2.1. **Droites du plan.**

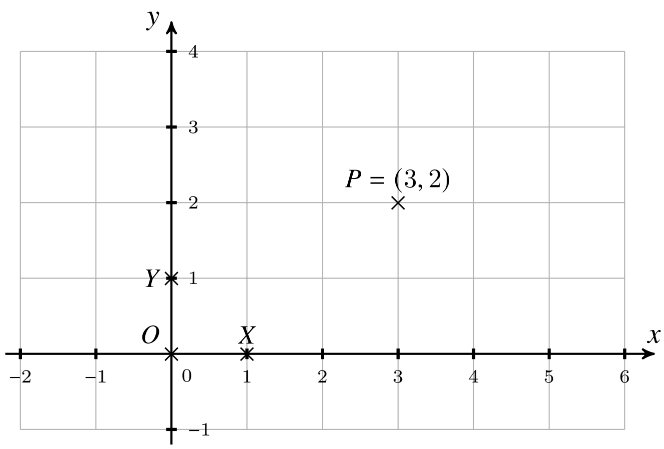
2.1.1. *Équations de droites.*

Rappelons que l'on note $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des couples (x, y) avec x et y des nombres réels, i.e.

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} .$$

DÉFINITION 2.1 *(Plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$).* On appelle ***plan affine***, que l'on note $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, un ensemble qui est identifié à $\mathbb{R}^2$. Un élément P de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2$ est appelé ***un point*** de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ et est noté $P = (x_P, y_P)$, où x_P et y_P sont les deux coordonnées du point P.
Plus précisément, on a trois points distingués $O = (0, 0)$, $X = (1, 0)$ et $Y = (0, 1)$, que l'on prendra non alignés, qui permettent de définir le système de coordonnées dans lequel le point P a les coordonnées a et b. Le triplet (O, X, Y) formés avec les trois points ordonnés, sera appelé un repère du plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, que l'on notera Oxy.

EXEMPLE 2.2 – (Représentation du plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ muni de son repère Oxy)



DÉFINITION 2.3 *(Droite du plan).* Une ***droite*** du plan affine muni du repère Oxy est un sous-ensemble $\mathcal{D}$ pour lequel il existe trois réels α, β et γ tels que

(1) $\mathcal{D} = \{P = (x_P, y_P) \mid \alpha x_P + \beta y_P + \gamma = 0\}$,

(2) α et β ne sont pas simultanément nuls.

On dit que $\mathcal{D}$ est la droite d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.

REMARQUE 2.4 – Une équation cartésienne d'une droite dépend du repère Oxy. Cependant, nous n'insisterons pas sur ce point pendant ce cours.

REMARQUE 2.5 – Soient $\mathcal{D}$ un droite du plan affine d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et soit P un point du plan affine de coordonnées (x_P, y_P) ; Alors P est un point de la droite $\mathcal{D}$ si, et seulement si $\alpha x_P + \beta y_P + \gamma = 0$.

EXEMPLE 2.6 – On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$.

— Le point P_1 de coordonnées $(5, -5)$ est un point de la droite $\mathcal{D}$ car

$$3 \times 5 + 2 \times (-5) - 5 = 15 - 10 - 5 = 0 .$$

— Le point P_2 de coordonnées $(\frac{1}{3}, 2)$ est un point de la droite $\mathscr{D}$ car
$$3 \times \frac{1}{3} + 2 \times 2 - 5 = 1 + 4 - 5 = 0\ .$$

— Le point P_3 de coordonnées $(1, 2)$ n'est pas un point de la droite $\mathscr{D}$ car
$$3 \times 1 + 2 \times 2 - 5 = 3 + 4 - 5 = 2 \neq 0\ .$$

PROPOSITION 2.7. *Toutes les équations de la forme $\lambda\alpha x + \lambda\beta y + \lambda\gamma = 0$, avec $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, définissent la même droite.*

Démonstration. Soient α, β, γ et λ des nombres réels avec α et β non simultanément nuls et $\lambda \neq 0$. Notons $\mathscr{D}$ la droite définie par l'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ et $\mathscr{D}'$, la droite d'équation cartésienne $\lambda\alpha x + \lambda\beta y + \lambda\gamma = 0$. Montrons que $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$ par double inclusion.

On commence par montrer que $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}'$. Soit P un point de la droite $\mathscr{D}$ de coordonnées (x_P, y_P) : comme c'est un point de la droite $\mathscr{D}$, ses coordonnées (x_P, y_P) satisfont l'identité $\alpha x_P + \beta y_P + \gamma = 0$ et donc, en multipliant cette identité par λ, on a que $\lambda\alpha x_P + \lambda\beta y_P + \lambda\gamma = 0$, donc P est un point de la droite $\mathscr{D}'$. On a donc montré que $\mathscr{D}$ est un sous-ensemble de $\mathscr{D}'$, autrement dit, on a $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}'$.

Soit maintenant Q, un point de la droite $\mathscr{D}'$, de coordonnées (x_Q, y_Q), qui satisfont donc l'identité $\lambda\alpha x_Q + \lambda\beta y_Q + \lambda\gamma = 0$. Comme $\lambda \neq 0$, on peut donc diviser par λ cette égalité, ce qui donne $\alpha x_P + \beta y_P + \gamma = 0$. Ainsi, on a montré que le point Q est un point de la droite $\mathscr{D}$. Finalement, on a donc que $\mathscr{D}'$ est un sous-ensemble de $\mathscr{D}$, autrement dit, on a $\mathscr{D}' \subseteq \mathscr{D}$.

On a donc montré que $\mathscr{D} = \mathscr{D}'$, ce qu'il fallait démontrer. □

2.1.2. *Intersection de droites.* Fixons à présent deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, d'équations cartésiennes respectives
$$\mathscr{D} \colon ax + by + c = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}' \colon \alpha x + \beta y + \gamma = 0\ .$$

On cherche les points P qui appartiennent aux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, c'est-à-dire les points P dont les coordonnées (x_P, y_P) sont solutions du système suivant :
$$(S) \colon \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} .$$

PROPOSITION 2.8. *Soient a, b, c, α, β et γ, six nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. Considérons le système suivant*
$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} ;$$

— *si $a\beta - b\alpha \neq 0$, le système (S) admet une unique solution ;*

— *si $a\beta - b\alpha = 0$, le système (S) admet ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.*

Démonstration. On ne démontrera que le premier point, la seconde partie de la proposition se démontrant grâce à un raisonnement similaire. Considérons le système (S)
$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} ;$$

avec a, b, c, α, β et γ, six nombres réels avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et $a\beta - b\alpha \neq 0$. Commençons par supposer que $a \neq 0$. Soient x et y deux nombres réels, on a l'équivalence

$$(S)\left\{\begin{array}{ll} ax + by + c = 0 & (L_1) \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 & (L_2) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} ax + by + c = 0 & (L_1) \\ (a\beta - b\alpha)y + a\gamma - c\alpha = 0 & (aL_2 - \alpha L_1) \end{array}\right. .$$

Comme $a\beta - b\alpha \neq 0$, on a donc

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ y = \frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax = -c - b\frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)} \\ y = \frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax = a\frac{b\gamma - c\beta}{(a\beta - b\alpha)} \\ y = \frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)} \end{array}\right. ;$$

comme on a fait l'hypothèse que $a \neq 0$, on a alors

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{b\gamma - c\beta}{(a\beta - b\alpha)} \\ y = \frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)} \end{array}\right. ,$$

donc (S) admet une unique solution $(\frac{b\gamma - c\beta}{(a\beta - b\alpha)}, \frac{c\alpha - a\gamma}{(a\beta - b\alpha)})$.

Supposons à présent que $a = 0$. Soient x et y deux nombres réels. Comme a et b ne sont pas simultanément nuls, on a donc que $b \neq 0$ et comme $a\beta - b\alpha \neq 0$, alors $\alpha \neq 0$. On a alors

$$(S)\left\{\begin{array}{l} by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{c}{b} \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{c}{b} \\ \alpha x = \beta\frac{c}{b} - \gamma \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = -\frac{c}{b} \\ x = \frac{\beta c - b\gamma}{\alpha b} \end{array}\right. .$$

donc le système (S) admet une unique solution $(-\frac{c}{b}, \frac{\beta c - b\gamma}{\alpha b})$. □

Notation 2.9 – Déterminant du système – Soient a, b, c, α, β et γ, six nombres réels. On considère le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{l} ax + by + c = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{array}\right. ;$$

on pourra utiliser la notation suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} := a\beta - \alpha b .$$

Cette quantité associée au système (S) est appelé *déterminant du système.* Ainsi, d'après la proposition précédente, le système (S) admet une unique solution si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0 .$$

D'après la proposition 2.8, trois cas s'offrent à nous pour les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$:

— ou bien le système (S) admet une unique solution : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ s'intersectent donc en un unique point ;

— ou bien le système n'admet aucune solution : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ n'ont aucun point commun, on dira alors qu'elles sont *parallèles* ;

— ou bien le système admet une infinité de solutions : les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont alors les mêmes droites (on dira également qu'elles sont confondues).

Exemple 2.10 – On considère le système

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 4x + 4y - 4 = 0 \end{array}\right. ;$$

On a
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 3 \times 4 = -4 \neq 0$$
donc le système admet une unique solution. Soient x et y deux nombres réels. On a
$$\begin{aligned}(S)\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ 4x+4y-4=0 & (L_2)\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ -2y+4=0 & (L_2-2L_1)\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4=0 \\ y=2\end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2\end{array}\right.\end{aligned}$$
donc l'unique solution du système (S) est le couple $(-1, 2)$.

Exemple 2.11 – On considère le système
$$(S)\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4=0 \\ 4x+6y-4=0\end{array}\right. \quad ;$$
On a
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0 \ ,$$
donc le système (S) admet une infinité de solutions ou aucune solution. Soient x et y deux nombres réels ; on a
$$(S)\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ 4x+6y-4=0 & (L_2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ 4=0 & (L_2-2L_1)\end{array}\right. \quad ;$$
ainsi, comme la seconde ligne du second système n'est jamais vraie, le système (S) n'admet aucune solution.

Exemple 2.12 – On considère le système
$$(S)\left\{\begin{array}{l} 2x+3y-4=0 \\ 4x+6y-8=0\end{array}\right. \quad ;$$
On a
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0 \ ,$$
donc le système (S) admet une infinité de solutions ou aucune solution. Soient x et y deux nombres réels ; on a
$$(S)\left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ 4x+6y-8=0 & (L_2)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x+3y-4=0 & (L_1) \\ 0=0 & (L_2-2L_1)\end{array}\right. \quad ,$$
finalement, on a que
$$(S) \Leftrightarrow 2x+3y-4=0 \Leftrightarrow 3y = 4-2x \Leftrightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x \ .$$
Ainsi, le système (S) admet une infinité de solutions : l'ensemble des solutions de (S) est
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right\} \ .$$

2.1.3. *Vecteur directeur et équation paramétrique de droite.* On a vu une première caractérisation des droite grâce aux équations cartésiennes de droites. On peut également avoir un point de vue "dynamique" sur ces ensembles de points du plan comme nous allons le voir ci-dessous.

PROPOSITION 2.13. *Étant donnés deux points distincts $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, la droite (AB) est décrite par une représentation paramétrique*

$$\begin{cases} x(t) = (x_B - x_A)t + x_A \\ y(t) = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Réciproquement, toute représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

avec α et β non simultanément nuls, décrit une droite $\mathscr{D}$ passant par le point de coordonnées (a, b), qui correspond à l'ensemble de points

$$\mathscr{D} = \left\{(\alpha t + a, \beta t + b) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\right\} .$$

Démonstration. Admise. □

REMARQUE 2.14 – La représentation paramétrique d'une droite n'est pas unique : elle dépend au moins, du choix initial des deux points A et B.

EXEMPLE 2.15 – Soient $A = (2, 1)$ et $B = (1, 2)$, deux points du plan affine. Une équation paramétrique de la droite (AB) est donnée par

$$(AB) : \begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = -t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

REMARQUE 2.16 – Cette caractérisation des droites du plan est particulièrement adapté à la mécanique. Ainsi, vous pouvez penser que le paramètre t joue le rôle du temps et que les quantités $x(t)$ et $y(t)$ sont les coordonnées d'un point $M_t = (x(t), y(t))$ qui se déplace de manière rectiligne à vitesse constante.

DÉFINITION 2.17 *(Vecteur directeur).* Considérons la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique

$$\mathscr{D} : \begin{cases} x(t) = \alpha t + x_P \\ y(t) = \beta t + y_P \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

On dit que $\mathscr{D}$ est la droite passant par $P = (x_P, y_P)$ et *de vecteur directeur $v = (\alpha, \beta)$.*

ATTENTION. Ici, un vecteur v est un élément de $\mathbb{R}^2$, mais *on ne fait pas l'identification avec le plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$.* Un vecteur est différent d'un point du plan !

EXEMPLE 2.18 – On reprend ce qui a été vu en Exemple 2.15. Soient $A = (2, 1)$ et $B = (1, 2)$, deux points du plan affine. La droite (AB) a pour équation paramétrique

$$(AB) : \begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = -t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} .$$

Elle a notamment pour vecteur directeur, le vecteur $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$. On illustre cela en Figure 1.

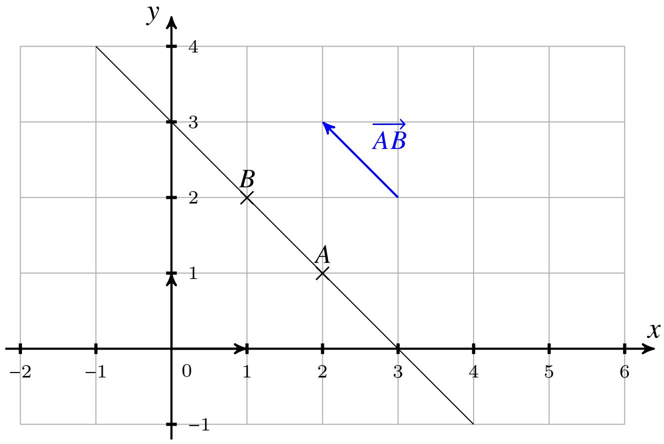


Figure 1. Illustration de Exemple 2.18

Proposition 2.19. *Si $\mathcal{D}$ est une droite d'équation cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, alors $(-\beta, \alpha)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. Réciproquement, si $v = (\alpha, \beta)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$, alors il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $-\beta x + \alpha y + \gamma = 0$ est une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.*

Démonstration. Admise. □

Résumé – La droite passant par P et de vecteur directeur $v \neq 0$

Définition	Équation cartésienne	Équation paramétrée
$\mathcal{D}$ est la droite passant par $P = (x_P, y_P)$ et de vecteur directeur $v = (\alpha, \beta)$	$-\beta(x - x_P) + \alpha(y - y_P) = 0$ c'est-à-dire $-\beta x + \alpha y + (\beta x_P - \alpha y_P) = 0$	$\begin{cases} x(t) = x_P + \alpha t \\ y(t) = y_P + \alpha t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$

Remarque 2.20 – Vers une généralisation – Comme on l'a vu dans cette section, une droite, qui est l'un des objets les plus simple de la géométrie plane, peut être caractérisée par une équation du type

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0\ .$$

On peut se poser la question de la généralisation d'un tel type d'objet dans des dimensions plus grande. Ainsi, certains d'entre vous ont déjà vu qu'une équation de la forme

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

décrit un plan dans l'espace à trois dimensions. À l'instar de ce que l'on a fait dans la proposition 2.8, on peut se demander quelle est l'intersection de deux plans, ou encore l'intersection de trois plans en résolvant un système d'équation de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ a_{31}x & + & a_{32}y & + & a_{33}z & = & b_3 \end{cases}\ .$$

C'est ce que nous allons voir dans la suite avec la mise en place d'un algorithme de résolution des systèmes linéaires.

2.2. **Résolution de systèmes : l'algorithme du pivot de Gauss.**

Définition 2.21. On appelle *équation linéaire* en les variables (ou *inconnues*) $x_1, \dots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p = b, \tag{2}$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.

Remarque 2.22 –

— Il importe d'insister ici sur le fait que ces équations linéaires sont *implicites*, c'est-à-dire qu'elles décrivent des relations entre les variables, mais ne donnent pas directement les valeurs que peuvent prendre les variables.

— *Résoudre* une équation signifie donc la rendre *explicite*, c'est-à-dire rendre plus apparentes les valeurs que les variables peuvent prendre.

Définition 2.23. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Un *système de n équations linéaires à p inconnues* est une liste de n équations linéaires.

Exemple 2.24 – Le système suivant a 2 équations et 3 inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

La forme générale d'un système linéaire de n équations à p inconnues est la suivante :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 & (\leftarrow \text{équation } 1) \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 & (\leftarrow \text{équation } 2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i & (\leftarrow \text{équation } i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n & (\leftarrow \text{équation } n) \end{array}\right.$$

Les nombres a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, sont les *coefficients* du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1, \dots, n$, constituent le *second membre* du système et sont également des données.

Il convient de bien observer comment on a rangé le système en lignes (une ligne par équation) numérotées de 1 à n par l'indice i, et en colonnes : les termes correspondant à une même inconnue x_j sont alignés verticalement les uns sous les autres. L'indice j varie de 1 à p. Il y a donc p colonnes à gauche des signes d'égalité, plus une colonne supplémentaire à droite pour le second membre. La notation avec double indice a_{ij} correspond à ce rangement : le premier indice (ici i) est le numéro de *ligne* et le second indice (ici j) est le numéro de *colonne*. Il est extrêmement important de toujours respecter cette convention.

Dans l'exemple 2.24, on a $n = 2$ (nombre d'équations = nombre de lignes), $p = 3$ (nombre d'inconnues = nombre de colonnes à gauche du signe =) et $a_{11} = 1$, $a_{12} = -3$, $a_{13} = 1$, $a_{21} = -2$, $a_{22} = 4$, $a_{23} = -3$, $b_1 = 1$ et $b_2 = 9$.

Définition 2.25. Une *solution* du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'*ensemble des solutions du système* est l'ensemble de tous ces p-uplets.

La preuve de la proposition 2.8 nous donne une méthode de résolution des systèmes à deux équations avec deux inconnues : la généralisation de cette méthode pour résoudre des systèmes à m équations et p inconnues s'appelle *l'algorithme du pivot de Gauss.* Commençons par un exemple d'application de cet algorithme avant de le formuler dans le cas général.

2.2.1. *Un premier exemple.* On cherche à résoudre le système d'équations suivant :

$$(S): \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 3 \end{array} \right. .$$

Commençons par analyser ce système.

1. Il y a trois inconnues notées x, y et z : c'est sous-entendu par la notation. Une solution de ce système est donc un triplet (x_0, y_0, z_0) d'éléments de $\mathbb{K}$. Ici, comme les coefficients sont des entiers, on pourra chercher les solutions dans le corps des nombres réels $\mathbb{R}$: une solution est donc un élément de $\mathbb{R}^3$.
2. Il faut d'abord identifier que l'on est bien en présence d'un système d'équations linéaires, c'est-à-dire d'équations du premier degré en chacune des inconnues : il ne doit pas apparaître de termes du type x^2 ou y^3, ou encore $\sqrt{z}$. Par exemple, le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & 3y & = & 7 \\ & & y^4 & = & 2 \end{array} \right.$$

n'est pas linéaire. Par contre, notre système (S) est bien linéaire.

Comme le système est bien linéaire, on peut utiliser l'algorithme du pivot de Gauss pour le résoudre, comme nous allons le faire par la suite. Pour commencer, on va stocker l'information de ce système de manière efficace et commode pour les calculs. Comme on a un système linéaire, il suffit de stocker les coefficients dans un tableau, dans le même ordre que l'ordre des inconnues (et en mettant un 0 si une inconnue est absente de l'une ou l'autre des équations). À partir du système (S), on obtient :

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 1 & 2 & 1 & \texttt{\#L1} \\ 2 & -1 & 1 & 2 & \texttt{\#L2} \\ 1 & 3 & 4 & 3 & \texttt{\#L3} \end{array}$$

Un tel tableau de nombres s'appelle *une matrice* (cf. la définition 3.2). Ici, on a une matrice de taille 3×3 (qui comporte 3 lignes et 3 colonnes), augmentée d'une colonne pour le second membre des équations du système.

Faisons à présent tourner notre algorithme sur notre exemple.

1. On commence par choisir un coefficient *non nul* de la matrice : c'est notre premier *pivot*, que l'on va encadrer pour en garder la trace :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \texttt{\#L1} \\ 2 & -1 & 1 & 2 & \texttt{\#L2} \\ 1 & 3 & 4 & 3 & \texttt{\#L3} \end{array}$$

2. On fait des combinaisons linéaires de lignes afin de faire "disparaître", d'annuler les coefficients non nuls de la colonne ou l'on a choisi notre pivot : on remplace ici
   — la deuxième ligne par deux fois la deuxième ligne moins une fois la première ;

— la troisième ligne par la troisième ligne moins la première ligne ;

concrètement, on a donc

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 2 & -1 & 1 & 2 & \#\mathtt{L2} \\ 1 & 3 & 4 & 3 & \#\mathtt{L3} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 2-2\times 1 & -1-2\times 1 & 1-2\times 2 & 2-2\times 1 & \#\mathtt{L2} \leftarrow \#\mathtt{L2} - 2 * \#\mathtt{L1} \\ 1-1\times 1 & 3-1\times 1 & 4-1\times 2 & 3-1\times 1 & \#\mathtt{L3} \leftarrow \#\mathtt{L3} - \#\mathtt{L1} \end{array}$$

ce qui nous donne le nouveau système suivant :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 0 & -3 & -3 & 0 & \#\mathtt{L2} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \#\mathtt{L3} \end{array}$$

En faisant ces opérations sur les lignes, on s'est ramené à un système équivalent au système (S), c'est-à-dire qui possède exactement le même ensemble de solutions. Ainsi un triplet de nombres (x_0, y_0, z_0) est solution de (S) si et seulement s'il est solution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & -3y & - & 3z & = & 0 \\ & & 2y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. .$$

L'algorithme n'est pas terminé : il faut maintenant réitérer ces deux opérations.

1. On choisit un nouveau pivot, donc un nouveau coefficient non nul *sur une ligne n'ayant aucun pivot* ; pendant tout l'algorithme, on ne doit avoir au maximum qu'un pivot par ligne. Par exemple, ici, on peut choisir l'un des -3 de la seconde ligne :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & 0 & \#\mathtt{L2} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \#\mathtt{L3} \end{array}$$

2. On annule les coefficients de la colonne de notre nouveau pivot *se trouvant sur des lignes n'ayant pas de pivot.* Ici, on va donc uniquement travailler sur la troisième ligne :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & 0 & \#\mathtt{L2} \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \#\mathtt{L3} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 2 & 1 & \#\mathtt{L1} \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & 0 & \#\mathtt{L2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 & \#\mathtt{L3} \leftarrow 3 * \#\mathtt{L3} + 2 * \#\mathtt{L2} \end{array}$$

Remarquez qu'à présent, on ne peut plus choisir de pivot : sur la troisième ligne, il ne reste que des 0 dans la matrices (on ne choisit jamais de pivot dans la dernière colonne). Comme on a deux pivots, on dira alors que le système est *de rang* 2.

Comme on ne peut plus choisir de pivot, la première partie de notre algorithme est terminé. Il convient de faire une analyse de ce que l'on a obtenu : on peut à présent savoir si notre système admet une unique solution, une infinité de solution, ou aucune solution. Ici, notre dernière matrice correspond au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ & & -3y & - & 3z & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 6 \end{array}\right. ;$$

ce système n'admet aucune solution car la dernière équation est $6 = 0$, assertions qui est toujours fausse : on a une *incompatibilité des équations du système.*

2.2.2. *L'algorithme.* On considère le système (S) suivant, composé de p équations linéaires à n inconnues $x_1, \dots, x_n$:

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases}$$

On commence par réécrire ce système en une matrice à p lignes et $n+1$ colonnes

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}$$

La dernière colonne, qui contient les termes constants des équations, joue un rôle particulier, donc on la sépare par une barre verticale. Dans le cas où $b_1 = \ldots = b_p = 0$, on parle de *système homogène* (cf. définition 2.39).

L'algorithme du pivot de Gauss se déroule en trois étapes.

§ *Première étape : la descente.* La première étape est l'étape de *descente* qui consiste à transformer la matrice en une matrice *échelonnée en ligne*, afin d'obtenir le rang du système (le nombre de pivots).

Définition 2.26 *(Matrice échelonnée – Matrice échelonnée réduite).* On appelle *matrice échelonnée en ligne* toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ telle que

— si une ligne est nulle, les suivantes le sont aussi ;

— (à partir de la seconde ligne) le premier coefficient non nul de chaque ligne est strictement à droite de celui de la ligne précédente.

De plus, une matrice échelonnée est dite *échelonnée réduite* si

— les pivots valent 1 ;

— les pivots sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Définition 2.27 *(Pivot – Inconnues principales et secondaires).*

— Le premier coefficient non nul de chaque ligne est un *pivot.*

— Les inconnues correspondant aux pivots sont *les inconnues principales* du système.

— Les autres inconnues sont les *inconnues secondaires* ou *paramètres* du système.

Exemple 2.28 – Les matrices

$$\begin{array}{ccccccc|c} \boxed{-2} & 1 & 13 & 7 & -19 & 42 & 99 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-3} & 12 & 0 & 20 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 47 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 4 & 11 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

sont des matrices échelonnée en lignes, dans lesquelles on a encadré les pivots. La seconde matrice correspond au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 4y & + & 11z & + & 4t & = & -2 \\ & & 3y & & & + & t & = & 6 \\ & & & & 3z & + & 2t & = & 1 \end{array}\right.$$

Dans ce système, les variables x, y et z sont les inconnues principales et t est une inconnue secondaire.

Pour passer du système de départ à un système échelonné équivalent (c'est-à-dire ayant exactement le même ensemble de solutions), on peut utiliser trois types d'opérations sur les lignes :

DÉFINITION 2.29 *(Opération élémentaires sur les lignes).* Soit un système linéaire à n lignes et p inconnues. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$. On définit :

- la ***permutation*** des lignes i et j qui correspond à l'échange de la ligne i et de la ligne j ;
- la ***dilatation de la ligne*** i ***de rapport*** $\lambda \neq 0$ qui correspond à la multiplication de la ligne i par $\lambda \neq 0$ que l'on note `#Li` $\leftarrow \lambda *$ `#Li` ;
- la ***transvection entre les lignes*** i ***et*** j ***de rapport*** $\lambda \neq 0$ correspond à l'ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par λ que l'on note `#Li` $\leftarrow$ `#Li` $+ \lambda *$ `#Lj` ;

EXEMPLE 2.30 – Utilisons ces opérations élémentaires pour résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{cccccl} x & +y & +7z & = & -1 & (L_1) \\ 2x & -y & +5z & = & -5 & (L_2) \\ -x & -3y & -9z & = & -5 & (L_3) \end{array}\right.$$

On se ramène à l'écriture matricielle suivante, en choisissant le coefficient en haut à gauche comme premier pivot

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 & \texttt{\#L1} \\ 2 & -1 & 5 & -5 & \texttt{\#L2} \\ -1 & -3 & -9 & -5 & \texttt{\#L3} \end{array}$$

Commençons par l'opération #L2 $\leftarrow$ #L2 $-$ 2#L1 : on soustrait à la deuxième équation deux fois la première équation. On obtient un système équivalent avec une nouvelle deuxième ligne (plus simple) :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 & \\ 0 & -3 & -9 & -3 & \texttt{\#L2}\leftarrow\texttt{\#L2}-2\texttt{\#L1} \\ -1 & -3 & -9 & -5 & \end{array}$$

Puis #L3 $\leftarrow$ #L3 + #L1 :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 & \\ 0 & -3 & -9 & -3 & \\ 0 & -2 & -2 & -6 & \texttt{\#L3}\leftarrow\texttt{\#L3}+\texttt{\#L1} \end{array}$$

On continue pour faire apparaître un coefficient 1 en tête de la deuxième ligne ; pour cela on divise la ligne #L2 par -3 et on prend le 1 de la seconde ligne comme nouveau pivot :

$$\begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 & \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & \texttt{\#L2}\leftarrow -\frac{1}{3}\texttt{\#L2} \\ 0 & -2 & -2 & -6 & \end{array} . \quad \begin{array}{ccc|cl} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 & \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 & \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -4 & \texttt{\#L3}\leftarrow\texttt{\#L3}+2\texttt{\#L2} \end{array}$$

On remarque qu'ici, nous sommes arrivés à un système échelonné.

§ *Une petite pause : on analyse notre système échelonné.* On utilise le théorème suivant afin d'analyser la forme de l'ensemble des solutions de notre système échelonné.

Théorème 2.31 – Théorème fondamental

Soit (S) un système de p équations à n inconnues de rang r. Les cas suivants se présentent :

1. *Si $r = n = p$, le système admet un unique solution : on a ce qu'on appelle* un système de Cramer *;*
2. *si $r = n < p$, alors on a $p - r$ conditions de compatibilité à étudier, donc aucune ou une unique solution ;*
3. *si $r = p < n$, alors on a $r = p$ inconnues principales, on a donc une infinité de solutions paramétrées par les $n - r$ inconnues libres.*
4. *si $r < p$ et $r < n$, alors on a $p - r$ conditions de compatibilité, on a donc une unique solution ou aucune solution.*

Exemple 2.32 – Retour à l'exemple 2.30 : un systeme de Cramer – Notre système échelonnée

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -4 \end{array}$$

possède 3 équations avec 3 inconnues et 3 pivots : c'est donc un système de Cramer, il admet une unique solution.

Exemple 2.33 – Considérons le système

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}$$

possède 3 équations avec 3 inconnues et 2 pivots : on est dans le cas 4. La condition de compatibilité à étudier est la dernière ligne du système. Comme $0 = -4$ est toujours fausse, ce système n'a aucune solution.

Exemple 2.34 – Considérons le système

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

qui est équivalent au système

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \end{array}$$

et qui possède 2 équations avec 3 inconnues et 2 pivots : on est dans le cas 3. On a un système qui possède une infinité de solutions, paramétrées par l'inconnue libre z.

§ *Seconde étape : la remontée.* Dans le cas où l'on a une unique solution ou une infinité de solutions, il nous reste une étape à faire afin de déterminer ou bien cette unique solution ou bien sur la description de l'ensemble des définitions. On réutilise nos pivots pour se ramener à un système échelonné réduit.

Exemple 2.35 – Retour à l'exemple 2.30 – On reprend notre calcul là où nous l'avions laissé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -4 \end{array}\right) \quad \text{\#L3}\leftarrow\text{\#L3+2\#L2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad \text{\#L3}\leftarrow\tfrac{1}{4}\text{\#L3}$$

On constate que le système qui possède 3 équations à 3 inconnues admet 3 pivots . On continue notre algorithme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad \text{\#L2}\leftarrow\text{\#L2}-3\text{\#L3} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 0 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad L_1\leftarrow L_1-7L_3$$

On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad \text{\#L1}\leftarrow\text{\#L1}-\text{\#L2}$$

Exemple 2.36 – Retour à l'exemple 2.34 – On a la matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 7 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \end{array}\right)$$

On se ramène alors à une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 1 \end{array}\right) \quad \text{\#L1}\leftarrow\text{\#L1}-\text{\#L3}$$

qui correspond donc au système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & + & 4z & = & -2 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Les inconnues principales de ce systèmes sont x et y et z est une inconnue libre (ou paramètre).

§ *Dernière étape : décrire l'ensemble des solutions.* Il nous reste juste à exprimer l'ensemble des solutions du système.

Exemple 2.37 – Retour à l'exemple 2.30 – On aboutit à un système réduit et échelonné :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 \end{array}\right) \quad \text{\#L1}\leftarrow\text{\#L1}-\text{\#L2}$$

On obtient ainsi $x = 2$, $y = 4$ et $z = -1$ et l'unique solution du système est $(2, 4, -1)$.

Exemple 2.38 – Retour à l'exemple 2.34 – On va donc exprimer les solutions du système en fonction de z. Le système

$$\begin{cases} x \quad\quad + 4z = -2 \\ \quad\; y + 3z = 1 \end{cases}$$

est équivalent à

$$\begin{cases} x = -2 - 4z \\ y = 1 - 3z \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions du système est l'ensemble des triplets

$$\{(-2-4z, 1-3z, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} \ .$$

§ *Un dernier commentaire sur les systèmes homogènes.*

Définition 2.39 *(Système homogène).* Le système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} ,$$

composé de p équations linéaires à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$ est dit *homogène* si $b_1 = \ldots = b_p = 0$. Autrement dit, le système est dit homogène s'il n'y a pas de termes constants dans les équations.

Exemple 2.40 – Soient les systèmes

$$(S_1) : \begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ -x - 3y - 9z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (S_2) : \begin{cases} x + y + 7z = 3 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ -x - 3y - 9z = 0 \end{cases} .$$

Le système (S_1) ne l'est pas.

Remarque 2.41 – Ce type de système possède toujours au moins une solution : la solution nulle $(0, \cdots, 0)$.

Remarque 2.42 – À un système homogène

$$\begin{cases} x + y + 7z = 0 \\ 2x - y + 5z = 0 \\ -x - 3y - 9z = 0 \end{cases} ,$$

on associera la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 \\ -1 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

en omettant la dernière colonne car les termes constants sont tous nuls.

Grâce à l'algorithme du pivot de Gauss, on peut démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.43. *Tout système d'équations linéaires homogène qui a strictement plus d'inconnues que d'équations admet des solutions non nulles.*