

Feuille de TD 2 : démonstrations sur les graphes

Exercice 1 : Graphes complémentaires

- (a) Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ayant n sommets et m arcs. Combien d'arcs a son complémentaire ?
- (b) Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté ayant n sommets et m arêtes. Combien d'arêtes a son complémentaire ?

Exercice 2 : Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

- (a) Démontrez ce lemme.
- (b) Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Exercice 3 : Graphe simple

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple, non orienté.

- (a) Par récurrence, montrez que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.
- (b) Par l'absurde, montrez qu'il existe deux sommets différents ayant le même degré.

Exercice 4 : Réseaux sociaux

Montrez que dans un groupe de n personnes, il y a toujours au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.