Feuille de TD 2 : démonstrations sur les graphes

Exercice 1 : Graphes complémentaires

(a) Soit $G = (S, A)$ un graphe orienté ayant n sommets et m arcs. Combien d'arcs a son complémentaire ?

(b) Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté ayant n sommets et m arêtes. Combien d'arêtes a son complémentaire ?

Solution: Le graphe complémentaire a également s sommets mais 2 sommets sont adjacents dans $\bar{G}$ s'ils ne le sont pas dans G.

1. $\bar{m} = n^2 - m$ (n^2 est le nombre d'arcs dans le graphe complet).
2. $\bar{m} = \frac{n(n+1)}{2} - m$ ($\frac{n(n+1)}{2}$ est le nombre d'arêtes dans le graphe complet).

Exercice 2 : Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.

(a) Démontrez ce lemme.

(b) Montrez qu'un graphe simple a un nombre pair de sommets de degré impair.

Solution:

(a) Soit $G = (S, A)$ un graphe.
Quand on calcule la somme des degrés des sommets, chaque arête $\{x, y\} \in A$ est comptée une fois pour le degré du sommet x et une fois pour le degré du sommet y.
Ainsi, chaque arête est comptée 2 fois donc la somme des degrés des sommets est égale au double du nombre d'arêtes.

(b) Soit P l'ensemble des sommets de degré pair d'un graphe simple G et I l'ensemble des sommets de degré impair de G. On a :

$$\sum_{s\in S} d(s) = \sum_{s\in P} d(s) + \sum_{s\in I} d(s) = 2|A|,$$

d'après la question 1.
La valeur $2|A|$ est paire (car 2 fois un nombre, pair ou impair, est une valeur paire).
La somme $\sum_{s\in P} d(s)$ est également paire car c'est la somme d'entiers pairs (les degrés pairs $d(s)$). Donc la somme $\sum_{s\in I} d(s)$ est également paire car c'est la différence de 2 nombres pairs.
Pour que la somme $\sum_{s\in I} d(s)$, qui est une somme d'entiers impairs (les degrés impairs $d(s)$), soit un nombre pair, il faut que le nombre d'entiers additionnés soit pair.
Ainsi, il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

Remarque : dans une assemblée composée d'un nombre pair de personnes, chaque personne devra serrer un nombre impair de mains (d'où le nom du théorème).

Exercice 3 : Graphe simple

Soit $G = (S, A)$ un graphe simple, non orienté.

(a) Par récurrence, montrez que $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

(b) Par l'absurde, montrez qu'il existe deux sommets différents ayant le même degré.

Solution:

(a) **Démonstration par récurrence**

— $n = 1$: $m = 0$ et $\frac{n(n-1)}{2} = 0$ donc l'inégalité est vérifiée.

— *On suppose que l'inégalité est vraie pour n et on la montre pour $n + 1$.*
Il y a $n + 1$ sommets donc, à partir du graphe avec n sommets, on ajoute au plus n arêtes pour construire le graphe ayant $n + 1$ sommets (il n'y a pas de boucle car le graphe est simple).
Soit m'_{max} le nombre maximal d'arêtes pour $n + 1$ sommets. On a alors m'_{max} majorée comme suit :

$$\begin{aligned} m'_{max} &\leq \frac{n(n-1)}{2} + n \\ m'_{max} &\leq \frac{n^2-n+2n}{2} \\ m'_{max} &\leq \frac{n^2+n}{2} \\ m'_{max} &\leq \frac{(n+1)n}{2} \end{aligned}$$

Donc la relation est vraie pour $n + 1$.

(b) **Démonstration par l'absurde**
Soit n le nombre de sommets. Soit $d(x)$ le degré du sommet x dans G. On a toujours $0 \leq d(x) \leq n - 1$ (pas de boucle car le graphe est simple).
Si tous les sommets ont des degrés distincts alors on utilise toutes les valeurs entre 0 et $(n - 1)$. Soit s le sommet de degré $(n - 1)$. Il est donc connecté aux $n - 1$ autres sommets du graphe donc tous les autres sommets ont un degré supérieur ou égal à 1.
Cela est en contradiction avec le fait qu'il y ait un sommet de degré 0 et il y a donc deux sommets ayant le même degré.

Exercice 4 : Réseaux sociaux

Montrez que dans un groupe de n personnes, il y a toujours au moins deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Solution: Ce problème peut être représenté par un graphe : chaque sommet correspond à une personne et il existe une arête entre 2 sommets si les 2 personnes sont amies.
Le nombre d'amis présents pour une personne p correspond au degré du sommet p dans le graphe.
Or, dans l'exercice 7.2, nous avons montré que, dans tout graphe simple, il existe 2 sommets ayant le même degré soit, ici, 2 personnes ayant le même nombre d'amis présents.