

## Feuille de TD 4 : arbres

### Exercice 1 : Algorithmes de Prim et de Kruskal (1)

Soit  $G_1$ , le graphe non orienté donné par la matrice de valuation  $M_1$  (les sommets sont nommés par les lettres de  $A$  à  $F$ ) :

$$M_1 = \begin{pmatrix} +\infty & 12 & 9 & 5 & 7 & 6 \\ 12 & +\infty & 1 & 14 & 10 & 11 \\ 9 & 1 & +\infty & 8 & 15 & 3 \\ 5 & 14 & 8 & +\infty & 4 & 2 \\ 7 & 10 & 15 & 4 & +\infty & 13 \\ 6 & 11 & 3 & 2 & 13 & +\infty \end{pmatrix}$$

- En utilisant la matrice  $M_1$ , calculez un arbre couvrant de poids minimal, en utilisant l'algorithme de Kruskal. Vous dessinerez l'arbre obtenu à chaque étape de l'algorithme.
- En utilisant la matrice  $M_1$ , calculez un arbre couvrant de poids minimal, en utilisant l'algorithme de Prim (en partant du premier sommet, nommé  $A$ ). Vous dessinerez l'arbre obtenu à chaque étape de l'algorithme.
- Comparez les résultats obtenus avec les deux algorithmes.

### Exercice 2 : Réseau intranet (DS du 01/04/2015)

L'Université de Nantes souhaite se moderniser en installant un réseau intranet neuf, tout en minimisant le coût total des travaux à réaliser.

La matrice suivante donne le coût (en k€) du câblage à effectuer entre les différents sites de l'Université (les sommets sont nommés par les lettres de  $A$  à  $I$ ) :

$$M = \begin{pmatrix} +\infty & 4 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 8 \\ 4 & +\infty & 8 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 11 \\ +\infty & 8 & +\infty & 7 & +\infty & 4 & +\infty & 2 & +\infty \\ +\infty & +\infty & 7 & +\infty & 9 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & 9 & +\infty & 10 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 10 & +\infty & 2 & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty & 6 & 1 \\ +\infty & +\infty & 2 & +\infty & +\infty & +\infty & 6 & +\infty & 7 \\ 8 & 11 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 1 & 7 & +\infty \end{pmatrix}$$

Pour résoudre ce problème, on souhaite calculer un arbre couvrant de poids minimum.

Pour chacune des questions suivantes, **vous préciserez l'arête choisie à chaque étape de l'algorithme**, en ordonnant les sommets de chaque arête dans l'ordre alphabétique (par exemple,  $\{A, E\}$  et non  $\{E, A\}$ ). De plus, en cas d'égalité des valuations de plusieurs arêtes, vous choisirez les arêtes selon l'ordre alphabétique de leurs sommets (par

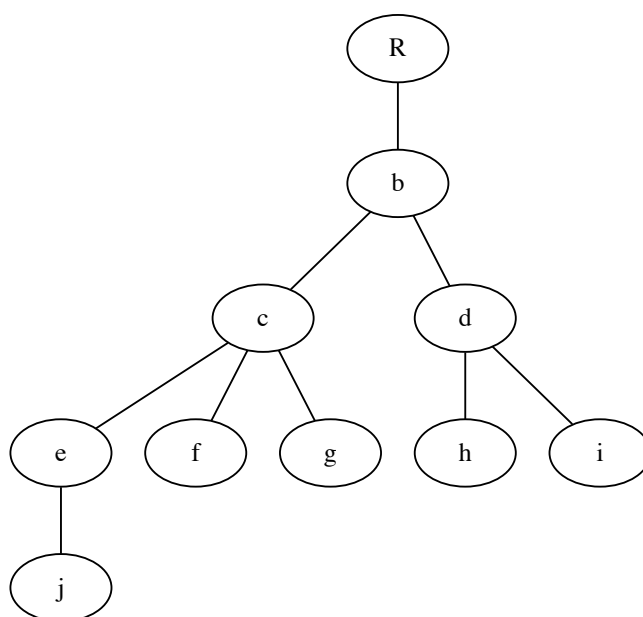
exemple,  $\{B, E\}$  sera choisie avant  $\{D, G\}$  et  $\{B, E\}$  sera choisie avant  $\{B, G\}$ ). Vous dessinerez enfin l'arbre couvrant obtenu et vous indiquerez son poids, c'est-à-dire le coût minimum pour réaliser le nouveau réseau intranet.

- (a) Utilisez l'algorithme de Kruskal, pour calculer un arbre couvrant de poids minimum.
- (b) Utilisez l'algorithme de Prim à partir du sommet  $A$ , pour calculer un arbre couvrant de poids minimum.
- (c) Comparez les résultats obtenus aux deux questions précédentes.

## Pour aller plus loin

### Exercice 3 : Arbre enraciné

On considère l'arbre enraciné  $A$  de racine  $R$  :



- (a) Déterminez le père de  $c$  et celui de  $h$  ;
- (b) Déterminez les ancêtres de  $i$  et ceux de  $j$  ;
- (c) Déterminez les fils de  $b$  et ceux de  $c$  ;
- (d) Déterminez les descendants de  $c$  et ceux de  $e$  ;
- (e) Déterminez les sommets de profondeur 3 ;
- (f) Déterminez les feuilles et la profondeur de  $A$ .

**Exercice 4 : Algorithmes de Prim et de Kruskal (2)**

Soit  $G_2$ , le graphe non orienté correspondant à la matrice  $M_2$  suivante (les sommets sont nommés par les lettres de  $A$  à  $K$ ) :

$$M_2 = \begin{pmatrix} +\infty & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 1 & +\infty & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & 2 & +\infty & 2 & +\infty & 6 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 1 & +\infty & 3 & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 2 & +\infty & 1 & +\infty \\ +\infty & 5 & +\infty & +\infty & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & 4 & +\infty & 7 \\ +\infty & +\infty & 4 & 4 & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty \\ 3 & 2 & +\infty & +\infty & 5 & +\infty & +\infty & +\infty & 3 & +\infty & 7 \\ +\infty & +\infty & 1 & 2 & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty \\ +\infty & 2 & +\infty & +\infty & 4 & +\infty & 3 & +\infty & +\infty & +\infty & 6 \\ +\infty & +\infty & 3 & 1 & +\infty & +\infty & +\infty & 2 & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & 6 & +\infty & +\infty & 7 & +\infty & 7 & +\infty & 6 & +\infty & +\infty \end{pmatrix}$$

- Appliquez l'algorithme de Kruskal.
- Appliquez l'algorithme de Prim, en partant du sommet  $A$ . Que constatez-vous ?
- Appliquez l'algorithme de Prim en partant du sommet  $C$ .
- Comparez les résultats obtenus aux trois questions précédentes.