

# Graphes

## 6. Coloration

Solen Quiniou

`solen.quiniou@univ-nantes.fr`

IUT de Nantes

Année 2021-2022 – Info 1 (Semestre 2)

[Mise à jour du 31 janvier 2022]



# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Stables et cliques
- 3 Coloration des sommets
- 4 Coloration des arêtes
- 5 Théorème des quatre couleurs

# Coloration de graphes : exemples

- **Organisation d'une session d'examens** en un minimum de jours et sans créer de conflits pour des étudiants inscrits à plusieurs examens
  - ▶ **Sommets** : examens
  - ▶ **Arête** entre  $x$  et  $y$  si les examens  $x$  et  $y$  ne peuvent pas avoir lieu le même jour
  - **Couleurs** : jours des examens
- **Allocation de fréquences GSM**
  - ▶ **Sommets** : émetteurs radio
  - ▶ **Arête** entre  $x$  et  $y$  si le signal de  $x$  perturbe  $y$  ou réciproquement
  - **Couleurs** : fréquences radio

# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Stables et cliques
- 3 Coloration des sommets
- 4 Coloration des arêtes
- 5 Théorème des quatre couleurs

# Stables et cliques

## Définitions : stable et nombre de stabilité

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non-orienté

- **Stable de  $G$**  : sous-ensemble  $V \subset S$  qui ne comporte que des sommets non adjacents entre eux

→  $V$  : sous-graphe sans arête

- **Nombre de stabilité de  $G$**  : cardinal du plus grand stable, noté  $\alpha(G)$

# Stables et cliques

## Définitions : stable et nombre de stabilité

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non-orienté

- **Stable de  $G$**  : sous-ensemble  $V \subset S$  qui ne comporte que des sommets non adjacents entre eux

→  $V$  : sous-graphe sans arête

- **Nombre de stabilité de  $G$**  : cardinal du plus grand stable, noté  $\alpha(G)$

## Définitions : clique et ordre de la plus grande clique

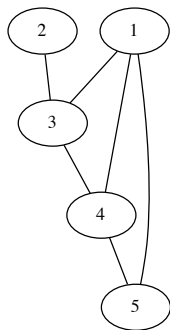
Soit  $G = (S, A)$  un graphe non-orienté

- **Clique d'ordre  $k$  de  $G$**  : sous-graphe simple et complet composé de  $k$  sommets

→ Tous les sommets sont adjacents entre eux

- **Ordre de la plus grande clique de  $G$**  : noté  $\omega(G)$

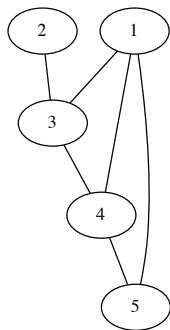
# Exemple



- Exemples de stables :  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3\}$ ...

→ **Nombre de stabilité** :  $\alpha(G) = 2$

# Exemple



- Exemples de stables :  $\{1, 2\}$ ,  $\{2, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ ,  $\{3\}$ ...

→ **Nombre de stabilité** :  $\alpha(G) = 2$

- Exemples de cliques d'ordre 3 :  $\{1, 3, 4\}$  et  $\{1, 4, 5\}$

→ **Ordre de la plus grande clique** :  $\omega(G) = 3$



# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Stables et cliques
- 3 Coloration des sommets**
- 4 Coloration des arêtes
- 5 Théorème des quatre couleurs

# Coloration des sommets d'un graphe

## Définitions : coloration de sommets et nombre chromatique

- **Coloration des sommets d'un graphe  $G$**  : affectation d'une couleur à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes
- Coloration avec  $k$  couleurs  $\Leftrightarrow$  partition de l'ensemble des sommets en  $k$  stables
- **Nombre chromatique de  $G$**  : nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe (noté  $\gamma(G)$ )

# Coloration des sommets d'un graphe

## Définitions : coloration de sommets et nombre chromatique

- **Coloration des sommets d'un graphe  $G$**  : affectation d'une couleur à chaque sommet du graphe de telle sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes
- Coloration avec  $k$  couleurs  $\Leftrightarrow$  partition de l'ensemble des sommets en  $k$  stables
- **Nombre chromatique de  $G$**  : nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe (noté  $\gamma(G)$ )

## Encadrement du nombre chromatique

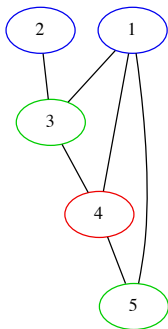
Soit  $G = (S, A)$  un graphe

- On a alors l'encadrement suivant :

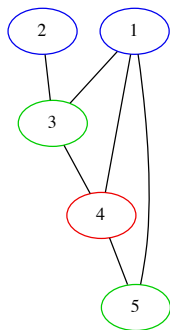
$$\omega(G) \leq \gamma(G) \leq n + 1 - \alpha(G)$$

# Exemple

- **Partition des sommets en 3 stables :**  
 $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 5\}$  et  $\{4\}$



# Exemple



- **Partition des sommets en 3 stables :**  
 $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 5\}$  et  $\{4\}$

- **Remarques**

- ▶ Comme l'ordre de la (des) plus grandes cliques est  $\omega(G) = 3$ , **on ne peut pas utiliser moins de 3 couleurs**
- ▶ On aurait aussi pu colorier le sommet 2 en rouge ; ainsi, **il n'existe pas forcément une coloration minimale unique**

# Algorithme de coloration des sommets

## Remarque

- Coloration des sommets d'un graphe : « problème difficile »
- Nombre de sommets grand et graphe avec beaucoup d'arêtes  $\Rightarrow$  pas d'algorithme performant pour déterminer la solution minimale
- **Algorithme de Welsh et Powell** : solution satisfaisante mais pas forcément minimale

# Algorithme de coloration des sommets

## Remarque

- Coloration des sommets d'un graphe : « problème difficile »
- Nombre de sommets grand et graphe avec beaucoup d'arêtes  $\Rightarrow$  pas d'algorithme performant pour déterminer la solution minimale
- **Algorithme de Welsh et Powell** : solution satisfaisante mais pas forcément minimale

---

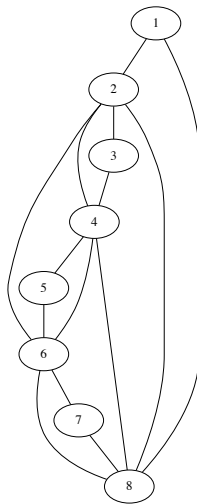
## Algorithme 2 : Algorithme de Welsh et Powell

---

Données : Graphe non-orienté  $G = (S, A)$

- 1 Classer les sommets dans l'ordre décroissant de leur degré ; // Initialisation
- 2 Attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste précédente;
- 3 **tant que** tous les sommets du graphe ne sont pas coloriés **faire**
- 4 | En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur  $c_i$  non encore utilisée au premier sommet non encore colorié;
- 5 | Attribuer cette couleur  $c_i$  aux sommets non encore coloriés et non adjacents à un sommet de cette couleur;
- 6 **fin tq**

# Exemple (1)

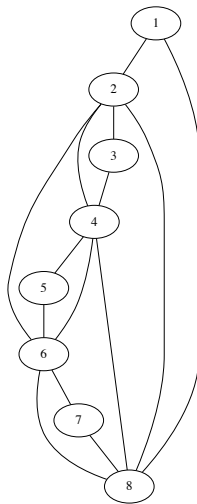


## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre								
Couleur								



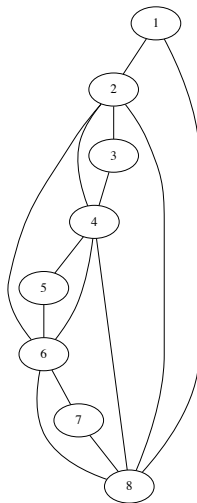
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre		1						
Couleur								

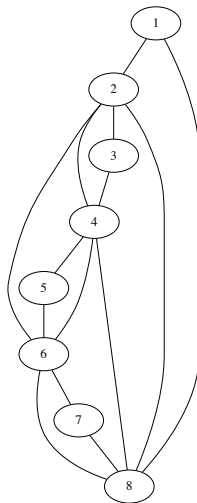
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre		1		2				
Couleur								

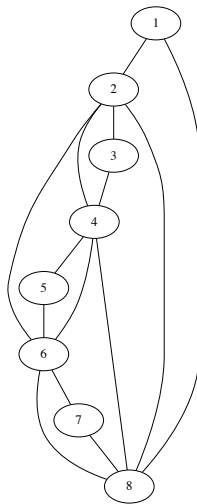
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre		1		2		3		
Couleur								

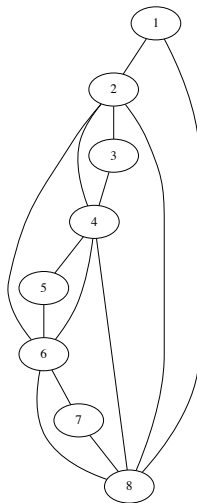
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre		1		2		3		4
Couleur								

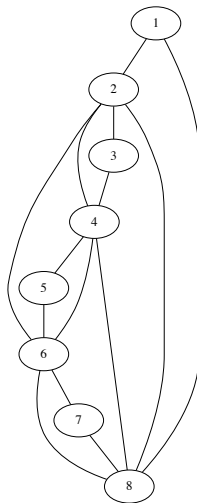
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1		2		3		4
Couleur								

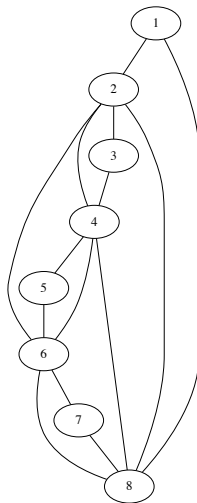
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2		3		4
Couleur								

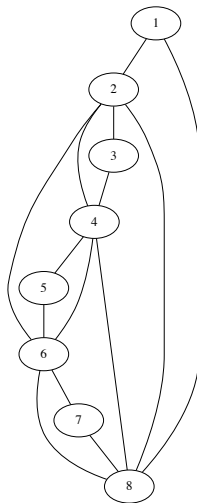
# Exemple (1)



## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3		4
Couleur								

# Exemple (1)

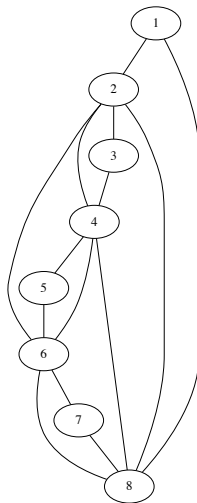


## Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								



# Exemple (1)



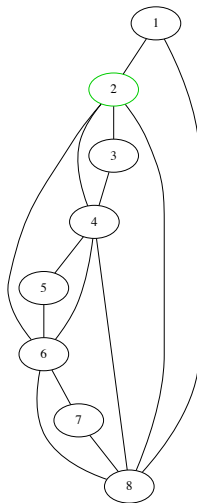
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

# Exemple (1)



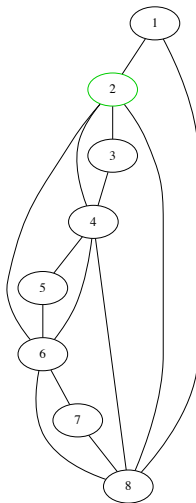
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



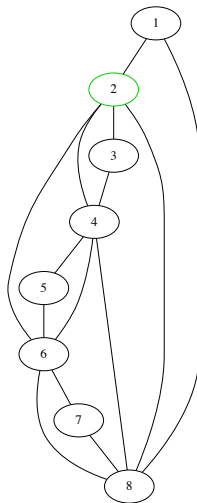
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



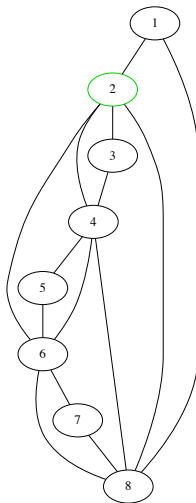
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



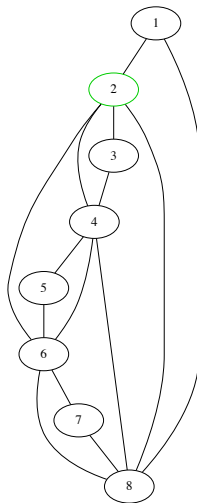
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



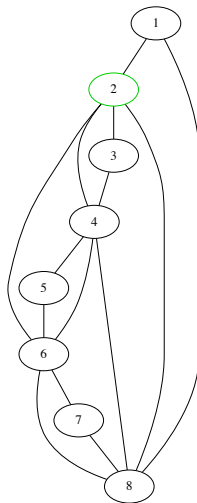
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



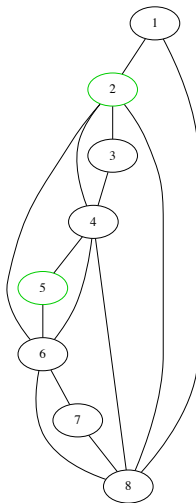
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1						

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

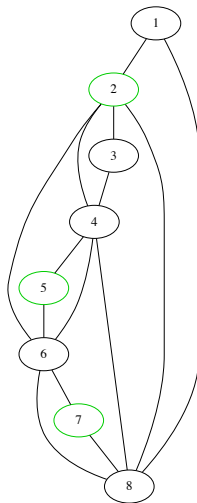
Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1			



# Exemple (1)



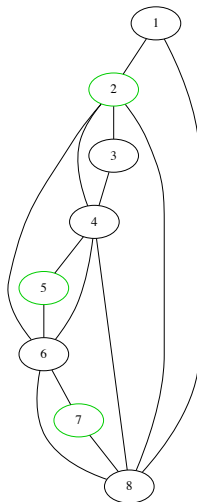
## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

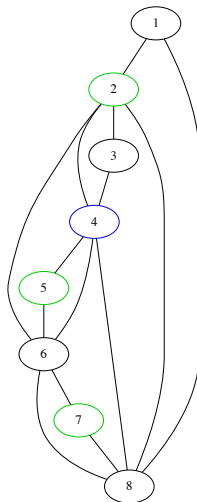
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

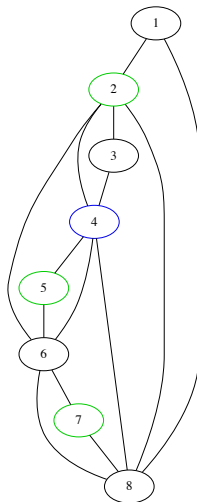
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1		2	1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

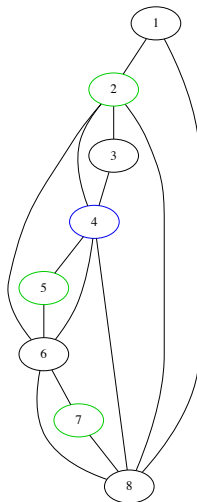
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1		2	1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

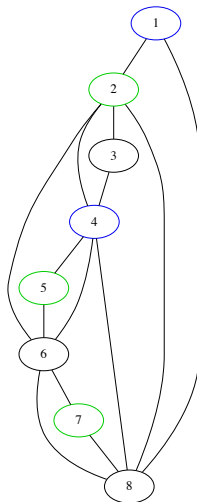
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1		2	1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

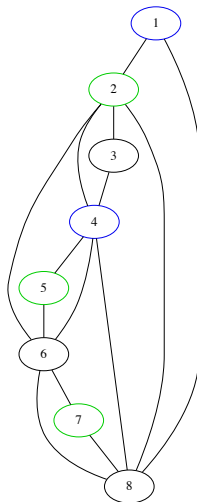
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1		2	1		1	

# Exemple (1)



## 1 Initialisation de l'algorithme

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur								

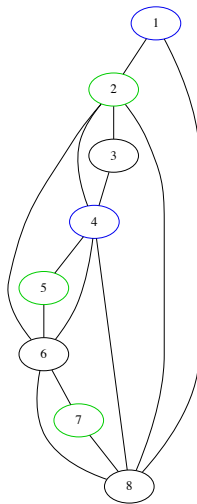
## 2 Itération 1 : attribution de la couleur 1

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur		1			1		1	

## 3 Itération 2 : attribution de la couleur 2

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1		2	1		1	

## Exemple (2)

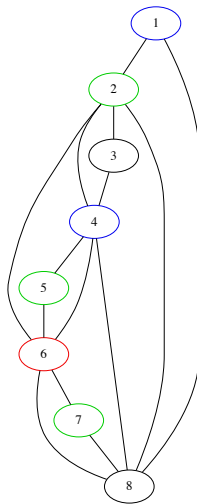


### Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1		2	1		1	



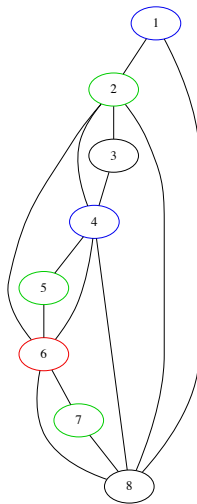
## Exemple (2)



### ● Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1		2	1	3	1	

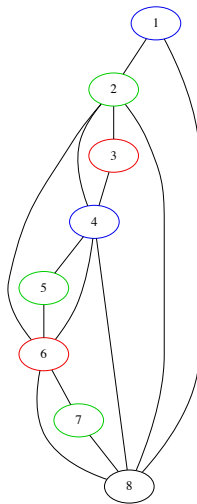
## Exemple (2)



### Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1		2	1	3	1	

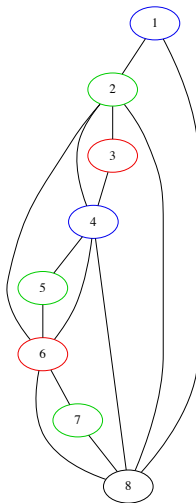
## Exemple (2)



### 4 Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	

## Exemple (2)



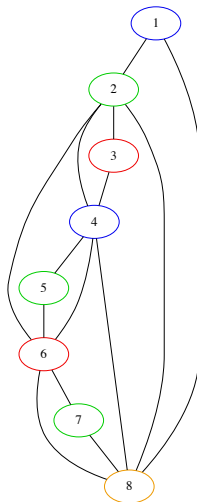
### 4 Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	

### 5 Itération 4 : attribution de la couleur 4

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	

## Exemple (2)



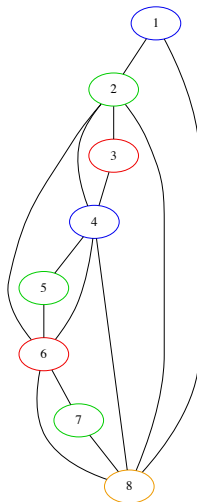
### 4 Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	

### 5 Itération 4 : attribution de la couleur 4

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	4

## Exemple (2)



### 4 Itération 3 : attribution de la couleur 3

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	

### 5 Itération 4 : attribution de la couleur 4

Sommet	1	2	3	4	5	6	7	8
Degré	2	5	2	5	2	5	2	5
Ordre	5	1	6	2	7	3	8	4
Couleur	2	1	3	2	1	3	1	4

### → Remarque

- La coloration obtenue est également une coloration minimale puisque la plus grande clique est  $\{2, 4, 6, 8\}$ . D'après la formule de l'encadrement du nombre chromatique, comme  $\omega(G) = 4$ , il faut au minimum 4 couleurs pour colorier ce graphe.

# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Stables et cliques
- 3 Coloration des sommets
- 4 Coloration des arêtes**
- 5 Théorème des quatre couleurs

# Coloration des arêtes d'un graphe

## Définitions : coloration des arêtes, indice chromatique...

- **Coloration des arêtes d'un graphe  $G$**  : affectation d'une couleur à chaque arête du graphe de telle sorte que deux arêtes adjacentes aient des couleurs différentes
- **Indice chromatique de  $G$**  : nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes du graphe (noté  $i(G)$ )
- **Graphe aux arêtes de  $G$**  (ou **graphe adjoint**), noté  $G'$ , défini par :
  - ▶ sommet de  $G'$  : arête de  $G$
  - ▶ arête de  $G'$  entre deux sommets ssi les deux arêtes de  $G$  (correspondant aux sommets de  $G'$ ) sont adjacentes dans  $G$



# Coloration des arêtes d'un graphe

## Définitions : coloration des arêtes, indice chromatique...

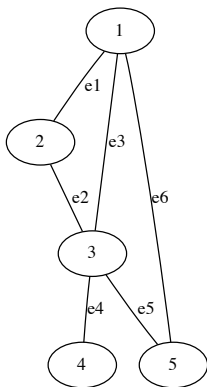
- **Coloration des arêtes d'un graphe  $G$**  : affectation d'une couleur à chaque arête du graphe de telle sorte que deux arêtes adjacentes aient des couleurs différentes
- **Indice chromatique de  $G$**  : nombre minimal de couleurs nécessaires pour colorier les arêtes du graphe (noté  $i(G)$ )
- **Graphe aux arêtes de  $G$**  (ou **graphe adjoint**), noté  $G'$ , défini par :
  - ▶ sommet de  $G'$  : arête de  $G$
  - ▶ arête de  $G'$  entre deux sommets ssi les deux arêtes de  $G$  (correspondant aux sommets de  $G'$ ) sont adjacentes dans  $G$

## Algorithme de coloration des arêtes

- Utilisation de l'algorithme de coloration des sommets sur le graphe aux arêtes  $G'$ , pour colorier ses sommets
- Une fois la coloration des sommets réalisée sur  $G'$ , il suffit de colorier les arêtes de  $G$  de la même couleur que les sommets correspondants de  $G'$

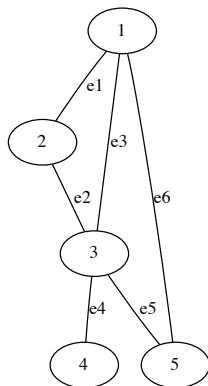
# Exemple

- Graphe aux arêtes colorié



- Graphe initial avec arêtes coloriées

# Exemple

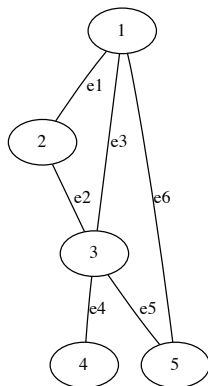


- Graphe aux arêtes colorié



- Graphe initial avec arêtes coloriées

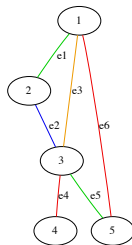
# Exemple



- Graphe aux arêtes colorié



- Graphe initial avec arêtes coloriées



# Plan du cours

- 1 Introduction
- 2 Stables et cliques
- 3 Coloration des sommets
- 4 Coloration des arêtes
- 5 Théorème des quatre couleurs

# Théorème des quatre couleurs

## Définition : graphe planaire

**Graphe planaire** : graphe que l'on peut dessiner sans que ses arêtes ne se croisent

# Théorème des quatre couleurs

## Définition : graphe planaire

**Graphe planaire** : graphe que l'on peut dessiner sans que ses arêtes ne se croisent

## Théorème

- On peut **colorier les sommets** d'un **graphe planaire** (et sans boucle) en utilisant **au plus quatre couleurs**
- Les **arêtes** auront toutes des **extrémités de couleurs différentes**

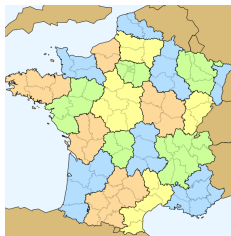
# Théorème des quatre couleurs

## Définition : graphe planaire

**Graphe planaire** : graphe que l'on peut dessiner sans que ses arêtes ne se croisent

## Théorème

- On peut **colorier les sommets** d'un **graphe planaire** (et sans boucle) en utilisant **au plus quatre couleurs**
- Les **arêtes** auront toutes des **extrémités de couleurs différentes**



[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Carte_France_geo_4_couleurs.png)

[Carte\\_France\\_geo\\_4\\_couleurs.png](#)

- Théorème formulé par Guthrie en 1852 pour colorier une carte d'Angleterre
  - Preuve du théorème faite en 1976, par Appel et Haken, à partir de 1 478 cas critiques
- **Preuve faite en utilisant un ordinateur, pour la première fois**