Graphes

5. Arbres couvrants

Solen Quiniou

solen.quiniou@univ-nantes.fr

IUT de Nantes

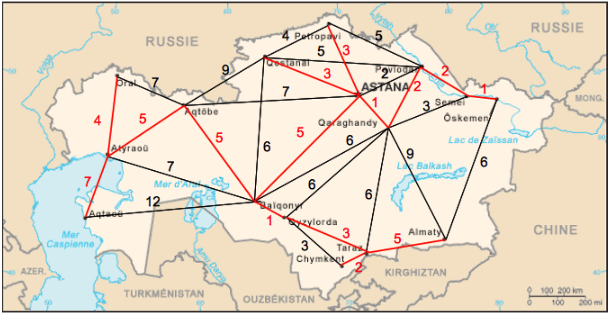
Année 2021-2022 – Info 1 (Semestre 2)

[Mise à jour du 27 janvier 2022]

Plan du cours

Arbres : exemple de problème traité

Vous êtes chargé par le gouvernement kazakh d'équiper le pays en accès internet à haut débit. Pour cela, vous devez relier les 16 plus grandes villes du Kazakhstan avec des câbles de fibre optique.
Après une étude préliminaire, vous estimez les coûts suivants de connexion entre les villes (en millions de KZT) :



Exemple tiré de `www.math.u-psud.fr/~montcouq/Enseignements/Apprentis/arbres.pdf`

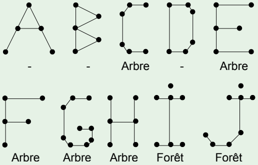
Quelles liaisons permettent de connecter toutes les villes à moindre coût ?

Arbres et forêts

Définitions : arbre et forêt

- **Arbre** : graphe connexe et sans cycle simple
- **Forêt** : graphe sans cycle simple et dont chaque composante connexe est un arbre

Exemples



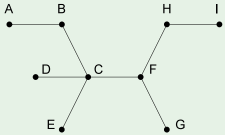
Plan du cours

Arbres enracinés

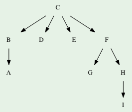
Définition : arbre enraciné et arborescence

- **Arbre enraciné** : graphe non orienté connexe, sans cycle simple et dont un sommet particulier, la racine, a été distingué
- **Arborescence** : graphe orienté obtenu en orientant chaque arête afin qu'il existe un chemin de la racine à chacun des autres sommets

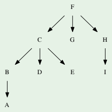
Exemple



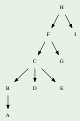
Racine en C



Racine en F



Racine en H



Terminologie

Définitions

Soit G une arborescence et x est un sommet distinct de la racine r

- **Fils de** x : sommets successeurs de x
- **Père de** x : unique prédécesseur de x
- **Ancêtres de** x : ascendants de x

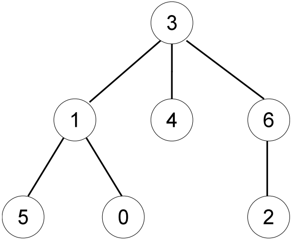
- **Nœuds** : autre nom des sommets
- **Feuilles** : nœuds sans fils

- **Degré d'un sommet** : nombre de fils du sommet

$\rightarrow$ les feuilles ont un degré nul

- **Profondeur d'un sommet** (ou hauteur) : nombre d'ancêtres du sommet

Exemple



- Racine *r* : sommet 3
- Fils du sommet 1 : sommets 0 et 5
- Père du sommet 1 : sommet 3
- Ancêtres du sommet 5 : sommets 1 et 3

- Feuilles : sommets 5, 0, 4 et 2

- Degré du sommet 1 : 2
- Degré du sommet 5 : 0

- Profondeur du sommet 1 : 1

Plan du cours

Arbres couvrants

Définitions : arbres couvrants

Soit *G* un graphe non orienté, valué et connexe

- **Arbre couvrant** : sous-graphe couvrant de *G* (c'est-à-dire contenant tous les sommets), connexe et sans cycle simple
- **Poids d'un arbre couvrant** : somme des valuations de ses arêtes

Recherche d'arbres couvrants de poids minimum

Définition : arbres couvrants de poids minimum

Soit G un graphe non orienté, valué et connexe

- **Arbre couvrant de poids minimum** : arbre couvrant dont le poids est le plus petit parmi les arbres couvrants de G

Algorithmes de Kruskal et de Prim

- Hypothèses
  - Graphe non orienté
  - Valuations des arêtes toutes positives
- Principe des algorithmes : construction de l'arbre couvrant, de manière itérative, en s'assurant que :
  - l'arbre reste couvrant et sans cycle simple (algorithme de Kruskal)
  - l'arbre reste connexe et sans cycle simple (algorithme de Prim)

$\rightarrow$ Exemples d'**algorithmes gloutons** : à chaque étape, nous faisons le meilleur choix courant, dans le but d'obtenir la meilleure solution globale

Plan du cours

Algorithme de Kruskal (1)

Principe

→ Construction d'un sous-graphe en ajoutant des arêtes une par une

- À chaque étape, recherche de l'arête de plus petite valuation parmi celles que l'on n'a pas déjà explorées

→ Ajout de l'arête au sous-graphe si elle ne crée pas de cycle simple (sinon on la laisse de côté)

- Fin de l'algorithme : quand on a sélectionné $n - 1$ arêtes ou que les arêtes restantes créeraient des cycles simples si on les ajoutait

Algorithme de Kruskal (2)

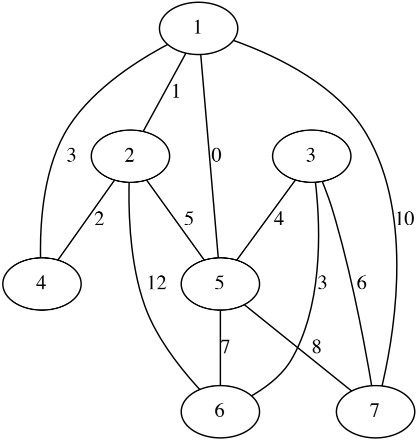
Données : **Graphe $G = (S, A)$ non orienté, valué et sans valuations négatives**
Résultat : **Arbre couvrant de poids minimum $G_a = (S, F)$**

```
// Initialisation de l'ensemble des arêtes de l'arbre couvrant
F = ∅ ;

// Tri des m arêtes de G, par valuation croissante
T = ensemble A des arêtes de G, triées par valuations croissantes ;

// Parcours des arêtes dans l'ordre de tri
i = 0 ;
tant que i < m et |F| < n − 1 faire
    a = T[i] ;
    si F ∪ {a} est sans cycle simple alors
        F = F ∪ {a} ;
    fin si
    i ++ ;
fin tq
```

Exemple d'utilisation de l'algorithme de Kruskal



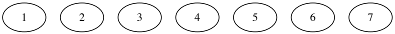
Graphe de départ

Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes

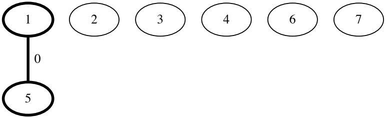


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$

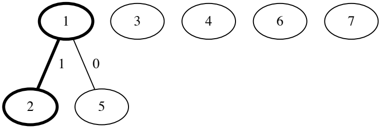


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$

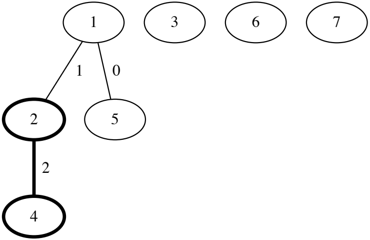


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$

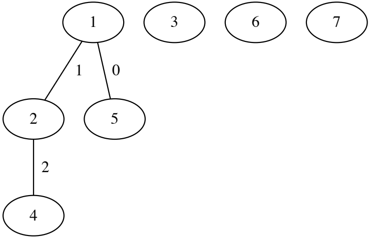


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$

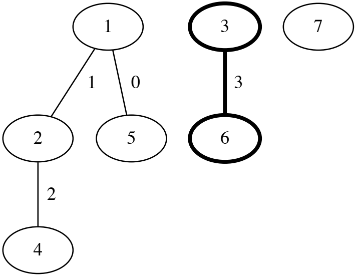


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$
  5. Ajout de $\{3,6\}$

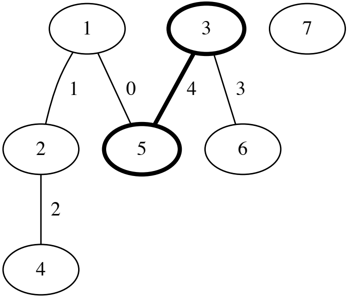


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$
  5. Ajout de $\{3,6\}$
  6. Ajout de $\{3,5\}$

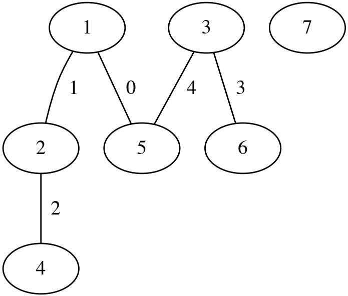


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$
  5. Ajout de $\{3,6\}$
  6. Ajout de $\{3,5\}$
  7. Pas d'ajout de $\{2,5\}$ car cycle $\{1,2,5,1\}$

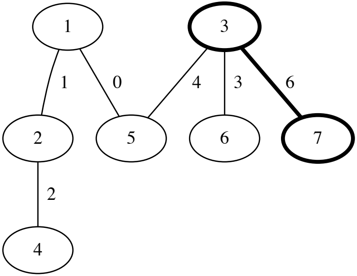


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$
  5. Ajout de $\{3,6\}$
  6. Ajout de $\{3,5\}$
  7. Pas d'ajout de $\{2,5\}$ car cycle $\{1,2,5,1\}$
  8. Ajout de $\{3,7\}$

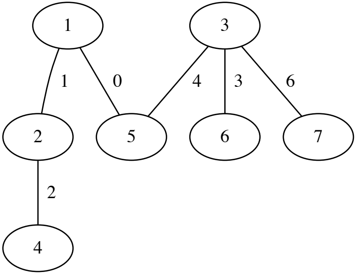


Exemple - choix des arêtes

- Tri des arêtes par valuation croissante :

  $\{1,5\}$, $\{1,2\}$, $\{2,4\}$, $\{1,4\}$, $\{3,6\}$, $\{3,5\}$, $\{2,5\}$, $\{3,7\}$, $\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{1,7\}$, $\{2,6\}$

- Boucle principale : ajout des arêtes
  1. Ajout de $\{1,5\}$
  2. Ajout de $\{1,2\}$
  3. Ajout de $\{2,4\}$
  4. Pas d'ajout de $\{1,4\}$ car cycle $\{1,2,4,1\}$
  5. Ajout de $\{3,6\}$
  6. Ajout de $\{3,5\}$
  7. Pas d'ajout de $\{2,5\}$ car cycle $\{1,2,5,1\}$
  8. Ajout de $\{3,7\}$



Arbre couvrant de poids 16

Algorithme de Kruskal (3)

Commentaires

- À chaque étape de l'algorithme : obtention d'une forêt couvrante (c'est-à-dire un sous-graphe couvrant sans cycle simple) qui grossit jusqu'à devenir un arbre
- Graphe G non connexe : obtention d'une forêt couvrante de poids minimum, c'est-à-dire d'un arbre couvrant de poids minimum sur chaque composante connexe de G
- Partie la plus coûteuse de l'algorithme de Kruskal : tri initial des arêtes

Plan du cours

Algorithme de Prim (1)

Principe

→ Construction d'un sous-graphe en ajoutant des arêtes et des sommets les uns après les autres

- À chaque étape, recherche de l'arête sortante de plus petite valuation (**arête sortante** : arête qui joint un sommet du sous-graphe avec un sommet qui n'est pas dans le sous-graphe)

→ Ajout de l'arête sortante et du sommet qu'elle joint, au sous-graphe

- Fin de l'algorithme : quand on a sélectionné $n-1$ arêtes

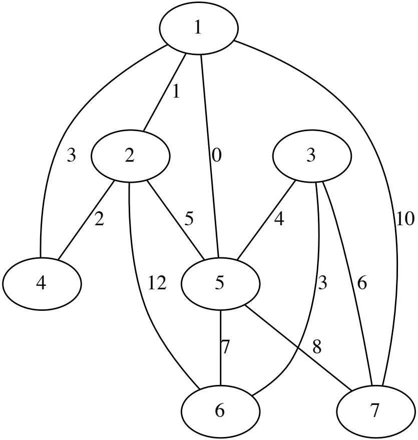
Algorithme de Prim (2)

Données : **Graphe $G = (S, A)$ non orienté, valué et sans valuations négatives**
Résultat : **Arbre couvrant de poids minimum $G_a = (S, F)$**

```
// Initialisation
F = ∅;                    // F : ensemble des arêtes de l'arbre couvrant
M = {x0} ;                // on marque un sommet quelconque de G

// Boucle principale
tant que il y a des arêtes sortantes de M faire
    // a arête sortante : x ∈ M et y ∉ M
    Chercher l'arête sortante a = {x, y} de plus petite valuation ;
    M = M ∪ {y} ;
    F = F ∪ {a} ;
fin tq
```

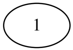
Exemple d'utilisation de l'algorithme de Prim



Graphe de départ

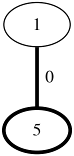
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$



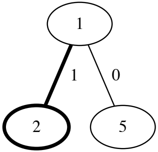
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1, 5\}$	$\{1, 5\}$



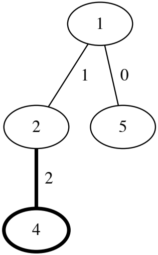
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1,5\}$	$\{1,5\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,5\}$



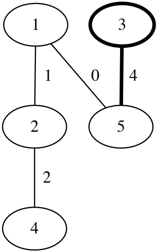
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1, 5\}$	$\{1, 5\}$
$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 5\}$
$\{2, 4\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$



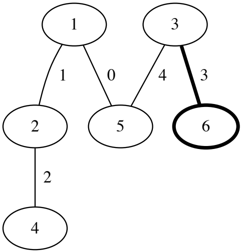
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1,5\}$	$\{1,5\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,5\}$
$\{2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$



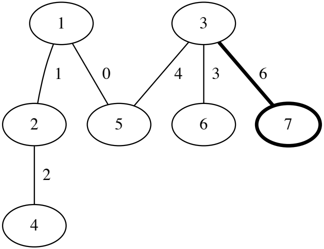
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1,5\}$	$\{1,5\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,5\}$
$\{2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\{3,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$



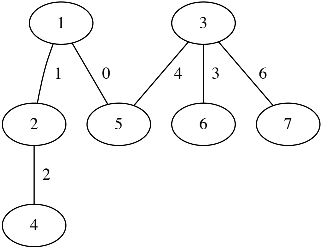
Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1,5\}$	$\{1,5\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,5\}$
$\{2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\{3,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
$\{3,7\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$



Exemple - choix des arêtes

a	M
-	$\{1\}$
$\{1,5\}$	$\{1,5\}$
$\{1,2\}$	$\{1,2,5\}$
$\{2,4\}$	$\{1,2,4,5\}$
$\{3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
$\{3,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$
$\{3,7\}$	$\{1,2,3,4,5,6,7\}$



Arbre couvrant de poids 16

Algorithme de Prim (3)

Commentaires

- À chaque étape de l'algorithme : obtention d'un sous-graphe partiel qui est un arbre et qui grossit jusqu'à devenir couvrant
- Graphe G connexe : choix du sommet initial pas important car tous les sommets finissent par être visités par l'algorithme
- Graphe G non connexe : obtention d'un arbre couvrant de poids minimum sur la composante connexe de G contenant le sommet initial