TD 1 – Suites usuelles

Exercice 1.1 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et on définit ainsi la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$.

1. La suite (v_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. En déduire une expression de (u_n) en fonction de n.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 < u_n \leqslant \frac{1}{3}$.
4. Montrer que la suite (u_n) est décroissante. Que peut-on en déduire sur (u_n) ?

Exercice 1.2 – Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?
2. On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et on considère la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
3. Exprimer v_n en fonction de n et en déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Quelle est la limite de (u_n) ?

Exercice 1.3 –
1. Soit (u_n) est une suite géométrique de raison 2 telle que $u_3 = 16$. Que vaut u_0 ?
2. Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et (v_n) est une suite géométrique de raison q telles que $u_0 = v_0$, à quelles conditions sur u_0, r et q a-t-on $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
3. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q avec $u_0 = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   À quelle condition sur q, la suite S_n admet-elle une limite finie ?

Exercice 1.4 – On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3.$$

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 6$ est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
3. Calculer les sommes $S_n = v_0 + v_1 = \ldots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exercice 1.5 – Exprimer u_n en fonction de n pour les suites définies par :

1. $2u_{n+1} = 5u_n + 2$ et $u_0 = 2$
2. $u_{n+1} = 1 - u_n$ et $u_0 = 2$
3. $2u_{n+1} - 2u_n + 1 = 0$ et $u_0 = 4$.

Exercice 1.6 – Faire l'étude de la suite arithmético-géométrique u définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$ pour tout entier $n \geqslant 0$. En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.