

COURS 2 – MÉTHODES NUMÉRIQUES

Dans ce cours, on va présenter un certain nombre de méthodes pour résoudre numériquement des problèmes classiques de mathématiques. Les méthodes présentées seront toutes des *méthodes itératives*

2.1. Résolution d'équations. Commençons cette section par un exemple simple. Supposons que l'on veuille déterminer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ par une méthode itérative. Ceci revient à chercher un zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. On considère alors la suite d'itérations suivante : $x^{(0)}$ étant donné,

$$x^{(k+1)} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}}, \quad \forall k \geq 0.$$

Supposons que cette méthode converge vers $\bar{x} > 0$, i.e. que $x^{(k)}$ converge vers \bar{x} lorsque k tend vers l'infini, alors on a

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}^2 + 2}{2\bar{x}}$$

et donc

$$2\bar{x}^2 = \bar{x}^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^2 = 2$$

ce qui donne finalement

$$\bar{x} = \sqrt{2}.$$

2.1.1. Généralités. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. On s'intéresse à la résolution de l'équation algébrique non-linéaire

$$f(x) = 0.$$

Cette équation est en fait un système d'équations puisque f est à valeurs dans \mathbb{R}^n . Pour résoudre ce système, on a généralement recours à des méthodes itératives. On se donne donc une première approximation $x^{(0)}$ d'une solution de cette équation et on construit une suite d'itérés $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ qui converge vers un $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $f(\bar{x}) = 0$.

En pratique, on ne peut pas faire un nombre infini d'itérations. On se donne alors une précision (ou tolérance) ϵ et on utilise un critère d'arrêt :

$$\|f(x^{(k)})\| < \epsilon,$$

ou

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \epsilon,$$

ou

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \epsilon,$$

où on désigne par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , i.e.

$$\|x\| := \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Autrement dit, on itère le processus tant que le critère d'arrêt choisi n'est pas satisfait.

DÉFINITION 2.1 – 1. On dit qu'une méthode itérative est *convergente*, s'il existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - \bar{x}\| = 0.$$

2. On dit que la méthode itérative est d'ordre $p \geq 1$ s'il existe une constante C , indépendante de k , telle que

$$\|\bar{x} - x^{(k+1)}\| \leq C \|\bar{x} - x^{(k)}\|^p.$$

- a) Si $p = 1$, on dit que la convergence est *linéaire*. On a alors

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq C \|\bar{x} - x^{(k-1)}\| \leq \dots \leq C^k \|\bar{x} - x^{(0)}\|.$$

Dans ce cas, on a donc convergence si $C < 1$.

- b) Si $p = 1$ et que

$$\|\bar{x} - x^{(k+1)}\| \leq C_k \|\bar{x} - x^{(k)}\|,$$

avec $\lim_{k \rightarrow +\infty} C_k = 0$, on parle de convergence *super-linéaire*.

- c) Si $p = 2$, on dit que la convergence est *quadratique*. On a alors

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| \leq C \|\bar{x} - x^{(k-1)}\|^2.$$

Notons les implications suivantes entre les différents types de convergence :

Convergence quadratique \Rightarrow Convergence super-linéaire \Rightarrow Convergence linéaire.

Enfin, une autre notion est nécessaire pour décrire la convergence d'une méthode itérative.

DÉFINITION 2.2 –

1. On dit que la convergence est *globale* si pour tout choix de $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - \bar{x}\| = 0.$$

2. On dit que la convergence est *locale* s'il existe $R > 0$ tel que pour tout choix de $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ avec $\|x^{(0)} - \bar{x}\| < R$, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|x^{(k)} - \bar{x}\| = 0.$$

2.1.2. *Cas d'une équation non-linéaire.* On s'intéresse ici au cas d'une seule équation, i.e. à la résolution d'une équation

$$f(x) = 0$$

où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

§ *Méthode de la bisection ou dichotomie.* On suppose que f est continue et que l'on dispose de deux approximations a et b d'une solution \bar{x} de l'équation $f(x) = 0$ telles que $f(a)f(b) < 0$. Autrement dit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f change de signe entre a et b et il existe donc $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$. On considère alors le point $m = \frac{a+b}{2}$ et on suit le processus suivant :

- si $f(a)f(m) > 0$ alors $\alpha \in]m, b[$ et on pose alors $a = m$;
- si $f(a)f(m) < 0$ alors $\alpha \in]a, m[$ et on pose alors $b = m$.

On réitère ensuite l'opération et l'on se rapproche alors ainsi de α au fur et à mesure.

THÉORÈME 2.3

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a)f(b) < 0$. Alors la méthode de dichotomie converge. De plus, la convergence est linéaire.

§ *Méthode Regula Falsi ou "fausse position".* Au lieu de prendre le milieu de l'intervalle $[a, b]$ comme dans la méthode dichotomie, on définit un point w par la relation

$$\frac{f(b)}{b - w} = \frac{f(a)}{a - w}.$$

D'où

$$w = \frac{f(a)b - f(b)a}{f(a) - f(b)}.$$

On procède alors comme pour la méthode de dichotomie :

- si $f(a)f(w) > 0$ alors $\alpha \in]w, b[$ et on pose $a = w$;
- si $f(a)f(w) < 0$ alors $\alpha \in]a, w[$ et on pose $b = w$.

THÉORÈME 2.4

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b])$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Supposons que f'' est de signe constant sur $[a, b]$. Alors la méthode de Regula Falsi converge vers l'unique zéro $\bar{x} \in]a, b[$ de f .
2. On suppose la fonction f de classe \mathcal{C}^2 et que \bar{x} est une racine simple de f (i.e. $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$). Alors, la convergence de la méthode de Regula Falsi est locale et super-linéaire. Si la racine \bar{x} est double ($f(\bar{x}) = f'(\bar{x}) = 0$), la convergence est seulement linéaire.

§ *Méthode de Newton.* On suppose que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est deux fois dérivable et qu'il y a au moins un point x tel que $f(x) = 0$. La méthode de Newton consiste à chercher le point d'intersection entre la tangente à la courbe représentative de la fonction f et l'axe des abscisses : Puisque $f'(a) = \frac{f(a)-0}{a-b} = \frac{f(a)}{a-b}$, on a

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

On définit alors l'algorithme de Newton de la façon suivante : on se donne $x^{(0)} \in \mathbb{R}$ et on définit les itérées, pour tout $k \in \mathbb{N}$, par

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}.$$

En d'autres termes, pour k donné, $x^{(k)}$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à f au point $(x^{(k)}, f(x^{(k)}))$ avec l'axe des abscisses.

THÉORÈME 2.5

On suppose que $x^{(0)}$ est choisi "assez proche" de la solution \bar{x} à l'équation $f(x) = 0$ et que $f'(x) \neq 0$ pour x dans un voisinage de \bar{x} . Alors la méthode de Newton converge. De plus, la convergence est quadratique.

REMARQUE 2.6 –

1. Le théorème précédent montre que la convergence de la méthode de Newton est locale.
2. Il est possible d'obtenir une variante de cette méthode en considérant l'approximation de la dérivée par un quotient différentiel. On définit ainsi

$$f'(x^{(k)}) \simeq \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}.$$

On obtient alors la méthode itérative

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})} (x^{(k)} - x^{(k-1)}),$$

appelée *méthode de la corde*.

EXEMPLE 2.7 – Utilisons la méthode de Newton pour obtenir une estimation de $\sqrt{2}$. Prenons ainsi $f(x) = x^2 - 2$. On a donc $f'(x) = 2x$. La méthode de Newton s'écrit alors :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} = x^{(k)} - \frac{(x^{(k)})^2 - 2}{2x^{(k)}} = \frac{(x^{(k)})^2 + 2}{2x^{(k)}}.$$

On peut alors montrer que la suite $(x^{(k)})_{k \geq 0}$ est positive (si $x^{(0)} > 0$ alors $x^{(k)} > 0$ pour tout $k \geq 0$) et décroissante (à partir du deuxième terme). Elle est donc convergente. Choisissons par exemple $x^{(0)} = 1$. On a alors

$$x^{(1)} = \frac{(x^{(0)})^2 + 2}{2x^{(0)}} = 1,5 \quad ; \quad x^{(2)} = \frac{(x^{(1)})^2 + 2}{2x^{(1)}} \simeq 1,4166666667$$

et

$$x^{(3)} = \frac{(x^{(2)})^2 + 2}{2x^{(2)}} \simeq 1,41421568627451.$$

Pour rappel $\sqrt{2} \simeq 1,41421356373095$ ce qui nous donne une erreur de 0,00015% en trois itérations.

2.2. Approximation polynomiale et interpolation polynomiale. Dans cette partie, on cherche à approximer des fonctions par des polynômes. Dans la première sous-section, on va présenter (rapidement) comment approcher une fonction par un polynôme autour d'une valeur : c'est la notation de développement limité. Dans la seconde sous-section, on va présenter une manière d'approcher globalement (comprendre d'approcher sur un intervalle) une fonction par un polynôme en faisant de l'interpolation.

2.2.1. Approximation locale : les développements limités. On a vu, en Section 1.1.2, les notations de Landau pour les suites. De telles notations existent également pour les fonctions.

DÉFINITION 2.8 – *Notation de Landau : négligeabilité des fonctions* – On fixe $a \in \mathbb{R}$ et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant a . On considère f et g deux fonctions réelles définies sur I telle que g ne s'annule pas au voisinage de a . On dit que la fonction f est *négligeable devant* la fonction g en a (ou que la fonction g est *prépondérante devant* la fonction f) si la fonction $\frac{f}{g}$ a pour limite 0 en a . On note cela

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)).$$

REMARQUE 2.9 – Contrairement aux suites, pour lesquelles il n'y avait aucune ambiguïté, pour les fonctions, on est obligé d'écrire en quel point (en quel réel a) la fonction f est négligeable devant g .

EXEMPLE 2.10 – Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $x^{n+k} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ car

$$\frac{x^{n+k}}{x^n} = x^k \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

On utilise cette notation pour définir la notion de développement limité d'une fonction en un point.

DÉFINITION 2.11 – Développement limité – On considère $x_0 \in \mathbb{R}$, et une fonction réelle f définie au voisinage de x_0 . La fonction f admet un *développement limité d'ordre n* en x_0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Le polynôme $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$ est appelé la *partie régulière* du développement limité à l'ordre n de f en x_0 .

On peut préciser ici un cas particulier que l'on rencontrera beaucoup) par la suite : une fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

REMARQUE 2.12 – On fera attention aux faits suivants :

- une fonction n'admet pas forcément de développement limité à un ordre donnée n ;
- une fonction peut avoir un développement limité à l'ordre n mais pas à l'ordre $n + 1$.

PROPOSITION 2.13 – Si f admet en $x_0 \in \mathbb{R}$ un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$, alors ce développement est unique, c'est-à-dire que les coefficients a_0, \dots, a_n de ce développement sont uniquement définis.

Démonstration. On se restreint au cas où $x_0 = 0$ afin de simplifier les notations. On raisonne ensuite par l'absurde. Considérons donc qu'il existe (a_0, \dots, a_n) et (b_0, \dots, b_n) deux éléments distincts de \mathbb{R}^n tels que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n) \text{ et } f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + o(x^n).$$

On a alors

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n),$$

et posons $p = \min\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_i \neq b_i\}$. On a alors $(a_p - b_p)x^p + \dots + (a_n - b_n)x^n \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$ ce qui implique, en divisant par x^p , que

$$(a_p - b_p) + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{n-p})$$

et par passage à la limite en faisant tendre x vers 0 , on obtient finalement que $a_p - b_p = 0$, ce qui contredit notre hypothèse. On a donc que $(a_0, \dots, a_n) = (b_0, \dots, b_n)$ et donc l'unicité du développement à l'ordre n . \square

Ainsi, s'il existe, la partie régulière du développement limité à l'ordre n en x_0 d'une fonction f peut-être vu comme le polynôme de degré n approchant le mieux f au voisinage de x_0 . Lorsque la fonction f est assez dérivable, alors, la formule de Taylor–Young présentée ci-dessous nous donne un moyen simple de calculer le développement limité de la fonction.

THÉORÈME 2.14 – FORMULE DE TAYLOR–YOUNG

On considère une fonction réelle f qui est n fois dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en x_0 donné par

$$f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{=} f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de f .

Idée de preuve. On admet cette formule dans le cas général. Dans le cas où la fonction f est de classe \mathcal{C}^{n+1} (i.e. dérivable $(n+1)$ fois avec $f^{(n+1)}$ continue) sur un intervalle de la forme $]x_0 - h, x_0 + h[$ pour $h > 0$, cette formule découle de la formule de Taylor–Laplace : pour tout $x \in]x_0 - h, x_0 + h[$, on a

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \int_{x_0}^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

□

PROPOSITION 2.15 (Liste de développements limités usuels) – On a les développements limités usuels en 0 suivants :

$$\begin{aligned} \text{— } (1+x)^\alpha &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + o(x^2); & \text{— } e^x &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \\ \text{— } \cos(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6); & \text{— } \frac{1}{1-x} &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \\ \text{— } \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) & \text{— } \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

2.2.2. *Polynômes interpolateurs de Lagrange.* Le but de cette section est, étant donné une fonction et un nombre fini de points de sa courbe représentative, de construire un polynôme approchant cette fonction et passant par ces points. Le résultat principal de cette sous-section est le théorème suivant.

THÉORÈME 2.16 – INTERPOLATION DE LAGRANGE

Soient $(n+1)$ couples de réels $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. Il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P(x_k) = y_k.$$

Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

On démontre ici l'unicité d'un tel polynôme, pour ensuite détailler la construction. Soient P et Q deux polynômes de degré au plus n tels que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$P(x_k) = y_k = Q(x_k).$$

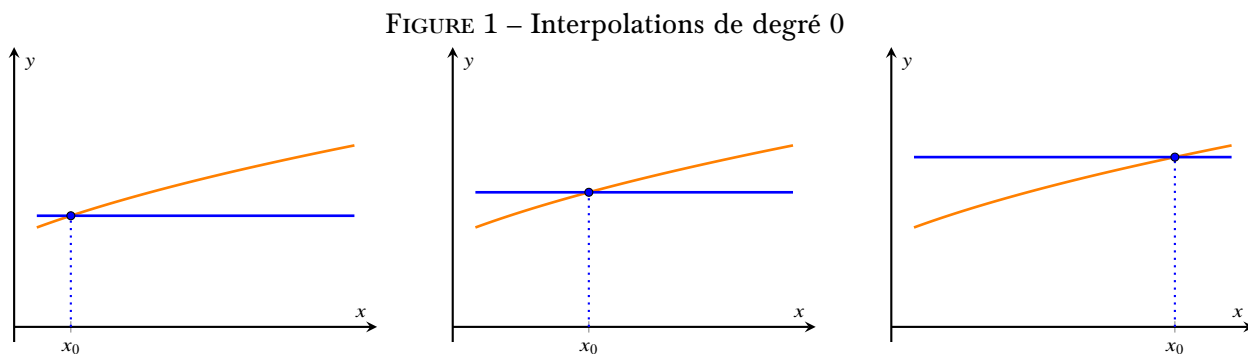
On considère $R = P - Q$ est aussi un polynôme de degré au plus n tel que

$$R(x_0) = R(x_1) = \dots = R(x_n) = 0.$$

Le polynôme R s'annule au moins en $(n+1)$ points et par conséquent, R est le polynôme nul, donc $P = Q$. (On utilise ici un théorème démontré en TD en Outils fondamentaux des mathématiques).

Dans la suite, on construit ces polynômes (et on démontre ainsi leur existence).

§ *Interpolation en bas degré.* On commence par les cas les plus simples. On considère une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in [a, b]$, le polynôme de degré 0 qui interpole f en x_0 est le polynôme constant $P_{[f; x_0]} = y_0$, avec $y_0 = f(x_0)$. On illustre cette situation en Figure 1.

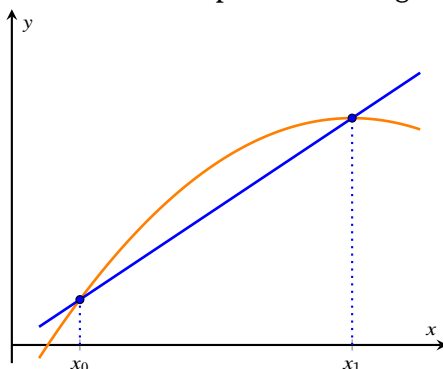


On fixe à présent $x_0 \neq x_1$ deux réels de $[a, b]$. L'unique polynôme de degré 1 interpolant f en x_0 et x_1 est le polynôme

$$P_{[f; x_0, x_1]}(X) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(X - x_0) + y_0$$

où $y_0 = f(x_0)$ et $y_1 = f(x_1)$. L'équation $y = P(x)$ est l'équation de la droite passant par les deux points fixés. On illustre cette situation en Figure 2.

FIGURE 2 – Interpolation de degré 1

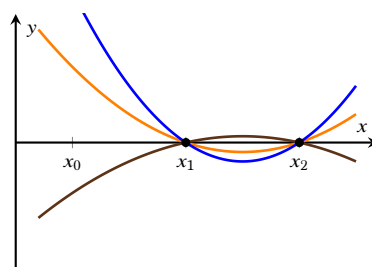


§ *Interpolation de degré 2.* On fixe ici x_0, x_1 et x_2 trois éléments distincts de $[a, b]$, et on pose $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On va construire "petit à petit" le polynôme interpolateur de Lagrange associés aux points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , en partant de cas particuliers.

On commence par rappeler que les polynômes de degré 2 s'annulant en x_1 et x_2 est de la forme

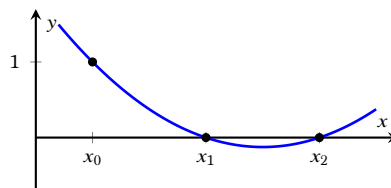
$$\alpha(x - x_1)(x - x_2)$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$ quelconque. On illustre cela pour quelques choix de coefficient α dans le graphique ci-contre.



En fixant α , on peut contraindre la courbe du polynôme à passer par un troisième point. Par exemple, on peut contraindre la courbe à passer par le point $(x_0, 1)$ en posant

$$\alpha = \frac{1}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}.$$



Ainsi, il suffit de considérer le polynôme

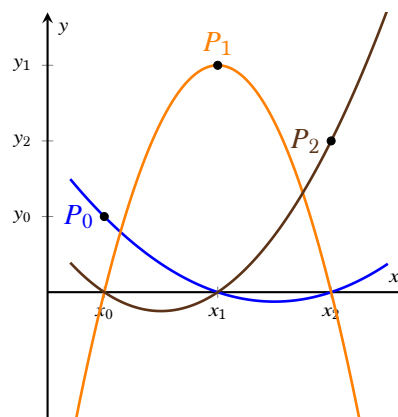
$$P_0(X) = y_0 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

dont la courbe représentative passe par les points (x_0, y_0) , $(x_1, 0)$ et $(x_2, 0)$. De la même manière, on a

$$P_1(X) = y_1 \frac{(X - x_0)(X - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \quad \text{et}$$

$$P_2(X) = y_2 \frac{(X - x_0)(X - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

qui s'annulent tous les deux en x_0 , P_1 s'annulant en x_2 et valant y_1 en x_1 , et P_2 s'annulant en x_1 et valant y_2 en x_2 .

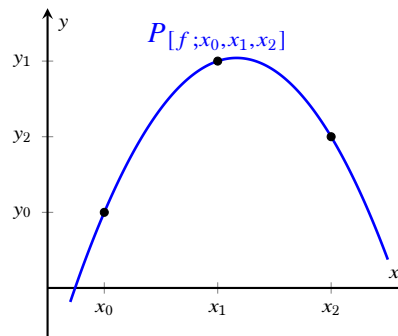


Pour finir, il suffit de considérer le polynôme défini par

$$P[f; x_0, x_1, x_2] := P_0 + P_1 + P_2,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P[f; x_0, x_1, x_2](X) = & y_0 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \\ & + y_1 \frac{(X - x_0)(X - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \\ & + y_2 \frac{(X - x_0)(X - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}, \end{aligned}$$



que l'on trace ci-contre.

§ Comment considérer un point de plus? Généralisation au degré n .

Si l'on fixe 4 points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et (x_3, y_3) avec les x_k tous distincts, on suit alors le même procédé pour construire le polynôme interpolateur de Lagrange correspondant.

On construit facilement le polynôme de degré au plus 3 passant par les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et $(x_3, 0)$. Il suffit de considérer le polynôme d'interpolation de degré au plus 2 sur les trois premiers points en ajoutant les termes correctifs

$$y_0 \frac{(X - x_1)(X - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \times \frac{(X - x_3)}{(x_0 - x_3)} + y_1 \frac{(X - x_0)(X - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \times \frac{(X - x_3)}{(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(X - x_0)(X - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \times \frac{(X - x_3)}{(x_2 - x_3)}.$$

Ainsi, en ajoutant un terme de la même forme que les trois déjà présent, on obtient finalement le polynôme interpolateur de Lagrange pour quatre points :

$$y_0 \frac{(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(X-x_0)(X-x_2)(X-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ + y_2 \frac{(X-x_0)(X-x_1)(X-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} .$$

On généralise facilement cette construction pour $n+1$ points : on résume cela dans le théorème suivant.

THÉORÈME 2.17 – POLYNÔME DE LAGRANGE

Soient $(n+1)$ couples de réels $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. L'unique polynôme P de degré au plus n tel que, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P(x_k) = y_k$ est donné par

$$P(X) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{(X-x_j)}{(x_k-x_j)} .$$

§ Différences divisées. On verra en TP au moins un algorithme permettant, étant donné $(n+1)$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ d'abscisses deux-à-deux distinctes, de déterminer les coefficients du polynôme interpolateur de Lagrange passant par ces points.

2.3. Intégration numérique. Le but de cette section est de définir un certain nombre d'algorithmes permettant d'approximer la valeur de l'intégrale de fonctions sur un intervalle. La construction de ces algorithmes repose notamment sur l'interpolation de Lagrange vue précédemment.

2.3.1. À propos de l'intégrabilité des fonctions.

Commençons cette section par définir ce qu'est l'intégrale (de Riemann) d'une fonction sur un segment.

DÉFINITION 2.18 – Subdivision – Pas d'une subdivision – Soient $a < b$ deux nombres réels.

— Une *subdivision* d'un segment $[a, b]$ est une famille finie de nombres réels de la forme

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b .$$

— Le *pas* d'une telle subdivision est le nombre $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1})$. C'est la longueur du plus grand intervalle dans le découpage de $[a, b]$.

EXEMPLE 2.19 – La subdivision *équirépartie* est issue d'un découpage *équidistant* de $[a, b]$ en n intervalles de longueur identique, $\delta = \frac{b-a}{n}$. Les points de la subdivision sont donnés, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, par

$$x_k = a + k \frac{b-a}{n} .$$

(Ces nombres sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison δ .)

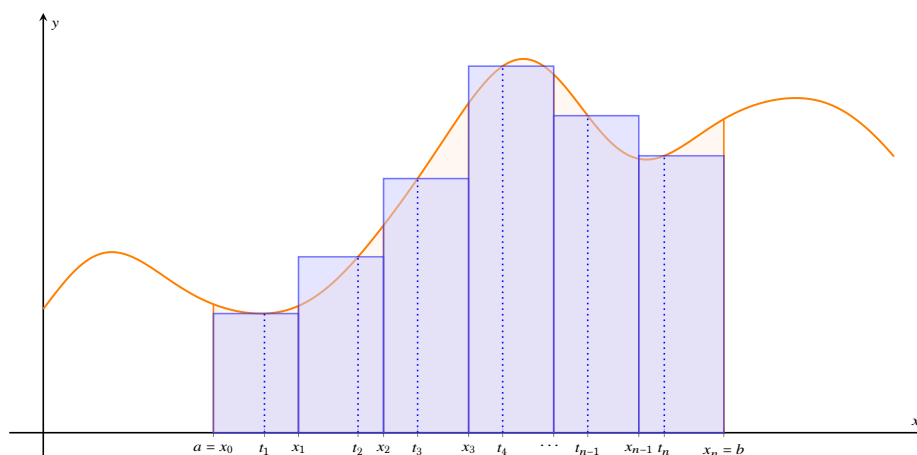
DÉFINITION 2.20 – Somme de Riemann – Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ avec $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et $T = (t_1, \dots, t_n)$ une famille de réels tels que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (on dit alors que la famille T est adaptée à σ).

On appelle *somme de Riemann* de la fonction f associée à σ et T , le nombre

$$\mathcal{S}(f, \sigma, T) := \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) f(t_k) .$$

EXEMPLE 2.21 – On considère une fonction $f: [0, +\infty[$ dont le graphe est tracé en Figure 3. Sur ce même graphique, on pose une subdivision équirépartie σ (cf Exemple 2.19) notée $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, ainsi que la famille $T = (t_1, \dots, t_n)$ adaptée à σ . La somme de Riemann associée $\mathcal{S}(f, \sigma, T)$ correspond à la somme des aires des rectangles bleus.

FIGURE 3 – Illustration d'une somme de Riemann



DÉFINITION 2.22 – Intégrale de Riemann – Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. S'il existe un nombre I tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$ de pas inférieur à δ et pour toute famille T adaptée à σ ,

$$|\mathcal{S}(f, \sigma, T) - I| < \varepsilon ,$$

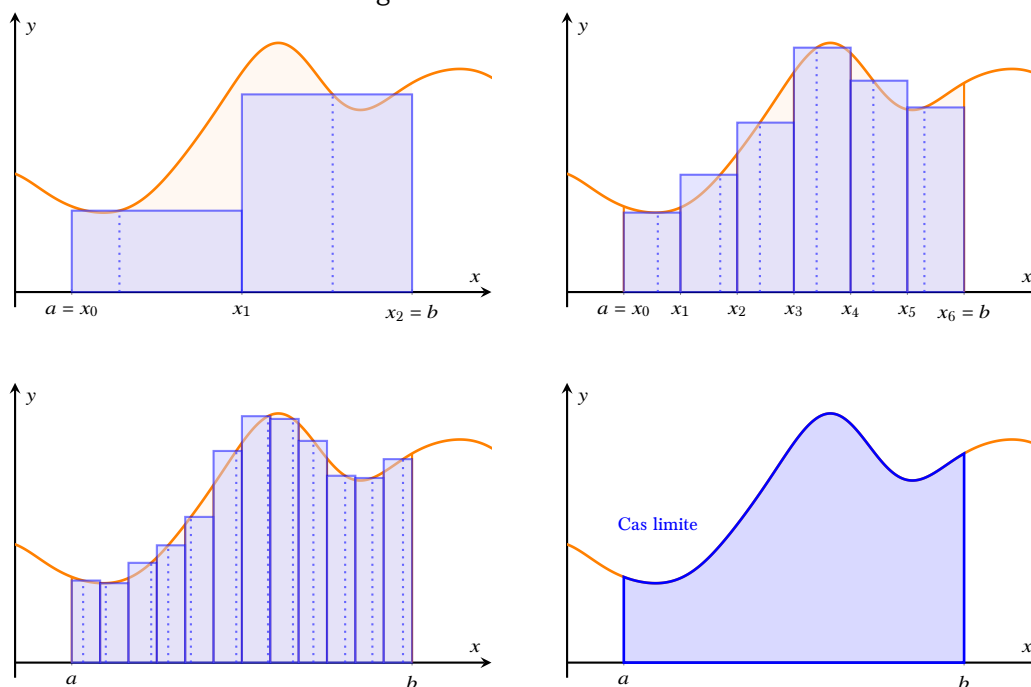
on dit que la fonction f est *intégrable (au sens de Riemann)* sur $[a, b]$ et le nombre I est *l'intégrale* de f sur $[a, b]$; ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$.

Autrement dit, une fonction est intégrable si toutes ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont *convergentes de même limite finie*.

EXEMPLE 2.23 – On reprend l'exemple 2.21. On illustre par les graphes en Figure 4 la convergence d'une suite de somme de Riemann vers l'aire de la surface contenue sous la courbe sur l'intervalle $[a, b]$.

REMARQUE 2.24 – On retrouve la notion d'intégrale que vous avez vu au lycée, que vous savez parfois calculer à la main lorsque vous connaissez une primitive.

FIGURE 4 – Convergence d’une suite de sommes de Riemann



REMARQUE 2.25 – Dans toute cette section, nous avons précisé intégrale *de Riemann*, qui fait référence au mathématicien allemand Bernhard Riemann (1826–1866), qui a donné son nom à un certain nombre de concepts mathématiques, de théorèmes et même à une célèbre conjecture (qui est l’un des sept problèmes du prix du millénaire). D’autres notions d’intégrales qui généralisent cette construction existent, comme par exemple l’intégrale de Lebesgue, qui tient son nom du mathématicien français Henri-Léon Lebesgue (1875-1941).

2.3.2. Intégration numérique.

§ *Principe général de l’intégration numérique.* Pour la fin de ce cours, nous allons construire plusieurs méthodes d’intégrations numériques, c’est-à-dire, étant donnée une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable sur le segment $[a, b]$, on construira une suite de nombres telle que cette suite converge vers l’intégrale de f sur $[a, b]$.

Dans toute la suite, on fixe $a < b$ deux réels et une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dont l’on cherche à approximer l’intégrale sur l’intervalle $[a, b]$.

La construction de telles suites suivra toujours le même principe :

- on considérera la subdivision équirépartie de l’intervalle $[a, b]$ que l’on notera

$$\sigma_n := a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b ,$$

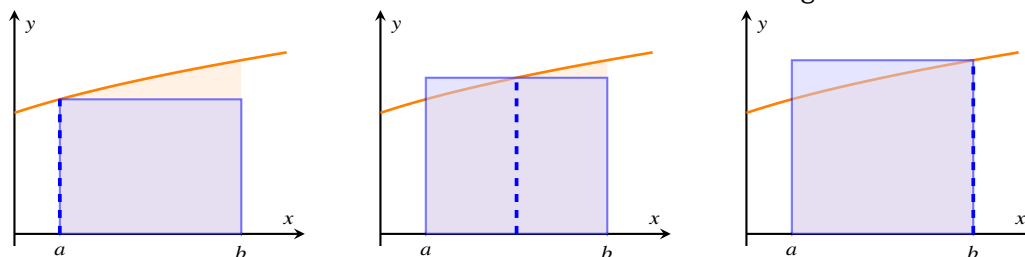
avec pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$;

- sur chacun de ces intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, on approximera la fonction par un polynôme d’interpolation bien choisi.

Les trois premières méthodes présentées ici découlent chacune de la construction de l’intégrale de Riemann pour des choix particuliers de familles adaptées à la subdivision équirépartie du segment sur lequel on intègre. Sur chacun des intervalles de la subdivision, on approxime la

fonction par un polynôme de degré 0, c'est-à-dire une fonction constante. On fera trois choix de fonctions constantes, qui sont illustrés en Figure 5.

FIGURE 5 – Les différentes méthodes des rectangles

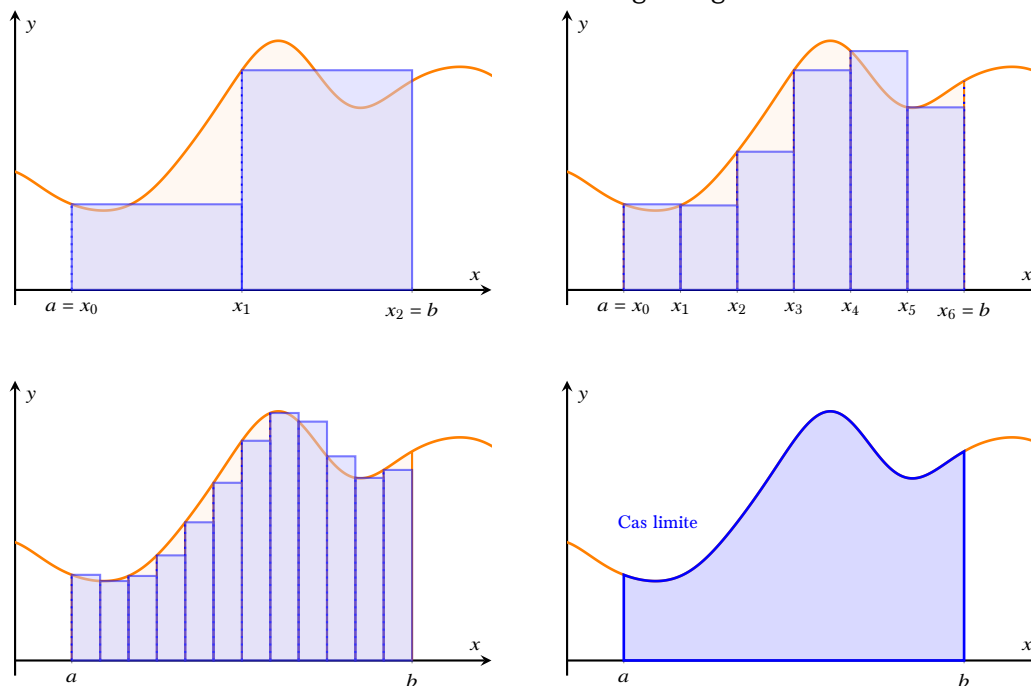


§ Méthode des rectangles à gauche.

DÉFINITION 2.26 – *Méthode des rectangles à gauche* – On appelle *méthode des rectangles à gauche* la suite des sommes de Riemann donnée pour les subdivisions σ_n et la famille adaptée $T_n = (t_1, \dots, t_n)$, donnée, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par $t_k = x_{k-1}$. On illustre cette méthode en Figure 6, que l'on note $\text{Rect}_g(f, n)$.

REMARQUE 2.27 – Cette méthode tient son nom du fait que l'on va calculer l'aire sous la courbe comme une limite de somme d'aires de rectangles dont les hauteurs sont fixées pour que le sommet en haut à gauche soit un point de la courbe. On constate bien cela sur Figure 6.

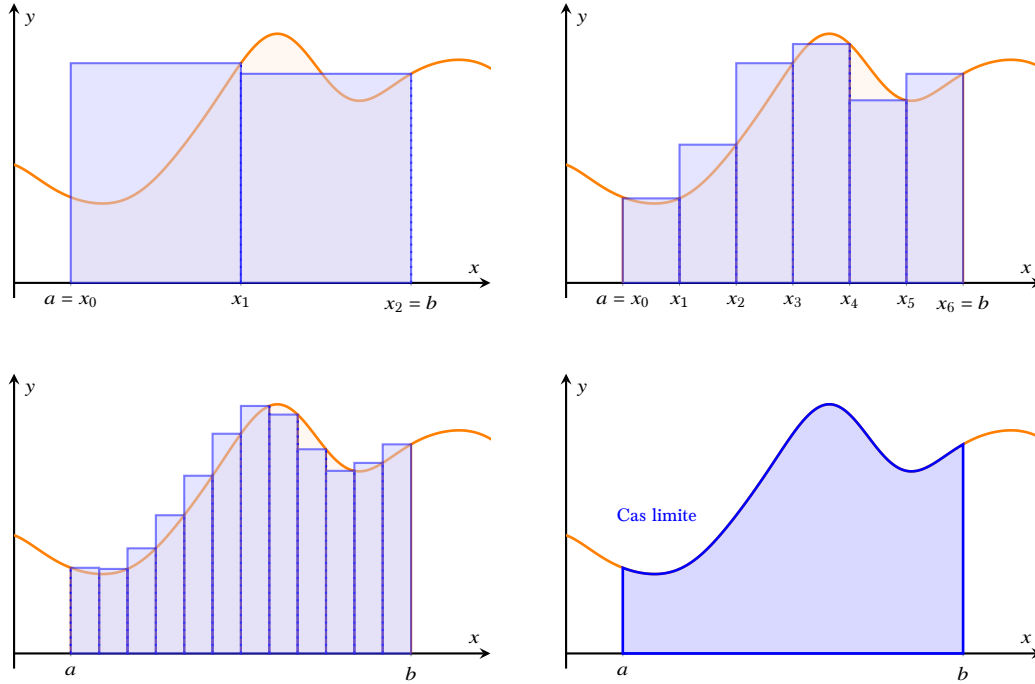
FIGURE 6 – Méthode des rectangles à gauche



§ Méthode des rectangles à droite.

DÉFINITION 2.28 – *Méthode des rectangles à droite* – On appelle *méthode des rectangles à droite* la suite des sommes de Riemann donnée pour les subdivisions σ_n et la famille adaptée $T_n = (t_1, \dots, t_n)$, donnée, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par $t_k = x_k$. On illustre cette méthode en Figure 7, que l'on note $\text{Rect}_d(f, n)$.

FIGURE 7 – Méthode des rectangles à droite



THÉORÈME 2.29 – ERREUR DES MÉTHODES DES RECTANGLES GAUCHES ET DROITS

Supposons que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Rect}_*(f, n) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n} \times \sup_{[a,b]} (|f'|) .$$

Démonstration. On peut démontrer la majoration quand $n = 1$ pour les rectangles à gauche. On a

$$\int_a^b f(t) dt - \text{Rect}_g(f, 1) = \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f(a) dt = \int_a^b (f(t) - f(a)) dt .$$

Par intégration par parties, on a

$$\int_a^b 1 \times (f(t) - f(a)) dt = [(t-b)(f(t) - f(a))]_a^b - \int_a^b (t-b)f'(t) dt = \int_a^b (b-t)f'(t) dt$$

en ayant choisi $t \mapsto t - b$ comme primitive de $t \mapsto 1$. Finalement, on a les majorations suivantes

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Rect}_g(f, 1) \right| &= \left| \int_a^b (b - t) f'(t) dt \right| \\
&\leq \int_a^b (b - t) |f'(t)| dt \\
&\leq M \int_a^b (b - t) dt \text{ avec } M = \sup_{[a, b]} (|f'|) \\
&\leq M \left[\frac{(b - t)^2}{2} \right]_a^b \\
&\leq M \frac{(b - a)^2}{2}
\end{aligned}$$

Pour n quelconque, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire et l'argument précédent sur chaque morceau de la subdivision pour obtenir que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Rect}_*(f, n) \right| \leq \sum_{k=1}^n M \frac{(b - a)^2}{2n^2} = M \frac{(b - a)^2}{2n},$$

d'où le résultat. \square

REMARQUE 2.30 – Une reformulation de ce théorème est que l'erreur commise par une méthode des rectangles gauches (ou droits) sur une fonction de classe \mathcal{C}^1 décroît en $\frac{1}{n}$, avec n le nombre d'intervalles de la subdivision :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Rect}_*(f, n) \right| = O\left(\frac{1}{2n}\right).$$

§ Méthode des rectangles milieux.

DÉFINITION 2.31 – *Méthode des rectangles milieux* – On appelle *méthode des rectangles milieux* la suite des sommes de Riemann donnée pour les subdivisions σ_n et la famille adaptée $T_n = (t_1, \dots, t_n)$, donnée, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par $t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$. On illustre cette méthode par Figure 7, que l'on note $\text{Mil}(f, n)$.

THÉORÈME 2.32 – ERREUR DE LA MÉTHODE DES RECTANGLES MILIEUX

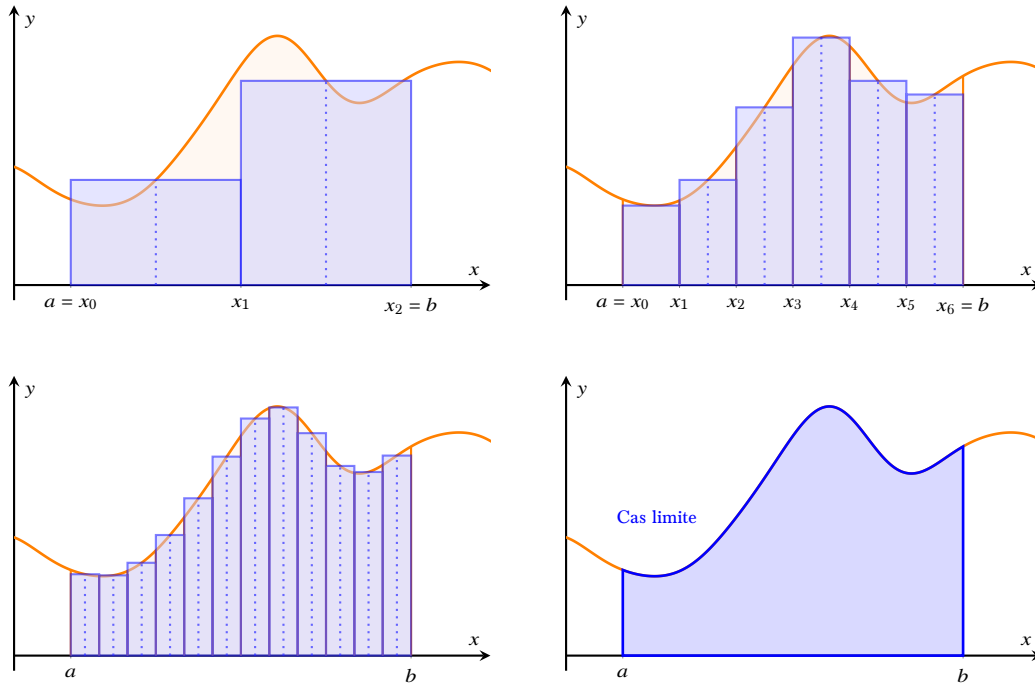
Supposons que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Mil}(f, n) \right| \leq \frac{(b - a)^3}{24n^2} \times \sup_{[a, b]} (|f''|).$$

Autrement dit, l'erreur commise par une méthode des rectangles milieux sur une fonction de classe \mathcal{C}^2 décroît en $\frac{1}{n^2}$, avec n le nombre d'intervalles de la subdivision.

Démonstration. Admise : ce résultat repose sur la même technique de preuve que pour la majoration des méthodes des rectangles. \square

FIGURE 8 – Méthode des rectangles milieux

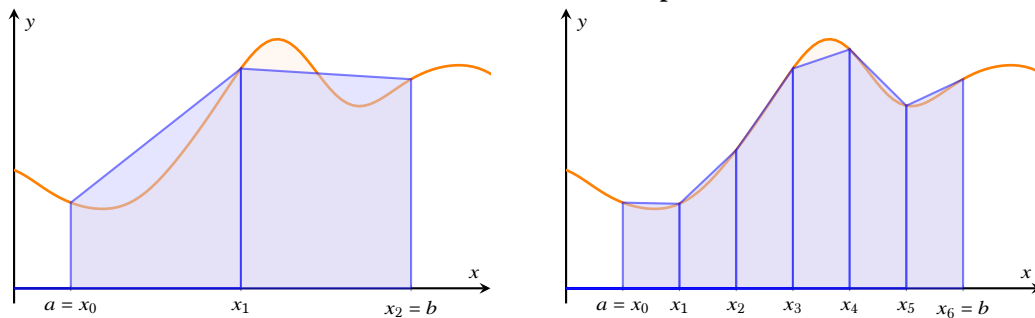


Pour les deux méthodes suivantes, on augmente le degré du polynôme interpolateur que l'on utilise pour approximer la fonction sur chaque intervalle de la subdivision. On constatera que cette augmentation du degré améliore la vitesse de convergence de la méthode.

§ *Méthode des trapèzes et méthode de Simpson.*

La *méthode des trapèzes* repose sur une approximation affine de la fonction sur chaque intervalle de la subdivision. On illustre cette approximation en Figure 9.

FIGURE 9 – Méthode des trapèzes



THÉORÈME 2.33 – ERREUR DE LA MÉTHODE DES TRAPÈZES

Supposons que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \text{Trap}(f, n) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \times \sup_{[a,b]} (|f''|) .$$

Autrement dit, l'erreur commise par une méthode des trapèzes sur une fonction de classe \mathcal{C}^2 décroît en $\frac{1}{n^2}$, avec n le nombre d'intervalles de la subdivision.

Démonstration. Admise

□

REMARQUE 2.34 – La méthode des trapèzes est donc du même ordre que la méthode des rectangles milieux, avec une constante de majoration plus petite. Elle est donc moins performante que cette dernière.

On termine cette section en présentant très rapidement une dernière méthode numérique d'intégration, la méthode dite *de Simpson*. Pour cette méthode, sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision choisie, on approxime la fonction f à intégrer par le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré au plus 2 passant par les points d'abscisses x_i , $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ et x_{i+1} . On illustrera cette méthode en TP. Comme pour les autres méthodes, on donne la vitesse de décroissance de l'erreur de la méthode pour des fonctions assez lisses.

THÉORÈME 2.35 – ERREUR DE LA MÉTHODE DE SIMPSON

Supposons que $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^4 sur l'intervalle $[a, b]$. Alors

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \text{Simp}(f, n) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \times \sup_{[a,b]} \left(|f^{(4)}| \right).$$

Autrement dit, l'erreur commise par une méthode de Simpson sur une fonction de classe \mathcal{C}^4 décroît en $\frac{1}{n^4}$, avec n le nombre d'intervalles de la subdivision.