TD 1 – Graphe de fonctions – Polynômes

Exercice 1.1 – Résolutions d'équations polynomiales (★) – Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $2x^2 - 3x - 9 = 0$
2. $12x + 4x^2 = -7$
3. $2x^2 + 8x + 10 = 0$
4. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
5. $2x^3 + 6x^2 - 9x + 1 = 0$
6. $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

Solution(s). Pour résoudre ces équations, on emploiera la méthode de résolution utilisant le discriminant ou on trouvera une factorisation évidente.

1. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{3}{2}, 3\right\}$.

2. L'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.

3. L'ensemble des solutions de l'équation est $\emptyset$.

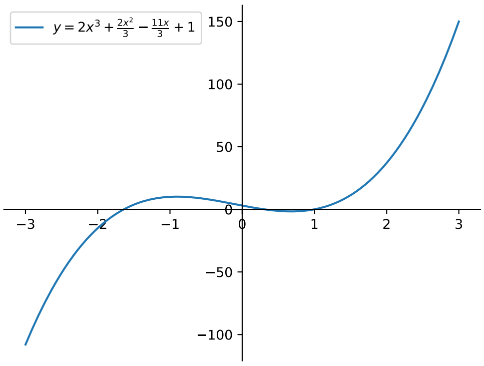
4. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $4x^2 - 12x + 9 = (2x-3)^2$ donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

5. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a $2x^3 + 6x^2 - 9x + 1 = (x-1)\left(2x^2 + 8x - 1\right)$ donc l'ensemble des solutions de l'équation est $\left\{1, -2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2} - 2\right\}$.

6. On a une *équation bicarré* : on peut effectuer le changement de variable $y = x^2$. Ainsi, on se ramène à résoudre l'équation
$$y^2 - 3y + 1 = 0$$
qui admet pour ensemble de solutions $\left\{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{3}{2}\right\}$. Ainsi, l'équation $x^4 - 3x^2 + 1$ admet pour ensemble de solutions
$$\left\{-\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}, -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}, \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right\} .$$

Exercice 1.2 – Étude de fonction polynomiale (★) – Faire l'étude de la fonction
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^3 + \frac{2x^2}{3} - \frac{11x}{3} + 1 \end{array}$$
et en tracer le graphe à la main. Afin de faciliter le tracé, on étudiera les solutions de l'équation $f(x) = 0$ (on pourra notamment en chercher une solution évidente).

Solution(s). La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$f'(x) = 6x^2 + \frac{4x}{3} - \frac{11}{3} .$$
Étudions le signe de f' : l'ensemble des solutions de l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$ est
$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{202}}{18} - \frac{1}{9}\right] \cup \left[-\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{202}}{18}, \infty\right) .$$
L'équation $f(x) = 0$ admet pour ensemble de solution $\left\{1, -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{34}}{6}, -\frac{\sqrt{34}}{6} - \frac{2}{3}\right\}$. On obtient le tracé suivant :



Exercice 1.3 – Étude de fonctions rationnelles (★) – Faire l'étude des fonctions rationnelles suivantes :

$$g_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x^3-3x^2-3x+2}{x^2-5x+6} \end{array}, \quad g_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{2x^2-5x+2}{2x^2+5x-3} \end{array}, \quad g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+3x-3} \end{array}.$$

Tracer les allures de leur graphe à la main. On commencera par étudier l'ensemble de définition des fonctions.

Solution(s). 1. Déterminons l'ensemble de définition de la fonction g_1 qui correspond à l'ensemble des nombres réels x tels que $x^2-5x+6 \neq 0$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$. Comme g est une fonction rationnelle, elle est donc définie, continue et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$. Afin de nous simplifier les calculs par la suite, on regarde si 2 ou 3 sont racines du numérateur : on constate alors que $2\times 2^3 - 3\times 2^2 - 3\times 2 + 2 = 0$. On peut donc factoriser le numérateur : on cherche à déterminer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout nombre réel x, on ait l'égalité

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x-2)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) .$$

(On démontrera l'existence d'une unique solution à ce problème dans l'exercice 1.4). Pour cela, on développe à gauche et on identifie chacun des coefficients, ce qui nous donne finalement que

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x-2)(2x^2 + x - 1) .$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$, on a

$$g_1(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x-3} .$$

On peut à présent calculer la dérivée de la fonction g_1 : pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3\}$, on a

$$g_1'(x) = \frac{2\left(x^2 - 6x - 1\right)}{(x-3)^2} .$$

Comme pour tout nomre réel x, on a $(x-3)^2 \geqslant 0$, le signe de la fonction g_1' ne dépend que du signe de son numérateur. Ainsi, l'inéquation $g_1'(x) \geqslant 0$ est équivalente à l'inéquation $x^2 - 6x - 1$ qui admet

$$]-\infty, 3-\sqrt{10}, 3+\sqrt{10}, +\infty[$$

pour ensemble de solutions, ce qui nous permet de construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		2		$3-\sqrt{10}$		3		$3+\sqrt{10}$		$+\infty$
$g_1'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g_1(x)$	$-\infty$	↗	-5 ‖ -5	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

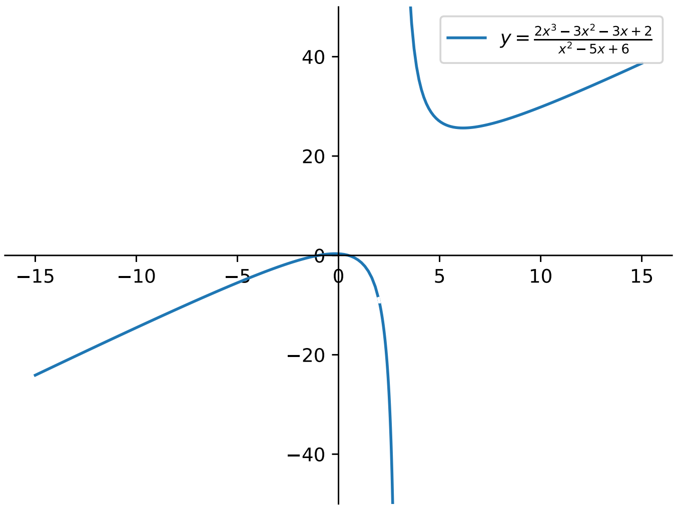
que l'on complète grâce aux limites calculées ci-dessous :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = -5 \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = -5$$

$$\lim_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = -5 \lim_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{20}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{2x^2+x-1}{x-3} = \lim_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{20}{x-3} = +\infty$$

On obtient le tracé suivant :



Deux remarques hors programme :

— On remarque que, bien que la fonction g_1 ne soit pas définie en -2, la fonction admet la même limite finie à gauche et à droite de cette valeur. Ici, on peut donc ***prolonger par continuité*** la fonction g_1 ce qui signifie que la fonction $\widetilde{g_1}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, par

$$\widetilde{g_1}(x) := \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \neq 2 \\ -5 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est une fonction continue sur son ensemble de définition. On pourrait se poser la question de la dérivabilité de $\widetilde{g_1}$ en 2 : c'est en fait évident si l'on remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a

$$\widetilde{g_1}(x) = \frac{2x^2+x-1}{x-3} \; .$$

— En observant la courbe de g_1, on a l'impression que la courbe se rapproche d'une droite en $\pm\infty$. Étudions cela. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g_1(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+x-1}{x(x-3)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{g_1(x)}{x} = 2 \; .$$

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$, on a

$$g_1(x) - 2x = \frac{2x^2+x-1}{x-3} - 2x = \frac{2x^2+x-1-2x(x-3)}{x-3} = \frac{7x-1}{x-3}$$

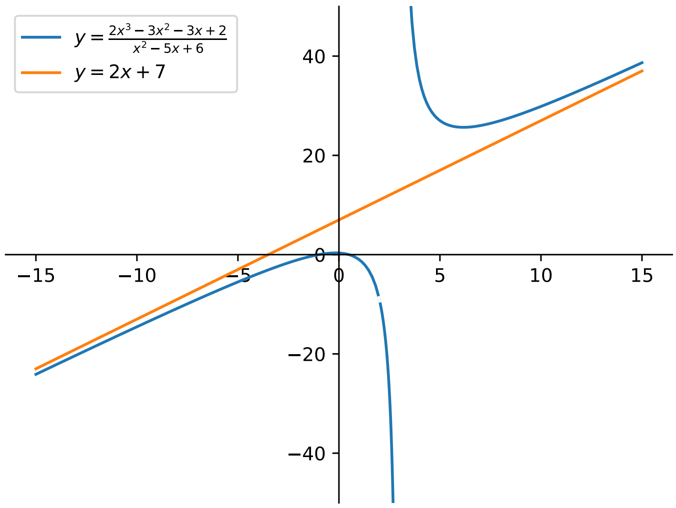
donc

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) - 2x = 7 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} g_1(x) - 2x = 7 \; .$$

Ainsi, on obtient que

$$\lim_{x\to+\infty} g_1(x) - (2x+7) = 0 = \lim_{x\to-\infty} g_1(x) - (2x+7)$$

ce qu'on interprète de la manière suivante. En $\pm\infty$, la courbe représentative de la fonction g_1 se rapproche de la droite d'équation $y = 2x + 7$, comme on le constate sur le tracé suivant :



2.

3.

EXERCICE 1.4 – POLYNÔME DE DEGRÉ 3 (★) –

1. Soit P un polynôme de degré 3. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ est une racine une solution de l'équation $P(x) = 0$, alors il existe un unique polynôme $Q(x) = q_2x^2 + q_1x + q_0$ avec $q_2 \neq 0, q_1, q_0$ trois réels tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,
$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) \ .$$
(On commencera par démontrer que deux polynômes définis, pour $x \in \mathbb{R}$, par $A(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et $B(x) := b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ sont égaux si et seulement si, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, on a $a_i = b_i$.)
2. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, démontrer que tout polynôme de degré 3 à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

Avec ces deux résultats, on peut conclure que pour tout polynôme P de degré 3 à coefficients réels, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et un polynôme Q à coefficient réel de degré 2 tel que
$$P = (X - \alpha)Q \ .$$

SOLUTION(S). 1. Soient $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ pour $i \in [\![0, 3]\!]$, avec $a_3, b_3 \in \mathbb{R}^*$. On considère les deux fonctions polynomiales A et B, définies pour tout réel x, par $A(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ et $B(x) := b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$. Démontrons que $A(x) = B(x)$ pour tout réel x si et seulement si $a_i = b_i$, $i \in [\![0, 3]\!]$.

Montrons le sens indirect. Si, pour tout $i \in [\![0, 3]\!]$, on a $a_i = b_i$, alors pour tout réel x, $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, donc $A(x) = B(x)$.

Montrons à présent le sens direct de l'équivalence. Les fonctions A et B sont polynomiales : elle sont donc infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Supposons donc que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a $A(x) = B(x)$, autrement dit que $A(x) - B(x) = 0$. C'est en particulier vrai pour $x = 0$, donc $a_0 = b_0$. Par hypothèse et dérivabilité, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que $A'(x) - B'(x) = 0$. C'est en particulier vrai pour $x = 0$, donc $a_1 = b_1$. On refait le même raisonnement avec les dérivées secondes et troisièmes et on obtient le résultat voulu.

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P, la fonction polynomiale, définie, pour tout réel x, par $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ avec $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et $a_3 \in \mathbb{R}^*$, telle que $P(\alpha) = 0$. Démontrons qu'il existe un unique triplet $(q_0, q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \times R^*$ tel que, pour tout réel x, on ait
$$P(x) = (x - \alpha)(q_0 + q_1x + q_2x^2) = -q_0\alpha + (q_0 - q_1\alpha)x + (q_1 - q_2\alpha)x^2 + q_2x^3 \ ,$$

ce qui équivaut à montrer que le système suivant admet une unique solution :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & -q_0\alpha \\ a_1 & = & q_0 - q_1\alpha \\ a_2 & = & q_1 - q_2\alpha \\ a_3 & = & q_2 \end{array}\right.$$

où l'on a,

$$\left\{\begin{array}{rcll} a_0 & = & -q_0\alpha & \\ a_1 & = & q_0 - q_1\alpha & \\ a_2 + a_3\alpha & = & q_1 & \mathrm{L}_3 + \alpha\mathrm{L}_4 \\ a_3 & = & q_2 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} a_0 & = & -q_0\alpha & \\ a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 & = & q_0 & \mathrm{L}_2 + \alpha\mathrm{L}_3 \\ a_2 + a_3\alpha & = & q_1 & \\ a_3 & = & q_2 & \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} P(\alpha) & = & 0 & \mathrm{L}_1 + \alpha\mathrm{L}_2 \\ a_1 + a_2\alpha + a_3\alpha^2 & = & q_0 & \\ a_2 + a_3\alpha & = & q_1 & \\ a_3 & = & q_2 & \end{array}\right.$$

La première ligne n'amène aucune incompatibilité dans le système car α est racine de P. On a donc bien une unique solution à notre système. On a bien montrer que pour P une fonction polynomiale de degré 3 admettant une racine (réelle) α, il existe une unique fonction polynomiale Q de degré 2 telle que, pour tout réel x, on ait

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x).$$

2. Utiliser les définitions de limites en $+\infty$ et $-\infty$ et le théorème des valeurs intermédiaires énoncé dans le cours pour conclure.

Exercice 1.5 – un premier pas vers la méthode de Newton ($\star$) – On considère f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'équation de la tangente Δ_α à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f au point d'abscisse α.
2. Déterminer l'intersection de la droite Δ_α et de l'axe des abscisses.

Solution(s). 1. C'est du cours. La droite Δ_α est d'équation $y = f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha)$.

2. L'axe des abscisses est la droite d'équation $y = 0$: l'intersection de cette droite et de la droite Δ_α est entièrement déterminée par le système (très simple) suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ y & = & f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha) \end{array}\right. \tag{1}$$

qui est équivalent, par substitution, à

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ 0 & = & f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha) \end{array}\right. .$$

Finalement, les droites Δ_α et l'axe des abscisses s'intersectent si et seulement si l'équation $f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) + f(\alpha) = 0$ admet une solution.

— Si $f'(\alpha) \neq 0$, alors cette équation admet pour unique solution

$$x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} .$$

Ainsi, le point d'intersection des deux droites est de coordonnées $(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0)$.

— Si $f'(\alpha) = 0$, alors le système (1) est équivalent au système

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ 0 & = & f(\alpha) \end{array}\right. .$$

On est dans le cas où la tangente Δ_α est parallèle ou confondu à l'axe des abscisses. Si $f(\alpha) \neq 0$, alors ce système n'admet aucune solution (c'est le cas où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses). Si $f(\alpha) \neq 0$, alors ce système admet une infinité de solutions car l'axe des abscisse et la tangente sont confondues.

Exercice 1.6 – Deux fonctions "usuelles" – On considère les fonctions ch (appelée *cosinus hyperbolique*) et sh (appelée *sinus hyperbolique*) les fonctions définies par

$$\mathrm{ch}(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} .$$

1. Étudier le domaine de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions ch et sh.

2. Démontrer que pour tout réel x, on a $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$. (Cela doit vous rappeler l'identité $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ issue du théorème de Pythagore.)
3. Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$, à laquelle on associe les fonctions
$$g : x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$
Montrer que la fonction g est paire et que la fonction h est impaire. Que peut-on en déduire sur ch et sh ?
4. Dresser le tableau de variation des fonctions ch et sh.
5. Pour chacune de ces deux fonctions, donner l'équation de la tangente à leur courbe représentative au point d'abscisse 0.
6. Donner l'allure des courbes représentative de ch et sh

(La fonction cosinus hyperbolique est une fonction importante en physique. Si l'on considère un cable attaché par ses deux extrémités et seulement soumis à la gravité, l'équation qui décrit ce cable est donnée par un cosinus hyperbolique.)

Solution(s). 1. La fonction exponentielle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc les fonctions ch et sh sont définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ comme combinaisons linéaires de fonctions satisfaisant ces propriétés.

2.
3.
4.
5.
6.

Exercice 1.7 – Parité, périodicité et symétrie – Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition et si la fonction est paire ou impaire, si elle est périodique (pour une période à préciser) et si sa courbe représentative admet un axe de symétrie vertical[1] :
$$f_1 : x \mapsto \cos(3x)\cos(x)^3 \ , \quad f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} \ , \quad f_3 : x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \ .$$

Solution(s). 1. Fonction paire et π-périodique.

2. La fonction f_2 est définie pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Elle est 2π-périodique et on a que pour tout réel x, $f_2(\pi - x) = f_2(x)$, c'est-à-dire que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f_2.
3. Pas définie en 0 mais prolongeable par continuité en 0. Paire car produit de fonctions impaires.

1. Ces notions n'ayant pas été vues en cours faute de temps, il faudra en rappeler les définitions.