4,1,-2)$ et passant par le point $(0,0,0)$.

7. On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ & & -x & + & 3y & = & 12 \\ & & 2x & - & z & = & 3 \end{array}\right.$$

que l'on réécrit sous forme matricielle et auquel on applique l'algorithme du pivot de Gauss afin de déterminer l'ensemble de ses solutions :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 3 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -5 & 2 & 0 & -5 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_5 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_5 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ -2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & \boxed{-1} & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3 \\ \\ \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 2 & -2 & 1 \\
2 & 1 & -2 & 5 \\
-1 & 3 & 0 & 12 \\
2 & 0 & -1 & 3
\end{array}
\sim
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & \boxed{-1} & 3
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\
\\
L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \\
\\
\end{array}
$$

$$
\sim
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\
-2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\
2 & 0 & \boxed{-1} & 3
\end{array}
$$

Notre système est équivalent à un système avec trois équations,trois pivots et trois inconnues, qui est donc un système de Cramer, et qui admet ainsi une unique solution. Finissons notre algorithme afin de la déterminer.

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 1 & 1 \\
-1 & 2 & -2 & 1 \\
2 & 1 & -2 & 5 \\
-1 & 3 & 0 & 12 \\
2 & 0 & -1 & 3
\end{array}
\sim
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\
-2 & \boxed{1} & 0 & -1 \\
2 & 0 & \boxed{-1} & 3
\end{array}
$$

$$
\sim
\begin{array}{ccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 3 \\
0 & \boxed{1} & 0 & 5 \\
0 & 0 & \boxed{1} & 3
\end{array}
\begin{array}{l}
\\
L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\
L_3 \leftarrow 2L_1 - L_3
\end{array}
$$

Ainsi, l'unique solution de notre système est le triplet $(3, 5, 3)$.