TD 2 – Suites récurrentes

Exercice 2.1 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1. Montrer que (u_n) est croissante.
2. Montrer que (u_n) est minorée par 0 et majorée par 2.
3. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

Exercice 2.2 – On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1. Vérifier que (u_n) est bien définie.
2. Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - 1|$.
5. Conclure quant à la convergence de (u_n).

Exercice 2.3 – Étudier la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{4}{u_n + 2}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.
2. Étudier la monotonie de f.
3. Déterminer les points fixes de $f \circ f$.
4. Déterminer la nature de la suite (u_n).

Exercice 2.4 – On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}x(x^2 - 3x + 4)$$

et on définit une suite (u_n) par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier la monotonie de la fonction f.
2. Déterminer les points fixes de la fonction f.
3. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
4. Étudier la nature de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.