TP 2 – Résolutions d'équations

Le but de ce TP est d'introduire différentes (trois) méthodes numériques afin de d'approcher numériquement les solutions d'une équation du type

$$f(x) = c$$

avec f une fonction réelle et $c \in \mathbb{R}$. Quitte à modifier le terme de gauche, cette équation est équivalente à une équation du type $\widetilde{f}(x) = 0$. À partir de maintenant et jusqu'à la fin du TP, $a < b$ sont deux réels et $f\colon\ [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle $I :=]a, b[$. On supposera qu'il existe une unique solution $\alpha \in I$. L'idée générale du TP est de construire numériquement une suite de réels (x_n) qui converge vers la valeur α. La question sera de savoir comment construire informatiquement une telle suite, si on a deux telles suites, on veut pouvoir comparer leur *vitesse de convergence*. Dans l'une de ces méthodes, le calcul de la dérivée d'une fonction intervient. Cela motive notre dernière partie qui répondra à la question suivante : comment trouver numériquement une valeur approchée du nombre dérivé d'une fonction f en $a \in \mathbb{R}$?

Exercice 2.1 – Dichotomie – La première méthode que nous allons introduire est la méthode dite de *dichotomie*. On suppose qu'on a unicité de la solution α dans l'intervalle $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$ i.e. que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents. Ceci n'est pas une hypothèse restrictive car, quitte à réduire la taille de l'intervalle $[a, b]$, c'est toujours le cas. La méthode se décrit de la manière suivante :

— on part du couple de valeurs (a, b) et on calcule $m = \frac{a+b}{2}$ (le milieu) ;

— si $f(m)$ et $f(a)$ sont de même signe, on remplace a par m, sinon on remplace b par m (faire un dessin pour comprendre) ;

— on recommence avec le nouveau couple (a, b).

1. Pourquoi est-ce que la méthode converge bien vers α ?
2. Écrire une procédure `dichotomie` qui prend en entrée une fonction f, deux réels a et b, les bornes de l'intervalle dans lequel se situe la solution α de l'équation $f(x) = 0$, un réel $e > 0$, l'erreur maximale exigée par l'utilisateur, et qui retourne un réel ℓ, approximation de α à e près (i.e. $|\alpha - \ell| < e$) construite par l'algorithme de dichotomie.
3. On considère la fonction
$$g\colon \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \cdot \tan(x) - 1 \end{array}.$$
Appliquer la procédure `dichotomie` à g pour $e = 10^{-6}$.
4. Un phénomène plutôt rare en analyse numérique se produit avec cette méthode : pour une précision donnée ϵ, on peut calculer le nombre d'itérations nécessaire pour approcher α à ϵ près. Donner le nombre d'itérations nécessaires en fonction de ϵ.

Exercice 2.2 – Bonus : un peu de théorie avec un théorème de point fixe – On note I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et on considère $\phi : I \to I$ une fonction continue.
On rappelle que, par définition, $a \in I$ est un *point fixe de ϕ* si $\phi(a) = a$. On suppose, pour la suite, que ϕ est une application *contractante* c'est-à-dire qu'il existe $k < 1$ tel que

$$\forall x, y \in I, |\phi(y) - \phi(x)| < k|y - x|.$$

1. Montrer que si ϕ admet un point fixe $a \in I$, alors celui-ci est unique.

2. Soit x_0 un point de I. On considère la suite réelle $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, appelée ***suite itérée***, définie par

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x_{i+1} = \phi(x_i).$$

   Montrer que, pour tout couple $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p < q$, on a

$$|x_p - x_q| \leqslant \frac{k^p}{1-k}|x_0 - x_1|.$$

   En déduire que la suite (x_i) est de Cauchy.

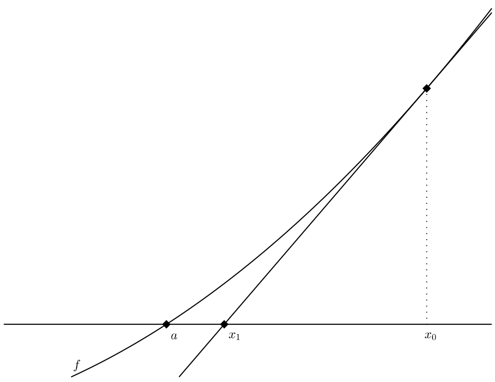
3. Montrer que la suite (x_i) converge vers un point fixe a de ϕ et que de plus,

$$\forall p > 0, \quad |x_p - a| \leqslant k^p |x_0 - a|.$$

On a donc démontré le théorème suivant :

THÉORÈME
Soit $\phi\colon I \longrightarrow I$ une application continue contractante. Alors ϕ admet un unique point fixe $a \in I$ et de plus, pour tout point initial $x_0 \in I$, la suite itérée (x_p) définie par $x_{p+1} = \phi(x_p)$ converge vers a.

EXERCICE 2.3 – MÉTHODE DE NEWTON – Supposons que l'on possède une valeur grossière x_0 de la racine a de l'équation $f(x) = 0$ avec f une fonction ***dérivable*** de dérivée non nulle. L'idée est de remplacer la courbe représentative de f par sa tangente au point x_0. L'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe $y = 0$ est en général une meilleure approximation de a que x_0.



1. ✎ Donner l'expression de x_1 en fonction de x_0 et de f.

2. ✎ En déduire l'expression d'une fonction ϕ contractante qui nous permet de définir la suite itérée (x_p) qui converge vers a. On admettra la convergence de la méthode, celle-ci reposant sur la section précédente.

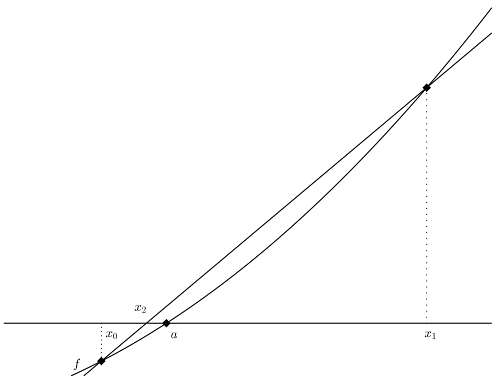
3. ⌨ Écrire une fonction `Newton(f,df,x0,N)` qui prend en entrée une fonction `f`, une fonction `df` qui est la dérivée de f que l'on aura calculée à la main, un réel `x0`, première approximation de la solution et un entier `N` et qui retourne le réel `xN`, le N-ième terme de la suite itérée de Newton.

4. Tester la fonction `Newton` pour approcher les racines de l'équation $x^2 - 2 = 0$ pour différentes valeurs de `x0` et de `N`. Comparer le résultat avec le résultat théorique.

5. Écrire une fonction `VitesseNewton()` qui trace le graphe de la suite $f(x_n)$ en fonction de n compris entre 1 et 10, pour $f(x) = x\tan(x) - 1$ et (x_n) la suite itérée de la méthode de Newton.

L'un des désavantages de la méthode de Newton est le calcul de la dérivée de f. En effet, pour le moment, nous sommes obligés de calculer la dérivée de f à la main. La prochaine méthode de résolution va nous permettre d'éviter ce calcul.

Exercice 2.4 – Méthode de la sécante – L'idée de la méthode de la sécante est de remplacer f' par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle. Supposons que l'on dispose de deux valeurs approchées x_0 et x_1 de la racine a de l'équation $f(x) = 0$.



Le taux d'accroissement de f sur l'intervalle $[x_0, x_1]$ est

$$\tau_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

et l'équation de la sécante traversant le graphe de f aux points d'abscisse x_0 et x_1 est

$$y = \tau_1(x - x_1) + f(x_1).$$

On obtient ainsi une nouvelle approximation x_2 de a en calculant l'abscisse de l'intersection de la sécante avec l'axe Ox

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\tau_1}.$$

On va ensuite itérer ce procédé. On admettra ici la convergence de la méthode.

1. Écrire une fonction python `Secante(f, x0, x1, N)` qui prend en entrée une fonction `f`, deux réels $x0$ et x_1, premières approximations de a et et un entier `N` et qui retourne le réel `xN`, le N-ième terme de la suite itérée de la méthode de la sécante.

2. Tester la fonction `Secante` pour approcher les racines de l'équation $x^2 - 2 = 0$ pour différentes valeurs de `x0` et de `N`. Comparer le résultat avec le résultat théorique.

3. Écrire une fonction python `VitesseSecante()` qui trace le graphe de la suite $f(x_n)$ en fonction de n compris entre 1 et 10 et pour $f(x) = x\tan(x) - 1$ et (x_n) la suite itérée de la méthode de la sécante.

Exercice 2.5 – Bonus : Calcul numérique d'un nombre dérivé – Dans la section précédente, nous avons remplacé le calcul de la dérivée de f par le taux d'accroissement de f sur un petit intervalle $[x_0, x_1]$. En quelle mesure cette approximation est-elle bonne ? Le but de cette section est de construire et d'étudier le comportement de *méthodes de dérivations numériques* : nous voulons construire une procédure qui prenne en entrée une fonction f et un réel a et qui nous retourne la meilleure approximation possible de $f'(a)$.

Soit donc f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$. On rappelle la définition de la dérivée de f en a :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1. Écrire une fonction python `methode1(f, a, h)` qui prend en entrée une fonction `f` et un réel `h` et qui renvoie $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$. Le but de la suite est de déterminer le h qui minimise l'erreur de la méthode précédente. Pour cela, on définit quelques fonctions intermédiaires.
2. a) Écrire une fonction `abscisse(n)` prenant en argument un entier n et rendant le vecteur $(1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots, 2^{-n})$.

   b) Écrire une fonction `echantillon(g, n)` prenant en argument une fonction g et un entier n et rendant le vecteur $(g(1), g(2^{-1}), \ldots, g(2^{-n}))$.

   c) Écrire une fonction `graphe(g, n, c)` prenant en argument une fonction g, un entier n et un numéro de couleur c et traçant le graphe de g en coordonnées logarithmiques sur l'intervalle $[2^{-n}, 1]$ en utilisant les abscisses données par la fonction `abscisse(n)` avec la couleur c.

   d) Pourquoi vous a-t-on incité à prendre un échantillon d'une forme un peu particulière plutôt qu'un `linspace` ?
3. Pour évaluer l'erreur commise par notre méthode numérique, utilisons-la sur une fonction que l'on sait dériver et comparons le résultat de notre méthode numérique avec le résultat théorique. On considère donc $f = \sin$ avec $a = 1$.

   a) Définir une fonction qui prend en entrée h et qui retourne le réel

   $$\left| \frac{\sin(1+h) - \sin(1)}{h} - \cos(1) \right|.$$

   Cette quantité est appelée *erreur effective.*

   b) Écrire une fonction python `err_effective_1()` qui trace en coordonnées logarithmiques le graphe de l'erreur effective en utilisant les fonctions de la question ??. Pour quel h l'erreur effective est-elle minimale et quelle valeur prend-elle ?

Le fait que l'erreur effective augmente de nouveau pour h très petit est dû aux erreurs d'arrondi. Considérons la formule de Taylor à l'ordre 2 de f en a :

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2}$$

la partie en $o(h^2)$ étant "cachée" dans le symbole $\approx$. On peut estimer que l'erreur d'arrondi est de 10^{-16} c'est-à-dire que

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + 10^{-16}$$

ce qui entraîne

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \approx \frac{f''(a)h}{2} + \frac{10^{-16}}{h}.$$

La quantité de droite est appelée *erreur théorique.*

4. a) En utilisant les fonctions de la question **??**, écrire une fonction `err_theo_1` qui trace le graphe en coordonnées logarithmiques de l'erreur théorique, toujours pour $f = \sin$ et $a = 1$.

   b) Écrire une fonction `compare_err_1` qui superpose les graphes de l'erreur effective et de l'erreur théorique. Que constatez-vous ?

5. Utiliser le h minimisant l'erreur de la méthode, déterminé par lecture graphique, pour écrire une fonction `deriv1(f,a)` qui prend entrée une fonction f et un réel a et qui retourne la meilleure approximation de $f'(a)$ en utilisant la fonction `methode1`.

6. En considérant la formule de Taylor à l'ordre 3 pour h et $-h$, c'est-à-dire

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} + \frac{f'''(a)h^3}{6} + o(h^3);$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)h^2}{2} - \frac{f'''(a)h^3}{6} + o(h^3);$$

   construire une nouvelle méthode de dérivation numérique qu'on appellera par exemple `methode2`. Reprendre les questions précédentes pour étudier les erreurs théorique et effective de cette nouvelle méthode et la comparer à la première.