1. Concepts de base
Graphes

Solen Quiniou

solen.quiniou@univ-nantes.fr

IUT de Nantes

Année 2021-2022 – BUT 1 (Semestre 2)

[Mise à jour du 20 janvier 2022]

Plan du cours

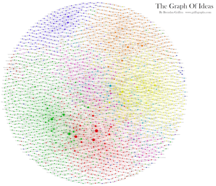
Introduction

La **théorie des graphes** permet de représenter de nombreux problèmes courants en informatique mais également en ingénierie, en sciences sociales, en intelligence artificielle... en représentant ces problèmes en termes de relations binaires entre objets.

On distingue les **sommets** (villes, par exemple) et les **arcs** ou **arêtes** (communication entre les sommets) qui mettent en relation les sommets. On associe parfois des caractéristiques aux arcs pour exprimer des distances, des coûts...

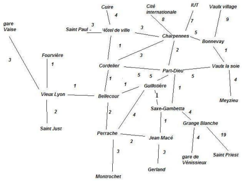
Le type des **problèmes** que l'on peut poser concerne, par exemple, la recherche d'itinéraires optimaux (problème classique du voyageur de commerce : visiter toutes les villes avec un cheminement optimal).

Quelques exemples de graphes



Graphe à partir des entrées de Wikipédia et de la notion « influencé par »

http://griffsgraphs.files.wordpress.com/2012/07/poster-new-final.png



Graphe des transports en commun lyonnais

http://www.digitalarti.com/fr/blog/malo/visualisation_des_liens_amis_facebook_mondiaux

Graphe des liens d'amitié sur Facebook

http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille6/enonces/courseazero/dijkstra.html

Graphe des interactions entre protéines

http://images.math.cnrs.fr/Reseaux.html

Exemples d'applications

- **Réseaux de communication** : routier, ferroviaire, informatique…
  - Réseau routier
    - Sommets : villes
    - Arcs : routes (éventuellement en sens unique)
  - Réseau informatique
    - Sommets : ordinateurs
    - Arcs : connexions (physiques ou distantes)

- **Relations sociales** : familiales, hiérarchiques, amicales…
  - Sommets : individus
  - Arcs : relations entre individus

- **Organisation logistique**
  - Sommets : événements
  - Arcs : un arc entre deux événements s'ils ne peuvent pas avoir lieu en même temps

- …

Remarque

Le **formalisme des graphes** permet d'exprimer de nombreux problèmes souvent de manière simple mais qui peuvent être difficiles à résoudre.

Les **objectifs de ce cours** sont les suivants :

- étant donné un graphe, vérifier s'il possède certaines propriétés ;
- étant donné un graphe, déterminer une sous-partie possédant certaines propriétés ;
- appliquer des algorithmes connus pour traiter des problèmes classiques.

Plan du cours

Graphes orientés

Définition

Un **graphe orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- S est un ensemble fini d'éléments appelés **sommets** ;
  - $|S| = n$ est l'**ordre** du graphe
- A est un ensemble fini de couples de sommets appelés **arcs** et on a $A \subseteq S \times S$.
  - $|A| = m$ est la **taille** du graphe

Un arc est noté (x, y) ou $x \to y$.

Définitions

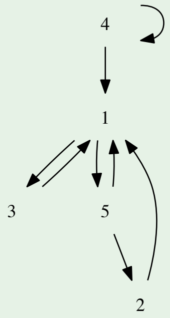
Si $a = (s_1, s_2) \in A$ est un arc de G, les sommets s_1 et s_2 sont les **extrémités** de a :

- s_1 est le **début** (ou l'**origine**) de a ;
- s_2 est la **fin** (ou l'**extrémité finale**) de a.

Si les deux extrémités d'un arc sont égales, l'arc est une **boucle**.

Graphes orientés

Exemple



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $A = \{(1, 3), (1, 5), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (4, 4), (5, 1), (5, 2)\}$.
- Le sommet 1 est l'**origine** de l'arc $(1, 3)$.
- Le sommet 3 est la **destination** de l'arc $(1, 3)$.
- L'arc $(4, 4)$ est une **boucle**.

Graphes non orientés

Définition

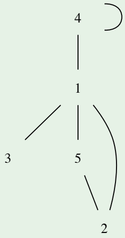
Un **graphe non orienté** est un couple $G = (S, A)$ où :

- S est un ensemble fini d'éléments appelés **sommets** ;
- A est un ensemble fini de couples de sommets appelés **arêtes**.

Une arête est notée $\{x, y\}$.

Graphes non orientés

Exemple



- $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- $A = \{\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 1\}, \{4, 1\}, \{4, 4\}, \{5, 2\}\}$.

Remarque

Soit un graphe orienté $G = (S, A)$.
Son **graphe non orienté associé** est le graphe (non orienté) $G' = (S, A')$ ayant le même ensemble de sommets S et dont l'ensemble d'arêtes vérifie :

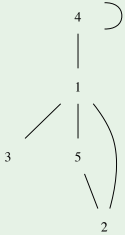
$$\{x, y\} \in A' \Leftrightarrow (x, y) \in A \text{ ou } (y, x) \in A$$

Sommets adjacents et voisins – graphes non orientés

Définition

Soit $\{s, t\}$ une arête d'un graphe G. On dit que les sommets s et t sont **adjacents** ou que s est un **voisin** de t.

Exemple



- Les sommets 1 et 3 sont **adjacents**.
- Le sommet 5 est un **voisin** du sommet 1.

Prédécesseurs et successeurs – graphes orientés

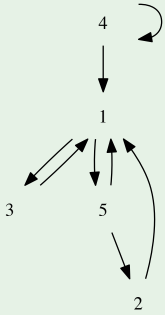
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- L'**ensemble des successeurs** du sommet s est : $\Gamma^+(s) = \{t \in S | (s, t) \in A\}$.
- L'**ensemble des prédécesseurs** du sommet s est : $\Gamma^-(s) = \{r \in S | (r, s) \in A\}$.
- L'**ensemble des voisins** du sommet s est : $\Gamma(s) = \Gamma^+(s) \cup \Gamma^-(s)$.

Prédécesseurs et successeurs – graphes orientés

Exemple



- L'**ensemble des successeurs** du sommet 1 est : $\Gamma^+(1) = \{3, 5\}$.
- L'**ensemble des prédécesseurs** du sommet 1 est : $\Gamma^-(1) = \{2, 3, 4, 5\}$.

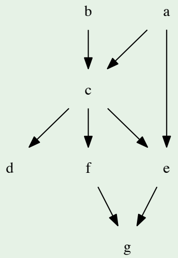
Sommets source et puits

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- Une **source** de G est un sommet n'ayant aucun prédécesseur. L'ensemble des sources de G est noté $sources(G) = \{s \in S | d^{-}(s) = 0\}$.
- Un **puits** de G est un sommet n'ayant aucun successeur. L'ensemble des puits de G est noté $puits(G) = \{s \in S | d^{+}(s) = 0\}$.

Exemple



- sources(G) = {a, b}
- puits(G) = {d, g}

Propriétés

Propriété

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- G est sans circuit ssi G^{-1} est sans circuit.
- Les sources (respectivement les puits) de G sont les puits (respectivement les sources) de G^{-1}.

Propriété

Tout graphe sans circuit possède au moins une source et un puits.

Preuve

Considérons un chemin c de G qui soit maximal au sens suivant : $c = [x_1, \ldots, x_k]$ *et il n'existe pas de sommet y de G tel que* $[y, x_1, \ldots, x_k]$ *ou* $[x_1, \ldots, x_k, y]$ *soient des chemins de G*.
Un tel chemin c existe puisque G est sans circuit.
Cela signifie que x_1 est une source de G et x_k est un puits de G.

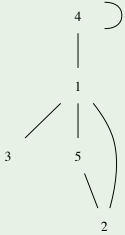
Degré des sommets – graphes non orientés

Définitions

Soit G un graphe non orienté.
Le **degré** d'un sommet s est noté $d(s)$ et correspond au nombre d'arêtes dont l'extrémité est s (en comptant 2 fois les boucles).

$d(s)$ correspond au nombre de voisins de s.

Exemple



- $d(1) = 4$.
- $d(4) = 3$.

Degrés des sommets – graphes orientés

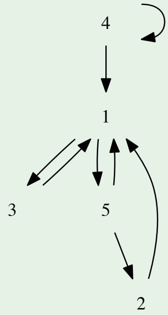
Définitions

Soit G un graphe orienté.

- Le **degré entrant** d'un sommet s est noté $d^-(s)$ et correspond au nombre d'arcs dont l'extrémité finale est s, c'est-à-dire au nombre de prédécesseurs de s : $d^-(s) = |\Gamma^-(s)|$.
- Le **degré sortant** d'un sommet s est noté $d^+(s)$ et correspond au nombre d'arcs dont l'origine est s, c'est-à-dire au nombre de successeurs de s : $d^+(s) = |\Gamma^+(s)|$.
- Le **degré total** d'un sommet s est noté $d(s)$ et correspond au nombre d'arcs dont l'origine ou l'extrémité finale est s, (en comptant deux fois les boucles) : $d(s) = d^-(s) + d^+(s)$.

Degrés des sommets – graphes orientés

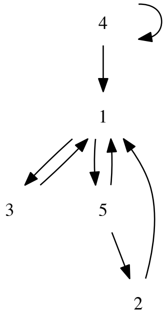
Exemple



- $d^-(1) = 4$ $\quad d^+(1) = 2$ $\quad d(1) = 6$
- $d^-(4) = 1$ $\quad d^+(4) = 2$ $\quad d(4) = 3$

Représentation sagittale

La **représentation sagittale** d'un graphe est une représentation sous forme de dessin. Cette représentation n'est pas unique.



Comment représenter un graphe pour coder efficacement un algorithme ? Le choix dépend de l'algorithme !

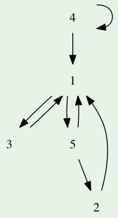
Représentation par matrice d'adjacence

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont on a numéroté les sommets de 1 à n. La **matrice d'adjacence** de G est la matrice $M = (m_{ij})$, de taille $n \times n$, avec

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ (i, j) \in A, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Exemple



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

Une définition similaire s'applique aux graphes non orientés.

Représentation par matrice d'adjacence

Avantages

- Facile à utiliser et à construire ;
- Accès rapide à une arête (ou un arc) particulière (temps constant).

Inconvénients

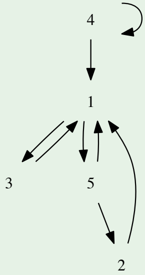
- Occupation de n^2 cases mémoire quel que soit le nombre d'arêtes (ou d'arcs) du graphe.

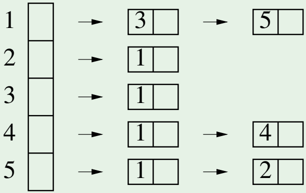
Représentation par liste des successeurs

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté dont on a numéroté les sommets de 1 à n. La **liste des successeurs** de G est la liste des *successeurs* (respectivement *voisins*, pour les graphes non orientés) de chaque sommet et est donnée sous la forme d'une liste chaînée.

Exemple





Liste des successeurs

Représentation par liste des successeurs

Avantages

- Occupation minimale de la mémoire : codage uniquement des arêtes (ou arcs) présentes dans le graphe ;
- Accès rapide au successeur d'un sommet.

Inconvénients

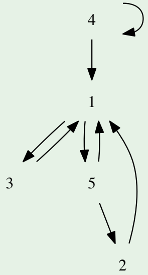
- Plus complexe à mettre en œuvre que la matrice d'adjacence ;
- Accès plus long aux prédécesseurs d'un sommet, par exemple.

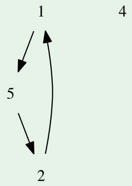
Sous-graphe

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non). Un **sous-graphe** de G est un graphe $G' = (S', A')$ tel que $S' \subset S$ et $A' \subset A$.

Exemple





Sous-graphe

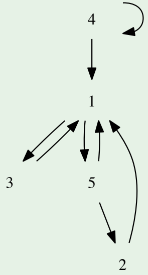
Sous-graphe induit

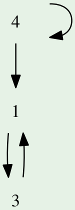
Définition

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe $G = (S, A)$ est un **sous-graphe induit** par S' si A' est formé de tous les arcs (ou de toutes les arêtes) de G ayant leurs extrémités dans S' :

$$\forall x, y \in S', (x, y) \in A' \Leftrightarrow (x, y) \in A.$$

Exemple





Sous-graphe induit par
$S' = \{1, 3, 4\}$

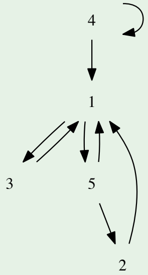
Graphe partiel

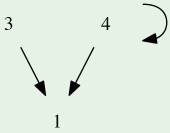
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe et $A' \subset A$ un ensemble d'arcs ou d'arêtes. Un sous-graphe $G' = (S', A')$ est un **graphe partiel** induit par A' si

$$x \in S' \Leftrightarrow \{\exists y | (x, y) \in A' \text{ ou } (y, x) \in A'\}.$$

Exemple





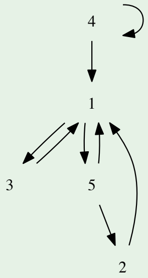
Graphe partiel induit par $A' = \{(3, 1), (4, 1), (4, 4)\}$

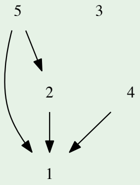
Sous-graphe couvrant

Définition

Un sous-graphe $G' = (S', A')$ d'un graphe $G = (S, A)$ est un **sous-graphe couvrant** s'il contient tous les sommets de S : $S' = S$.

Exemple





Sous-graphe couvrant

Isomorphisme de graphes

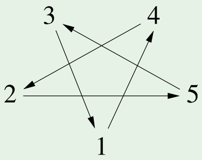
Définition

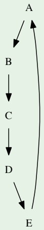
Deux graphes orientés $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ sont **isomorphes** s'il existe une application bijective $f : S \to S'$ telle que

$$\forall x, y \in S, (x, y) \in A \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in A'.$$

- L'application f est alors un **isomorphisme** de graphes orientés.
- Une définition similaire s'applique aux graphes non orientés.

Exemple





L'application f est un isomorphisme entre les deux graphes :

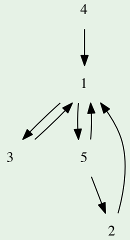
$$f = \begin{cases} 1 \mapsto A \\ 2 \mapsto C \\ 3 \mapsto E \\ 4 \mapsto B \\ 5 \mapsto D \end{cases}$$

Graphe simple

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe (orienté ou non). G est un **graphe simple** s'il ne comporte aucune boucle.

Exemple



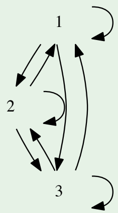
Dans un graphe simple, on a au plus un arc (ou une arête) entre 2 sommets.

Graphe complet

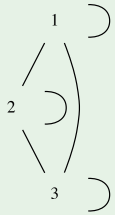
Définition

- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. G est un **graphe complet** si $A = S \times S$.
- Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. G est un **graphe complet** si toute paire de sommets apparaît dans A.

Exemples



Graphe complet orienté



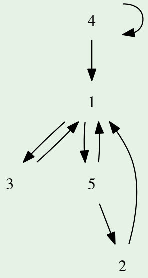
Graphe complet non-orienté

Graphe complémentaire

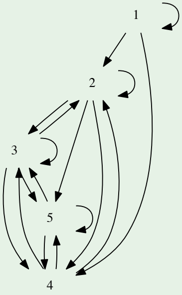
Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
Le **graphe complémentaire** $\bar{G}$ de G a les mêmes sommets que G mais deux sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas dans G.

Exemple



G



$\bar{G}$

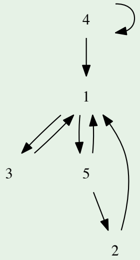
Graphe réciproque et graphe symétrique

Définition

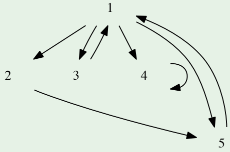
Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté.

- Le **graphe réciproque** de G est le graphe $G^{-1} = (S, A^{-1})$ où $A^{-1} = \{(x, y) \in S \times S | (y, x) \in A\}$;
- Le **graphe symétrique** de G est le graphe $G_S = (S, A \cup A^{-1})$.

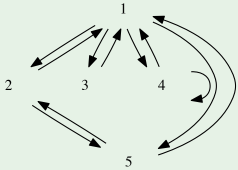
Exemple



G



G^{-1}



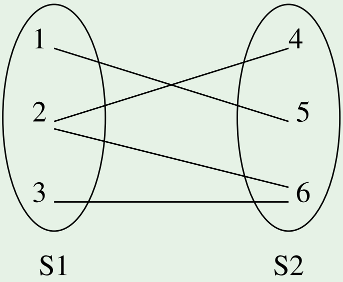
G_S

Graphe biparti

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe.
G est un **graphe biparti** si S peut être divisé en deux ensembles disjoints S_1 et S_2 afin que chaque arête relie un sommet de S_1 et un sommet de S_2 :
$A \subset \{\{s_1, s_2\}, s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$.

Exemple



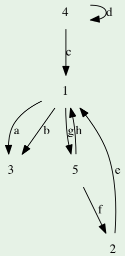
Multigraphe

Définition

Un **multigraphe orienté** $G = (S, A, \alpha, \omega)$ est composé :

- d'un ensemble S dont les éléments sont les **sommets** du graphe ;
- d'un ensemble A dont les éléments sont les **arcs** du graphe ;
- de deux fonctions $\alpha : A \to S$ et $\omega : A \to S$ qui associent à chaque arc $a \in A$ son **origine** $\alpha(a)$ et son **extrémité finale** $\omega(a)$.

Exemple



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$$\alpha = \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 4 \\ d \mapsto 4 \\ \dots \end{cases} \qquad \omega = \begin{cases} a \mapsto 3 \\ b \mapsto 3 \\ c \mapsto 1 \\ d \mapsto 4 \\ \dots \end{cases}$$

Plan du cours

Graphes orientés : chemins et circuits

Définitions : chemin

- Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté. Un **chemin** C est une suite $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ de sommets de G tel que deux sommets consécutifs quelconques x_i et x_{i+1} sont reliés par un arc de G :

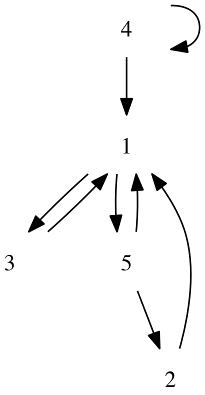
$$\forall i, 1 \leq i \leq k-1, (x_i, x_{i+1}) \in A.$$

- La **longueur** d'un chemin est égale au nombre de sommets moins un.
- Un chemin est **simple** s'il ne passe pas deux fois par le même arc.
- Un chemin est **élémentaire** s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

Définitions : circuit

- On appelle **circuit** un chemin $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ de longueur non nulle et dont l'origine et l'extrémité sont identiques : $x_1 = x_k$.
- Un **circuit élémentaire** est un circuit qui ne possède qu'une seule répétition, le sommet origine et le sommet extrémité.

Exemple



- $[3, 1, 5]$ est un chemin de longueur 2, simple et élémentaire
- $[1, 3, 4]$ n'est pas un chemin
- $[4, 4]$ est un chemin et un circuit
- $[1, 5, 2, 1, 3]$ est un chemin simple
- $[1, 5, 2, 1]$ est un circuit simple et élémentaire

Graphes non orientés : chaînes et cycles

Définitions : chaîne

- Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. Une **chaîne** C est une suite $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ de sommets de G tel que deux sommets consécutifs quelconques x_i et x_{i+1} sont reliés par une arête de G :

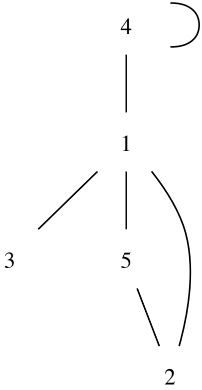
$$\forall i, 1 \leq i \leq k-1, \{x_i, x_{i+1}\} \in A.$$

- La **longueur** d'une chaîne est égale au nombre de sommets moins un.
- Une chaîne est **simple** si elle ne passe pas deux fois par la même arête.
- Une chaîne est **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

Définitions : cycle

- On appelle **cycle** une chaîne $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ de longueur non nulle et dont l'origine et l'extrémité sont identiques : $x_1 = x_k$.
- Un **cycle élémentaire** est un cycle qui ne possède qu'une seule répétition, le sommet origine et le sommet extrémité.

Exemple



- $[3, 1, 5]$ est une chaîne de longueur 2, simple et élémentaire
- $[4, 4]$ est une chaîne et un cycle
- $[1, 5, 2, 1, 3]$ est une chaîne simple
- $[1, 5, 2, 1]$ est un cycle simple et élémentaire

Fermeture transitive d'un graphe

Définitions

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

- La **fermeture transitive** de G est un graphe $G^+ = (S, A^+)$ et elle vérifie la propriété suivante :

$$(x, y) \in A^+ \Leftrightarrow \exists [x, y] \in G.$$

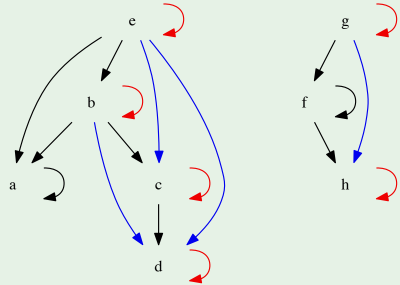
- La **fermeture réflexo-transitive** de G est un graphe $G^* = (S, A^*)$ et elle vérifie la propriété suivante :

$$(x, y) \in A^* \Leftrightarrow x = y \text{ ou } \exists [x, y] \in G.$$

La fermeture réflexo-transitive correspond ainsi à la fermeture transitive à laquelle on ajoute des boucles sur chacun des sommets qui n'en ont pas déjà (pour vérifier la propriété de réflexivité).

Calcul de la fermeture transitive

Exemple de fermeture réflexo-transitive



- Arcs en bleu : ajoutés par transitivité
- Arcs en rouge : ajoutés par réflexivité

Calcul de G^+ à partir de G

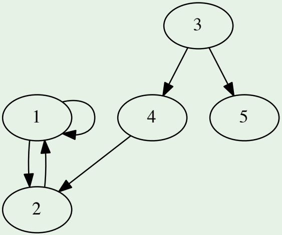
Cela consiste à ajouter les arcs (x, y) pour tout y tel que $[x, y]$ est dans G, c'est-à-dire pour tout sommet y descendant de x. Ainsi, les successeurs de x dans G^+ sont les descendants de x dans G.
On peut alors utiliser une procédure de calcul des descendants (par un parcours en largeur, par exemple).

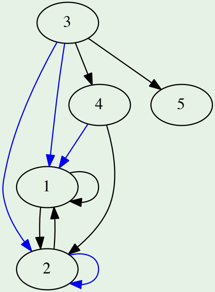
Fermeture transitive et matrice booléenne

Théorème

Notons M_0 la matrice booléenne de G et θ_i l'opérateur qui consiste à ajouter, au sens de l'opération booléenne, la i^e ligne de M_{i-1} à toute ligne de M_{i-1} possédant un 1 dans la colonne i ; la matrice résultat se note $M_i = \theta_i(M_{i-1})$. La matrice M_n donne alors la matrice de la fermeture transitive de G.

Exemple





Fermeture transitive correspondant à M_5

Exemple - suite

$$M = M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \Theta_1(M_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \Theta_2(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \Theta_3(M_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \Theta_4(M_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \Theta_5(M_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$