Cours 1 – Étude de fonctions

Dans ce cours, on s'intéresse à l'étude de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est en général définie par son expression $f(x)$ dépendant d'une variable réelle x.

Le but de ce cours est, partant d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par son expression, de donner l'allure de son graphe, c'est-à-dire l'ensemble des points $(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$. Le plan de ce cours fournit le plan que vous devez suivre lorsque vous souhaitez faire l'étude d'une fonction réelle. Pour la suite de ce cours, on fixe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

Exemple 1.1 – Polynôme de degré 3 (I) – On fixe 4 nombres réels a, b, c et d, avec $a \neq 0$ et on considère la fonction polynomiale

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d \ .$$

Exemple 1.2 – Fonction rationnelle (I) – On considère la fonction g donnée par

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} \ .$$

Pour commencer, on doit déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

> Définition 1.3 *(Ensemble de définition de f). L'ensemble de définition de f* est l'ensemble
>
> $$D_f \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } y = f(x)\right\} \ .$$
>
> On appelle également D_f le *domaine de définition de f*.

Remarque 1.4 – L'ensemble de définition d'une fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est donc l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ ait un sens.

Exemple 1.5 – Polynôme de degré 3 (II) – On reprend la fonction polynomiale

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d \ .$$

Cette fonction est définie pour tout réel x donc son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Exemple 1.6 – Fonction rationnelle (II) – Reprenons la fonction g donnée par

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} \ .$$

L'ensemble de définition de g est

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

car on ne peut diviser par zéro.

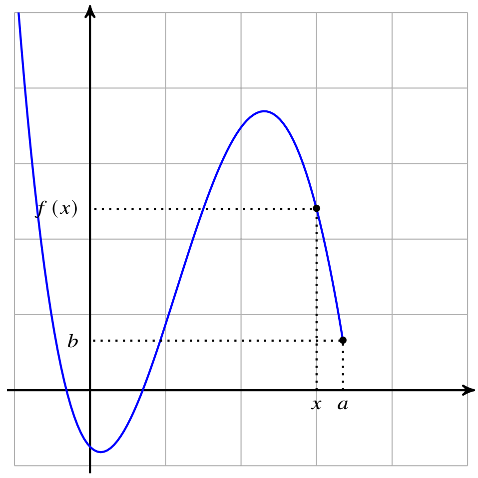
1.1. **Limite et continuité.**

1.1.1. *Limite.* La notion de limite d'une fonction f en une valeur a est faite pour répondre mathématiquement à la question suivante :

comment se comporte la valeur $f(x)$ lorsque x se rapproche de a ?

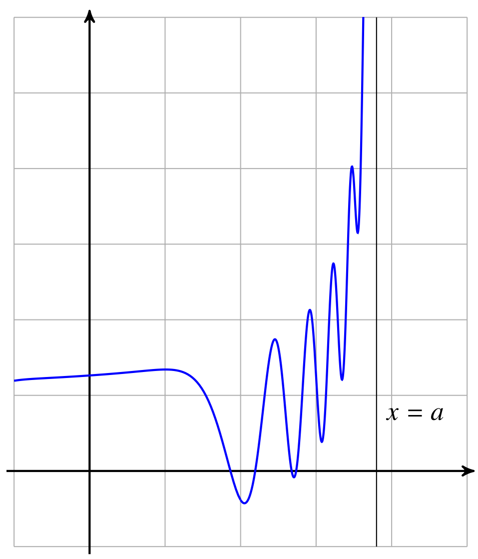
Supposons que x se rapproche d'une valeur a finie, c'est à dire que a est un nombre réel. Plusieurs cas se présentent à nous :

(1) lorsque x se rapproche de a, la valeur $f(x)$ se rapproche d'une valeur finie b, comme l'illustre l'allure de courbe ci-dessous :



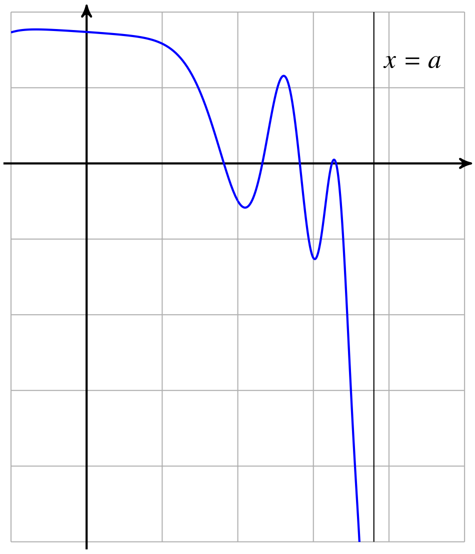
On notera cela $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

(2) lorsque x se rapproche de a, la valeur $f(x)$ peut "globalement croître indéfiniment", c'est-à-dire se rapprocher de $+\infty$, comme l'illustre l'allure de courbe ci-dessous :



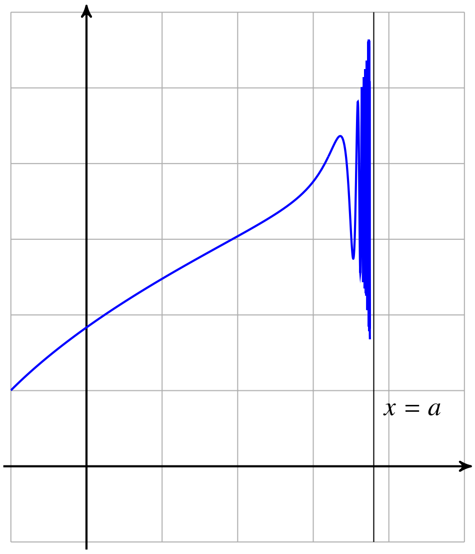
On notera cela $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

(3) la valeur $f(x)$ peut "globalement décroître indéfiniment", c'est-à-dire se rapprocher de $-\infty$, comme l'illustre l'allure de courbe ci-dessous :



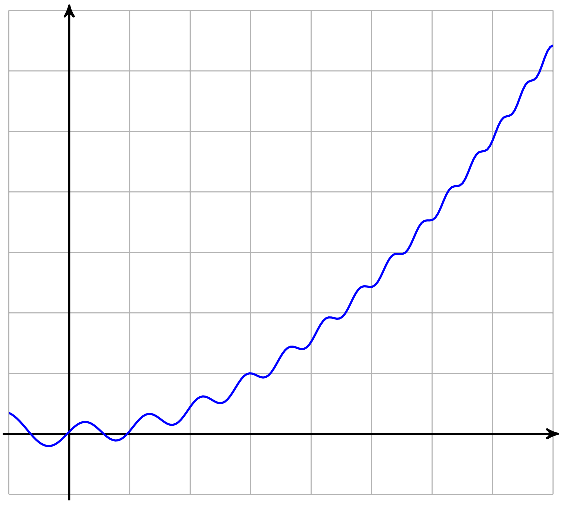
On notera cela $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

(4) la valeur $f(x)$ peut également ne s'approcher d'aucune valeur, comme l'illustre l'allure de courbe ci-dessous :

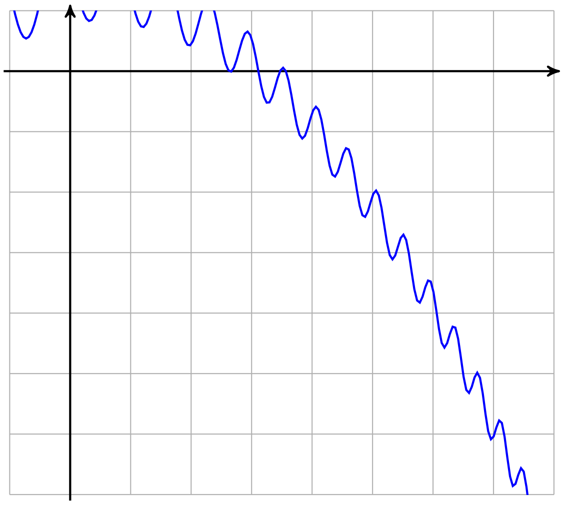


On dira alors que la fonction f n'a pas de limite en a .

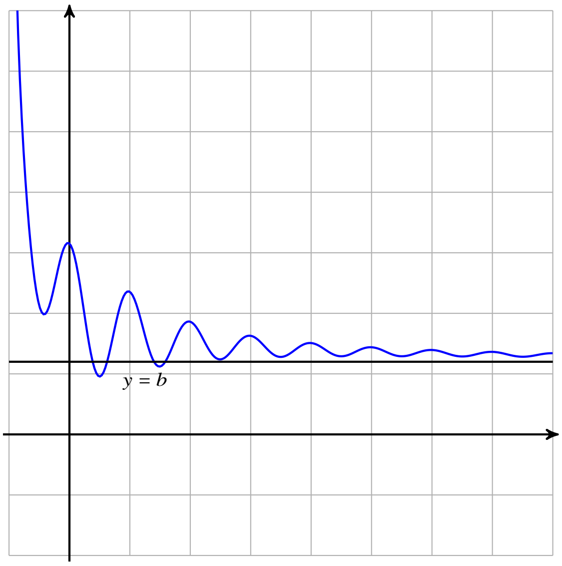
On a illustré ici des cas qui apparaissent lorsque l'on regarde la limite d'une fonction lorsque x se rapproche d'une valeur finie a. On peut se poser les même questions lorsque x devient de plus en plus grand (on dit qu'on regarde la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$), ou alors lorsque x devient de plus en plus petit (on dit qu'on regarde la limite de f lorsque x tend vers $-\infty$). On peut illustrer cela par quelques exemples :



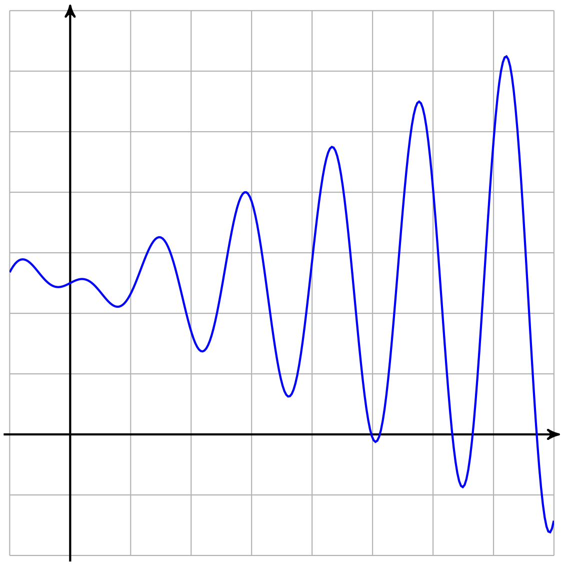
on a ici $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$;



on a ici $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;



on a ici $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$;



Ici, la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

Définition 1.7 *(Définition intuitive de limite).* Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$. Soient également x_0 et l des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On dit que f a pour *limite l en x_0* (ou que $f(x)$ *tend vers l lorsque x tend vers x_0*) si $f(x)$ peut être rendu aussi voisin que l'on veut de l, à condition de prendre x assez voisin de x_0 ; on note cela comme suit

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \ .$$

On donne à présent les définitions de limites grâce à une écriture en quantificateurs. On doit distinguer deux cas : les limites en l'infini ($\pm\infty$) et les limites en

Définition 1.8 *(Limite en l'infini (en $+\infty$)).* Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur $I =]a, +\infty[$.

Limite infinie : On dit que f admet $+\infty$ comme *limite* en $+\infty$ si

$$\forall M > 0,\ \exists x_0 > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant M \ .$$

On note cela

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \ .$$

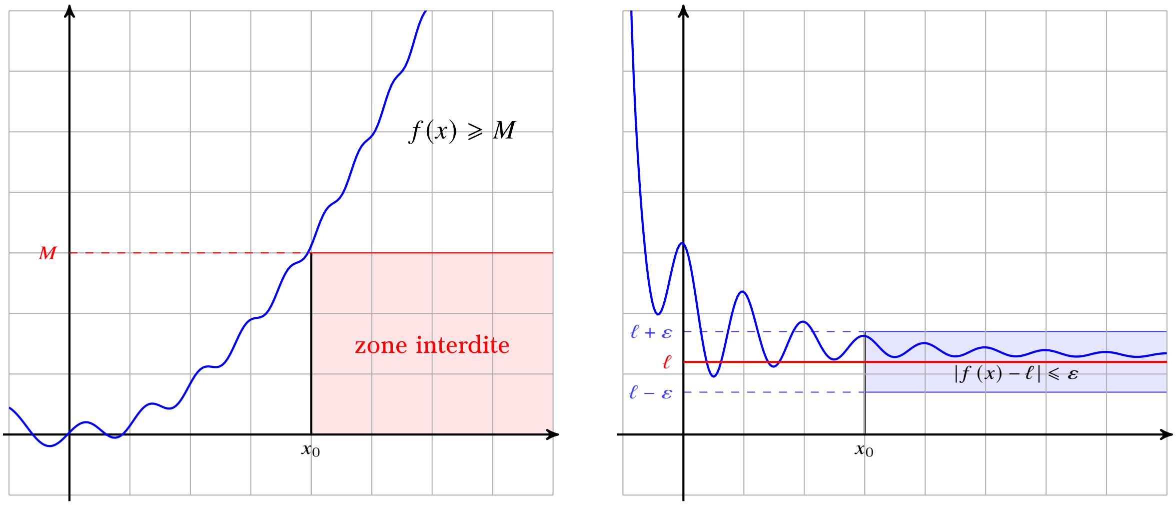
Limite finie : On dit que f admet une *limite finie* ℓ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_0 > 0, \ \forall x \in I, \ x \geqslant x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \ .$$

On note cela

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \ .$$

Remarque 1.9 – De manière similaire, on peut définir la notion de limite en $-\infty$.



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$;

Définition 1.10 *(Limite en un point).* Soient $I \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Limite infinie : Soit f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. On dit que f admet $+\infty$ comme *limite* en a si

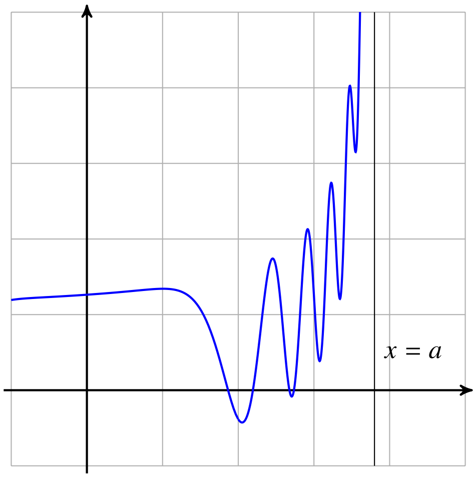
$$\forall M > 0, \ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M \ .$$

On note cela

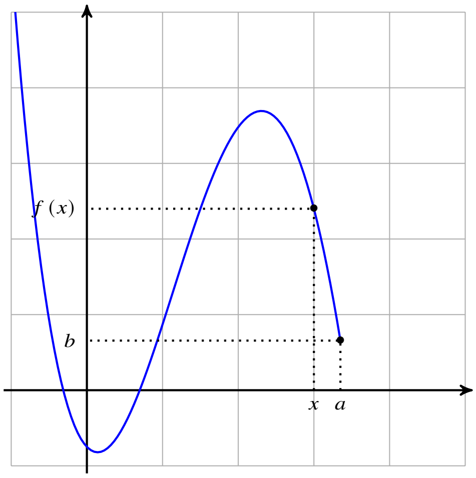
$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ .$$

Limite finie : Soit f une fonction définie sur I. On dit que f admet une *limite finie* ℓ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0, \ \forall x \in I, \ |x - a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \ .$$



$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.



$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = b$.

Proposition 1.11 (Opérations avec des limites finies). *Soient $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions. Soient l_1 et l_2 deux nombres réels. Si f et g admettent respectivement l_1 et l_2 comme limite en x_0, c'est-à-dire si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$$

alors

(1) la fonction $f + g$, définie par $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ admet une limite finie en x_0 égale à $l_1 + l_2$, i.e.

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = l_1 + l_2 \ .$$

(2) la fonction fg, définie par $(fg)(x) := f(x) \times g(x)$ admet une limite finie en x_0 égale à $l_1 \times l_2$, i.e.

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = l_1 \times l_2 \ .$$

(3) si, de plus, $l_2 \neq 0$, alors la fonction quotient $\frac{f}{g}$, définie par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite finie en x_0 égale à $\frac{l_1}{l_2}$, i.e.

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2} \ .$$

Exemple 1.12 – On considère les fonctions suivantes : la fonction constante $f : x \mapsto 7$, un réel fixé, la fonction $g : x \mapsto 2x$ et la fonction $h : x \mapsto -x^2$. On a alors les limites suivantes

a)

$$\lim_{x \to 3} f(x) + g(x) = \lim_{x \to 3} 7 + 2x = 7 + 2 \times 3 = 13 \ ,$$
$$\lim_{x \to 3} f(x) + h(x) = \lim_{x \to 3} 7 - x^2 = 4 - 3^2 = -5 \ ,$$
$$\lim_{x \to 3} g(x) + h(x) = \lim_{x \to 3} 2x - x^2 = 2 \times 3 - 3^2 = -3 \ .$$

b)

$$\lim_{x \to 3} f(x) \times g(x) = \lim_{x \to 3} 7 \times 2x = 7 \times 2 \times 3 = 42 \ ,$$
$$\lim_{x \to 3} f(x) \times h(x) = \lim_{x \to 3} -7x^2 = -7 \times 3^2 = -7 \times 9 = -63 \ ,$$
$$\lim_{x \to 3} g(x) \times h(x) = \lim_{x \to 3} 2x \times (-x^2) = 2 \times 3 \times (-3^2) = -6 \times \ .$$

c)

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{7}{2x} = \frac{7}{2\times 3} = \frac{7}{6}\ ,$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{7}{-x^2} = \frac{7}{-3^2} = -\frac{7}{9}\ ,$$
$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 3}\frac{2x}{-x^2} = \frac{2\times 3}{-3^2} = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}\ .$$

PROPOSITION 1.13 (Opérations avec une limite finie et une limite infinie). *Soit* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f *et* g *deux fonctions. On a les limites suivantes :*

si $\lim_{x_0} f =$	*et si* g	*alors* $\lim_{x_0}(f+g) =$	*alors* $\lim_{x_0}(fg) =$
$+\infty$	*a une limite finie* < 0 *en* x_0	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	*a une limite finie* > 0 *en* x_0	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	*a une limite finie* < 0 *en* x_0	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	*a une limite finie* > 0 *en* x_0	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	*a une limite nulle en* x_0	$+\infty$	***FI***
$-\infty$	*a une limite nulle en* x_0	$-\infty$	***FI***

*où **FI** signifie que l'on a* une forme indéterminée *(c'est-à-dire que l'on ne peut pas conclure directement).*

EXEMPLE 1.14 – a) Soit a un réel. On considère la fonction identité $f : x \mapsto x$ et la fonction constante $g : x \mapsto a$ égale à a ; on a

$$\lim_{x\to+\infty} f+g(x) = \lim_{x\to+\infty} x+a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f+g(x) = -\infty\ .$$

b) On considère les mêmes fonctions que précédement : on a

$$\lim_{x\to+\infty} fg(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a>0\ ,\\ 0 & \text{si } a=0\ ,\\ -\infty & \text{si } a<0\ ,\end{cases} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} fg(x) = \begin{cases} -\infty & \text{si } a>0\ ,\\ 0 & \text{si } a=0\ ,\\ +\infty & \text{si } a<0\ .\end{cases}$$

EXEMPLE 1.15 – À PROPOS DES FORMES INDÉTERMINÉES – On considère les fonctions

$$f : x \mapsto x^2\ ,\ g_1 : x \mapsto \frac{1}{x}\ ,\ g_2 : x \mapsto \frac{1}{x^2}\ ,\ g_3 : x \mapsto \frac{1}{x^3}\ .$$

On a

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\ ,\ \lim_{x\to 0^+} g_1(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^+} g_2(x) = +\infty\ ,\ \lim_{x\to 0^+} g_3(x) = +\infty\ .$$

et pourtant

$$\lim_{x\to 0^+} fg_1(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0\ ,$$
$$\lim_{x\to 0^+} fg_2(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1\ ,$$
$$\text{et} \lim_{x\to 0^+} fg_3(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty\ .$$

PROPOSITION 1.16 (Opérations avec deux limites infinies). *Soit* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *et* f *et* g *deux fonctions. On a les limites suivantes :*

si $\lim_{x_0} f =$	*et si* $\lim_{x_0} g =$	*alors* $\lim_{x_0} (f+g) =$	*alors* $\lim_{x_0} (fg) =$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	***FI***	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	***FI***	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

*où **FI** signifie que l'on a* une forme indéterminée *(c'est-à-dire que l'on ne peut pas conclure directement).*

Exemple 1.17 – Soient $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x^2$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} (f+g)(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 + x = +\infty \ .$$

Exemple 1.18 – À propos de la forme indéterminée – Considérons les fonctions

$$f : x \mapsto x^2 \ , \ g : x \mapsto -x \ .$$

On a $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Pour tout réel $x \neq 0$, on a $f + g(x) = x^2 - x = x^2(1 - \frac{1}{x})$, et donc

$$\lim_{x\to+\infty} f + g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{1}{x}) = +\infty \ ,$$

par Proposition 1.13. De la même manière, si l'on considère les fonctions

$$f : x \mapsto x \ , \ g : x \mapsto -x^2 \ ,$$

On a toujours $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ et on a

$$\lim_{x\to+\infty} f + g(x) = \lim_{x\to+\infty} -x^2(1 - \frac{1}{x}) = -\infty \ .$$

Exemple 1.19 – Polynôme de degré 3 (III) – On reprend la fonction polynomiale

$$f : x \mapsto f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d$$

et on cherche à déterminer si la fonction f admet une limite en $+\infty$. Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d = \frac{a}{3}x^3 \left(1 + \frac{3b}{2ax} + \frac{3c}{x^2} + \frac{3d}{x^3}\right) \ ;$$

comme on a

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{3b}{2ax} + \frac{3c}{x^2} + \frac{3d}{x^3} = 1$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a}{3}x^3 = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Remarque 1.20 – La stratégie mise en place dans l'exemple précédent est toujours la stratégie employée pour étudier les limites en $\pm\infty$ pour les fonctions polynomiales.

Exemple 1.21 – Fonction rationnelle (III) – Reprenons la fonction g donnée par

$$g : x \mapsto g(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2} \ ,$$

et rappelons que l'ensemble de définition de g est $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. On cherche à étudier "la limite" de g en -2. On commence par constater que

$$\lim_{x\to-2} x^2 - 1 = 3 \ \text{ et } \ \lim_{x\to-2} x + 2 = 0 \ .$$

On doit alors différencier ce qui se passe à gauche et à droite de -2, en utilisant la notion de *limite à droite* et *limite à gauche*. Une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ admet $+\infty$ comme *limite à gauche* en $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ x < a,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant M\ .$$

On note cela

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty\ .$$

De la même manière, on peut définir la notion de limite à droite en remplaçant $x < a$ par $x > a$. On peut également adapter cette définition pour la notion de limite finie à gauche/droite. Pour la fonction g, on a alors

$$\lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} \frac{3}{x+2} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} g(x) = \lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} \frac{3}{x+2} = +\infty\ .$$

1.1.2. *Continuité d'une fonction.*

Remarque 1.22 – Notion intuitive de continuité – La notion mathématique de continuité d'une fonction est faite pour encoder la simple idée suivante : le graphe de cette fonction est-il d'un seul tenant, c'est-à-dire peut-on tracer le graphe de la fonction sans lever son crayon.

> Définition 1.23 *(Continuité en un point).* Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. on dit que *la fonction f est continue en a* si
>
> $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon\ ,$$
>
> c'est-à-dire que
>
> $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x) = f(a)\ .$$

> Proposition 1.24. *Toutes les fonctions usuelles sont continues sur leurs ensembles de définition. La somme ou le produit de deux fonctions continues sont des fonctions continues.*

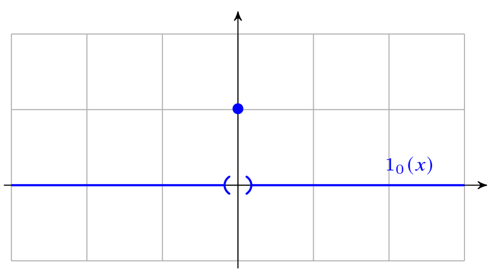
Contre-exemple 1.25 – La fonction réelle définie par

$$\begin{array}{rccl} 1_0 : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

n'est pas continue en 0. En effet, on a que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 1_0(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} 0 = 0\ ,$$

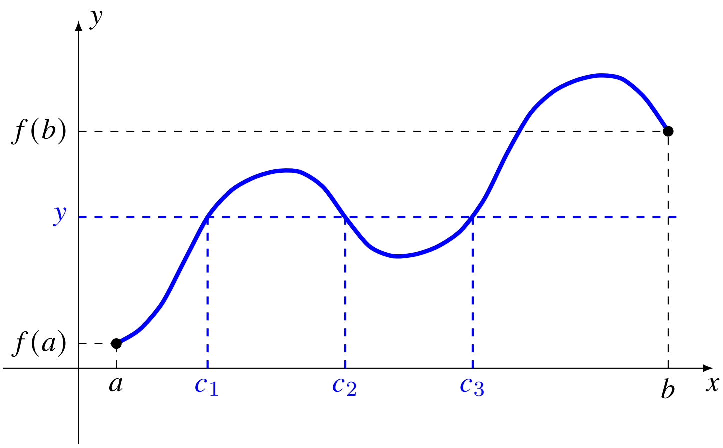
et qui est donc différent de 1. On le constate assez bien sur son graphe



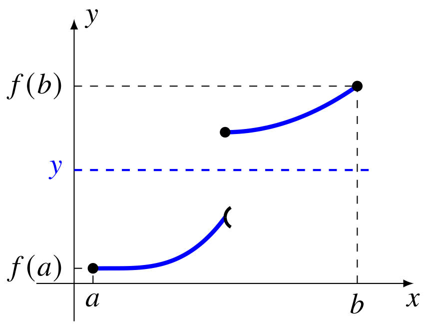
On cite enfin un théorème que vous avez peut-être déjà rencontré qui utilise de manière cruciale la notion de continuité.

Théorème 1.26 – Théorème des valeurs intermédiaires
Soient $a < b$ deux réels. Pour toute application continue $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ et pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

On illustre le théorème par la figure suivante. On constate notamment que le réel c n'est pas nécessairement unique.



Constatons également sur la figure suivante que le théorème n'est plus vrai sans l'hypothèse de continuité



1.2. **Dérivée et variations de la fonction.**

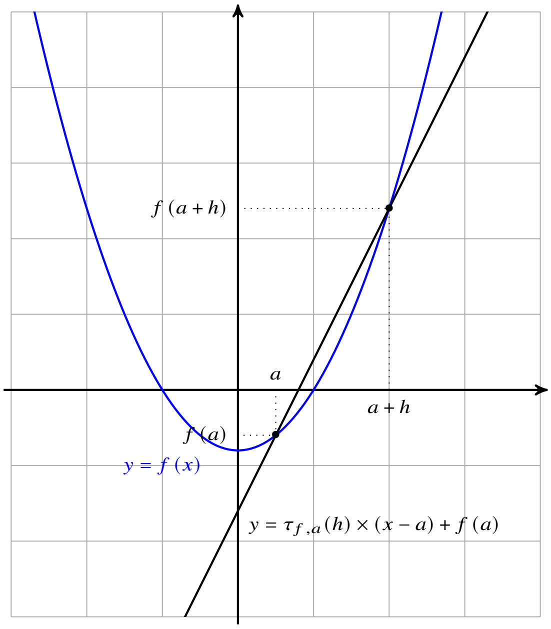
1.2.1. *Dérivation.* Le but de la dérivation est de trouver, en un point $(a, f(a))$ de la courbe représentative de la fonction f, une droite "qui approxime au mieux la courbe" : c'est la tangente en la courbe au point $(a, f(a))$. Une telle droite n'existe pas toujours.

§ *Taux d'accroissement.*

Définition 1.27 *(Taux de variation).* Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient a un élément de I et h un réel tel que $a + h \in I$. On appelle *taux d'accroissement* de f en a avec un pas de h la quantité

$$\tau_{f,a}(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h} .$$

Il s'agit du coefficient directeur de la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$.



Exemple 1.28 – On considère la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$. Déterminons le taux de variation de f en a et de pas h avec a et $h \neq 0$ deux réels. On a

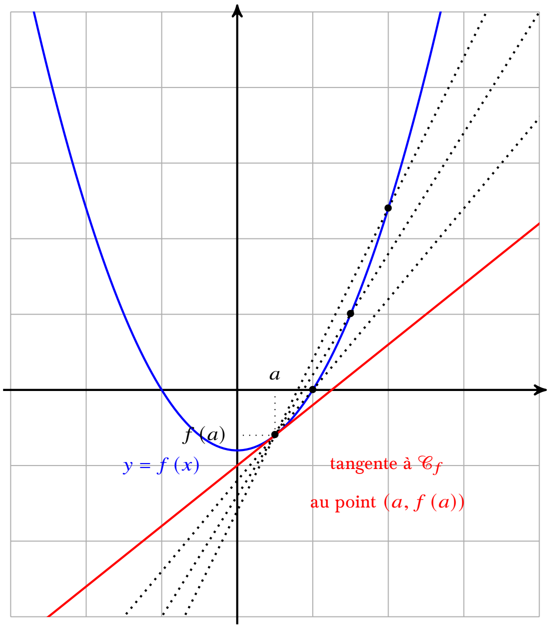
$$\begin{aligned}\tau_{f,a}(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\ &= \frac{2ah + h^2}{h} \\ &= h + 2a\ .\end{aligned}$$

La droite tangente en a à la courbe représentative de la fonction f est obtenue comme "la limite" de la famille de droite d'équation $y = \tau_{f,a}(h) \times (x-a) + f(a)$ quand h tend vers 0. Formalisons cette idée.

Définition 1.29 *(Nombre dérivé).* Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soient a un élément de I. On dit que *f est dérivable en a* si la limite

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note $f'(a)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivé de f en a*.



Exemple 1.30 – On considère la fonction carrée $f : x \mapsto x^2$. Soit a un nombre réel. On a

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} h + 2a = 2a\ .$$

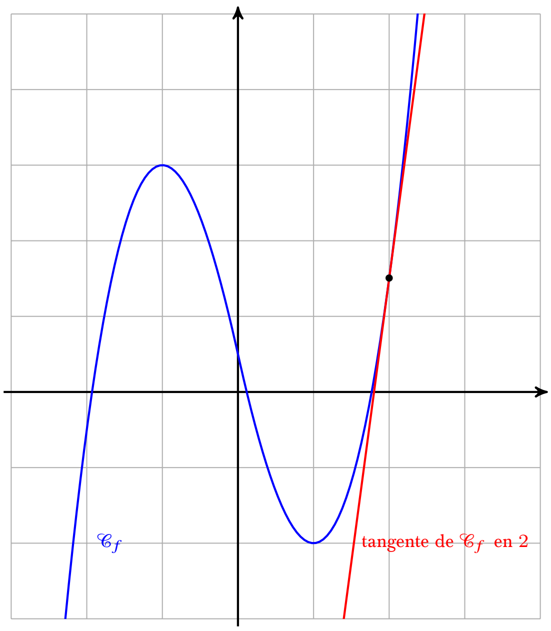
Ainsi, pour tout nombre réel a, le nombre dérivé de f en a est $f'(a) = 2a$.

§ *Interprétation graphique.*

Définition 1.31. Soit f une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$. La droite d'équation

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

est *la tangente à* $\mathscr{C}_f$ *au point* $(a, f(a))$.

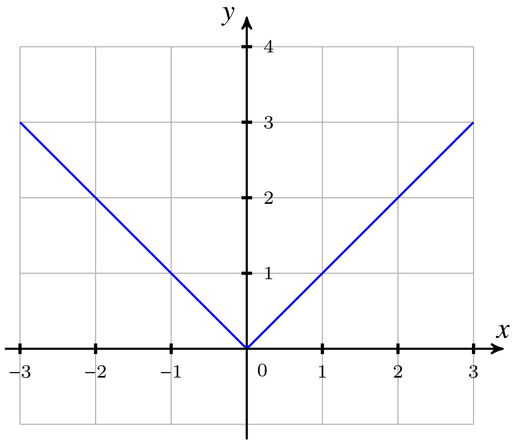


En particulier, si la dérivée d'une fonction f dérivable en a est nulle en a, alors la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f admet une tangente horizontale.

Remarque 1.32 – La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. En effet, on a

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|0+h|-|0|}{h} = -1$$

donc, comme limite à droite et limite à gauche sont différentes, alors la fonction $\frac{|h|}{h}$ n'admet pas de limite en 0 et donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. On remarque cette non dérivabilité graphiquement grâce à l'angle formée par la courbe représentative.



§ *Fonction dérivée.*

Définition 1.33. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et J un sous-ensemble de I. On dit que f est ***dérivable*** sur J si f est dérivable pour tout élément a de J.
Lorsque f est dérivable sur J, on peut lui associer la fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur J. Cette fonction s'appelle ***la fonction dérivée de f*** et se note f'.

Exemple 1.34 – On a vu que la fonction carrée $f\colon x \mapsto x^2$ est dérivable en tout réel a, avec $f'(a) = 2a$. Ainsi, la fonction dérivée de f est

$$f'\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x \end{array}.$$

§ *Dérivées usuelles et opérations sur les dérivées.*

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$f : x \mapsto k$ avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto 0$
$f : x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto a$
$f : x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto nx^{n-1}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$	$f' : x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$f : x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto -\sin(x)$
$f : x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto \cos(x)$
$f : x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$	$f' : x \mapsto e^x$
$f : x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$	$f' : x \mapsto \frac{1}{x}$

PROPOSITION 1.35. *Soient u et v désignent deux fonctions définies et dérivables sur le même intervalle I. Soit k un nombre réel.*

a) La fonction $u + v$ est dérivable sur I et on a
$$(u + v)' = u' + v' \ .$$

b) La fonction $k \cdot u$ est dérivable sur I et on a
$$(k \cdot u)' = k \cdot u' \ .$$

c) La fonction $u \cdot v$ est dérivable sur I et on a
$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v' \ .$$

Cette relation est appelé relation de Leibniz.

d) Supposons de plus que la fonction v ne s'annule jamais sur I. La fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \ .$$

EXEMPLE 1.36 – a) *Toute fonction polynomale est dérivable.* Par exemple, la fonction $f : x \mapsto 4x^3 + 2x^2 - x + 1$ est de dérivée
$$f'(x) = 12x^2 + 4x - 1 \ .$$

b) La fonction $g: x \mapsto (x+1)\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée, la fonction
$$g'(x) = \cos(x) - (x+1)\sin(x) \ .$$

c) La fonction $h: x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée
$$h'(x) = \frac{3(x^2+1) - 2x(3x+2)}{(x^2+1)^2} \ .$$

Remarque 1.37 – Composée de deux fonctions – Rappelons la définition de la composée de fonctions. Soient u une fonction définie sur un intervalle I et à valeur dans un intervalle J, et f une fonction définie sur J. La composée $f \circ u$ est la fonction définie sur I, pour tout $x \in I$, par
$$(f \circ u)(x) = f(u(x)) \ .$$

Proposition 1.38 (Dérivée d'une composée). *Soient u, une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J.*
La composée $f \circ u$ est définie et dérivable sur I, et pour tout $x \in I$,
$$(f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)) \ .$$

Exemple 1.39 – (1) La fonction $f: x \mapsto \sin(2x+3)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet pour dérivée la fonction
$$f'(x) = 2\cos(2x+3) \ .$$

(2) On étudie la fonction $g: x \mapsto \sqrt{3x+2}$. La fonction est définie sur $[-\frac{2}{3}, +\infty[$ et est dérivable sur $]-\frac{2}{3}, +\infty[$, de dérivée
$$g'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}} \ .$$

Grâce au calcul de la dérivée, on peut étudier les variations d'une fonction. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 1.40

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

a) Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) \leqslant 0$ (respectivement $f'(x) < 0$), alors la fonction f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I.

b) Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) \geqslant 0$ (respectivement $f'(x) > 0$), alors la fonction f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I.

c) Si, pour tout réel $x \in I$, on a $f'(x) = 0$, alors la fonction f est constante sur I.

Exemple 1.41 – Polynôme de degré 3 (IV) – On reprend la fonction polynomiale
$$f: x \mapsto f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + d \ ,$$
où a, b, c et d sont des nombres réels avec $a \neq 0$. Cette fonction est définie pour tout réel x donc son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = ax^2 + bx + c \ .$$

On cherche alors à connaître le signe de la dérivée de f. Soit $x \in \mathbb{R}$, comme $a \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c \\ &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} \end{aligned}$$

Notons que si $a > 0$ (respectivement si $a < 0$), alors on a $ax^2+bx+c \geqslant -\frac{b^2-4ac}{4a}$ (resp. $ax^2+bx+c \leqslant -\frac{b^2-4ac}{4a}$) avec égalité si $x = -\frac{b}{2a}$.

On cherche maintenant les solutions de l'équation

$$ax^2+bx+c = 0\ , \tag{1}$$

qui est équivalente à l'équation

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a} = 0\ .$$

On appelle *discriminant de cette équation du second degré* le nombre $\Delta := b^2-4ac$. Trois cas s'offrent à nous :

SI $\Delta > 0$: pour $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \\ &= a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2\right) \\ &= a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

donc l'équation (1) admet 2 solutions

$$x_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\ .$$

La fonction $f' : x \mapsto ax^2+bx+c$ a pour tableau de signe

x	$-\infty$	x_-	x_0	x_+	$+\infty$
signe de $f'(x)$	signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a

SI $\Delta < 0$: alors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}\right)$$

qui est de signe constant égal au signe de a car $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$ est positif. Donc l'équation (1) n'admet aucune solution (réelle). La fonction f' a pour tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
signe de $f'(x)$	signe de a

SI $\Delta = 0$: alors l'équation (1) admet une solution réelle double

$$x_{\pm} = -\frac{b}{2a} \ .$$

La fonction f' a pour tableau de signe

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
signe de $f'(x)$		signe de a	0	signe de a	

1.3. **Graphe de la fonction**. Après avoir calculer le signe de la dérivée de la fonction, on peut donc en déduire son tableau de variation en utilisant le théorème 1.40. On résume toute l'étude dans le tableau de variation. On présente cela sur un exemple.

EXEMPLE 1.42 – ÉTUDE DE FONCTION – Considérons la fonction

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{2}(x^3+3x^2-9x+1) \end{array}$$

Le plan d'étude d'une fonction est toujours le même.

1) On commence par regarder où la fonction est définie. Ici, c'est facile, car la fonction f est une fonction polynomiale donc définie sur $\mathbb{R}$.

2) On étudie l'ensemble de dérivabilité de la fonction : ici, la fonction est une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Suite à cette étude, on peut calculer la dérivée de f : pour tout réel x, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-6x-9) \ .$$

On peut alors étudier le signe de la dérivée : on commence par chercher pour quels réels la dérivée s'annule. Pour tout réel x, on a les équivalences suivantes

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3x^2-6x-9) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0$$

Le discriminant du trinôme x^2-2x-3 est égal à $\Delta = 16$ donc ce trinôme admet les deux racines réelles suivantes

$$x_1 = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3 \ .$$

On peut donc construire le tableau de signe de la dérivée :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3) On en déduit alors le tableau de variation de la fonction f. Pour cette exemple, on a

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

4) On finit de remplir le tableau en calculant les images des abscisses particulières et les limites de la fonction. Ainsi, pour la fonction f, on a donc

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Grâce à ce tableau de variation ainsi rempli, on peut tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction f, avec ses tangentes horizontales :