Cours 3 – Matrices et applications linéaires

3.1. **L'algèbre des matrices.** On a vu dans le cours précédent, l'apparition d'un nouvel objet mathématique, *les matrices.* Commençons par une précision de vocabulaire.

Remarque 3.1 – À propos de la notion de corps – Vous avez déjà rencontrer différents ensembles de nombres, comme l'ensemble des nombres rationnelles $\mathbb{Q}$ ou l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (ou même pour certains, l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$). On munit ces ensembles de nombres de deux structures algébriques : l'addition et la multiplication. Elles vérifient des propriétés de vous connaissez et que vous avez l'habitude d'utiliser. La propriété la plus importante : pour tout élément $x \neq 0$, il existe un élément x^{-1}, nommé *l'inverse de* x tel que $x \times x^{-1} = 1$. (On remarquera que l'ensemble de nombres $\mathbb{Z}$ ne vérifie pas cette propriété).

Un ensemble muni de telles structures est appelé *un corps.* On emploiera cette terminologie dans la suite : on notera $\mathbb{K}$ un corps. Rappelez-vous simplement que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou même $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p un nombre premier, ensemble que vous avez vu dans le premier cours de l'année.)

Définition 3.2 *(Matrice).* Soient p et q deux entiers non nuls. On appelle *matrice de taille $p \times q$ à coefficient dans* $\mathbb{K}$, un tableau d'éléments de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ par exemple) qui comporte p lignes et q colonnes. Ainsi, une matrice $M = (m_{i,j})_{i,j}$ de taille $p \times q$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,q} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,q} \\ \vdots & \vdots & m_{i,j} & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \cdots & m_{p,q} \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $j \in [\![1, q]\!]$, l'élément $m_{i,j} \in \mathbb{K}$ est le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices de taille $p \times q$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.
Si $p = q$, on parle alors de *matrice carrée de taille p.*

Exemple 3.3 – Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est de taille 2×3, la matrice B de taille 3×2 et la matrice C de taille 3×1.

3.1.1. *Multiplication par un scalaire.*

Remarque 3.4 – On appelle *scalaire* les nombres du corps de base $\mathbb{K}$ (prenez $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans un premier temps).

Définition 3.5 *(Addition des matrices).* Soient p et q deux entiers non nuls. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $p \times q$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ d'une multiplication par les scalaires (les éléments du corps $\mathbb{K}$), définie, pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ et pour tout scalaire $k \in \mathbb{K}$, par

$$k \cdot M = (k \times m_{i,j})_{i,j} \ .$$

EXEMPLE 3.6 –

— Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} .$$

— Considérons la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad -B := -1 \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} .$$

— Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a que

$$0 \cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} .$$

La matrice $0 \cdot M$ est donc la matrice dont tous les coefficients sont nuls. La matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelé *la matrice nulle* : on la notera par 0.

3.1.2. *Addition des matrices.*

DÉFINITION 3.7 *(Addition des matrices).* Soient p et q deux entiers non nuls. On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $p \times q$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ de l'addition définie, pour toutes matrices $M = (m_{i,j})$ et $N = (n_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, par

$$M + N = (m_{i,j} + n_{i,j})_{i,j} \ .$$

REMARQUE 3.8 – On additionne les matrices coefficient par coefficient : pour deux matrices de taille $p \times q$

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \cdots & m_{1,q} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \cdots & m_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} & m_{p,2} & \cdots & m_{p,q} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & \cdots & n_{1,q} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \cdots & n_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n_{p,1} & n_{p,2} & \cdots & n_{p,q} \end{pmatrix}$$

alors

$$M + N = \begin{pmatrix} m_{1,1} + n_{1,1} & m_{1,2} + n_{1,2} & \cdots & m_{1,q} + n_{1,q} \\ m_{2,1} + n_{2,1} & m_{2,2} + n_{2,2} & \cdots & m_{2,q} + n_{2,q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p,1} + n_{p,1} & m_{p,2} + n_{p,2} & \cdots & m_{p,q} + n_{p,q} \end{pmatrix}$$

EXEMPLE 3.9 – — On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{alors on a} \quad A + D = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix} .$$

— On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors on a} \quad B + O = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} .$$

On constate que la matrice O est *le neutre de l'addition des matrices.*

— On considère les matrices

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{alors on a} \quad B + (-B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

— La somme $A + B$ n'a pas de sens.

ATTENTION. On n'additionne que des matrices qui ont *la même taille* !

PROPOSITION 3.10. *Soient p et q deux entiers non nuls.*

— *L'addition des matrices est associative, c'est-à-dire, que pour tous $M, N, P \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a*

$$(M + N) + P = M + (N + P) .$$

— *Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,*

— *Pour une matrice $M = (m_{i,j})$,* l'inverse de *M est la matrice $-M$. Autrement dit, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, on a*

$$M + (-M) = 0 ,$$

où 0 désigne la matrice nulle de taille $p \times q$.

3.1.3. *Multiplication des matrices.*

DÉFINITION 3.11 *(Multiplication des matrices).* Soient p, q et l, trois entiers naturels non nuls. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de taille $p \times l$ et $B = b_{i,j}$, une matrice de taille $l \times q$. On définit la *multiplication de A par B*, notée $A \times B$, la matrice dont le coefficient $(A \times B)_{i,j}$, c'est-à-dire le coefficient à la i-ème ligne et la j-ème colonne est égal à

$$(A \times B)_{i,j} := \sum_{k=1}^{l} a_{i,k} b_{k,j} .$$

REMARQUE 3.12 – Apprendre cette formule par cœur ne sert pas à grand chose : il faut s'entraîner à faire ce produit pour l'intégrer petit à petit, en se servant de la figure 2.

Nous venons de définir une multiplication entre matrices. Si l'on pense à la multiplication des nombres, on sait depuis longtemps que le nombre 1 joue un rôle particulier par rapport à la multiplication : pour tout nombre $x \in \mathbb{K}$, on a $1 \times x = x$. Il existe des matrices qui jouent un rôle similaire : les *matrices identités.*

DÉFINITION 3.13 *(Matrice identité).* Soit n un entier naturel non nul. La *matrice identité de taille* n, que l'on note I_n, est la matrice

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

PROPOSITION 3.14 (Propriétés de la multiplication). *Soient* $A, A' \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{q,p}$ *et* $C \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})$ *cinq matrices.*

— *La matrice identité est le neutre de la multiplication :*

$$A \times I_q = A \ \ et \ \ I_r \times A = A \ .$$

— *La multiplication des matrices est associative :*

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \ .$$

— *La multiplication est distributive par rapport à l'addition de matrices*

$$(A + A') \times B = A \times B + A' \times B \ \ et \ \ A \times (B + B') = A \times B + A \times B' \ .$$

REMARQUE 3.15 – En général, on omettra le symbole $\times$ pour alléger les notations, comme vous avez l'habitude de le faire lorsque vous multipliez un nombre avec une variable/inconnue.

ATTENTION.

1. La multiplication de deux matrices n'a pas toujours de sens : il faut que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite !

2. On ne multiplie pas les matrices coefficient par coefficient.

EXEMPLE 3.16 – On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} , \ C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} .$$

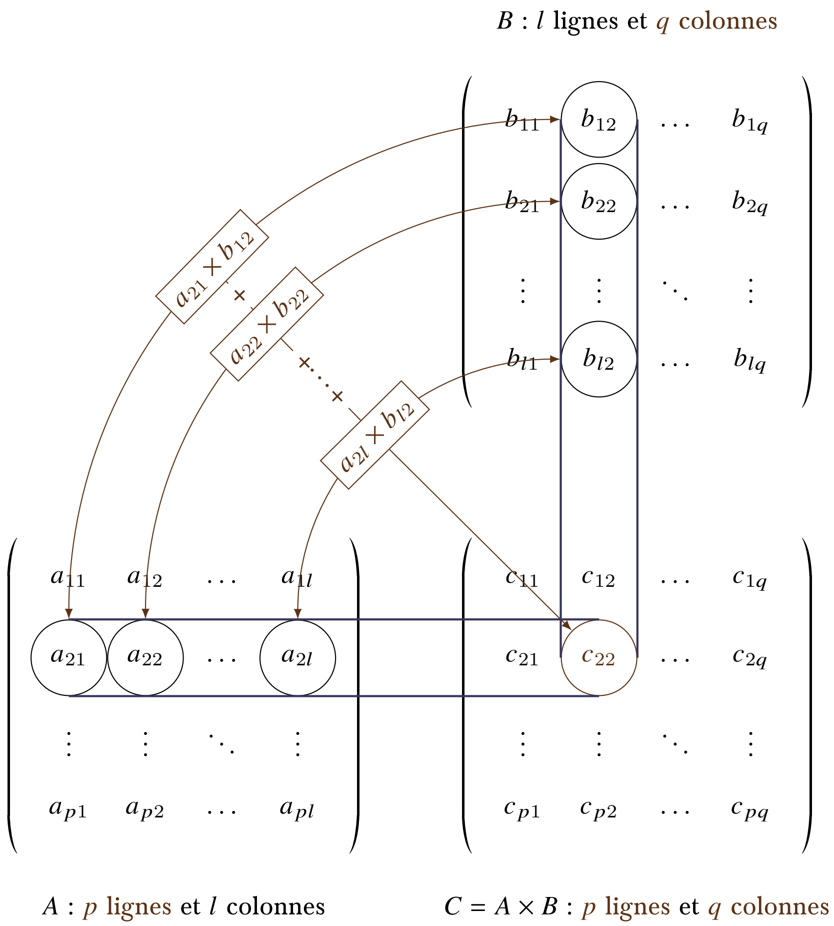
— Le produit $A \times B$ est égal à

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 & 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix} .$$

— Le produit $B \times A$ est égal à

$$B \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 4 & 1 \times 2 + 2 \times 5 & 1 \times 3 + 2 \times 6 \\ 3 \times 1 + 4 \times 4 & 3 \times 2 + 4 \times 5 & 3 \times 3 + 4 \times 6 \\ 5 \times 1 + 6 \times 4 & 5 \times 2 + 6 \times 5 & 5 \times 3 + 6 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$$

Figure 2. Multiplication de deux matrices A et B : on illustre ici que le coefficient c_{22} de la matrice $A \times B$ est égal à la somme $\sum_{k=1}^{l} a_{2k} b_{k2}$.



— Le produit $A \times C$ est égal à

$$A \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 \\ 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 49 \end{pmatrix}.$$

— Le produit $C \times A$ n'a pas de sens car la matrice C n'a qu'une colonne alors que la matrice A possède deux lignes. De même, le produit $B \times C$ n'a pas de sens.

— Le produit $C \times D$ est égal à

$$C \times D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 & 1 \times 2 & 1 \times 3 \\ 3 \times 1 & 3 \times 2 & 3 \times 3 \\ 5 \times 1 & 5 \times 2 & 5 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix}.$$

— Le produit $D \times C$ est égal à

$$D \times C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 \end{pmatrix} = 22$$

Remarquez qu'ici, on omet les parenthèses car une matrice de taille 1×1 est un nombre (un élément de $\mathbb{K}$).

Remarque 3.17 – À propos des systèmes – On peut réécrire tout système comme une équation matricielle.Ainsi le système (S)

$$(S): \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right.$$

se réécrit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} .$$

3.1.4. *Inverse d'une matrice.* Une question naturelle lorsqu'on définit une multiplication est de savoir si, pour une matrice M, il existe une inverse cette multiplication, c'est-à-dire l'existence d'une matrice N telle que

$$M \times N = I_n = N \times M \ .$$

Par définition de la multiplication, une matrice inversible (c'est-à-dire qui possède une inverse) est forcément une matrice carrée.

Définition 3.18 *(Matrice inversible).* Soit n un entier non nul. Une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice carrée M^{-1} telle que

$$M \times M^{-1} = I_n = M^{-1} \times M \ .$$

Attention. Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles ! ! Par exemple, Considérons la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et essayons de déterminer une matrice

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

qui soit l'inverse de A :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

On voit qu'il est impossible de A possède une inverse, car si on multiplie A à droite par une matrice quelconque, on obtient forcément un 0 comme coefficient en bas à droite.

Proposition 3.19 (Inverse d'une matrice 2×2). *Une matrice*

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si $ad - bc = 0$. *Dans ce cas, l'inverse de* M *est*

$$M^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

§ *Existence et détermination de l'inverse.* Comment savoir si une matrice carrée est inversible et, dans ce cas, comment déterminer l'inverse d'une matrice carrée ? On utilise de nouveau notre algorithme du pivot de Gauss, comme nous allons l'illustrer sur l'exemple suivant.

On considère la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On va déterminer si M admet une inverse et si oui, quelle est elle ? On applique donc notre algorithme favori, en gardant trace des opérations faites sur les lignes. Pour cela, on place une matrice identité à gauche de notre matrice, on commence par faire la première partie de descente de l'algorithme :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ -7 & 2 & 3 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

On obtient 3 pivots dans une matrice de taille 3×3, donc la matrice M est inversible.

Remarque 3.20 – Si, pendant le calcul, on obtient une matrice avec moins de pivots que de de lignes (et donc de colonnes), alors la matrice n'est pas inversible !

On finit notre algorithme en faisant la remontée.

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \boxed{-3} & -3 \\ -7 & 2 & 3 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array} \sim \begin{array}{ccc|ccc} 17 & -4 & -6 & \boxed{3} & 3 & 0 \\ -9 & 3 & 3 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ -7 & 2 & 3 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 8 & -1 & -3 & \boxed{3} & 0 & 0 \\ -9 & 3 & 3 & 0 & \boxed{-3} & 0 \\ -7 & 2 & 3 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc|ccc} 8/3 & -1/3 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ -7/3 & 2/3 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}$$

On a fini notre algorithme. On peut lire l'inverse de M à gauche :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -7/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 3.21 – Pendant un calcul d'inverse à la main, il n'est pas rare de faire une erreur de calcul. On vérifie donc celui-ci en calculant le produit $M \times M^{-1}$:

$$M \times M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/3 & -1/3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -7/3 & 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. **Application linéaire associée à une matrice.**

3.2.1. *À propos de vecteurs.* On a vu que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des vecteurs du plan (par définition). On peut généraliser cette notion à toute dimension et à tout corps $\mathbb{K}$.

Définition 3.22 *(L'ensemble $\mathbb{K}^n$).* Soit n un entier naturel non nul. L'ensemble $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}^n := \left\{(a_1, \ldots, a_n) \mid \forall i \in [\![1, n]\!]\ ,\ a_i \in \mathbb{K}\right\}\ .$$

Un élément de $\mathbb{K}^n$ est appelé *vecteur.*

L'ensemble $\mathbb{K}^n$ possède exactement les même structures algébriques que l'ensemble $\mathbb{R}^2$.

— On peut multiplier un vecteur $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda \cdot (a_1, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n)\ .$$

— On peut additionner deux vecteurs $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{K}^n$ par :

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)\ .$$

Cette somme est associative, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\mathbb{K}^n$, alors

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\ .$$

Remarque 3.23 – En fait, l'ensemble $\mathbb{K}^n$ muni de ces deux opérations est l'archétype d'un $\mathbb{K}$-*espace vectoriel.* Cette notion est centrale en algèbre linéaire, même si nous n'aurons pas le temps d'y consacrer du temps cette année.

Proposition 3.24 (Base canonique de $\mathbb{K}^n$). *La famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ forme une base de $\mathbb{K}^n$, c'est-à-dire que tout vecteur $\vec{v} = (a_1, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{K}^n$ s'écrit*

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n\ .$$

La famille $\mathcal{B}$ s'appelle la base canonique de $\mathbb{K}^n$. *Les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$: les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base canonique seront notés par une matrice colonne*

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Remarque 3.25 – La notion de base est fondamentale en algèbre linéaire. Malheureusement, faute de temps, nous n'avons pas le temps de la voir en détail.

3.2.2. *Définition.* On a vu apparaître la notion de matrice comme une simplification notationnelle pour la résolution de systèmes linéaires, puis comme un ensemble d'objets sur lequel on peut faire un certain nombres d'opérations (addition, multiplication). Par exemple, on va coder $2x - y + 3z$ par la matrice 1×3

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

On peut aussi penser que cette matrice ligne code l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \longmapsto & 2x - y + 3z \end{array}$$

De la même manière, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

qui code le membre de gauche de notre premier exemple de la section 2.2.1, peut aussi coder l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + 2z, 2x - y + z, x + 3y + 4z) \end{array}$$

ce qui se voit mieux lorsque l'on la note en coordonnées

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x - y + z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix} \end{array}$$

En effet, on a

$$\begin{pmatrix} x + y + 2z \\ 2x - y + z \\ x + 3y + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

DÉFINITION 3.26 *(Application linéaire).* Une application $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ est dite ***linéaire*** si, pour tous vecteurs v, w de $\mathbb{K}^n$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application ϕ satisfait

$$\phi\,(v + \lambda w) = \phi(v) + \lambda\phi(w) \ .$$

PROPOSITION 3.27. *Une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ de $\mathbb{K}^n$ vers $\mathbb{K}^p$ est codée par une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$*

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \cdots & m_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

REMARQUE 3.28 – La notion d'application linéaire est la généralisation de la notion de fonction linéaire que vous avez apprise il y a longtemps. Une fonction réel est linéaire est une fonction de la forme $x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$. Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ de la forme $X \to AX$ où A est une matrice de taille $p \times n$.

3.2.3. *Composition d'applications linéaires.*

PROPOSITION 3.29. *Soient $\phi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ et $\psi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^p$ deux applications linéaires. On note $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ les matrices de ϕ et ψ (c'est-à-dire que $\phi \colon X \mapsto MX$ et $\psi \colon Y \mapsto NY$). Alors la composée $\psi \circ \phi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$ est une application linéaire et la matrice associée est $N \times M$.*

Démonstration. Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{K}^m$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire. On a

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi(v + \lambda w) &= \psi\big(\phi(v) + \lambda\phi(w)\big) && \text{car } \phi \text{ est linéaire} \\
&= \psi(\phi(v)) + \lambda\psi(\phi(w)) && \text{car } \psi \text{ est linéaire} \\
&= \psi \circ \phi(v) + \lambda\psi \circ \phi(w) \ ,
\end{aligned}$$

donc $\psi \circ \phi$ est linéaire. □

3.2.4. *Application linéaire associée à une matrice carrée.* D'après ce qui précède, à une matrice carrée de taille n, on associe une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. On peut s'intéresser à l'injectivité, la surjectivité ou la bijectivité d'une telle application.

PROPOSITION 3.30. *Une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est injective si et seulement si l'équation $\phi(v) = 0$ admet le vecteur nul comme unique solution.*

Démonstration. En fait le résultat est plus général que cela. Considérons une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$ Si ϕ est injective, alors par définition de l'injectivité, on a que l'équation $\phi(v) = 0$ admet une unique solution.

$\Leftarrow$ Supposons à présent que l'équation $\phi(v) = 0$ admet une unique solution, et supposons par l'absurde que ϕ n'est pas injective. Alors il existe deux vecteurs distincts $v \neq w \in \mathbb{K}^m$ tels que $\phi(v) = \phi(w)$.

□

PROPOSITION 3.31. *Une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ est bijective si sa matrice associée M est inversible. Dans ce cas, la matrice associée à la bijection réciproque de ϕ est la matrice M^{-1}.*

On peut également citer le résultat ci-dessous, qui est dû à la structure d'espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

THÉORÈME 3.32

Soit une application linéaire $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$. Les assertions suivants sont équivalentes :

1. *l'application ϕ est injective ;*
2. *l'application ϕ est surjective ;*
3. *l'application ϕ est bijective.*

ATTENTION. Ce résultat n'est vrai que parce qu'on a des applications linéaires. Si l'application ϕ n'est pas linéaire, ce résultat est faux en général.

3.3. **Produit scalaire et distance euclidienne.**

3.3.1. *Rappel de géométrie du plan.* Cette section est un ensemble de rappels de notions vues au lycée. Pour cette section, on travaillera avec le corps des nombres réels $\mathbb{R}$.

§ *Produit scalaire.*

DÉFINITION 3.33 *(Produit scalaire).* Soient $v = (a, b)$ et $w = (a', b')$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Le *produit scalaire* de v et w, noté $\langle v, w\rangle$ est le nombre réel

$$\langle v, w\rangle \coloneqq aa' + bb' \ .$$

Remarque 3.34 – Le produit scalaire est également noté avec un point médian. Ainsi, pour deux vecteurs u et v, on pourra noter le produit scalaire aussi bien par $\langle u, v\rangle$ que par $u \cdot v$. Aussi, quand il n'y aura pas d'ambiguité, on pourra également noter

$$u^2 := u \cdot u = \langle u, u\rangle.$$

Proposition 3.35. *Le produit scalaire* $\langle -, -\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

(1) il est symétrique, *c'est-à-dire que pour tous vecteurs* v *et* w *de* $\mathbb{R}^2$, *on a* $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ *;*

(2) il est linéaire à droite, *c'est-à-dire que pour tous vecteurs* u, v *et* w *de* $\mathbb{R}^2$ *et pour tout réel* k, *on a*

$$\langle u, v + kw\rangle = \langle u, v\rangle + k \cdot \langle u, w\rangle \ ;$$

(3) il est défini positif, *c'est-à-dire que pour tout vecteur* v *de* $\mathbb{R}^2$, *on a que* $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ *et* $\langle v, v\rangle = 0$ *si, et seulement si le vecteur* v *est le vecteur nul.*

Corollaire 3.36. *Le produit scalaire satisfait la propriété de* linéarité à gauche, *c'est-à-dire que pour tous vecteurs* u, v *et* w, *et pour tout réel* k, *on a*

$$\langle u + kv, w\rangle = \langle u, w\rangle + k\langle v, w\rangle \ .$$

Définition 3.37. Deux vecteurs v et w de $\mathbb{R}^2$ sont dits *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul, soit encore

$$\langle v, w\rangle = 0 \ .$$

Exemple 3.38 – On considère les points $A = (2, 0)$, $B = (4, 1)$, $C = (2, 1)$ et $D = (1, 3)$. On a donc $\overrightarrow{AB} = (2, 1)$ et $\overrightarrow{CD} = (-1, 2)$, qui sont des vecteurs orthogonaux, car

$$\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\rangle = 2 \times (-1) + 1 \times 2 = 0 \ .$$

On illustre cela en Figure 3.

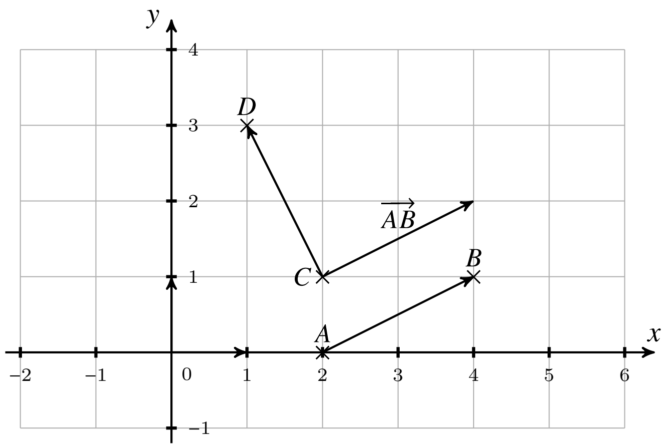


Figure 3. Illustration de Exemple 3.38

✎ Exercice 3.39 – Considérons v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ orthogonaux, c'est-à-dire que $\langle v, w\rangle = 0$. Montrer que pour tout vecteur w' colinéaire à w, on a $\langle v, w'\rangle = 0$.

DÉFINITION 3.40. Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites *perpendiculaires* si pour v et v', respectivement des vecteurs directeurs de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on a

$$\langle v, v' \rangle = 0 \ .$$

REMARQUE 3.41 – D'après l'exercice 3.39, la définition précédente a bien un sens, car elle ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs des droites.

DÉFINITION 3.42 *(Norme d'un vecteur).* On appelle *norme* du vecteur v, que l'on note $\|v\|$, le nombre réel positif donné par

$$\|v\| \coloneqq \sqrt{\langle v, v \rangle} \ .$$

REMARQUE 3.43 – La définition précédente a bien un sens car on a vu en Proposition 3.35 que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$, on a $\langle v, v \rangle \geqslant 0$.

PROPOSITION 3.44. *Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On a les égalités suivantes*

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \ ,$$

et

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \ .$$

✎ EXERCICE 3.45 – Démontrer la proposition précédente à l'aide des propriétés du produit scalaire.

COROLLAIRE 3.46. *Pour tous vecteurs v et w de $\mathbb{R}^2$, on a*

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$$

et

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) \ .$$

Démonstration. Ce corollaire est une simple réécriture des égalités énoncées en Proposition 3.44. □

§ Distance euclidienne sur le plan affine.

DÉFINITION 3.47 *(Distance euclidienne). La distance euclidienne* entre les points P et Q du plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, notée $d(P, Q)$, est définie par

$$d(P, Q) \coloneqq \|\overrightarrow{PQ}\| \ .$$

Si les points P et Q ont respectivement pour coordonnées les couples (x_P, y_P) et (y_Q, y_Q), alors on a

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \ .$$

Le plan affine muni de cette distance est appelé *le plan euclidien* et est noté $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$.

EXEMPLE 3.48 – On considère les points $A = (1, 2)$ et $O = (0, 0)$. On a que

$$d(O, A) = \sqrt{(2^2 + 1^2)} = \sqrt{5} \ .$$

PROPOSITION 3.49. *La distance euclidienne sur $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ est une application*

$$d \colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \times \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ ,$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(1) la positivité*, c'est-à-dire que pour tous points P et Q dans le plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, on a $d(P,Q) \geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si, $P = Q$;*

(2) la symétrie*, c'est-à-dire que pour tous points P et Q dans le plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, on a $d(P,Q) = d(Q,P)$;*

*(3) l'*inégalité triangulaire*, c'est-à-dire que pour tous points P, Q et R dans le plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$,*

$$d(P,R) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R) \ ,$$

avec égalité si, et seulement si, les trois points sont alignés de telle sorte que Q se trouve sur le segment $[PR]$.

3.3.2. *Généralisation : l'espace euclidien.* On peut généraliser la notion de produit scalaire et de distance à n'importe quel espace $\mathbb{R}^n$

Définition 3.50 *(Produit scalaire).* Le produit scalaire de deux vecteurs $v = (a_1, \ldots, a_n)$ et $w = (b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est défini par

$$\langle v, w\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \ .$$

Ce produit scalaire satisfait exactement les mêmes propriétés que le produit scalaire du plan

Proposition 3.51. *Le produit scalaire $\langle -, -\rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfait les propriétés suivantes :*

(1) il est symétrique*, c'est-à-dire que pour tous vecteurs v et w de $\mathbb{R}^n$, on a $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$;*

(2) il est linéaire à droite*, c'est-à-dire que pour tous vecteurs u, v et w de $\mathbb{R}^n$ et pour tout réel k, on a*

$$\langle u, v + kw\rangle = \langle u, v\rangle + k \cdot \langle u, w\rangle \ ;$$

(3) il est défini positif*, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$, on a que $\langle v, v\rangle \geqslant 0$ et $\langle v, v\rangle = 0$ si, et seulement si le vecteur v est le vecteur nul.*

De même, on peut généraliser la distance euclidienne à $\mathbb{R}^n$

Définition 3.52 *(Distance euclidienne). La distance euclidienne* entre les points P et Q de l'espace affine à n dimension, notée $d(P,Q)$, est définie par

$$d(P,Q) \coloneqq \|\overrightarrow{PQ}\| \ .$$

Proposition 3.53. *La distance euclidienne est une application*

$$d \colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \times \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ ,$$

qui satisfait les propriétés suivantes :

(1) la positivité*, c'est-à-dire que pour tous points P et Q, on a $d(P,Q) \geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si, $P = Q$;*

(2) la symétrie*, c'est-à-dire que pour tous points P et Q de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$, on a $d(P,Q) = d(Q,P)$;*

*(3) l'*inégalité triangulaire*, c'est-à-dire que pour tous points P, Q et R de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$*

$$d(P,R) \leqslant d(P,Q) + d(Q,R) \ ,$$

avec égalité si, et seulement si, les trois points sont alignés de telle sorte que Q se trouve sur le segment $[PR]$.

Remarque 3.54 – On verra plus tard que ces trois propriétés nous fournit une définition générale de distance. En particulier, on pourra définir une distance sur $(\mathbb{F}_2)^n$, où $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ est le corps à deux éléments.

3.3.3. *Isométries du plan.*

Définition 3.55 *(Application affine).* Une application affine du plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ est une application de la forme

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \\ \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} .$$

L'application $\tilde{\phi}$ donné par

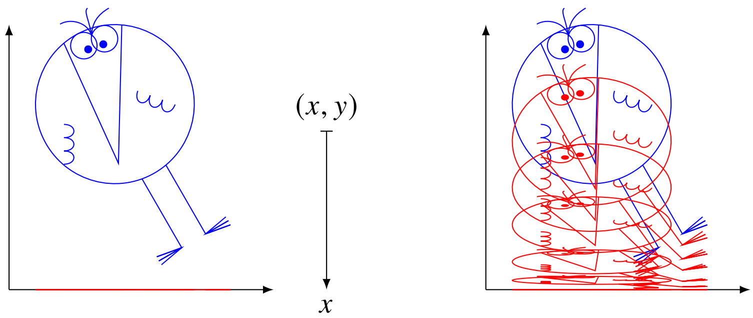
$$\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

est la partie linéaire de l'application ϕ.

Exemple 3.56 – Projection sur un axe – La projection orthogonale sur l'axe des abscisses (la droite d'équation $y = 0$) est l'application affine définie par

$$: \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \\ \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} .$$

On peut illustrer cela par les figures suivantes (provenants du très bon site `http://exo7.emath.fr/un.html`) :



On va s'intéresser directement à une classe particulière d'applications affines : les isométries.

Définition 3.57. Une isométrie de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ est une application affine $\phi\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ qui préserve les distances : pour tous points $P, Q \in \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, on a

$$d\big(\phi(P), \phi(Q)\big) = d(P, Q) .$$

On peut facilement voir qu'une application affine est une isométrie par la caractérisation suivante.

Proposition 3.58. *Une application affine ϕ du plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$*

$$\phi\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \\ \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} ,$$

est une isométrie si et seulement si les vecteurs $u = (a, c)$ et $v = (b, d)$ forment une base orthonormée, c'est-à-dire qu'ils satisfont :

— $\|u\| = 1 = \|v\|$;

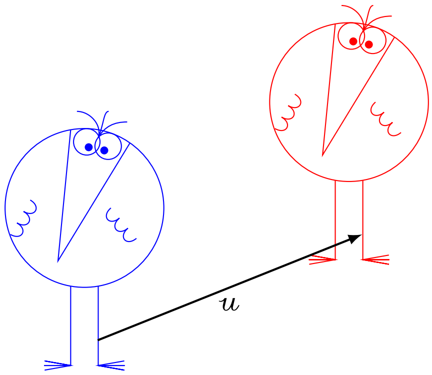
— $\langle u, v\rangle = 0$.

Dans la suite de cette section, on va présenter quelques exemples d'isométries du plan.

§ *Translation.*

DÉFINITION 3.59 *(Translation de vecteur u).* Soit $u = (\alpha, \beta)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. La *translation de vecteur u* est l'application

$$\begin{array}{rccc} t_u : & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \\ & P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \longmapsto & t_u(P) = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \end{array} .$$

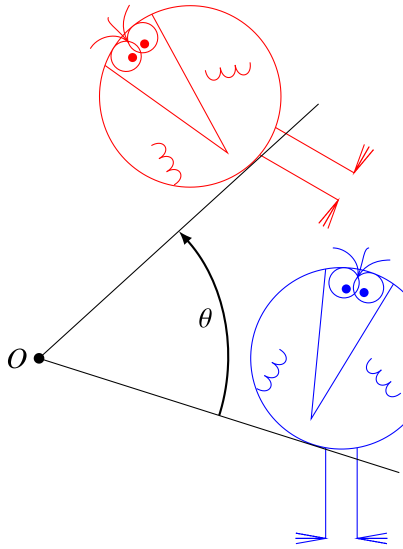


PROPOSITION 3.60. *La translation de vecteur u est une bijection. Sa bijection réciproque est la translation de vecteur $-u$.*

§ *Rotation du plan.* On commence par définir la rotation d'angle θ de centre $O = (0, 0)$.

DÉFINITION 3.61 *(Rotation de centre O et d'angle θ).* Soit θ un réel. La rotation de centre O et d'angle θ est l'application affine

$$\begin{array}{rccc} r_{O,\theta} : & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \\ & P = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} & \longmapsto & r_{O,\theta}(P) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} \end{array} .$$



On peut à présent définir la rotation d'angle θ de centre $P = (x_P, y_P)$.

DÉFINITION 3.62. Soit θ un réel. La rotation de centre O et d'angle θ est l'application affine

$$r_{P,\theta} = t_{\overrightarrow{OP}} \circ r_{O,\theta} \circ t_{-\overrightarrow{OP}} \ .$$

Dans ce cours, nous n'avons fait qu'effleurer les transformations du plan. On aurait pu également parler de similitude, de l'expression de ces similitudes grâce aux nombres complexes, etc ...

Références

[Bod] A. Bodin. Cours première année. http://exo7.emath.fr/un.html.

[dMdldN20] Département de Mathématiques de l'Université de Nantes. Cours d'algèbre pour les informaticiens, première année. 2020.

[Mol] M. Molin. Cours BCPST – Statistiques. https://molin-mathematiques.fr/sources/section239.php#main.

[Ran20] P. Rannou. Cours IUT Informatique de Nantes. 2020.

Email address: johan.leray@univ-nantes.fr

Département d'informatique – IUT de Nantes