1 Dénombrement

Exercice 1

Soit une urne avec 8 boules : 3 boules rouges, numérotées de un à trois, et 5 boules bleues, numérotées de un à cinq.

1.1. On tire successivement, avec remise, 2 boules de l'urne

a. Combien y a-t-il de tirages différents ?

b. Combien y a-t-il de tirages avec une seule boule rouge ?

c. Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule rouge ?

d. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules rouges ?

1.2. On tire successivement, sans remise, 3 boules de l'urne

a. Combien y a-t-il de tirages différents ?

b. Combien y a-t-il de tirages avec une seule boule rouge ?

c. Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule rouge ?

d. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules rouges ?

1.3. On tire simultanément 4 boules de l'urne

a. Combien y a-t-il de tirages différents ?

b. Combien y a-t-il de tirages avec une seule boule rouge ?

c. Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule rouge ?

d. Combien y a-t-il de tirages avec deux boules rouges ?

Exercice 2

Un groupe agroalimentaire fabrique des yaourts aux fruits de 10 parfums différents. Le directeur des ventes propose de constituer des lots de quatre pots de parfums différents.

a. Combien de types de lots peut-on former ?

b. Combien de types de lots peut-on former sachant qu'ils ne doivent pas contenir simultanément un pot au citron et un pot au pamplemousse ?

c. Combien de lots peut-on former sachant que si un lot contient un pot à l'ananas, il doit obligatoirement contenir un pot à la mangue (bah oui quitte à ce que ce soit pas bon, autant y aller à fond) ?

Exercice 3

3.1. Combien de nombres à 10 chiffres peut-on former ?

Indication : *Attention : Un nombre ne commence pas par le chiffre 0 !*

3.2. Combien de nombres à 10 **chiffres différents** peut-on former ?

On rappelle que le 1^{er} chiffre d'un nombre à 10 chiffres est le chiffre le plus à gauche, le dernier est le chiffre le plus à droite.

3.3. Parmi les nombres à 10 chiffres sans répétitions, combien vérifient les critères suivants :

a. Le 5 est en première position.
b. Le 9 est en dernière position.
c. Le 6 est en $6^{\text{ième}}$ position.
d. Le numéro 7 est dans les 7 premiers chiffres.
e. les numéros 2 et 3 sont dans les 5 premiers chiffres.
f. Les numéros 4 et 5 occupent 2 places consécutives.
g. Tous les numéros pairs occupent un rang pair.
h. Tous les numéros pairs occupent un rang impair.

Exercice 4

Mains au poker

Un jeu de 52 est constitué de 4 enseignes ($\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$) et 13 figures (as,2,3,... 10,V,D,R). Au jeu de poker, une main est constituée de 5 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Les honneurs sont les cartes de figure Valet, Dame, Roi.

4.1. Combien y a-t-il de mains différentes ?

4.2. Parmi ces mains :

a. Combien y a-t-il de mains avec un carré ? *ex.* $\boxed{1\clubsuit}$ $\boxed{1\diamondsuit}$ $\boxed{1\heartsuit}$ $\boxed{1\spadesuit}$ $\boxed{V\heartsuit}$
b. Combien y a-t-il de mains avec un full ? *ex.* $\boxed{R\clubsuit}$ $\boxed{R\diamondsuit}$ $\boxed{8\heartsuit}$ $\boxed{8\spadesuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$
c. Combien y a-t-il de mains avec une double paire ? *ex.* $\boxed{D\clubsuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$ $\boxed{8\heartsuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{R\spadesuit}$
d. Combien y a-t-il de mains avec un brelan ? *ex.* $\boxed{V\clubsuit}$ $\boxed{V\diamondsuit}$ $\boxed{V\heartsuit}$ $\boxed{1\spadesuit}$ $\boxed{9\clubsuit}$
e. Combien y a-t-il de mains avec une paire ? *ex.* $\boxed{D\clubsuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$ $\boxed{7\heartsuit}$ $\boxed{9\spadesuit}$ $\boxed{V\clubsuit}$
f. Combien y a-t-il de mains avec une quinte flush ? *ex.* $\boxed{7\clubsuit}$ $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{9\clubsuit}$ $\boxed{10\clubsuit}$ $\boxed{V\clubsuit}$
g. Combien y a-t-il de mains avec une suite ? *ex.* $\boxed{8\clubsuit}$ $\boxed{9\diamondsuit}$ $\boxed{10\heartsuit}$ $\boxed{V\spadesuit}$ $\boxed{D\diamondsuit}$
h. Combien y a-t-il de mains avec une couleur ? *ex.* $\boxed{1\heartsuit}$ $\boxed{7\heartsuit}$ $\boxed{10\heartsuit}$ $\boxed{D\heartsuit}$ $\boxed{R\heartsuit}$

4.3.

a. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ?
b. Combien y a-t-il de mains avec au moins un trèfle ?
c. Combien y a-t-il de mains avec au moins un honneur ?
d. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un honneur ?
e. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as ou au moins un trèfle ?
f. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un honneur ?
g. Combien y a-t-il de mains avec au moins un as et au moins un trèfle ?

Exercice 5

On considère deux entiers $n \geqslant 3$ et $q \geqslant 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement q boules de l'urne avec remise après chaque tirage. Pour $i \in [1, q]$, on note x_i le numéro de la $i^{\text{ème}}$ boule tirée.

5.1. Déterminer le nombre de tirages possibles pour lesquels :

a. $x_1 < x_q$
b. La somme des numéros tirés est égale à $q + 2$
c. Deux numéros exactement sont apparus au cours du tirage.

2 Espaces probabilisés

Exercice 6

On considère l'expérience aléatoire suivante : « on lance d'un dé cubique, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et on note le numéro de la face supérieure » représentée par l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et on considère les événements :

- $A =$« le résultat est impair »
- $B =$« le résultat est inférieur ou égal à 3 »

6.1. Écrire en extension les événements A, B, $A \cap B$, $A \cup B$,$\bar{A} \cap \bar{B}$,$A \cup \bar{B}$ et les représenter sur un diagramme de Venn.

6.2. On suppose le dé équilibré (c'est à dire que $\mathbb{P}$ est l'équiprobabilité sur Ω), calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$,$\mathbb{P}(A \cup \bar{B})$.

6.3. On suppose le dé a été pipé de telle sorte que la probabilité d'apparition de la face k soit proportionnelle à k : $\exists C \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \Omega, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = C \times k$.

a. Calculer la valeur de C pour que $\mathbb{P}$ soit bien une probabilité.
Indication : *On doit avoir* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

b. Calculer $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B})$,$\mathbb{P}(A \cup \bar{B})$.

Exercice 7

On tire simultanément 3 jetons d'un sac contenant trois jetons rouges, numérotés de 1 à 3, et quatre jetons verts, numérotés de 1 à 4. On fait l'hypothèse que tous les tirages possibles sont équiprobables et on définit les événements :

- R_i **: « On obtient le jeton rouge** $n°i$ **»,** pour $i = 1, 2, 3$
- V_i **: « On obtient le jeton vert** $n°i$ », pour $i = 1, 2, 3, 4$
- R **: « On obtient au moins un jeton rouge »**
- V **: « On obtient au moins un jeton vert »**

7.1. Définir les éléments suivants :

a. Ω l'univers de cette expérience.

b. ω un événement élémentaire de l'expérience.

c. $\mathbb{P}(\{\omega\})$ la probabilité d'un événement élémentaire de l'expérience.

7.2. Calculer les probabilités suivantes

a. $\mathbb{P}(R_i)$ pour $i = 1, 2, 3$, $\mathbb{P}(V_j)$ pour $j = 1, 2, 3, 4$

b. $\mathbb{P}(\overline{R_i})$ pour $i = 1, 2, 3$, $\mathbb{P}(\overline{V_j})$ pour $j = 1, 2, 3, 4$

c. $\mathbb{P}(R_i \cap V_j)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4$

d. $\mathbb{P}(R_i \cup V_j)$ pour $i = 1, 2, 3$ et $j = 1, 2, 3, 4$

7.3. Calculer les probabilités suivantes. On pourra utiliser la loi de la mesure pour trois ensembles :

$$\boxed{\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)}$$

a. $\mathbb{P}(R_1 \cup R_2 \cup R_3)$ et $\mathbb{P}(V_i \cup V_j \cup V_k)$ i, j, k fixés, différents deux à deux.

b. $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(R)$

7.4. Exprimer en fonction des événements R_i, V_j, R et V les événements suivants et calculer leur probabilité

a. $A =$« obtenir 2 jetons $n°1$ »

b. $B =$« obtenir 2 jetons de même numéro »

c. $C =$« obtenir trois numéros différents »

d. $E =$« obtenir 3 jetons rouges »

e. $F =$« obtenir 2 jetons rouges »

f. $G =$« obtenir 1 jeton rouge »

g. $H =$« n'obtenir aucun jeton rouge »

3 Probabilités conditionnelles

Exercice 8

Une urne contient 10 boules : 7 rouges et 3 blanches. On tire 3 boules de l'urne successivement et sans remise. On admet que pour chaque tirage d'une boule, il y a équiprobabilité et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée. On notera :

- $B_i =$« La $i^{\text{ème}}$ boule tirée est blanche »
- $R_i =$« La $i^{\text{ème}}$ boule tirée est rouge »

8.1. Faire un arbre représentant ces tirages.

8.2. Donner les probabilités suivantes : $\mathbb{P}(B_2|R_1)$, $\mathbb{P}(B_3|R_1 \cap R_2)$.

8.3. Calculer la probabilité pour que les deux premières boules soient rouges et la troisième blanche.

8.4. Démontrer que les événements $\{R_1 \cap R_2, R_1 \cap \overline{R_2}, \overline{R_1} \cap R_2, \overline{R_1} \cap \overline{R_2}\}$ forment un système complet d'événements.

8.5. Calculer la probabilité pour que la troisième boule soit blanche.

8.6. Sachant que la troisième boule est blanche, quelle est la probabilité que les deux premières soient de couleurs différentes ?

8.7. Reprendre les questions précédentes dans le cas où on tire trois boules de l'urne successivement avec remise.

Exercice 9

Dans une entreprise deux ateliers fabriquent les mêmes pièces. L'atelier 1 fabrique en une journée deux fois plus de pièces que l'atelier 2.
Le pourcentage de pièces défectueuses est 3% pour l'atelier 1 et 4% pour l'atelier 2.
On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble de la production d'une journée.

9.1. Déterminer

a. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 ;

b. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 et est défectueuse ;

c. la probabilité que cette pièce provienne de l'atelier 1 sachant qu'elle est défectueuse.

Exercice 10

Soit $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \omega_4; \omega_5; \omega_6\}$ que l'on muni de deux probabilités :

- $\mathbb{P}$ définie sur Ω par :

$$\mathbb{P}(\{\omega_1\}) = \frac{3}{10}; \quad \mathbb{P}(\{\omega_2\}) = \frac{1}{5}; \quad \mathbb{P}(\{\omega_3\}) = \mathbb{P}(\{\omega_5\}) = \frac{1}{20}; \quad \mathbb{P}(\{\omega_6\}) = \frac{1}{4}$$

- $\mathbb{P}' =$ équiprobabilité sur Ω

10.1. Calculer $\mathbb{P}(\{\omega_4\})$ et $\mathbb{P}'(\{\omega_4\})$

10.2. Soit les événements : $A = \{\omega_1; \omega_2; \omega_5; \omega_6\}$ et $B = \{\omega_2; \omega_3\}$

a. Les événements A et B sont-ils indépendants relativement à la probabilité $\mathbb{P}$?

b. Sont-ils indépendants relativement à la probabilité $\mathbb{P}'$?

Exercice 11

Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10000.

Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vante son nouveau test de dépistage :

- si une personne est malade, le test est positif à 99%.
- si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

On note :

- M l'événement : « La personne est malade »,
- T l'événement : « Le test est positif ».

11.1. Exprimez les données de l'énoncé à l'aide de probabilités conditionnelles. **11.2.** Á l'aide de la formule des probabilités totales, calculer $\mathbb{P}(T)$. **11.3.** Vous effectuez ce test de dépistage et le test se révèle positif. Quelle est la probabilité que vous soyez malade ?

Le laboratoire souhaite améliorer son test en diminuant la probabilité de faux positif $(P(T|\overline{M}))$. **11.4.** Combien devrait valoir $P(T|\overline{M})$ pour que le test soit fiable à plus de 95%, i.e. pour que $P(M|T) > 0.95$?

Exercice 12

Le gérant d'un magasin d'informatique a reçu un lot de clés USB. 5% des boites sont abîmées. Le gérant estime que :

- 60% des boites abîmées contiennent au moins une clé défectueuse.
- 98% des boites non abîmées ne contiennent aucune clé défectueuse.

Un client achète une boite du lot. On désigne par A l'événement : '« la boite est abîmée » et par D l'événement « la boite achetée contient au moins une clé défectueuse ».

12.1. Donner les probabilités de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(\overline{A})$, $\mathbb{P}(D|A)$, $\mathbb{P}(D|\overline{A})$, $\mathbb{P}(\overline{D}|A)$ et $\mathbb{P}(\overline{D}|\overline{A})$. En déduire la probabilité de D.

12.2. Le client constate qu'un des clés achetées est défectueuse. Quelle est la probabilité pour qu'il ait acheté une boite abîmée ?

Exercice 13

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question.

Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées.

13.1. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice 14

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

14.1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice 15

Une usine fabrique des pièces, avec une proportion de 0.05 de pièces défectueuses. Le contrôle des fabrications est tel que :

- si la pièce est bonne, elle est acceptée avec la probabilité 0,96.
- si la pièce est mauvaise, elle est refusée avec la probabilité 0,98.

On choisit une pièce au hasard et on la contrôle.

15.1. Quelle est la probabilité :

a. qu'il y ait une erreur de contrôle ?

b. qu'une pièce acceptée soit mauvaise ?

Exercice 16

Une compagnie d'assurance répartit ses clients en trois classes $R1$, $R2$ et $R3$: les bons risques, les risques moyens, et les mauvais risques.

Les effectifs de ces trois classes représentent 20% de la population totale pour la classe $R1$, 50% pour la classe $R2$, et 30% pour la classe $R3$.

Les statistiques indiquent que les probabilités d'avoir un accident au cours de l'année pour une personne de l'une de ces trois classes sont respectivement de 0.05, 0.15 et 0.30.

16.1. Quelle est la probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population ait un accident dans l'année ?

16.2. Si M.Martin n'a pas eu d'accident cette année, quelle est la probabilité qu'il soit un bon risque ?

4 Variables aléatoires discrètes

Exercice 17

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire dont la loi est définie par :

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall k = 1, 2, 3, 4, 5, \quad \mathbb{P}(X = k) = \lambda(3 - k)^2$$

17.1. Calculer la valeur de λ (en utilisant que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$).

17.2. Donner la loi de X et la représenter par un diagramme en bâtons.

17.3. Quel est l'univers image de X ?

17.4. Donner la table de valeurs de la fonction de répartition de X et tracer son graphe.

17.5. Calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}\text{ar}(X)$ et σ_X.

Exercice 18

On lance une fois un dé cubique équilibré.

18.1. On considère la v.a. : $X =$« numéro de la face supérieure »

a. Quel est l'univers image de X ?

b. Donner la loi de X et la représenter par un diagramme en bâton.

c. Calculer les valeurs de la fonction de répartitions de X et tracer son graphe.

d. Calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}\text{ar}(X)$ et σ_X.

18.2. On considère la v.a. : $Y =$« somme des faces visibles »

a. Quel est l'univers image de Y ?

b. Exprimer Y sous la forme $Y = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

c. En déduire $\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}\text{ar}(Y)$ et σ_Y.

18.3. On lance 2 fois de suite le dé et on note la face supérieure. On considère les v.a. :
$X_i =$« résultat du $i^{\text{ième}}$ lancer » et $Z =$« somme des deux résultats »

a. Quel est l'univers image de Z ?

b. Exprimer Z en fonction de X_1 et X_2.

c. En déduire $\mathbb{E}(Z), \mathbb{V}\text{ar}(Z)$ et σ_Z.

d. Donner la loi de Z et la représenter par un diagramme en bâton.

18.4. On lance 2 fois de suite le dé mais cette fois on considère la v.a. :
$S =$« le plus grand des deux résultats »

a. Quel est l'univers image de S ?

b. Donner la loi de S et la représenter par un diagramme en bâton.

c. Calculer les valeurs de la fonction de répartitions de S et tracer son graphe.

d. Calculer $\mathbb{E}(S), \mathbb{V}\text{ar}(S)$ et σ_S.

Exercice 19

Soit une urne avec 8 boules : 3 boules rouges et 5 boules blanches. On tire simultanément 4 boules de l'urne.

19.1. On considère la v.a. : $X =$« nombre de boules rouges obtenues »

a. Quel est l'univers image de X ?

b. Donner la loi de X et la représenter par un diagramme en bâton.

c. Calculer les valeurs de la fonction de répartitions de X et tracer son graphe.

d. Calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ et σ_X.

19.2. Ce tirage sert de base au jeu suivant : « on mise 2 €, et on reçoit 1 € par boule rouge obtenue » et on considère la v.a. : $Y =$« gain du joueur »

a. Exprimer Y en fonction de X

b. Calculer $\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)$ et σ_Y.

c. Pour qui le jeu est-il rentable ?

19.3. On refait le jeu en faisant maintenant des tirages successifs avec remise et toujours $X =$« nombre de boules rouges obtenues »

a. Quel est l'univers image de X ?

b. Donner la loi de X et la représenter par un diagramme en bâton.

c. Calculer $\mathbb{E}(X), \mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$ et σ_X.

d. Quelle est maintenant l'espérance du gain Y du joueur ?

Exercice 20

Une ville de 100 000 habitants compte trois journaux locaux : I, II et III. Les proportions de lecteurs pour ces journaux sont :

I : 10%	I et II : 8%	I et II et III : 1%
II : 30%	I et III : 2%	
III : 5%	II et III : 4%	

20.1. Faire un diagramme de Venn à 3 ensembles (I, II et III) en y indiquant les probabilités de chaque monôme canonique.

20.2. Quel est le nombre de personnes ne lisant qu'un journal ?

20.3. Combien de personnes lisent au moins deux journaux ?

20.4. II est un quotidien du soir, tandis que I et III sortent le matin. Combien de personnes lisent-elles au moins un journal du matin plus celui du soir ?

20.5. Combien de personnes lisent-elles un journal du matin seulement et le journal du soir ?

5 Loi de probabilités

Exercice 21 Loi usuelles

21.1. Soit X une v.a. suivant une loi uniforme discrète :$X \sim \mathscr{U}(a=0, b=10)$

a. Rappeler l'univers image $X(\Omega)$

b. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 9)$

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

21.2. Soit une v.a. suivant une loi binomiale : $X \sim \mathscr{B}(n=6, p=0.7)$

a. Rappeler l'univers image $X(\Omega)$

b. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=2)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 5)$

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

21.3. Soit une v.a. suivant une loi de Poisson :$X \sim \mathscr{P}(\lambda=2)$

a. Rappeler l'univers image $X(\Omega)$

b. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X=1)$, $\mathbb{P}(X<2)$, $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

21.4. Soit une v.a. suivant une loi exponentielle :$X \sim \mathscr{E}(\lambda=3)$

a. Rappeler l'univers image $X(\Omega)$

b. Calculer $\mathbb{P}(X=0)$, $\mathbb{P}(X<2)$, $\mathbb{P}(3 \leqslant X \leqslant 5)$, $\mathbb{P}(X \geqslant 2)$

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.

Exercice 22 Modélisation à l'aide de loi usuelles

Pour chacune des v.a. X, définies par une des phrases ci-après,

- Donner l'univers image $X(\Omega)$.
- Donner la loi de la v.a. X (en précisant ses paramètres).
- Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)$.
- Effectuez une simulation de 1000 tirages de cette variable et affichez-là sous la forme d'un histogramme ou d'un diagramme en bâtons.

22.1. « On jette un dé équilibré 4 fois et on note le nombre de 6 obtenus »

22.2. Dans une urne contenant 10 boules indiscernables au toucher et numérotées 1 à 10

a. « on tire une boule et on note son $n°$ »

b. « on tire 4 boules, avec remise, et on note le nombre de boules $n°5$ »

c. « on tire 4 boules,avec remise, et on note le nombre de boules $n°2, 3$ ou 4 »

22.3. « nombre de clients reçus en 2 heures par un magasin en recevant 2/h. en moyenne »

22.4. « temps d'attente (en secondes) avant la première connexion à un serveur » sachant que la moyenne du temps avant la première connexion est de 8 secondes.

Exercice 23

Soient deux variables aléatoires **indépendantes** :

$$X \sim \mathscr{B}(n=2, p=1/2) \ \ et \ \ Y \sim \mathscr{B}(n=3, p=1/3)$$

23.1. Calculer $\mathbb{P}(X=1)$ et $\mathbb{P}(Y=1)$
23.2. Calculer $\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$
23.3. Calculer $\mathbb{P}(X=Y)$

Exercice 24 Nombres de choix dans un QCM

Un examen est composé de 40 questions à choix multiple, auxquelles on doit répondre en cochant une seule réponse. On s'intéresse à la v.a. : $X =$« nombre de bonnes réponses obtenus par un candidat »

24.1. Si le candidat répond au hasard à chaque question, quelle est la loi et l'espérance de X suivant qu'il y ait

a. 2 choix par question **b.** 3 choix par question **c.** 4 choix par question

24.2. Si le candidat sait repérer les 10 questions les plus faciles (auxquelles il répond correctement) et répond au hasard aux autres questions, exprimer X en fonction d'une loi binomiale $\mathscr{B}(n=30, p)$ suivant qu'il y ait

a. 2 choix par question **b.** 3 choix par question **c.** 4 choix par question

24.3. Si le candidat sait repérer les 10 questions les plus faciles (auxquelles il répond correctement) 10 autres questions auxquelles il répond correctement dans 75% des cas et répond au hasard aux reste des questions, exprimer X en fonction de deux lois binomiales $\mathscr{B}(n, p)$ suivant qu'il y ait

a. 2 choix par question **b.** 3 choix par question **c.** 4 choix par question

Exercice 25

Une agence d'intérim reçoit entre 10h et 12h en moyenne 1,2 appel téléphonique par minute. On modélise ce phénomène par une variable aléatoire de Poisson. Calculer la probabilité :

a. qu'entre 11h et 11h01 l'agence ne reçoive aucun appel ; reçoive un appel ; deux appels ;

b. que l'agence reçoive quatre appels entre 11h et 11h02

Exercice 26

Une caisse dans un magasin reçoit en moyenne 40 clients par heure.

1. On s'intéresse au nombre de personnes arrivant à la caisse durant un intervalle de temps fixé. Quel type de loi proposez-vous pour modéliser cette variable aléatoire ?

2. Si en trois minutes plus de trois personnes arrivent alors une file d'attente se forme et les clients sont mécontents. Avec quelle probabilité cela peut-il se produire entre 16h et 16h03 ?

Exercice 27

Un canal de télécommunication reçoit des signaux selon un processus de Poisson de cadence 0.3 signal par seconde. Calculer les probabilités des événements suivants :

a. Trois signaux arrivent pendant une période de 10s.

b. Au moins trois signaux arrivent pendant une période de 20s.

c. On ouvre le canal et le premier signal arrive en moins de 2s.

Exercice 28

1. Aaron fait de l'auto-stop. On suppose que les voitures passent aléatoirement avec, en moyenne, trois voitures par minute ; un conducteur sur soixante est par ailleurs enclin à prendre un auto-stoppeur. Soit T la variable aléatoire égale au temps d'attente d'Aaron (en minutes) avant de monter à bord d'un véhicule qui le mènera un peu plus loin.

a. Quelle loi de probabilité proposez-vous pour T ? Quel est le temps d'attente moyen ?

b. Quelles sont les probabilités des événements suivants : $\{T > 10\}$, $\{T < 30\}$, $\{5 < T < 15\}$?

c. Sachant qu'Aaron a déjà attendu depuis cinq minutes, quelle est la probabilité qu'il attende au total plus de quinze minutes ?

2. Jade se rend à une station de RER, au hasard et sans avoir consulté les horaires. Les trains de cette ligne se suivent à des intervalles d'exactement vingt minutes. On note S la variable aléatoire qui donne le temps d'attente de Jade (en minutes).

a. Quelle loi de probabilité proposez-vous pour S ? Quel est le temps d'attente moyen ?

b. Quelles sont les probabilités des événements suivants : $\{S > 10\}$, $\{S < 30\}$, $\{5 < S < 15\}$?

c. Sachant que Jade a déjà attendu depuis cinq minutes, quelle est la probabilité qu'elle attende au total plus de quinze minutes ?

Exercice 29

Soient X et X' des variables aléatoires indépendantes suivant des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et λ'. On pose $Y = min(X, X')$ et $Z = max(X, X')$.

1. Y et Z sont-elles indépendantes ? En s'appuyant sur la caractérisation d'une loi par sa fonction de répartition, montrer que $Y \sim \mathscr{E}(\lambda + \lambda'$.

2. Déterminer $\mathbb{E}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}(Z)$ grâce à la relation : $min(a, b)+max(a, b) = a + b$.

3. Déterminer la fonction de répartition de Z.

Exercice 30 *Application de l'exercice précédent*

On dispose de deux modules électroniques indépendants avec des durées de vie sans mémoire, de moyennes respectives de 4 et 5 ans (à parir de leur intégration dans un circuit électronique).

1. Pour chaque module calculer la probabilité qu'il fonctionne encore après dix ans.

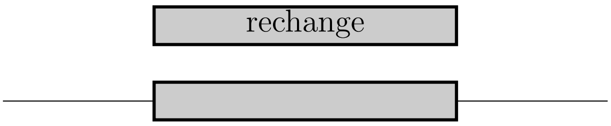
2. On utilise ces deux modules dans des montages spécifiés ci-après. Dans chaque cas donner la durée de vie moyenne de la machine et calculer la probabilité qu'elle fonctionne encore après dix ans Indication : la fonction de densité de la somme de variables aléatoires X, Y indépendantes étant donnée par le produit de convolution

$$f_X * f_Y(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x) dx$$

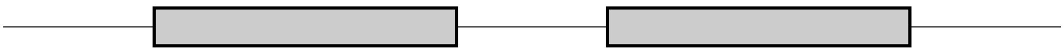
, on a dans le cours montré que pour deux lois exponentielles de paramètres λ et μ distincts cela donnait :

$$f_Z(z) = \lambda\mu \frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda}$$

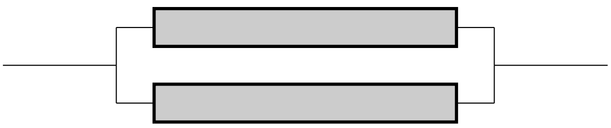
a. Machine de type A. Il n'y a qu'un seul module intégré au circuit dans cette machine. Dès que celui-ci tombe en panne, il est remplacé par l'autre et on considère que le temps mis pour ce remplacement est nul.



b. Machine de type B. Les deux modules sont montés en série ; le fonctionnement de chacun est nécessaire au fonctionnement de la machine.



c. Machine de type C. Les deux modules sont montés en parallèle ; le fonctionnement d'un module suffira pour le fonctionnement de la machine.



Exercice 31 Illustration du théorème de la limite centrale

On considère une base de données renseignant sur les locations effectuées par les abonnés d'une médiathèque sur des films sortis entre 2005 et 2010. Les données sont à récupérer à partir du fichier `video_etu.xlsx`. On veut ici illustrer la qualité de l'estimation que l'on pourrait faire de la durée moyenne d'un film disponible au prêt. Pour cela on va effectuer différentes estimations de cette durée moyenne de films à partir d'échantillons de 50 films constitués à partir de la feuille de la table "films".

Afin d'importer et exploiter ces données nous allons exploiter la bibliothèque `pandas` :

```python
import pandas as pd
```

Pour exploiter le fichier on pourra charger les données avec les commandes suivantes :

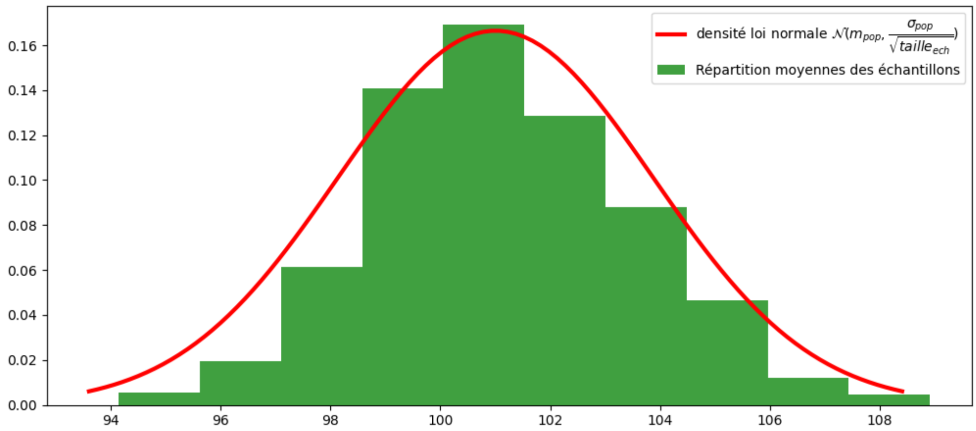
```python
### pour charger le classeur Excel :
data_file = pd.ExcelFile('video_etu.xlsx')
""" pour importer les données de la feuille 'films'
 comme un objet DataFrame :"""
data_films = pd.read_excel(data_file, 'films')
""" pour récupérer les données du champ 'FILM_DUREE'
comme un objet Series :"""
duree_films=data_films['FILM_DUREE']
```

On pourra ainsi exploiter les méthodes disponibles avec un objet `Series` :

```python
moyenne_pop_duree=duree_films.mean()
ecart_type_pop=duree_films.std()
```

En exploitant la fonction `numpy.random.choice` on va enfin extraire 1000 échantillons de taille 50 de la population représentée par `duree_films`.

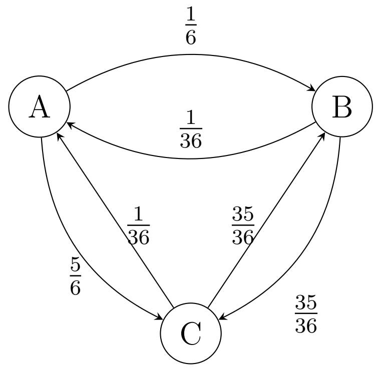
1. Illustrer, par un graphique du type de celui présenté ci-dessous, le fait que les moyennes empiriques construites à partir de ces échantillons ont bien une répartition en adéquation avec une loi normale (cf Théorème de la limite centrale) :



2. Construire les 1000 intervalles de confiance avec une fiabilité de 95% (exploiter pour cela la fonction `scipy.norm.ppf`, pour la durée moyenne d'un film, qu'on peut obtenir à partir de ces 1000 échantillons. Calculer la proportion de ceux qui contiennent effectivement la durée moyenne d'un film calculée sur l'ensemble de la population.

Exercice 32

Dans une équipe de football, on étudie les passes que se font trois attaquants A, B et C.
Les probabilités qu'un attaquant passe le ballon à un autre sont représentées sur le schéma suivant. Par exemple, la probabilité que l'attaquant A passe le ballon à l'attaquant B est égale à $\frac{1}{6}$.
Au départ, l'attaquant B possède le ballon.



32.1. On définit les suites (a_n), (b_n) et (c_n) comme étant les probabilités que le ballon soit avec l'attaquant A, B ou C après n passes. On pose $\alpha_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer une définition par récurrence (croisée) des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

b. En déduire une matrice P telle que $\alpha_{n+1} = \alpha_n \times P$.

32.2. Quelle est la probabilité que A ait le ballon pour la première fois après 1 passe, 2 passes, 3 passes, n passes ?

32.3. Effectuer 100 simulations des 100 premières possessions de balles. En déduire une estimation de l'espérance de la variable aléatoire désignant le moment de première possession pour A ?

On pose $P = \begin{pmatrix} 34 & \frac{71}{6} & 0 \\ -29 & 211 & 1 \\ -5 & 215 & -1 \end{pmatrix}$.

32.4.

a. À l'aide de python, on peut ici exhiber une matrice H avec `H=np.linalg.eig(P)[1]` telle que $D = H^{-1}PH$ est diagonale. Vérifier-le.

b. Que vaut D^n lorsque n tend vers $+\infty$.

c. En déduire P^n lorsque n tend vers $+\infty$.

32.5.

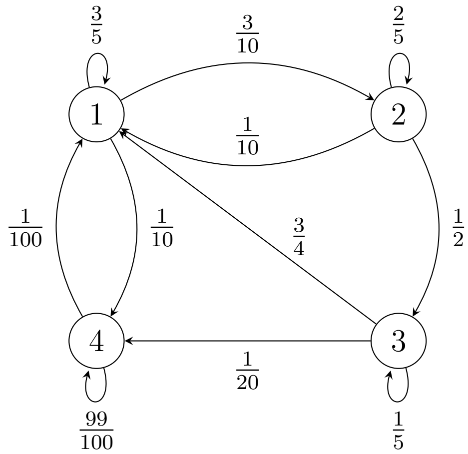
a. Au bout d'un temps suffisamment long, quelle est la probabilité que le ballon soit avec le joueur A, B ou C ?

b. Cela reste-il vrai si au départ le ballon est possédé par A ou C ?

Exercice 33

Pour représenter le passage d'une molécule de phosphore dans un écosystème, nous considérons quatre états possibles :

1. la molécule est dans le sol,
2. la molécule est dans l'herbe,
3. la molécule a été absorbée par du bétail,
4. la molécule est sortie de l'écosystème.



Chaque sommet du graphe représente un état de la molécule, les arcs du graphe décrivent les probabilités de transitions entre les états.

33.1. Déterminer la matrice de transition associée à la représentation de cet écosystème.

33.2. En supposant qu'au départ toutes les molécules de phosphore (un million) se trouvaient dans l'herbe, déterminer leur répartition dans l'écosystème au bout d'un temps suffisamment long :

a. En calculant la loi de probabilité de l'état après 1000 transitions (avec Python et la simple exploitation de la matrice de transition)

b. En simulant le comportement de 1000 molécules lors de 1000 transitions.

Exercice 34

Considérons une chaîne de Markov caractérisée par l'ensemble des états $E = \mathbb{Z}$ et les probabilités de transitions $(p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$ avec pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$:

$$p_{i,j} = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

où p est un nombre fixé tel que $0 < p < 1$. Un tel processus est appelé *promenade aléatoire sur* $\mathbb{Z}$.

a. Quelles sont les composantes de cette chaîne ?

b. Exprimer la probabilité de retour à l'état 0 en un certain nombre de transitions.

c. Montrer que $p_{0,0}^{(2n)} \sim (4p(1-p))^n/\sqrt{\pi n}$ (Utiliser la formule de Stirling).

d. En admettant que $\sum a^n/\sqrt{n}$ avec $a > 0$ est convergente si et seulement si $a < 1$, déterminer en fonction des valeurs de p le fait que la promenade soit transiente ou récurrente.

e. Retrouver les résultats précédents par simulation sur python.

Exercice 35

L'objectif de ce TP est de vous familiariser avec 3 packages `python` classiques :

- `numpy` pour la manipulation de tableaux/matrices,
- `scipy`, et plus particulièrement `scipy.stats`, pour le calcul statistique,
- `matplotlib` pour l'affichage graphique.

`numpy` est une bibliothèque python utilisée notamment pour le calcul matriciel.

Elle s'utilise en l'important au début de votre fichier par la commande :

```
import numpy
```

ou plus généralement :

```
import numpy as np
```

35.1. Déterminer ce qu'effectuent les commandes suivantes :

- `np.zeros(7)`
- `np.ones(6)`
- `np.array([3,7,-1,2])`
- `np.array([[3,7],[-1,2]])`
- `np.arange(10,30,5)`
- `np.linspace(0,2,9)`
- `np.sin(np.linspace(0,2*np.pi,20))`

On définit deux matrices :

- `a = np.array([[1,3],[0,4]])`
- `b = np.array([[4,0],[-1,1]])`

35.2. Déterminer ce qu'effectuent les commandes suivantes :

- `a+b`
- `a+4`
- `a*b`
- `3*a`
- `a*3`
- `np.add(a,b)`
- `a.dot(b)`
- `a @ b`

35.3. Parmi les commandes précédentes, lesquelles ont un sens en algèbre linéaire ?

35.4. Toujours avec les matrices `a` et `b` :

- `a.sum()`
- `a.sum(axis=0)`
- `a.sum(axis=1)`
- `a.min()`
- `a.max()`
- `a[1]`
- `a[1]`
- `a[0,1]`
- `a[0][1]`

35.5. Déterminer une suite de commandes permettant de calculer un tableau `numpy` contenant les nombres $[f(0), f(1), \ldots, f(10)]$ où f est définie par :

$$f(x) = x^2 \sin(x) + 4$$

Notez que `numpy` est une librairie très utilisée et très efficace en calcul numérique. Elle permet de faire beaucoup d'autres choses, mais dont nous ne parlerons pas ici.

Exercice 36 `matplotlib`

`matplotlib` est une librairie permettant l'affichage de graphique avec python. Elle est fortement liée à `numpy` et nous les utiliserons conjointement.

Elle s'utilise en l'important au début de votre fichier par la commande :

```
import matplotlib
```

et plus généralement

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

`matplotlib` permet d'afficher des graphiques en 2D à partir de tableaux `numpy` de valeurs contenant pour l'un les abscisses des points, et pour l'autre les ordonnées.

On définit deux tableaux :

- `x=np.array([1,3,5,7,10,13])`
- `y=np.array([3,2,0,1,-4,6])`

36.1. Qu'effectue la suite de commandes :

```
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

Plusieurs options sont disponibles :

- `color = 'r'` : change la couleur de la ligne en rouge
- `linestyle = 'dashed'` : affiche la ligne en pointillés
- `marker = 'o'` : place un cercle sur chaque point dessiné
- ...

On peut également afficher des légendes sur le graphique :

- `plt.legend(["fonction 1","fonction 2"])` : pour préciser les fonctions tracées
- `plt.ylabel("unité ord.")` : pour un label sur l'axe des ordonnées
- `plt.xlabel("unité abs.")` : pour un label sur l'axe des abscisses
- `plt.title("titre graphique")` : pour un titre au graphique

36.2. Déterminer une suite de commandes permettant d'afficher les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = x^2\sin(x) + 4 \text{ et } g(x) = \frac{30}{x^2+1}$$

sur l'intervalle $[0, 3\pi]$, l'une en rouge avec ligne en pointillés et l'autre en vert avec ligne continue.

On pourra commencer par discrétiser l'intervalle $[0, 3\pi]$ avec 100 valeurs.

Exercice 37 Dénombrement

On lance successivement 3 dés cubiques numéroté de 1 à 6 et on note chacune des faces obtenues.

On souhaite savoir quelle est la probabilité d'avoir, sans tenir compte de l'ordre, 3 faces successives (1,2 et 3 ou 2,3 et 4, etc).

37.1. Écrire une fonction `trois_nombres_successifs(a,b,c)` qui retourne `True` si `a`, `b` et `c` sont successifs (sans tenir compte de l'ordre) :

- `trois_nombres_successifs(1,2,3)` $\mapsto$ `True`
- `trois_nombres_successifs(2,1,3)` $\mapsto$ `True`

- `trois_nombres_successifs(4,3,6)` $\mapsto$ `False`

37.2. Écrire une fonction `nb_tirages_faces_successives` qui calcule le nombre de tirages de 3 dés présentant 3 faces successives.

37.3. Déterminer par un calcul de dénombrement le nombre de tirages et vérifier le résultat trouvé à la question précédente.

Exercice 38 Tirage de boules avec remise

Simulons le tirage successif de quatre boules avec remise dans une urne contenant 7 boules blanches et 3 boules noires. Par la simulation d'un grand nombre de cette expérience et en renvoyant une certaine fréquence observée retrouver des valeurs approximatives des probabilités des événements suivants :

- Tirage contenant exactement deux boules blanches ;
- Tirage contenant au moins une boule blanche.

38.1. Déterminer par un calcul les probabilités associées aux deux événements étudiés précédemment.

Exercice 39 Simulation d'une loi discrète

Pour chaque loi discrète prédéfinie dans scipy.stats, python propose 4 fonctions que nous utiliserons :

- `rvs` : prenant en paramètre les paramètres de la loi et un entier `size` et qui retourne un tableau de simulation de taille `size` selon cette loi
- `pmf` : prenant en paramètre un élément k (et les paramètres de la loi) et qui retourne la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$
- `cdf` : prenant en paramètre un élément k (et les paramètres de la loi) et qui retourne la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant k)$
- `ppf` : prenant en paramètre un un élément k (et les paramètres de la loi) et qui retourne le quantile $t1$ (t_1 est la plus petite valeur telle que $\mathbb{P}(X \leqslant t1) \geqslant k$)

Pour chaque loi, on appelle ces fonctions en les préfixant du nom de la loi. Par exemple, pour la loi binomiale (`binom`), il faut utiliser `binom.cdf`, `binom.rvs`, ...

Pour simuler 2 tirages d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathscr{B}(n = 30, p = 0.7)$, il faut par exemple utiliser la commande :

```
binom.rvs(30,0.7,size=2)
```

ou

```
binom.rvs(n=30,p=0.7,size=2)
```

39.1. Simulez 1000 tirages d'une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$ et affichez le tableau obtenu.

La représentation des données en liste n'est adaptée que pour un petit nombre de données. Dès que l'on effectue plus d'une dizaine de simulations, il est préférable d'afficher les résultats dans un graphique.

La commande `matplotlib.pyplot.bar` permet d'afficher des données sous la forme d'un diagramme en barres.

39.2. Importez `matplotlib.pyplot` à l'aide de la commande

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

39.3. Combien d'arguments requiert la fonction `bar` ? Quels sont-ils ?

La commande `numpy.unique` permet de regrouper les données sous forme d'un tableau d'effectifs. Par exemple la commande :

```
numpy.unique([2,2,3,3,3,5,5,6])
```

retourne :

```
array([2, 3, 5, 6])
```

et la commande :

```
numpy.unique([2,2,3,3,3,5,5,6],return_counts=True)
```

retourne :

```
( array([2, 3, 5, 6]),array([2, 3, 2, 1]) )
```

`numpy.unique` identifie les différentes valeurs présentes dans un tableau (ici 2,3,5 et 6) puis compte le nombre de fois qu'elles apparaissent (2 fois le 2, 3 fois le 3, etc).

39.4. Importez `numpy` à l'aide de la commande

```
import numpy as np
```

Utilisez la commande `np.unique` sur votre tableau de simulation et stockez les résultats dans deux variables. Affichez ensuite ces variables.

39.5. Utilisez `plt.bar` sur ces variables et affichez le graphique.

39.6. Afin de déterminer si la simulation est proche ou non de la véritable distribution de cette loi binomiale, nous allons afficher cette distribution sur le graphique précédent.

a. À l'aide de la commande `binom.pmf`, calculer la probabilité $\mathbb{P}(X = 2)$ lorsque X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$.

b. À l'aide de la fonction `plt.vlines`, affichez un graphique avec la distribution de probabilité d'une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.3$.

c. Lorsque vous affichez votre graphique de simulation (avec `bar`) puis la densité **au dessus** de votre graphique, que remarquez-vous ?

39.7.

a. Le problème de la fonction `np.unique` est qu'elle compte les effectifs là où l'on souhaiterait une fréquence (pour qu'elle soit comparable avec la densité de probabilité).

les tableaux `numpy` nous permettent de diviser tous les nombres du tableau par un réel. Exécutez le code suivant :

```
np.array([230, 43, 567, 1234])/100
```

b. Que rajouter à votre programme pour avoir un tableau de fréquences plutôt que d'effectifs ?

c. Affichez de nouveau votre simulation avec un diagramme en fréquences et non en effectifs et superposez-lui la fonction de densité.

39.8. En rajoutant l'option `color='r'` (comme `red`) dans votre commande `vlines`, affichez la distribution sous forme de lignes rouges.

39.9. Créez une fonction `test_binom` prenant 3 paramètres `taille`, `n` et `p` et affichant sous forme d'un diagramme en barres, une simulation de `taille` variables suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.

Votre fonction devra aussi afficher la densité de probabilité de la loi binomiale sous la forme de barres verticales rouges.

Vous pouvez également affichez un titre pour les axes et un titre général.

Exercice 40 Simulation d'une loi continue

40.1. Déterminer la commande permettant de simuler 1000 résultats d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

40.2. On représente facilement des lois discrètes par des diagrammes en barres (par la commande `bar`). Pour les lois continues, on utilise plutôt des représentations en classe comme des histogrammes (commande `hist`).

a. À l'aide de la fonction `plt.hist`, afficher cette simulation sous la forme d'un histogramme.

b. On pose f la fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$. Déterminer quelle est la commande permettant de calculer $f(0.3)$.

c. De la même manière que pour l'exercice précédent, on cherche à superposer le graphique de la densité de probabilité de la loi exponentielle sur le même graphique que l'histogramme.

Affichez, à l'aide de la commande `plot`, la densité de probabilité pour les valeurs de `x_coord`.

40.3. Créez une fonction `test_exp` prenant 2 paramètres `taille` et `lambda`, et affichant sous forme d'un histogramme, une simulation de `taille` variables suivant une loi exponentielle de paramètre `lambda`.

Votre fonction devra aussi afficher la densité de probabilité de la loi exponentielle sous la forme d'une ligne brisée en pointillés.

Exercice 41 Création de notre loi binomiale

41.1. Donner un exemple de situation dans laquelle X suit une loi binomiale.

41.2. Toutes les lois ne sont pas définies dans python. En revanche, on peut créer soi-même ses propres lois, si on parvient à les exprimer à partir d'une autre loi prédéfinie (en général à partir de la loi uniforme).

a. Que permet de faire la commande `uniform.rvs(loc=a,scale=b,size=n)` ?

b. À l'aide de la fonction `uniform.rvs`, écrivez une fonction `bern` prenant en paramètre un réel `p` et retournant 1 avec la probabilité `p` et 0 sinon.

41.3. Écrivez une fonction `bern_rvs` prenant 2 paramètres `n` et `p` et retournant un vecteur de `n` simulations d'une v.a. suivant une loi de Bernoulli de paramètre `p`.

41.4. À l'aide de la fonction `sum`, écrivez une fonction `mybinom` prenant 2 paramètres `n` et `p` et retournant la simulation d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.

41.5. Écrivez une fonction `mybinom_rvs` prenant 3 paramètres `taille`, `n` et `p` et retournant un vecteur de `taille` simulations d'une v.a. suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.

41.6. Testez votre fonction en la comparant à `binom.rvs` *(vous pouvez reprendre la fonction faite dans l'exercice 39 en changeant le `binom.rvs` par `mybinom_rvs`).*

41.7. Quelle est la complexité en temps de votre fonction `mybinom_rvs` ?

Exercice 42 Calcul de l'espérance et de la variance

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	0.1	0.1	0.2	0.4	0.1	0.1

Loi de X

42.1. À l'aide de la fonction `np.average`, déterminer l'espérance de X dont la loi est définie ci-dessus.

42.2.

1. Créez un tableau `x_values` contenant les nombres de 0 à 10.
2. Créez un tableau `x_weights` contenant les probabilités $\mathbb{P}(X = 0)$ à $\mathbb{P}(X = 10)$ si X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0.3.
3. À l'aide de la fonction `np.average`, déterminer l'espérance de X.

4. Créez une fonction `esp_binom` prenant 2 paramètres `n` et `p` et retournant l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.

42.3. Exécutez la commande

```
np.array([1,2,3])*np.array([2,3,4])
```

42.4. Toujours à l'aide de la fonction `np.average`, créez une fonction `var_binom` prenant 2 paramètres `n` et `p` et retournant la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres `n` et `p`.