ulm university universität uulm

Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Institut für Analysis
an der Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften
der Universität Ulm

Bachelorarbeit
in Mathematik

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

vorgelegt von

Florian Wörz
geboren am 17. 11. 1991 in Ulm-Söflingen

im August 2015

Gutachterin: Prof. Dr. Anna Dall'Acqua

Der Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren

Florian Wörz

> “*While one should always study the method of a great artist, one should never imitate his manner. The manner of an artist is essentially individual, the method of an artist is absolutely universal. The first is personality, which no one should copy; the second is perfection, which all should aim at.*”

Oscar Wilde, *A critic in Pall Mall*, 1919 posthum

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich an Eides statt, die vorliegende Bachelorarbeit selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe, nur unter Verwendung der von mir angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst zu haben.
Die Arbeit hat in dieser oder vergleichbarer Form noch keinem anderem Prüfungsgremium vorgelegen.

Blaustein, den 26. 08. 2015

Florian Wörz

Danksagungen

Es ist mir eine große Freude meine Dankbarkeit gegenüber meiner Betreuerin Prof. Dr. Anna Dall'Acqua auszudrücken. Nicht nur hat sie mich für die Funktionalanalysis begeistert, sie hatte auch immer ein offenes Ohr für Fragen aller Art und gab mir einen Einblick in die Forschung. Vielen Dank für die vielen Ratschläge und zahlreichen Besprechungen. Ich hätte mir keine bessere Betreuung wünschen können.

Unter meinen Studienkollegen hat vor allem Marius Müller ein großes Dankeschön verdient: Zahlreiche Vorlesungen haben wir gemeinsam im Team bestritten. Er scheute dabei nie Mühen mir in mathematischer Sicht weiterzuhelfen und mir selbst die abstraktesten Zusammenhänge klar verständlich zu machen. Ein großer Teil meines Einblicks in die Mathematik ist ihm zu verdanken.
In diesem Zusammenhang möchte ich besonders auch Sabrina Knittl, Sascha Gritzbach und Attila Klimmek danken.
Alexander Storm, Felix Stürner, Katja Zitt, Kristina Huber, Miriam Eicher-Abel, Meike Lang, Sabrina Kunzweiler, Tamara Schirmer, und Claudia Lumpp danke ich für die aufregenden 3 Jahre in Ulm mit vielen unvergesslichen gemeinsamen Unternehmungen.

Schließlich verdient Sarah Gegenheimer ein besonderes Dankeschön von mir. Seit unserem Kennenlernen im September 2012 hat sie mich in vielerlei Hinsicht positiv geprägt. Unsere Reisen durch ganz Europa waren eine willkommene Abwechslung zum Studienalltag. Vor allem in der Zeit nach unserem gemeinsamen Praktikum in Dublin stand sie mir bei der Bearbeitung der Bachelorarbeit immer zur Seite. Ich bin ganz klar daran gescheitert, den Wert ihrer Freundschaft auf dieser Seite festzuhalten.

Abschließend danke ich meiner Familie für die Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit. Sie stand stets hinter mir und gab mir den nötigen Halt, trotz gelegentlichem Unverständnis für die „Welt der Hilberträume“. Danke *gerade deshalb* für das Zuhören zu jeder Zeit.

Inhaltsverzeichnis

Eidesstattliche Erklärung v
Danksagungen vii

1. Einleitung 1
1.1. Motivation 1
1.2. Gliederung der Arbeit 2

2. Präliminarien 5
2.1. Notationen 5
2.2. Zur Allgemeinheit der Sätze 8

3. Unbeschränkte lineare Operatoren 9
3.1. Definition und erste Beispiele 9
3.2. Elementare Verknüpfungen unbeschränkter Operatoren 14
3.3. Dicht definierte Operatoren 17
3.4. Abgeschlossene und abschließbare Operatoren 18
3.5. Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren 29
3.6. Symmetrische Operatoren 35
3.7. Normale Operatoren 37

4. Das Spektrum abgeschlossener Operatoren 39

5. Der operatorwertige Integralbegriff **49**
5.1. Spektralscharen 49
5.2. Exkurs: Riemann-Stieltjes-Integrale 59
5.3. Spektralmaße 60
5.4. Zusammenhang von Spektralscharen und Spektralmaßen 63
5.5. Integration bezüglich einer Spektralschar 64

6. Der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren **73**
6.1. Verwandte Aussagen und Einordnung des Spektralsatzes 74
6.2. Der Beweis des Spektralsatzes in sechs Schritten 77
Schritt 1: Reduktion auf den beschränkten Fall 77
Schritt 2: Analyse des Spektrums von $P(T)$ 78
Schritt 3: Konstruktion des stetigen Funktionalkalküls 82
Schritt 4: Konstruktion des messbaren Funktionalkalküls 90
Schritt 5: Existenz und Eindeutigkeit des Spektralmaßes 98
Schritt 6: Ausweitung auf beschränkte normale Operatoren 101
6.3. Multiplikationsversion des Spektralsatzes 102

A. Algebren **105**

B. Maßtheorie **107**
B.1. Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz 107
B.2. Reguläre komplexe Borelmaße 108
B.3. Signierte Maße und die Jordan-Zerlegung 110
B.4. Der Satz von Riesz-Markov 112
B.5. Dynkin-Systeme 113

C. Funktionalanalytische Resultate **115**
C.1. Ungleichungen 115
C.2. Hauptsätze für beschränkte Operatoren auf Banachräumen 117
C.3. Hilberträume 117

Literaturverzeichnis **125**

Index **129**

KAPITEL 1

Einleitung

1.1 Motivation

In der Quantenmechanik werden messbare Größen, die sogenannten Observablen, durch selbstadjungierte Operatoren in einem komplexen Hilbertraum beschrieben. Die möglichen Messwerte sind (grob formuliert) durch das Spektrum des Operators gegeben. Daher ist es von natürlichem Interesse Strukturaussagen über das Spektrum von selbstadjungierten Operatoren zu erhalten.

In einführenden Funktionalanalysis Vorlesungen lernt man den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum kennen.
Allerdings sind viele der in der Quantenmechanik benutzen Operatoren nicht auf Hilberträumen definiert, sondern nur auf Teilräumen von Hilberträumen. Auch in der Mathematik haben viele Differentialoperatoren die Eigenschaft nicht unbedingt stetig auf ihrem Definitionsbereich zu sein. Folglich lässt sich der oben erwähnte Spektralsatz auf eine große Klasse von Operatoren nicht anwenden.

Daher ist es von Interesse eine sinnvolle Verallgemeinerung des Begriffs des beschränkten Operators zu finden. Es stellt sich heraus, dass sich für diese größere Klasse von Operatoren, die sogenannten unbeschränkten Operatoren (die wir später schlicht Operatoren nennen werden) erneut ein Spektralsatz beweisen lässt: der Spektralsatz für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren. Tatsächlich ist dieser eine Verallgemeinerung des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte

Operatoren, d. h. der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren ist eine Konsequenz des Spektralsatzes für unbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren.

Der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren garantiert eine Integraldarstellung eines selbstadjungierten Operators T in der Form

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

bezüglich einer eindeutigen Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$. Diese Darstellung hat starke Ähnlichkeiten mit der Darstellung, die man durch den Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren erhält.

Ziel dieser Arbeit soll es sein unbeschränkte Operatoren mitsamt ihrer wichtigsten Eigenschaften einzuführen und damit den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zu beweisen.

1.2 Gliederung der Arbeit

Im folgenden Kapitel 2 werden wir zunächst die in der Arbeit benutzten Notationen klären.

Kapitel 3 wird den Begriff des Operators einführen. Insbesondere wird der Definitionsbereich des Operators eine entscheidende Rolle spielen, sodass es nötig ist, Begriffe wie Symmetrie, Adjungierte oder Normalheit erneut zu definieren. Das Kapitel wird abgerundet durch zahlreiche Beispiele.

Ebenfalls neu definiert werden muss der Begriff des Spektrums eines Operators. Kapitel 4 ist speziell diesem Begriff gewidmet.

In Kapitel 5 werden wir den operatorwertigen Integralbegriff einführen. Dazu definieren wir, was unter einer Spektralschar zu verstehen ist. Ebenfalls nötig sind Kenntnisse der Riemann-Stieltjes-Integrale, welche wir in diesem Zusammenhang kurz wiederholen werden. Ein alternativer Zugang zum operatorwertigen Integralbegriff verwendet Spektralmaße. Wir werden diese ebenfalls einführen und kurz den Zusammenhang zu Spektralscharen skizzieren.

Schließlich werden wir in Kapitel 6 den Spektralsatz exakt formulieren, ihn genau bezüglich bekannter Spektralsätze einordnen und ihn schlussendlich beweisen. Unser Beweisansatz beruht dabei auf der Idee von [Hel10]: Es genügt den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren T zu beweisen. Die wichtigsten Hilfsmittel für diesen Beweis sind die Analyse des Spektrums von $P(T)$ (wobei P ein Polynom ist), die Einführung des stetigen Funktionalkalküls und des messbaren Funktionalkalküls. Genau dies soll Ziel in diesem Kapitel sein.

An dieser Stelle weisen wir auch auf den Anhang hin. Informationen über Algebren, maßtheoretische und funktionalanalytische Resultate sind dort zusammengetragen. Wichtige Resultate, die entweder bekannt sein sollten oder den Lesefluss zu sehr stören würden, sind dort untergebracht. Bei Verwendung dieser Resultate im laufenden Text referenzieren wir den Anhang.

KAPITEL 2

Präliminarien

An Paul R. Halmos Worte "*The beginner ... should not be discouraged if ... he finds that he does not have the prerequisites for reading the prerequisites*" erinnernd, wollen wir in diesem einführenden Kapitel zunächst die verwendeten Notationen klären und festhalten, dass wir Kenntnisse aus einführenden Funktionalanalysis Vorlesungen als bekannt voraussetzen werden. Als Nachschlagewerk empfiehlt der Autor [Wer05]. Zudem setzen wir maßtheoretische Grundlagen sowie Kenntnisse über Sobolevräume voraus. Eine sehr gute Einführung in die Sobolevräume findet man in [Eva10].

2.1 Notationen

Mengen

Mit $\mathbb{N}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots$ bezeichnet. Wir setzen $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$, die der positiven reellen Zahlen mit $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$. Die komplexen Zahlen bilden die Menge $\mathbb{C}$.
Mit $\mathbb{K}$ bezeichnen wir immer einen Körper, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ gelten soll.

Folgen

Ist $(x_i)_{i\in I}$ eine Folge, I eine Indexmenge, und X eine beliebige Menge, so folgen wir dem gängigen Notationsmissbrauch und schreiben $(x_i)_{i\in I} \subset X$, wenn wir meinen, dass $(x_i)_{i\in I}$ eine Folge in X ist. Formal korrekter wäre $\{x_i \,|\, i \in I\} \subset X$.

Räume

Generell nehmen wir für alle Räume in der vorliegenden Arbeit an, dass sie unendlich-dimensional sind. Eventuelle Ausnahmen sind klar gekennzeichnet.

Die wichtigste Rolle in dieser Arbeit werden Hilberträume $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ spielen. Wir werden, wie in vielen Publikationen zur Quantenmechanik üblich, den Raum selbst mit einem kalligraphischen $\mathcal{H}$ bezeichnen und das Skalarprodukt mit $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, angelehnt an die Bra-Ket-Notation. Anders als in der Physik wollen wir vereinbaren, dass das Skalarprodukt linear bezüglich des ersten Arguments und antilinear bezüglich des Zweiten ist. Außer ausdrücklich erwähnt, betrachten wir komplexe Hilberträume.
Oft werden wir statt $(\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{H}})$ kurz $\mathcal{H}$ schreiben und über den Notationsmissbrauch hinwegsehen.

Die Notation $x \in (X, \|\cdot\|)$ soll bedeuten, dass x aus der Grundmenge X ist. Analog sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (X, \|\cdot\|)$ erklärt.

Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ ein Banachraum, so bezeichnen wir für $m \in \mathbb{N}_0$ mit $\mathscr{C}^m(\Omega; \mathcal{Y})$ die Menge der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen, die von der Menge Ω in den Banachraum $\mathcal{Y}$ abbilden. Wir setzen

$$\mathscr{C}^\infty(\Omega; \mathcal{Y}) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}^m(\Omega; \mathcal{Y}).$$

Wir definieren den Träger (oder Support) einer Funktion $f\colon \Omega \to \mathcal{Y}$ als $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}^{\|\cdot\|_{\mathbb{R}^n}}$. Ist $f \in \mathscr{C}^m(\Omega; \mathcal{Y})$ und $\operatorname{supp}(f)$ kompakt in Ω enthalten, so notieren wir $f \in \mathscr{C}_0^m(\Omega; \mathcal{Y})$. Entsprechend sei $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega; \mathcal{Y}) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}_0} \mathscr{C}_0^m(\Omega; \mathcal{Y})$ der Raum der Testfunktionen.
In der Regel schreiben wir kurz $\mathscr{C}^m(\Omega)$, wenn $\mathcal{Y}$ aus dem Zusammenhang klar ist.

Für $p \in [1, \infty]$ und einen Maßraum $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ bezeichnen wir den Lebesgue-Raum der p-integrierbaren Funktionen $f\colon \Omega \to \mathbb{K}$ mit $L^p((\Omega, \mathscr{A}, \mu); \mathbb{K})$. Insbesondere setzen wir $L^p(\Omega; \mathbb{K}) = L^p((\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mu); \mathbb{K})$ für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dabei ist $\mathcal{B}(\Omega)$ die Borel-σ-Algebra auf Ω und μ das n-dimensionale Lebesgue-Maß auf dieser σ-Algebra. Dies erklärt auch, wie $L^p(\mathbb{R};\mathbb{K})$ zu verstehen ist. Bis auf wenige Ausnahmen wählen wir $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ und schreiben kürzer $L^p(\mathbb{R})$.

Entsprechend seien die Sobolevräume $W^{m,p}(\Omega)$ für $m \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [1,\infty]$ definiert: als die Menge der Funktionen $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$, die in $L^p(\Omega)$ liegen und deren $\boldsymbol{\alpha}$-te schwache Ableitungen $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u$ für alle Multiindices $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\boldsymbol{\alpha}| \leq m$ existieren und in $L^p(\Omega)$ liegen. Wir versehen die Räume mit der Sobolevnorm

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \begin{cases} \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \text{falls } p < \infty \\ \max_{|\boldsymbol{\alpha}|\leq m} \|\mathrm{D}^{\boldsymbol{\alpha}}u\|_{L^\infty}, & \text{falls } p = \infty. \end{cases}$$

Den Vektorraum der stetigen, linearen Operatoren $T\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zwischen den normierten Räumen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ und $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$. Insbesondere definieren wir $\mathfrak{L}(\mathcal{X}) := \mathfrak{L}(\mathcal{X};\mathcal{X})$. Wir erinnern daran, dass diese Operatoren auf ganz $\mathcal{X}$ definiert sind. Wir verwenden Frakturschrift, um Verwechslungen mit den $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$-Räumen auszuschließen. Dies ist notwendig, da in einigen Beispielen Lebesgue-Räume betrachtet werden.

Sonstiges

Mit id_M bezeichnen wir die Identität auf der Menge M, d. h. es ist $\mathrm{id}_M(x) := x$ für alle $x \in M$. Ist aus dem Zusammenhang klar, auf welcher Menge M die Identität definiert ist, schreiben wir auch kurz id statt id_M.
Mit $\mathbb{1}_M$ bezeichnen wir die Indikator- bzw. charakteristische Funktion auf der Menge M.

Das Symbol $\uplus$ bezeichne die disjunkte Vereinigung.

Als Reihenfolge für die Komposition von Abbildungen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ (mit beliebigen Mengen A, B, C) vereinbaren wir:

$$\begin{aligned} g \circ f\colon A &\longrightarrow C \\ x &\longmapsto \big(g \circ f\big)(x) := g(f(x)). \end{aligned}$$

Das Ende eines Beweises kennzeichnen wir mit □, dem offenen „Halmos' thombstone".

Eine „Notiz" ist eine wichtige Bemerkung.

Die zu beweisende Richtung in Äquivalenzbeweisen kennzeichnen wir mit „$\longrightarrow$", respektive „$\longleftarrow$".

2.2 Zur Allgemeinheit der Sätze

Freilich wäre es möglich gewesen einige Definitionen allgemeiner zu halten und statt Hilberträumen die größere Klasse der Banachräume heranzuziehen. Dies schien mir jedoch, mit dem Ziel vor Augen, den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren auf *Hilberträumen* einzuführen, nicht sinnvoll.
Einige Definitionen leicht einzuschränken sollte das Verständnis beim Lesen verbessern, da wir mit den Voraussetzungen von Satz zu Satz konsistent bleiben können.
Insbesondere berücksichtigen wir dies auch bei allen Beispielen: Diese verwenden ausschließlich Hilberträume.

KAPITEL 3

Unbeschränkte lineare Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir unbeschränkte lineare Operatoren einführen. Da diese im Gegensatz zu beschränkten Operatoren nicht mehr überall auf einem Hilbertraum definiert zu sein brauchen, ergeben sich einige Technikalitäten, z. B. beim Verallgemeinern von Begriffen wie der Adjungierten eines Operators. Ziel dieses Kapitels ist eine mathematisch saubere Einführung all dieser Begriffe.

Inhalt des Kapitels

3.1. Definition und erste Beispiele **9**

3.2. Elementare Verknüpfungen unbeschränkter Operatoren **14**

3.3. Dicht definierte Operatoren **17**

3.4. Abgeschlossene und abschließbare Operatoren **18**

3.5. Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren **29**

3.6. Symmetrische Operatoren **35**

3.7. Normale Operatoren **37**

3.1 Definition und erste Beispiele

Wir beginnen mit *der* zentralen Definition der vorliegenden Arbeit – der Definition unbeschränkter linearer Operatoren. Wir definieren jedoch allgemeiner, was wir unter einem „Operator“ verstehen wollen und werden sehen, dass der Begriff „unbeschränkter Operator“ ein Spezialfall dieser Definition ist.

Definition 3.1.1. Seien $(\mathcal{H}_1, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_1})$ und $(\mathcal{H}_2, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_2})$ zwei $\mathbb{K}$-Hilberträume. Dann nennen wir T einen *Operator* von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$, falls T eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $x \overset{T}{\mapsto} T(x)$ ist, die nach $\mathcal{H}_2$, dem *Wertebereich*, abbildet und auf einem Untervektorraum von $\mathcal{H}_1$ definiert ist, welchen wir mit $\mathrm{Dom}(T)$ bezeichnen wollen und *Definitionsbereich* von T nennen. Wie üblich schreiben wir nachfolgend Tx statt $T(x)$.
Das *Bild* des Operators T ist die Menge $\mathrm{Bi}(T) := \{Tx \,|\, x \in \mathrm{Dom}(T)\} \subset \mathcal{H}_2$, der *Kern* von T ist die Menge $\mathrm{Ker}(T) := \{x \in \mathrm{Dom}(T) \,|\, Tx = 0\} \subset \mathcal{H}_1$.

An dieser Stelle möchten wir unterstreichen, dass zur Angabe eines Operators immer der Definitionsbereich *und* die lineare Abbildung selbst gehören. Ändert man den Definitionsbereich, erhält man per definitionem einen anderen Operator, der i. A. auch andere Eigenschaften, insbesondere hinsichtlich des Spektrums hat. Wir verzichten auf die Schreibweise $(T, \mathrm{Dom}(T))$, ähnlich wie wir bei einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ statt $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ schreiben. Jedoch vereinbaren wir die folgende Notation:

Notation 3.1.2. Um kompakter zu notieren, dass ein Operator T von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ abbildet und Definitionsbereich $\mathrm{Dom}(T)$ hat, wollen wir im Folgenden die Schreibweise $T\colon\ \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ verwenden.

Bemerkung 3.1.3. Es ist zu beachten, dass der Definitionsbereich $\mathrm{Dom}(T)$ i. A. nicht abgeschlossen in $\mathcal{H}_1$ sein muss und daher i. A. kein Hilbertraum ist (gegebenenfalls kann jedoch eine passende Norm gewählt werden, sodass der Definitionsbereich ein Hilbertraum ist). Ein Operator bildet also nicht immer von einem Hilbertraum in einen anderen Hilbertraum ab.
Desweiteren haben wir in obiger Definition weder Stetigkeit noch Beschränktheit von T vorausgesetzt. Daher heißen solche Operatoren auch *unbeschränkte Operatoren*. Korrekter wäre die Bezeichnung *nicht notwendigerweise beschränkt*.
Zur Erinnerung: Wir nennen einen Operator $T\colon\ \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ *beschränkt*, falls eine positive Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ existiert, sodass $\|Tx\|_{\mathcal{H}_2} \leq C\|x\|_{\mathcal{H}_1}$ für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ gilt. Dabei bezeichne ab sofort $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$ die vom Skalarprodukt $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_i}$

vermöge der Relation $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i} := \sqrt{\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}_i}}$ induzierte Norm ($i = 1,2$).
Existiert keine solche Konstante, dann nennen wir den Operator *unbeschränkt*. Ein Operator ist also unbeschränkt, falls er unstetig in einem Punkt (und damit in allen Punkten) seines Definitionsbereiches ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert dann ein $x_n \in \mathrm{Dom}(T)$, sodass $\|Tx_n\|_{\mathcal{H}_2} > n\|x_n\|_{\mathcal{H}_1}$ ist.
Man beachte, dass wir Definition 3.1.1 so gewählt haben, dass ein „Operator“ sowohl beschränkt als auch unbeschränkt sein kann.

Beispiel 3.1.4. Als einführendes Beispiel wollen wir den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ betrachten und den modifizierten eindimensionalen *Laplace-Operator* $T = -\Delta$, definiert durch

$$Tu = -u'' \quad \text{für alle } u \in \mathrm{Dom}(T),$$

wobei wir als Definitionsbereich $\mathrm{Dom}(T)$ die Menge $W^{2,2}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}$ wählen (hierbei ist u'' im Sinne der schwachen Ableitungen zu verstehen).

Man beachte, dass wir den Operator T als Operator

$$T\colon \Big(W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2}\Big) \to \Big(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2}\Big)$$

auffassen. Der Vektorraum $W^{2,2}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ wird also mit der Norm $\|\cdot\|_{L^2}$ des Hilbertraumes $\mathcal{H}$ ausgestattet.
Man begehe hier nicht den Denkfehler $\mathrm{Dom}(T) = W^{2,2}(\mathbb{R})$ mit der Sobolevnorm $\|\cdot\|_{W^{2,2}}$ auszustatten, um einen Hilbertraum zu erhalten – diese Norm kommt in diesem Kontext nicht vor. Aus der Definition der Sobolevnorm

$$\|u\|_{W^{2,2}}^2 = \Big(\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2 + \|u''\|_{L^2}^2\Big)$$

würde auch direkt $\|u''\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{W^{2,2}}$ folgen. Der Operator

$$\widetilde{T}\colon \Big(W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{W^{2,2}}\Big) \to \Big(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2}\Big)$$

wäre dann beschränkt.

Nachdem nun geklärt wurde, wie der Operator T aufzufassen ist, zeigen wir, dass T ein unbeschränkter Operator ist:

(I) Man prüft leicht, dass T linear ist. Damit ist die Abbildung T in der Tat ein Operator im Sinn der Definition 3.1.1.

(II) Um zu zeigen, dass T unbeschränkt ist, betrachten wir die Menge

$$U := W^{2,2}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^2(\mathbb{R}),$$

die Teilmenge des Definitionsbereiches von T ist. Wir wählen eine nicht-verschwindende[1] Funktion $f \in U$. Da f nicht verschwindet, gibt es es aufgrund der Stetigkeit von f einen Punkt $a \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(t)| \neq 0$ für alle $t \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ ist. Damit ist $\|f\|_{L^2} \neq 0$. Wir betrachten nun für fixiertes $n \in \mathbb{N}$ die skalierte Funktion f_n, definiert durch

$$f_n(t) := f(nt) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist auch $f_n \in U$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

- Es ist klar, dass die Skalierung nicht ändert, dass $f_n \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ ist.
- Weiter ist f_n quadrat-integrierbar auf $\mathbb{R}$. Dies folgt mit der Substitution $s = nt$ aus der Rechnung

$$\|f_n\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(nt)|^2 \, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 \, \frac{1}{n} \, \mathrm{d}s = \frac{1}{n} \, \|f\|_{L^2}^2 \tag{3.1}$$

  und der Tatsache $f \in L^2(\mathbb{R})$.
- Da f_n im klassischen Sinne 2-mal differenzierbar ist, können wir zur Bestimmung der Ableitungen die Kettenregel verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} f_n'(t) &= f(nt) \cdot n \\ f_n''(t) &= f(nt) \cdot n^2. \end{aligned}$$

  Die schwachen Ableitungen stimmen mit den obigen überein und sind

[1] Man beachte, dass $U \neq \varnothing$ ist, z. B. ist $(t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}) \in U$, wie man leicht verifiziert. Diese Funktion ist auch nicht-verschwindend, sodass das Vorgehen im Beweis berechtigt ist. Tatsächlich gilt sogar $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subset U$.

jeweils quadrat-integrierbar auf $\mathbb{R}$, denn es ist

$$\|f_n'\|_{L^2}^2 = n^2 \|f_n\|_{L^2}^2 \overset{(3.1)}{=} n \|f\|_{L^2}^2 < \infty$$

sowie

$$\|f_n''\|_{L^2}^2 = n^4 \|f_n\|_{L^2}^2 \overset{(3.1)}{=} n^3 \|f\|_{L^2}^2 < \infty. \tag{3.2}$$

Wegen (3.1) und (3.2) ist schließlich

$$\frac{\|Tf_n\|_{L^2}^2}{\|f_n\|_{L^2}^2} = \frac{\|-f_n''\|_{L^2}^2}{\|f_n\|_{L^2}^2} = \frac{n^3 \|f\|_{L^2}^2}{\frac{1}{n}\|f\|_{L^2}^2} = n^4 \longrightarrow \infty$$

für $n \to \infty$. Dies zeigt die Unbeschränktheit von T. □

Wir betrachten ein weiteres Beispiel, auf das wir an späterer Stelle der Arbeit zurückkommen werden:

Beispiel 3.1.5 (Vgl. [Puz13])**.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $a \in \mathscr{C}^0(\Omega;\mathbb{C})$ eine stetige[2] *unbeschränkte* komplexwertige Funktion. Wir betrachten den *Multiplikationsoperator*

$$\begin{aligned} M_a \colon L^2(\Omega;\mathbb{C}) \supset \mathrm{Dom}(M_a) &\longrightarrow L^2(\Omega;\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto af, \end{aligned}$$

wobei wir $\mathrm{Dom}(M_a) := \{\, f \in L^2(\Omega;\mathbb{C}) \,|\, af \in L^2(\Omega;\mathbb{C})\}$ wählen. Die $\mathbb{C}$-Linearität von M_a ist offensichtlich. Wir zeigen nun, dass dieser Operator unbeschränkt ist. Für jedes $R > 0$ ist

$$\mu\Big(\Big\{x \in \Omega \,\Big|\, |a(x)| \geq R\Big\}\Big) > 0$$

und es gibt ein $K = K(R) \geq R$, sodass die Menge

$$A_K := \Big\{x \in \Omega \,\Big|\, K \leq |a(x)| \leq K+1\Big\}$$

[2]und daher messbare

ebenfalls positives Maß hat, d. h. $\mu(A_K) > 0$ gilt. Ist $\mu(A_K) < \infty$, setzen wir $B_K = A_K$, andernfalls wählen wir als B_K eine beliebige Teilmenge von A_K mit endlichem Maß. Damit ist $\mathbb{1}_{B_K} \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$. Die Indikatorfunktion auf B_K ist sogar in $\mathrm{Dom}(M_a)$, denn es ist

$$\|a \cdot \mathbb{1}_{B_K}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |a(x) \cdot \mathbb{1}_{B_K}(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{B_K} |a(x)|^2 \,\mathrm{d}x \leq \mu(B_K) \cdot (K+1)^2 < \infty,$$

also $a \cdot \mathbb{1}_{B_K} \in L^2(\Omega; \mathbb{C})$. Nun ist aber

$$\frac{\|M_a \mathbb{1}_{B_K}\|_{L^2}^2}{\|\mathbb{1}_{B_K}\|_{L^2}^2} \geq \frac{\mu(B_K) \cdot K^2}{\mu(B_K)} = K^2 \geq R^2$$

für alle $R > 0$. Also ist M_a unbeschränkt. □

3.2 Elementare Verknüpfungen unbeschränkter Operatoren

Um mit unbeschränkten Operatoren arbeiten zu können, d. h. sie zu addieren und zu „multiplizieren“, führen wir, Abschnitt 1.1.1 aus [Sch12] folgend, folgende Konventionen ein:

Definition 3.2.1. Ist $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ ein Operator, so definieren wir für eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ das *komplexe Vielfache* λT des Operators T durch

$$(\lambda T)x := \lambda T x$$

für $x \in \mathrm{Dom}(\lambda T) := \mathrm{Dom}(T)$. Ist $\lambda = 0$, so sei λT der *Nulloperator* $\mathfrak{o}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, welcher durch

$$\mathfrak{o}x := 0$$

für $x \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{o}) := \mathcal{H}$ definiert sei[3].

Ist $S\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(S) \to \mathcal{H}_2$ ein weiterer Operator, dann definieren wir die *Summe*

[3]Man beachte, dass eventuell $\mathrm{Dom}(T) \subsetneq \mathcal{H}$ galt, nun aber $\mathrm{Dom}(0T) = \mathcal{H}$ ist.

$S+T$ der Operatoren S und T durch

$$(S+T)x := Sx + Tx,$$

für $x \in \mathrm{Dom}(S+T)$, wobei wir $\mathrm{Dom}(S+T) := \mathrm{Dom}(S) \cap \mathrm{Dom}(T)$ wählen. Ist dieser Mengenschnitt leer, so definieren wir $S+T$ nicht.

Ist nun $R\colon \mathcal{H}_2 \supset \mathrm{Dom}(R) \to \mathcal{H}_3$ ein Operator, so sei die *Komposition* (auch: das *Produkt*) $R \circ T$ durch

$$(R \circ T)x := R(Tx),$$

für $x \in \mathrm{Dom}(R \circ T)$ definiert, wobei wir

$$\mathrm{Dom}(R \circ T) := \{x \in \mathrm{Dom}(T) \,|\, Tx \in \mathrm{Dom}(R)\}$$

wählen. In Zukunft wollen wir RT als abkürzende Schreibweise für $R \circ T$ verwenden. Erneut sei angemerkt, dass wir RT nicht definieren, falls $\mathrm{Dom}(RT) = \varnothing$ gilt.

Insbesondere können wir somit die *Potenzen* T^k (für $k \in \mathbb{N}$) eines Operators rekursiv durch $T^k := T(T^{k-1})$ erklärt, wobei wir die Konvention $T^0 := \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ vereinbaren.

Notation 3.2.2. Im Verlauf der Arbeit werden wir Operatoren der Form $T \pm \mathrm{i} \cdot \mathrm{id}$ betrachten. Wir schreiben, um die Notation übersichtlich zu halten dafür kurz $T \pm \mathrm{i}$.

Definition 3.2.3. Ein Operator S heißt *Erweiterung* des Operators T, falls gilt:

$$\mathrm{Dom}(T) \subset \mathrm{Dom}(S) \quad \text{und} \quad Sx = Tx \ \text{ für alle } x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Wir verwenden dazu die Notation $T \subset S$. Entsprechend schreiben wir $S \supset T$, falls $T \subset S$ gilt und nennen T *Einschränkung* von S.
Zwei Operatoren T und S heißen *gleich*, in Zeichen $T = S$, falls $T \subset S$ und $T \supset S$ gilt. D. h. die Operatoren haben dann den gleichen Definitionsbereich, $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(S)$, und es gilt $Tx = Sx$ für alle $x \in \mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(S)$.

Lemma 3.2.4 (vgl. S. 1186 f. in [DS64])**.** *Wie gewohnt sind Summe und Produkt von Operatoren assoziativ. Weiter gilt $S + T = T + S$, sowie $(\lambda R)T = R(\lambda T) = \lambda(RT)$ für einen Skalar $\lambda \neq 0$. Mit den Operatoren aus Definition 3.2.1 gelten zudem die beiden „Distributivgesetze“*

$$(S + T)Q = SQ + TQ \quad \textit{und} \quad R(S + T) \supset RS + RT,$$

für einen Operator $Q\colon \mathcal{H}_0 \supset \mathrm{Dom}(Q) \to \mathcal{H}_1$.

Man beachte, dass im zweiten „Distributivgesetz“ nicht Gleichheit sondern nur Inklusion gilt, da $(S+T)x$ im Definitionsbereich von R liegen könnte, während Sx oder Tx nicht darin liegen könnten.

Definition 3.2.5. Ist $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ ein *injektiver* Operator, d. h. es gelte $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, so definieren wir sein *Inverses* $T^{-1}\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ als denjenigen Operator mit $\mathrm{Dom}(T^{-1}) := \mathrm{Bi}(T)$ und

$$T^{-1}Tx := x \quad \text{für} \quad x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Wir nennen T in diesem Fall *invertierbar*. Man beachte, dass T^{-1} wegen der Injektivität von T wohldefiniert ist.

Bemerkung 3.2.6 (vgl. Problem 5.2 und Remark 5.5 in [Kat95])**.** Im Umgang mit Operatoren ist erhöhte Vorsicht geboten. Es ist zwar $S + T = T + S$, jedoch gilt i. A. nur $(S + T) - T \subset S$.
Ein ähnlicher Fall tritt bei einem invertierbaren Operator $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ auf: Es ist $T^{-1}T \subset \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}$ und $TT^{-1} \subset \mathrm{id}_{\mathcal{H}_2}$. Tosio Kato schlägt daher in seinem Buch [Kat95] vor, mit „Vektoren“ statt mit Operatoren zu arbeiten, d. h. wir verwenden die Schreibweise $T^{-1}Tx = x$ (für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$) statt $T^{-1}T \subset \mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}$.

Lemma 3.2.7. *Sind $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ und $R\colon \mathcal{H}_2 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_3$ zwei injektive Operatoren. Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Bi}(T^{-1}) = \mathrm{Dom}(T)$.

(b) $\mathrm{Ker}(RT) = \{0\}$ *und* $(RT)^{-1} = T^{-1}R^{-1}$.

3.3 Dicht definierte Operatoren

In Abschnitt 3.1 haben wir erwähnt, dass der Definitionsbereich eines Operators i. A. kein Hilbertraum sein muss. Für das weitere Vorgehen (vor allem um eine eindeutige Adjungierte zu erhalten) erweist es sich jedoch als nützlich, wenn der Definitionsbereich zumindest dicht im Hilbertraum liegt. Dies motiviert folgende Definition:

Definition 3.3.1. Ein Operator $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ heißt *dicht definiert*, falls $\mathrm{Dom}(T)$ bzgl. $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1}$ dicht in $\mathcal{H}_1$ liegt.
Alternativ sagen wir auch, dass T *dichten Definitionsbereich* hat.

Beispiel 3.3.2. Wir betrachten den klassischen Differentialoperator

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon L^2\big((0,1)\big) \supset \mathscr{C}_0^\infty\big((0,1)\big) \longrightarrow L^2\big((0,1)\big),$$

den wir für eine stetig differenzierbare Funktion $f \in \mathscr{C}_0^\infty\big((0,1)\big)$ mit kompaktem Träger und jedes $x \in (0,1)$ durch die Relation

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

definieren. Man beachte, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ wieder in $\mathscr{C}_0^\infty\big((0,1)\big)$ und dadurch auch in $L^2\big((0,1)\big)$ liegt. Man sieht außerdem leicht, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ bezüglich der L^2-Norm auf $\mathscr{C}_0^\infty\big((0,1)\big)$ nicht stetig ist. Aber $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ ist dicht definiert, da

$$\overline{\mathscr{C}_0^\infty\big((0,1)\big)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2\big((0,1)\big)$$

gilt (siehe z. B. Lemma V.1.10 in [Wer05]).

Notiz 3.3.3. Ist $\mathrm{Dom}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ und der Operator T beschränkt, so existiert eine eindeutige stetige Fortsetzung $\widetilde{T}$ von T auf ganz $\mathcal{H}_1$. In diesem Falle ist die neu eingeführte Theorie also „uninteressant“. Daher betrachten wir vor allem unbeschränkte Operatoren.

Zum Abschluss des Kapitels wollen wir folgende, für den Rest der vorliegenden Arbeit geltende Konvention treffen:

Konvention 3.3.4. Außer in ausdrücklich erwähnten Ausnahmen gehen wir davon aus, dass die betrachteten Operatoren dicht definiert sind.

3.4 Abgeschlossene und abschließbare Operatoren

Da wir durch die vorgenommene Generalisierung der Operatoren die Stetigkeit dieser i. A. „verloren“ haben, liegt es nahe, nach einem Ersatzkonzept für sie zu suchen. Das im folgenden eingeführte Konzept der Abgeschlossenheit vom Graphen liefert einen brauchbaren Ersatz. Desweiteren werden wir Abgeschlossenheit bei der Definition des Spektrums in Kapitel 4 benötigen.

In seiner Arbeit „Über Adjungierte Funktionaloperatoren“ führte John von Neumann das Konzept des Graphen für unbeschränkte Operatoren ein, um diese zu analysieren. Mithilfe dieses Begriffs werden wir abgeschlossene und abschließbare Operatoren definieren. Dies wollen wir im Folgenden ausführen und orientieren uns dabei an Seite 250 f. in [RS80].

Definition 3.4.1. Ist T ein Operator von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$, so nennen wir die Menge[4]

$$\mathrm{Gr}(T) := \left\{ (x, Tx) \,\middle|\, x \in \mathrm{Dom}(T) \right\} \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$$

den *Graphen* von T.

Notiz 3.4.2. Der Graph $\mathrm{Gr}(T)$ enthält die kompletten Informationen über den Operator T. D. h. der Operator ist durch seinen Graphen eindeutig bestimmt vermöge

$$Tx = y \quad \text{für} \quad (x, y) \in \mathrm{Gr}(T)$$

[4]Bei $\mathrm{Gr}(T)$ handelt es sich sogar um einen Untervektorraum von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$. Man definiert dazu

$$\lambda(x_1, y_1) + \mu(x_2, y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2).$$

und $\mathrm{Dom}(T) := \Big\{x \in \mathcal{H}_1 \,\Big|\, \text{es existiert ein } y \in \mathcal{H}_2\,, \text{ sodass } (x,y) \in \mathrm{Gr}(T) \text{ ist}\Big\}$.

Bemerkung 3.4.3. Es ist leicht einzusehen, dass $T \subset S$ genau dann gilt, wenn $\mathrm{Gr}(T) \subset \mathrm{Gr}(S)$ gilt.

Erinnerung 3.4.4 (vgl. z. B. Seite 222 in [FK98])**.** Stattet man das kartesische Produkt $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ zweier Hilberträume $(\mathcal{H}_1, \langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}_1})$ und $(\mathcal{H}_2, \langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}_2})$ mit dem Skalarprodukt

$$\Big\langle (x_1, y_1) \,\Big|\, (x_2, y_2) \Big\rangle_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2} := \langle x_1 | x_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y_1 | y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

aus, so erhält man wiederum einen Hilbertraum.

Definition 3.4.5. Wir nennen einen Operator von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ *abgeschlossen*, wenn der Graph des Operators ein abgeschlossener[5] Untervektorraum von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ ist.

Bemerkung 3.4.6 (vgl. Definition 2.1.1 in [Hel10])**.** Es ist leicht einzusehen, dass folgende Charakterisierung eines abgeschlossenen Operators zur Definition 3.4.5 äquivalent ist: Ein Operator T von $\mathcal{H}_1$ nach $\mathcal{H}_2$ ist abgeschlossen, falls die Bedingungen

(i) $x_n \in \mathrm{Dom}(T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

(ii) $x_n \to x$ in $\mathcal{H}_1$ (für $n \to \infty$), und

(iii) $Tx_n \to y$ in $\mathcal{H}_2$ (für $n \to \infty$)

implizieren, dass $x \in \mathrm{Dom}(T)$ und $y = Tx$ gilt.

Beweisskizze. Eine Menge ist in einem metrischen Raum M genau dann abgeschlossen, wenn der Limes jeder konvergenten Folge aus M wiederum in M liegt. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass $(x_n, Tx_n) \to (x,y)$ für $n \to \infty$ implizieren muss, dass $(x,y) \in \mathrm{Gr}(T)$. Dies stimmt mit den obigen Bedingungen überein (vgl. [Wei13, S. 160]). □

[5] Abgeschlossenheit ist hier bezüglich der Norm zu verstehen, die vom in Erinnerung 3.4.4 eingeführten Skalarprodukt $\langle\,\cdot\,|\,\cdot\,\rangle_{\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2}$ induziert wird.

Beispiel 3.4.7. Als Beispiel eines abgeschlossenen und eines nicht-abgeschlossenen Operators hat der Autor das Beispiel 2.1.2 in [Hel10] ausgearbeitet. Die folgenden zwei Beispiele zeigen insbesondere den Einfluss des Definitionsbereichs auf die Abgeschlossenheit eines Operators.

(a) Wir betrachten wie in Beispiel 3.1.4 den modifizierten eindimensionalen Laplace-Operator $T = -\Delta$ mit $\mathrm{Dom}(T) = (W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2}) \subset (L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ und Wertebereich $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. Dieser Operator ist abgeschlossen[6].

Um dies zu zeigen, benutzen wir das Prinzip aus Bemerkung 3.4.6. Wir wählen also eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ mit $u_n \to u$ in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ und $-u_n'' \to v$ in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ für $n \to \infty$.
Zu zeigen ist dann: $u \in \mathrm{Dom}(T) = (W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ und $Tu = v$.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{u_n} \arrow[rr, "n \to \infty"] \arrow[d, dashed, "(\,\cdot\,)'"'] & & \boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{u_n'} \arrow[d, dashed, "(\,\cdot\,)'"'] & & \\
\boldsymbol{u_n''} \arrow[rr, "n \to \infty"] & & \boldsymbol{-v}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.1.: Die waagrechten Pfeile zeigen die gegebenen Konvergenzen in $L^2(\mathbb{R})$ bzgl. der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm. Die gestrichelten Pfeile verbinden die schwachen Ableitungen verschiedenen Grades.

Wir beginnen mit der Untersuchung, ob u in $(W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ liegt.

(I) Die Schlüsselidee hierbei ist es, folgende Ungleichung für alle $u \in W^{2,2}(\mathbb{R})$ zu zeigen:

$$\|u'\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{L^2} \cdot \|u''\|_{L^2}. \tag{UG}$$

[6] Der Satz vom abgeschlossenen Graphen C.2.2 kann hier jedoch nicht angewandt werden, da $W^{2,2}(\mathbb{R})$ bzgl. der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm nicht vollständig ist. Ansonsten wäre dann mit eben jenem Satz T stetig, was im Widerspruch zur Unbeschränktheit (siehe Beispiel 3.1.4) stehen würde.

Zunächst wollen wir zeigen, dass die Ungleichung (UG) für jede Testfunktion $u := \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt. Mit partieller Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\varphi'\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi'(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ = [\varphi'(x)\,\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Da sowohl φ als auch φ' kompakten Träger in $\mathbb{R}$ haben, verschwindet der Term $[\varphi'(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty}$ und die Gleichung reduziert sich zu

$$\|\varphi'\|_{L^2}^2 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da Normen nicht-negativ sind liefert die Hölder-Ungleichung C.1.5

$$\begin{aligned}\|\varphi'\|_{L^2}^2 = \left|\|\varphi'\|_{L^2}^2\right| = \left|-\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,\varphi''(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)\,\varphi''(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\varphi''\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass

$$\|\varphi'\|_{L^2}^2 \leq \|\varphi\|_{L^2} \cdot \|\varphi''\|_{L^2}. \tag{3.3}$$

für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ gilt.

Nun liegt aber $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{2,2}(\mathbb{R})$ bezüglich der $\|\cdot\|_{W^{2,2}}$-Norm (siehe z. B. [Mut15, Theorem 2.4.1]). Ein einfaches Dichtheitsargument schließt den Beweis der Ungleichung (UG) daher ab: Ist $u \in W^{2,2}(\mathbb{R})$, dann existiert eine Approximationsfolge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\|u - \varphi_n\|_{W^{2,2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.4}$$

Da Normen nicht-negativ sind und $x \mapsto x^2$ stetig ist, haben wir wegen

$$\|u - \varphi_n\|_{W^{2,2}} = \left(\|u - \varphi_n\|_{L^2}^2 + \|u' - \varphi_n'\|_{L^2}^2 + \|u'' - \varphi_n''\|_{L^2}^2\right)^2$$

durch (3.4) automatisch Approximationsfolgen für u, u' und u'' bezüglich der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm gefunden: Es ist

$$\|u - \varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{3.5}$$

$$\|u' - \varphi_n'\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \text{und} \tag{3.6}$$

$$\|u'' - \varphi_n''\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.7}$$

Schließlich erhalten wir

$$\|u'\|_{L^2}^2 \overset{(3.5)}{=} \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n'\|_{L^2}^2 \overset{(3.3)}{\leq} \lim_{n\to\infty} \Big(\|\varphi_n\|_{L^2} \cdot \|\varphi''\|_{L^2} \Big) \underset{(3.7)}{\overset{(3.6)}{=}} \|u\|_{L^2} \cdot \|u''\|_{L^2}.$$

Dies zeigt unsere Schlüsselungleichung (UG).

Wir bemerken nun, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aufgrund der Konvergenz eine Cauchyfolge in $W^{2,2}(\mathbb{R})$ bezüglich der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm ist. Mit der gleichen Begründung ist auch $(-u_n'')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. Wegen der Schlüsselungleichung (UG) ist damit auch $(u_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. Da dieser Raum vollständig ist, existiert ein $w \in L^2(\mathbb{R})$, sodass $u_n' \to w$ bezüglich der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm konvergiert.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{u_n} \arrow[r, "n \to \infty"] \arrow[d, dashed, "(\,\cdot\,)'"'] & \boldsymbol{u} \arrow[d, dotted] \\
\boldsymbol{u_n'} \arrow[r, "n \to \infty"] \arrow[d, dashed, "(\,\cdot\,)'"'] & \boldsymbol{w} \arrow[d, dotted] \\
\boldsymbol{u_n''} \arrow[r, "n \to \infty"] & \boldsymbol{-v}
\end{tikzcd}$$

Abbildung 3.2.: Die waagrechten Pfeile zeigen die gegebenen Konvergenzen bzgl. der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm. Die gestrichelten Pfeile verbinden die schwachen Ableitungen verschiedenen Grades. Zu zeigen ist nun noch $u' = w$ und $w' = -v$.

Um nun zu zeigen, dass $u \in W^{2,2}(\mathbb{R})$ ist, genügt es nachzuweisen, dass $u' = w$

und $w' = -v$ gilt (denn sowohl w als auch $-v$ sind quadrat-integrierbar auf ganz $\mathbb{R}$).

(II) Zuerst weisen wir nach, dass w die erste schwache Ableitung von u ist. Hierfür sei $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ eine Testfunktion. Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ und $\operatorname{supp}\varphi$ kompakt in $\mathbb{R}$ enthalten ist, erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} u_n(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n(x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \left([u_n(x)\,\varphi(x)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} u_n'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \right) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&\overset{(\star\star)}{=} -\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} u_n'(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\mathbb{R}} w(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Die dabei verwendeten Limesvertauschungen $(\star)$ und $(\star\star)$ lassen sich mit der Hölder-Ungleichung C.1.5 wie folgt rechtfertigen:

„$(\star)$“: $\left| \int_{\mathbb{R}} \Big(u(x) - u_n(x)\Big) \cdot \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \|u - u_n\|_{L^2} \cdot \|\varphi'\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

„$(\star\star)$“: $\left| \int_{\mathbb{R}} \Big(u_n'(x) - w(x)\Big) \cdot \varphi(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \|u_n' - w\|_{L^2} \cdot \|\varphi\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

(IIII) Durch eine analoge Rechnung wie in (II) lässt sich nun die Existenz von w' mit $w' = -v$ zeigen.

Dies zeigt nicht nur, dass $u \in (W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$ ist, sondern auch die Gültigkeit der Gleichung

$$Tu = -u'' = -w' = v$$

in $(L^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$. Genau dies war zu zeigen.

(b) Ändern wir den Definitionsbereich ab auf $\operatorname{Dom}(T) = (\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$, dann ist der Operator nicht mehr abgeschlossen.
Wir zeigen dazu, dass $\operatorname{Gr}(T)$ in $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ nicht abgeschlossen ist. Wir erinnern zunächst daran, dass $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \subsetneq W^{2,2}(\mathbb{R})$ gilt. Betrachten wir also

einen Vektor $x \in W^{2,2}(\mathbb{R}) \backslash \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Da $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ dicht in $W^{2,2}(\mathbb{R})$ liegt ([Mut15, Theorem 2.4.1]), finden wir eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}) = \mathrm{Dom}(T)$ mit $x_n \to x$ (für $n \to \infty$) in $(W^{2,2}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2})$.
Nun ist nach Definition der Sobolevräume $Tx_n \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist die Folge der Tupel $(x_n, Tx_n) \in \mathrm{Gr}(T)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sie konvergiert jedoch in $L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ gegen das Tupel $(x, -x'')$, welches nicht in $\mathrm{Gr}(T)$ liegt, da ja $x \notin \mathrm{Dom}(T)$ gewählt war.

Definition 3.4.8. Ein Operator heißt *abschließbar*, wenn er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. Jeder abschließbare Operator T hat eine kleinste[7] abgeschlossene Erweiterung $\overline{T}$, die wir *Abschluss* von T nennen.

Bemerkung 3.4.9. Es ist leicht zu sehen, dass für einen abschließbaren Operator T gilt:

$$\mathrm{Dom}(\overline{T}) = \bigcap_{\substack{A \supset T \\ A \text{ abg. Op.}}} \mathrm{Dom}(A).$$

Um einen Operator auf Abschließbarkeit zu untersuchen, müssen wir überprüfen, ob er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt. Eine erste Idee ist es, den Abschluss von $\mathrm{Gr}(T)$ in $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ zu betrachten. Tatsächlich kann es aber passieren, dass $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ nicht mehr Graph eines Operators ist (man stelle sich vor es gilt sowohl $(x_0, u) \in \overline{\mathrm{Gr}(T)}$, als auch $(x_0, w) \in \overline{\mathrm{Gr}(T)}$ mit $u \neq w$).
Wir untersuchen daher zunächst, wann ein Untervektorraum $U \subset \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ ein Graph eines Operators ist.

Lemma 3.4.10. *(a) Ein Untervektorraum U von $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ ist genau dann Graph eines Operators T, falls $(0, v) \in U$ impliziert, dass $v = 0$ ist.*

(b) Jeder Untervektorraum eines Graphen $\mathrm{Gr}(T)$ *ist selbst Graph eines Operators.*

Beweis. (a) Wir beweisen die zwei Implikationen separat:

„$\longrightarrow$“: Diese Implikation ist trivial, denn T ist eine lineare Abbildung.

[7] Das Wort „kleinste“ ist hier bezüglich der Mengeninklusion der Definitionsbereiche der abgeschlossenen Erweiterungen zu verstehen.

„$\longleftarrow$“: Um den Operator T mittels des gegebenen Unterraumes U zu definieren, wählen wir zunächst als seinen Definitionsbereich

$$\mathrm{Dom}(T) := \Big\{x \in \mathcal{H}_1 : \text{Es existiert ein } y, \text{ sodass } (x,y) \in U \text{ ist}\Big\}.$$

Die Abbildung selbst definieren wir durch $Tx := y$, falls $(x,y) \in U$. Sind nun $(x_0,u),(x_0,w) \in U$, so ist auch $(0,u-w) \in U$. Nach Voraussetzung ist dann aber $u = w$, also T tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung. Die Linearität folgt aus den Untervektorraumeigenschaften von U.

(b) Dies ist eine Konsequenz aus (a), da $(0,v) \in U \subset \mathrm{Gr}(T)$ sofort $v = 0$ impliziert. □

In der folgenden Proposition werden wir zeigen, dass für einen abschließbaren Operator T die Menge $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ tatsächlich Graph eines Operators ist (unsere erste Idee den Abschluss des Graphen zu betrachten war also der richtige Weg). Tatsächlich gilt sogar mehr:

Proposition 3.4.11 (vgl. Seite 250 in [RS80])**.** *Ist T abschließbar, so ist*

$$\mathrm{Gr}(\overline{T}) = \overline{\mathrm{Gr}(T)}.$$

Beweis. Da T abschließbar ist, existiert gemäß Definition ein Operator S, der abgeschlossene Erweiterung von T ist. Wir haben also

$$\overline{\mathrm{Gr}(T)} \subset \mathrm{Gr}(S). \tag{3.8}$$

Da $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ ein Untervektorraum ist, folgt mit Lemma 3.4.10 (b), dass

$$\mathrm{Gr}(R) = \overline{\mathrm{Gr}(T)} \tag{3.9}$$

für einen Operator R ist. Somit ist R eine abgeschlossene Erweiterung von T. Die Inklusion (3.8) zusammen mit Gleichheit (3.9) ergibt

$$\mathrm{Gr}(R) \subset \mathrm{Gr}(S),$$

d. h. S ist eine Erweiterung von R. Da jedoch S eine beliebige abgeschlossene Erweiterung von T war, folgt unmittelbar mit Definition 3.4.8: $R = \overline{T}$. □

Die gerade bewiesene Proposition lässt sich nur auf abschließbare Operatoren anwenden. Um zu überprüfen, ob ein Operator abschließbar ist, bietet sich das folgende Lemma an:

Lemma 3.4.12 (vgl. Satz 11.6 in [Kab11])**.** *Für einen Operator T sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) T ist abschließbar.

(ii) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(T)$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathcal{H}_1$ und $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in $\mathcal{H}_2$ gilt $y = 0$.

Beweis. „(i) $\longrightarrow$ (ii)“: Es sei T abschließbar und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(T)$ eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ in $\mathcal{H}_1$ und $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in $\mathcal{H}_2$. Dann ist

$$(0, y) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} Tx_n\right) \in \overline{\mathrm{Gr}(T)}.$$

Aufgrund der Abschließbarkeit von T ist jedoch $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ nach Proposition 3.4.11 Graph eines Operators, also folgt $y = 0$ mit Lemma 3.4.10 (a).

„(i) $\longleftarrow$ (ii)“: Betrachte zwei Tupel $(x, y), (x, y') \in \overline{\mathrm{Gr}(T)}$. Nach Definition des Abschlusses gibt es zwei Folgen $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}, ((x'_n, y'_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Gr}(T)$, sodass $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y)$ und $(x'_n, y'_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y')$ in $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ gilt.
Folglich ist $((x_n - x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{Dom}(T)$ mit $x_n - x'_n \xrightarrow{n\to\infty} x - x = 0$ in $\mathrm{Dom}(T)$ und $T(x_n - x'_n) \xrightarrow{n\to\infty} y - y'$ in $\mathcal{H}_2$. Aus der Voraussetzung (ii) folgt dann $y - y' = 0$, also ist $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ nach Lemma 3.4.10 (a) ein Graph. Gemäß Definition 3.4.8 ist T also abschließbar. □

Wie bereits auf Seite 24 erwähnt, ist nicht jeder Operator abschließbar. Wir haben nun genügend Resultate gesammelt, um das folgende Beispiel zu betrachten (vgl. [Kv13, Bsp. 16.1.5]):

Beispiel 3.4.13 (Nicht abschließbarer Operator)**.** Der Operator

$$T\colon L^2\Big([-1,1]\Big) \supset \mathscr{C}^0\Big([-1,1]\Big) \longrightarrow L^2\Big([-1,1]\Big),$$

welcher für $f \in \mathscr{C}^0\Big([-1,1]\Big)$ und $x \in [-1,1]$ durch $\Big(Tf\Big)(x) = f(0) \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}$ definiert sei, ist nicht abschließbar.
Um dies zu zeigen, wählen wir eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{C}^0\Big([-1,1]\Big)$ mit den Eigenschaften $f_n(0) = 1$ und $\|f_n\|_{L^2} \to 0$ für $n \to \infty$. Konkret wählen wir dazu die Folge der Dreiecksfunktionen gemäß Abbildung 3.3.

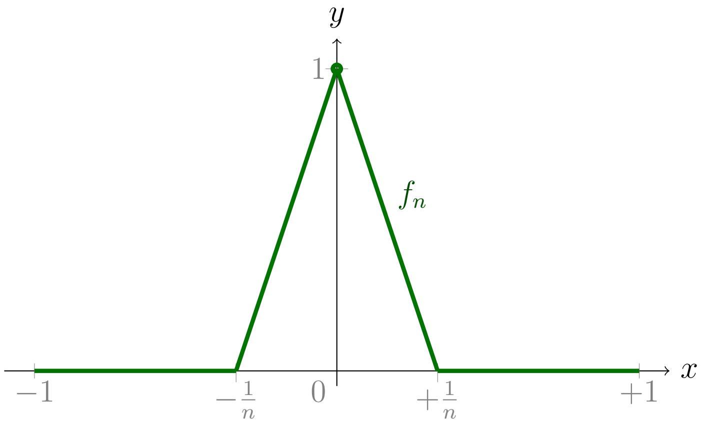

Abbildung 3.3.: Die Folge der Dreiecksfunktionen aus Beispiel 3.4.13.

Dann ist $Tf_n \equiv \mathbb{1}_{[-1,1]}$, aber $\|Tf_n\|_{L^2} = \Big(\int_{[-1,1]} 1 \,\mathrm{d}x\Big)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Lemma 3.4.12 folgt die Behauptung.

Fassen wir zusammen: Es gibt nicht abschließbare Operatoren. Ist ein Operator T jedoch abschließbar, so liefert Proposition 3.4.11 einen einfachen „Algorithmus“ seinen Abschluss $\overline{T}$ zu bestimmen: Wir setzen

$$\operatorname{Dom}(\overline{T}) := \left\{ x \in \mathcal{H}_1 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es existiert eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Dom}(T) \text{, sodass} \\ x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ in } \mathcal{H}_1 \text{ gilt und } T(x_n) \text{ in } \mathcal{H}_2 \text{ konvergiert} \end{array} \right\}.$$

Für ein solches x und eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ setzen wir dann

$$\overline{T}(x) := \lim_{n\to\infty} T(x_n).$$

Zunächst könnte dies nicht wohldefiniert sein. Da $\overline{\mathrm{Gr}(T)}$ jedoch der Graph eines Operators ist, ist die gerade getroffene Definition in der Tat unabhängig von der gewählten Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seien nämlich $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen aus $\mathrm{Dom}(T)$, die in $\mathcal{H}_1$ gegen x konvergieren. Es sei $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = y$ sowie $\lim_{n\to\infty} T(x'_n) = y'$. Mit der Linearität von T und Lemma 3.4.12 folgt jedoch

$$y - y' = \lim_{n\to\infty} T(x_n) - \lim_{n\to\infty} T(x'_n) = \lim_{n\to\infty} \Big(T(x_n) - T(x'_n)\Big) = \lim_{n\to\infty} T(x_n - x'_n) = 0.$$

Die Linearität von $\overline{T}$ ist hingegen offensichtlich.

Notiz 3.4.14. Ist $\mathrm{Dom}(T) = \mathcal{H}_1$, so besagt der *Satz vom abgeschlossenen Graphen* C.2.2, dass ein abgeschlossener Operator sogar stetig ist. Allgemeiner genügt es sogar, dass $\mathrm{Dom}(T)$ abgeschlossen ist (siehe [Wei13, Satz 4.4]).

Abgeschlossene Operatoren liefern im folgenden Sinne einen Ersatz für beschränkte Operatoren.

Satz 3.4.15. *Ein abgeschlossener Operator T wird durch Einführung einer neuen Norm – der sogenannten* Graphennorm *– auf seinem Definitionsbereich ein beschränkter Operator. Diese definieren wir durch*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_T\colon\ &\mathrm{Dom}(T) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\|x\|_T := \|x\|_{\mathcal{H}_1} + \|Tx\|_{\mathcal{H}_2}. \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathrm{Dom}(T), \|\cdot\|_T)$ ein Banachraum und $T\colon\ \mathcal{H}_1 \supset (\mathrm{Dom}(T), \|\cdot\|_T) \to \mathcal{H}_2$ ist beschränkt.

Im Hilbertraum-Fall ist es besser die Graphennorm wie folgt zu definieren:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_T\colon\ &\mathrm{Dom}(T) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\|x\|_T := \Big(\|x\|^2_{\mathcal{H}_1} + \|Tx\|^2_{\mathcal{H}_2}\Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Dann ist nämlich $\|x\|_T = \sqrt{\langle x|x\rangle_T}$ mit $\langle x|y\rangle_T = \langle x|y\rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle Tx|Ty\rangle_{\mathcal{H}_2}$ (vgl. [Wei13, S. 160]).

3.5 Adjungierte und selbstadjungierte Operatoren

Analog wie wir jedem stetigen linearen Operator $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ eine Hilbertraum-adjungierte $T^*\colon \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ zuordnen, wollen wir auch jedem unbeschränkten linearen Operator eine Adjungierte zuordnen. Da ein unbeschränkter Operator jedoch möglicherweise nicht auf dem ganzen Raum definiert ist, ist die folgende Definition etwas technischer. Wir orientieren uns dabei an Abschnitt 1.2 des Buches [Sch12].

Zunächst erinnern wir an Konvention 3.3.4, d. h. wir gehen davon aus, dass $\mathrm{Dom}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ liegt. Wir setzen nun

$$\mathrm{Dom}(T^*) := \left\{ y \in \mathcal{H}_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es existiert ein } u \in \mathcal{H}_1\text{, sodass } \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x|u\rangle_{\mathcal{H}_1} \\ \text{für alle } x \in \mathrm{Dom}(T) \text{ gilt} \end{array} \right\}.$$

Durch den Rieszschen Darstellungssatz C.3.4 weiß man, dass ein Vektor $y \in \mathcal{H}_2$ genau dann in der Menge $\mathrm{Dom}(T^*)$ liegt, wenn die Abbildung $\varphi\colon x \longmapsto \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2}$ ein stetiges lineares Funktional auf $(\mathrm{Dom}(T), \|\cdot\|_{\mathcal{H}_1})$ ist. Denn genau dann existiert ein $u \in \mathcal{H}_1$, so dass φ für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ durch $\varphi(x) = \langle x|u\rangle_{\mathcal{H}_1}$ dargestellt werden kann. Dies war die Motivation zur Wahl der obigen Menge.

Da nun $\mathrm{Dom}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ liegt, ist der Vektor $u \in \mathcal{H}_1$, der

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x|u\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ erfüllt, bei gegebenem $y \in \mathcal{H}_2$ eindeutig bestimmt: Angenommen es gelte

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x|u_1\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle x|u_2\rangle_{\mathcal{H}_1}$$

für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$, dann ist

$$\langle x|u_1 - u_2\rangle_{\mathcal{H}_1} = 0,$$

d. h. $u_1 - u_2 \in \mathrm{Dom}(T)^\perp$. Weil $\mathrm{Dom}(T)$ dicht in $\mathcal{H}_1$ liegt, ist $\mathrm{Dom}(T)^\perp = \{0\}$ nach Lemma C.3.1, also $u_1 = u_2$.

Dies rechtfertigt die folgende Definition (die für unbeschränkte und beschränkte Operatoren getroffen werden kann – siehe dazu Notiz 3.5.2):

Definition 3.5.1. Ist $T\colon \mathcal{H}_1 \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}_2$ ein Operator, so definieren wir seine *Adjungierte* $T^*\colon \mathcal{H}_2 \supset \mathrm{Dom}(T^*) \to \mathcal{H}_1$ durch

$$T^* y = u \quad \text{für} \quad y \in \mathrm{Dom}(T^*),$$

wobei u und $\mathrm{Dom}(T^*)$ wie in der Einleitung gewählt seien.

Insbesondere gilt also aufgrund Definition 3.5.1 die *Fundamentaleigenschaft*

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x|T^*y\rangle_{\mathcal{H}_1} \tag{3.10}$$

für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ und alle $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$.

Die Wohldefiniertheit der Adjungierten in Definition 3.5.1 haben wir schon gerechtfertigt. Weiterhin ist es leicht zu zeigen, dass $\mathrm{Dom}(T^*)$ ein Vektorraum ist, und T^* linear ist. Wir runden die Definition mit folgender Notiz ab, die den bisher bekannten Begriff der Hilbertraumadjungierten mit dem Neuen in Zusammenhang bringt:

Notiz 3.5.2. Ist $\mathrm{Dom}(T) = \mathcal{H}_1$ und T beschränkt, so stimmt die neu definierte Adjungierte mit der Hilbertraumadjungierten T^* überein.

Die Einführung der Adjungierten erlaubt es uns, Selbstadjungiertheit zu definieren. Dieser Begriff ist überaus wichtig, da wir genau für die selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen einen Speltralsatz formulieren und beweisen werden.

Definition 3.5.3. Ein dicht definierter Operator $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ heißt *selbstadjungiert*, falls $T^* = T$ gilt. Man beachte, dass somit auch Gleichheit der Definitionsbereiche von T und T^* vorliegen muss.

Bei der Einführung des Spektrums eines Operators in Kapitel 4 wird der nachfolgende Satz eine zentrale Rolle spielen:

Satz 3.5.4. *Die Adjungierte T^* ist immer abgeschlossen.*

Beweis. Erneut verwenden wir das Prinzip aus Bemerkung 3.4.6. Es sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(T^*)$ eine Folge, die in $\mathcal{H}_2$ gegen das Element y konvergiert. Desweiteren gelte $T^*y_n \to u$ in $\mathcal{H}_1$ für $n \to \infty$. Damit gilt mit der Stetigkeit des Skalarprodukts für beliebiges $x \in \mathrm{Dom}(T)$:

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \lim_{n\to\infty} \langle Tx|y_n\rangle_{\mathcal{H}_2} \stackrel{(3.10)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle x|T^*y_n\rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle x|u\rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Nach Definition ist dann $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ und $T^*y = u$, was zu zeigen war. □

Folgerung 3.5.5. *Aus Satz 3.5.4 folgt sofort, dass selbstadjungierte Operatoren immer abgeschlossen sind.*

Um das Konzept der Selbstadjungiertheit zu verdeutlichen, führen wir folgendes Beispiel an, das [Kab14, Satz 16.1] entlehnt wurde.

Beispiel 3.5.6. Wir betrachten erneut den unbeschränkten Multiplikationsoperator aus Beispiel 3.1.5. Dieser war für eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige unbeschränkte komplexwertige Funktion $a \in \mathscr{C}^0(\Omega;\mathbb{C})$ gegeben durch

$$\begin{aligned} M_a\colon L^2(\Omega;\mathbb{C}) \supset \mathrm{Dom}(M_a) &\longrightarrow L^2(\Omega;\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto af, \end{aligned}$$

mit $\mathrm{Dom}(M_a) := \{\, f \in L^2(\Omega;\mathbb{C}) \mid af \in L^2(\Omega;\mathbb{C})\}$.

Zunächst bemerken wir, dass $\mathrm{Dom}(M_a)$ dicht in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$ liegt. Betrachte dazu für $n \in \mathbb{N}$ die Mengen

$$\Omega_n := \Big\{ x \in \Omega \,\Big|\, |a(x)| \le n \Big\}.$$

Es ist $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$. Wählen wir nun eine beliebige Funktion $f \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$, so konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n := f\mathbb{1}_{\Omega_n} \in \mathrm{Dom}(M_a)$ für $n \to \infty$ gegen f nach dem Satz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz B.1.2): Mit der Majorante $|f|^2 \in L^1(\Omega;\mathbb{R})$ folgt

$$\|f - f_n\|_{L^2}^2 = \int_\Omega |f - f\mathbb{1}_{\Omega_n}|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|^2 \mathbb{1}_{\Omega_n^\complement} \,\mathrm{d}\mu \to 0$$

für $n \to \infty$. Dies zeigt die Dichtheit von $\mathrm{Dom}(M_a)$ in $L^2(\Omega;\mathbb{C})$. Die Adjungierte M_a^* ist also eindeutig bestimmt.

Wir behaupten, dass

$$M_a^* = M_{\overline{a}}$$

gilt, wobei wir für $a \in \mathscr{C}^0(\Omega;\mathbb{C})$ die Funktion $\overline{a}$ durch $\overline{a}(x) := \overline{a(x)}$ für alle $x \in \Omega$ erklären. Offensichtlich ist dann auch $\overline{a} \in \mathscr{C}^0(\Omega;\mathbb{C})$ und es gilt $\mathrm{Dom}(M_{\overline{a}}) = \mathrm{Dom}(M_a)$. Zeigen wir nun die Behauptung:

(I) Zunächst gilt

$$\langle M_a f | g \rangle_{L^2} = \int_\Omega a(t) f(t) \overline{g(t)} \,\mathrm{d}t = \int_\Omega f(t) \overline{\overline{a(t)} g(t)} \,\mathrm{d}t = \langle f | M_{\overline{a}} g \rangle_{L^2}$$

für beliebiges $f \in \mathrm{Dom}(M_a)$ und beliebiges $g \in \mathrm{Dom}(M_{\overline{a}}) = \mathrm{Dom}(M_a)$. Somit haben wir einen Kandidaten für die Adjungierte M_a^* gefunden, allerdings ist zu beachten, dass wir bisher lediglich $M_{\overline{a}} \subset M_a^*$ gezeigt haben. Für die Rechnung haben wir nämlich $g \in \mathrm{Dom}(M_{\overline{a}})$ angenommen. Es könnte aber Funktionen in $\mathrm{Dom}(M_a^*)$ geben, die diese Bedingung nicht erfüllen.

(II) Um die umgekehrte Inklusion, d. h. $M_a^* \subset M_{\overline{a}}$ zu zeigen, wählen wir ein $g \in \mathrm{Dom}(M_a^*)$ und setzen $h := M_a^* g$. Nach Definition von $\mathrm{Dom}(M_a^*)$ ist $h \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$. Folglich gilt wegen der Fundamentaleigenschaft (3.10) der Adjungierten

$$\int_\Omega a(t) f(t) \overline{g(t)} \,\mathrm{d}t = \langle M_a f | g \rangle_{L^2} = \langle f | h \rangle_{L^2} = \int_\Omega f(t) \overline{h(t)} \,\mathrm{d}t \tag{3.11}$$

für alle $f \in \mathrm{Dom}(M_a)$. Wir wählen nun eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ und eine Funktion $\varphi \in L^2(K;\mathbb{C})$. Mit $\widetilde{\varphi}$ bezeichnen wir die Fortsetzung von φ durch 0 auf Ω. Es ist dann $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Dom}(M_a)$, da die stetige Funktion a auf dem

Kompaktum K ein Maximum annimmt und somit gilt:

$$\int_\Omega |a\widetilde{\varphi}|^2 \,\mathrm{d}\mu = \int_K |a\varphi|^2 \,\mathrm{d}\mu \leq \max_{t\in K} |a(t)|^2 \cdot \|\varphi\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Mit der gerade gezeigten Gleichung (3.11) folgt

$$\int_K a(t)\varphi(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\Omega a(t)\widetilde{\varphi}(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\Omega \widetilde{\varphi}(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t = \int_K \varphi(t)\overline{h(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Es ist also $\overline{a(t)}g(t) = h(t)$ fast-überall auf K und damit auch fast-überall auf Ω. Schließlich ist also $\overline{a}g \in L^2(\Omega;\mathbb{C})$ und daher $g \in \mathrm{Dom}(M_{\overline{a}})$.

Das eben durchgerechnete Beispiel hat in der Tat praktische Relevanz: Im Spezialfall $\Omega = \mathbb{R}$ und $a = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ist M_a der eindimensionale *Ortsoperator* aus der Quantenmechanik. Mit dem Beispiel folgt $M_a^* = M_{\overline{a}} = M_a$ (da a nun reellwertig ist). Somit ist M_a ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$.

Wir präsentieren nun noch zwei wichtige „Rechenregeln“ für die Adjungierte, die wir im weiteren Verlauf vielfach verwenden werden. Es ist nützlich dazu folgende Konvention in Erweiterung der Konvention 3.3.4 zu treffen:

Konvention 3.5.7. Wir gehen davon aus, dass jede Adjungierte eines Operators ebenfalls dicht definiert ist.

Satz 3.5.8. *Ist* $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ *und* $\mathrm{Bi}(T)$ *dicht in* $\mathcal{H}_2$*, so ist* T^* *invertierbar und es gilt*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Beweis. Siehe z. B. [Sch12, Theorem 1.8 (iv)]. □

Korollar 3.5.9. *Ist* T *ein selbstadjungierter Operator mit* $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$*, dann ist* T^{-1} *auch selbstadjungiert.*

Beweis. Siehe z. B. [Sch12, Corolary 1.9]. □

Satz 3.5.10. *Es sei* T *ein abgeschlossener Operator und* $Q \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *ein beschränk-*

ter Operator. Dann ist die Adjungierte von $T + Q$ gegeben durch $T^* + Q^*$ mit $\mathrm{Dom}(T^* + Q^*) = \mathrm{Dom}(T^*)$.
Insbesondere gilt für einen selbstadjungierten Operator T und beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(\lambda \operatorname{id} - T)^* = \overline{\lambda} \operatorname{id} - T^* = \overline{\lambda} \operatorname{id} - T.$$

Beweis. Wir betrachten für $y \in \mathcal{H}$ das Funktional

$$\psi\colon x \longmapsto \Big\langle (T+Q)x \,\Big|\, y \Big\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}} + \langle Qx|y\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Da Q ein beschränkter Operator ist folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1 die Stetigkeit des Teilfunktionals $x \mapsto \langle Qx|y\rangle_{\mathcal{H}}$ für beliebiges $y \in \mathcal{H}$. Aus den einleitenden Bemerkungen auf Seite 29 folgt daher sofort

$$\mathrm{Dom}(T^*) \subset \mathrm{Dom}\Big((T+Q)^*\Big),$$

denn ist $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$, so ist auch das Teilfunktional $x \mapsto \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}}$ stetig und damit ist schließlich auch ψ stetig. Aus der Eindeutigkeit im Rieszschen Darstellungssatz C.3.4 folgt direkt $(T+Q)^*x = T^*x + Q^*x$, woraus die erste Behauptung folgt.

Betrachten wir nun den Spezialfall eines selbstadjungierten Operators T. Gemäß Folgerung 3.5.5 ist T abgeschlossen. Somit erfüllt T die Voraussetzungen des Satzes. Wir setzen nun $Q := \lambda \cdot \operatorname{id}$. Wegen

$$\|Q\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|(\lambda \cdot \operatorname{id})(x)\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \cdot \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}}=1} \|x\|_{\mathcal{H}} = |\lambda|$$

ist Q ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$. Somit erhalten wir mit dem bereits gezeigten Teil des Satzes $(\lambda \operatorname{id} - T)^* = (\lambda \operatorname{id})^* - T^* = (\lambda \operatorname{id})^* - T$. Mit den bekannten Rechenregeln für Hilbertraumadjungierte ergibt sich weiter $(\lambda \operatorname{id})^* = \overline{\lambda} \operatorname{id}^* = \overline{\lambda} \operatorname{id}$. $\square$

3.6 Symmetrische Operatoren

Definition 3.6.1. Ein Operator $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ heißt *symmetrisch*, falls

$$\langle Tx|y\rangle = \langle x|Ty\rangle \quad \text{für alle } x, y \in \mathrm{Dom}(T)$$

gilt.

Lemma 3.6.2. *Selbstadjungierte Operatoren sind symmetrisch.*

Wir erinnern an den Satz von Hellinger-Toeplitz:

Satz 3.6.3 (Satz von Hellinger-Toeplitz)**.** *Ein symmetrischer Operator T mit $\mathrm{Dom}(T) = \mathcal{H}$ ist stetig.*

Korollar 3.6.4. *Jeder symmetrische, überall auf $\mathcal{H}$ definierte Operator ist selbstadjungiert.*

Die folgende Proposition ist das Hauptergebnis dieses Abschnitts. Sie wird eine zentrale Rolle im ersten Schritt unseres Beweises zum Spektralsatz spielen.

Proposition 3.6.5 (vgl. [RS80], Theorem VIII.3)**.** *Für einen symmetrischen Operator T auf $\mathcal{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) T ist selbstadjungiert.

(b) T ist abgeschlossen und es gilt $\mathrm{Ker}(T^* \pm \mathrm{i}) = \{0\}$.

(c) Es ist $\mathrm{Bi}(T \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Richtung (a) $\longrightarrow$ (b) $\longrightarrow$ (c), welche wir ausschließlich im weiteren Verlauf benötigen. Den vollständigen Äquivalenzbeweis findet man z. B. in [RS80].

„(a) $\longrightarrow$ (b)“: Es sei T selbstadjungiert. Dann ist T nach Folgerung 3.5.5 abgeschlossen. Es sei nun $x \in \mathrm{Ker}(T^* - \mathrm{i})$. Dann ist $T^*x = Tx = \mathrm{i}x$. Somit erhalten wir

$$\mathrm{i}\langle x|x\rangle = \langle \mathrm{i}x|x\rangle = \langle Tx|x\rangle = \langle x|T^*x\rangle = \langle x|\mathrm{i}x\rangle = -\mathrm{i}\langle x|x\rangle,$$

also $x = 0$. Analog zeigt man dies für $x \in \mathrm{Ker}(T^* + \mathrm{i})$.

„(b) $\longrightarrow$ (c)": Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})$ dicht in $\mathcal{H}$ ist. Dazu betrachten wir ein Element $y \in \mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})^\perp$. Dann ist

$$\Big\langle (T - \mathrm{i})x \,\Big|\, y \Big\rangle_{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Nach den einleitenden Bemerkungen in Abschnitt 3.5 ist $y \in \mathrm{Dom}(T^*)$ und unter Hinzunahme von Satz 3.5.10 ergibt sich

$$(T - \mathrm{i})^* y = (T^* + \mathrm{i})y = 0.$$

Dies ist nach Voraussetzung allerdings nur für $y = 0$ möglich. Also ist $\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})$ nach Lemma C.3.1 in der Tat dicht in $\mathcal{H}$. Um schließlich $\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i}) = \mathcal{H}$ folgern zu können, reicht es nun aus, die Abgeschlossenheit der Menge $\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})$ zu zeigen, denn dann haben wir

$$\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i}) = \overline{\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})} = \mathcal{H}\,. \tag{3.12}$$

Wir beobachten, dass für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ auf Grund der Skalarprodukteigenschaften gilt:

$$\|(T - \mathrm{i})x\|_{\mathcal{H}}^2 = \|Tx\|_{\mathcal{H}}^2 + \|x\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.13}$$

Ist jetzt $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(T)$ mit $(T - \mathrm{i})x_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0$, dann folgern wir aus (3.13), dass x_n gegen einen Vektor x_0 konvergiert, und Tx_n ebenfalls konvergiert. Die Abgeschlossenheit von T liefert $x_0 \in \mathrm{Dom}(T)$ und $(T-\mathrm{i})x_0 = y_0$. Also ist $\mathrm{Bi}(T - \mathrm{i})$ abgeschlossen. Mit (3.12) folgt die Behauptung. $\square$

3.7 Normale Operatoren

Eine wichtige Klasse von Operatoren sind die normalen Operatoren. Sie haben viele Eigenschaften mit den selbstadjungierten Operatoren gemeinsam. Besonders im Beweis des Spektralsatzes werden wir von normalen Operatoren Gebrauch machen.

Definition 3.7.1. Ein Operator $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ ist *normal*, falls $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(T^*)$ ist und

$$\|Tx\|_{\mathcal{H}} = \|T^*x\|_{\mathcal{H}}$$

für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ gilt.

Eine zentrale Beobachtung ist, dass selbstadjungierte Operatoren offensichtlich normal sind. Denn gilt $T = T^*$, so ist auch $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(T^*)$ und ebenfalls $\|Tx\|_{\mathcal{H}} = \|T^*x\|_{\mathcal{H}}$ für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$.

Für den Nachweis der Normalität eines Operators benutzt man jedoch in aller Regel nicht obige Definition, sondern Punkt (b) des folgenden Satzes:

Satz 3.7.2. *(a) Ein normaler Operator ist abgeschlossen.*

(b) Ein (dicht definierter und) abgeschlossener Operator T ist normal, genau dann wenn er mit seiner Adjungierten T^* kommutiert, d. h.

$$T^*T = TT^*. \tag{3.14}$$

Beweis. (a) Wir präsentieren die ausgearbeitete Beweisskizze von Seite 21 in [Att]. Es sei T ein normaler Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Wir verwenden Bemerkung 3.4.6, um zu zeigen, dass T abgeschlossen ist. Wir wählen also eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathrm{Dom}(T)$, sodass $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in $\mathcal{H}$ konvergiert. Da nach Definition 3.7.1 $\mathrm{Dom}(T) = \mathrm{Dom}(T^*)$ gilt, ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch eine Folge in $\mathrm{Dom}(T^*)$. Wiederum mit Definition 3.7.1 erhält man

$$\|T^*(x_n - x_m)\|_{\mathcal{H}} = \|T(x_n - x_m)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für } n, m \in \mathbb{N}.$$

Als Cauchy-Folge ist $(T^*x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{H}$ gegen ein Element y^* konvergent. Aus Satz 3.5.4 wissen wir, dass die Adjungierte T^* immer ein abgeschlossener Operator ist. Somit folgt mit Bemerkung 3.4.6: $x \in \mathrm{Dom}(T^*)$ und $T^*x = y^*$. Somit ist auch $x \in \mathrm{Dom}(T)$. Schließlich bemerken wir, dass mit Definition 3.7.1 die Gleichung

$$\|T(x_n - x)\|_{\mathcal{H}} = \|T^*(x_n - x)\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{3.15}$$

gilt. Da $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ stetig ist, folgt

$$\|y - Tx\|_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n - x)\|_{\mathcal{H}} \overset{(3.15)}{=} \lim_{n\to\infty} \|T^*(x_n - x)\|_{\mathcal{H}} = \|y^* - T^*x\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Dies zeigt $Tx = y$ und somit die Abgeschlossenheit von T.

(b) Siehe z. B. [Att, Proposition 1.43] oder [Sch12, Proposition 3.25]. □

KAPITEL 4

Das Spektrum abgeschlossener Operatoren

Dieses Kapitel ist dem zentralen zu untersuchenden Gegenstand – dem Spektrum abgeschlossener Operatoren – gewidmet. Das Spektrum werden wir als Komplement der Resolventenmenge definieren. Auf dieser führen wir insbesondere eine Resolventenabbildung ein, die uns einige Beweis enorm erleichtern wird.

Definition 4.0.1. Die *Resolventenmenge* $\varrho(T)$ eines abgeschlossenen Operators $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ ist definiert als die Menge aller λ im Körper $\mathbb{C}$, sodass

1. $\mathrm{Bi}(\lambda \,\mathrm{id} - T) = \mathcal{H}$ gilt, und
2. der Operator $R(\lambda, T) := (\lambda \,\mathrm{id} - T)^{-1}$ auf ganz $\mathcal{H}$ definiert und zusätzlich beschränkt ist. Wir nennen $R(\lambda, T)$ die *Resolvente* von T in λ.

Das Komplement $\sigma(T) := \mathbb{C} \backslash \varrho(T)$ heißt *Spektrum* von T und ist der Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen. Weiterhin sei das *Punktspektrum* $\sigma_P(T)$ die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda \,\mathrm{id} - T$ nicht injektiv auf $\mathrm{Dom}(T)$ ist; das *Residualspektrum* $\sigma_R(T)$ die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$, für welche $\lambda \,\mathrm{id} - T$ zwar injektiv auf $\mathrm{Dom}(T)$ ist aber nicht-dichtes Bild hat; das *kontinuierliche Spektrum* $\sigma_C(T)$ der Rest des Spektrums.

Weiter nennt man die Menge

$$\sigma_{\mathrm{app}} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Es gibt eine Folge } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(T) \text{ mit } \|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1 \\ \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \|Tx_n - \lambda x_n\|_{\mathcal{H}} \to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{array} \right\}$$

approximatives Punktspektrum von T; die Elemente der Menge werden *approximative Eigenwerte* genannt.

Man beachte, dass sowohl die Resolventenmenge als auch das Spektrum sehr wohl vom Definitionsbereich des Operators abhängen. Da wir vereinbart haben, dass zur Angabe eines Operators auch dessen Definitionsbereich gehört, verzichten wir auf die Bezeichnungen $\varrho(T, \operatorname{Dom}(T))$ und $\sigma(T, \operatorname{Dom}(T))$, die man gelegentlich in der Literatur findet.

In Analogie zur Linearen Algebra definieren wir desweiteren:

Definition 4.0.2. Eine komplexe Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ nennen wir *Eigenwert* von T, falls ein Vektor $x \in \operatorname{Dom}(T)$, $x \neq 0$ existiert, sodass

$$Tx = \lambda x \tag{4.1}$$

gilt. Den Vektor x nennen wir dann *Eigenvektor* von T zum Eigenwert λ. Man sieht leicht, dass die Eigenwertgleichung (4.1) genau dann gilt, wenn

$$\operatorname{Eig}(\lambda, T) := \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id} - T) \neq \{0\} \tag{4.2}$$

ist. Dabei nennen wir $\operatorname{Eig}(\lambda, T)$ *geometrischen Eigenraum* des Operators T zum Eigenwert λ. Die Zahl $\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}(\lambda, T)$ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes λ. Mit (4.2) sieht man: Das Punktspektrum $\sigma_P(T)$ ist die Menge der Eigenwerte des Operators T.

Wir haben in Definition 4.0.1 vorausgesetzt, dass T abgeschlossen ist. Was würde passieren, wenn T nicht abgeschlossen wäre? Wäre in diesem Fall $\lambda \in \varrho(T)$, so würde sofort folgen, dass T eben doch abgeschlossen ist (demnach kann es kein solches λ geben). Dies sieht man wie folgt ein (vgl. [FK98, S. 665]):
Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\operatorname{Dom}(T)$, für die die beiden Grenzwerte $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ und $y := \lim_{n\to\infty} Tx_n$ in $\mathcal{H}$ existieren. Dann gilt $\lambda x - y = \lim_{n\to\infty}(\lambda \operatorname{id} - T)x_n$ in $\mathcal{H}$

und wegen der Stetigkeit der Resolvente $R(\lambda, T)$ folgt, dass

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \Big(R(\lambda, T) \circ (\lambda \operatorname{id} - T)\Big)(x_n) = R(\lambda, T)(\lambda x - y)$$

gilt. Somit liegt x in $\operatorname{Dom}(T)$ und es gilt

$$(\lambda \operatorname{id} - T)x = \lim_{n\to\infty} (\lambda \operatorname{id} - T)x_n = \lambda x - y,$$

woraus $Tx = y$ folgt. Nach Bemerkung 3.4.6 ist T also *doch* abgeschlossen. Dies ist ein Widerspruch!
Für einen nicht-abgeschlossenen Operator T hätte man also immer $\varrho(T) = \varnothing$ und $\sigma(T) = \mathbb{C}$. Der Begriff des Spektrums wäre damit nur eine andere Bezeichnung für die komplexe Ebene. Daher nehmen wir in Definition 4.0.1 die Abgeschlossenheit des Operators an.
Wir möchten diese Gelegenheit nutzen, an Folgerung 3.5.5 zu erinnern: Selbstadjungierte Operatoren sind abgeschlossen. Daher haben wir insbesondere für selbstadjungierte Operatoren einen sinnvollen und nicht-trivialen Spektren-Begriff eingeführt.

Man beachte außerdem, dass sich in der Literatur sowohl die Definition der Resolvente als $(\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$ sowie $(T - \lambda \operatorname{id})^{-1}$ findet.

Analog wie im Falle beschränkter Operatoren gilt für einen abgeschlossenen Operator folgendes Theorem:

Theorem 4.0.3. *Es sei $T\colon \mathcal{H} \supset \operatorname{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator. Dann gilt:*

(a) Der Körper $\mathbb{C}$ zerfällt disjunkt in die Resolventenmenge und in das Spektrum des Operators. Das Spektrum lässt sich wiederum disjunkt wie folgt zerlegen:

$$\sigma(T) = \sigma_P(T) \uplus \sigma_C(T) \uplus \sigma_R(T).$$

(b) Die Resolventenmenge ist eine offene Menge in den komplexen Zahlen. Präzi-

ser gilt: Ist $\lambda_0 \in \varrho(T)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit

$$|\lambda - \lambda_0| \leq \frac{1}{\|R(\lambda_0, T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}},$$

so ist auch $\lambda \in \varrho(T)$. Entsprechend ist das Spektrum $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Menge.

(c) Unter den Voraussetzungen aus (b) erhält man die Darstellung

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0, T)^{n+1},$$

wobei die Reihe in $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ konvergiert. Insbesondere ist die Abbildung

$$\begin{aligned} R\colon \varrho(T) &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \\ \lambda &\longmapsto R(\lambda, T) \end{aligned}$$

holomorph (auf Seite 174 von [Kat95] findet man auch den Begriff „stückweise holomorph“, der berücksichtigt, dass $\varrho(T)$ nicht zusammenhängend sein muss).

(d) Für alle $\lambda, \mu \in \varrho(T)$ mit $\lambda \neq \mu$ gilt die Resolventengleichung*:*

$$\frac{R(\lambda, T) - R(\mu, T)}{\mu - \lambda} = R(\lambda, T) \circ R(\mu, T).$$

Insbesondere kommutieren Resolventen im Raum $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis für beschränkte Operatoren. Diesen findet man z. B. in [Wer05, Satz VI.1.3]. □

Das folgende Beispiel zeigt, dass unbeschränkte Operatoren Spektren haben können, die bei beschränkten Operatoren ausgeschlossen sind. Ein beschränkter Operator kann weder ein leeres Spektrum noch eine leere Resolventenmenge haben ([Kat95, S.176]).

Beispiel 4.0.4 (Operator mit leerem Spektrum; siehe [Wer05], Seite 348)**.** Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2\big([0,1]; \mathbb{C}\big)$ und den Differentialoperator $T = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Als Definitionsmenge des Operators wählen wir

$$\operatorname{Dom}(T) := \left\{ f \in \mathcal{H} \;\middle|\; f \text{ ist absolut stetig, } f(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f \in \mathcal{H} \right\}.$$

Dabei heißt eine Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ *absolut stetig*, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede endliche Folge paarweise disjunkter Intervalle $[x_k, y_k] \subset [0,1]$ die Bedingung $\sum_{k=1}^{n}(y_k - x_k) < \delta$ impliziert, dass $\sum_{k=1}^{n} |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon$ ist (vgl. [Wer05, Definition A.1.9]). Für absolut stetige Funktionen kann ebenfalls ein Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formuliert werden (siehe [Wer05, Satz A.1.10]).

Da Punktauswertungen in Lebesgue-Räumen nicht definiert sind, präzisieren wir, wie die Definition von $\operatorname{Dom}(T)$ zu verstehen ist: $\operatorname{Dom}(T)$ bestehe aus allen Äquivalenzklassen $[f] \in L^2\big([0,1];\mathbb{C}\big)$, sodass es einen absolut stetigen Repräsentanten $h \in [f]$ gibt mit $h(0) = 0$ und $[h'] \in L^2\big([0,1];\mathbb{C}\big)$. Die Wirkung des Operators sei dann durch $T[f] := [h']$ definiert. Es sei darauf hingewiesen, dass der absolut stetige Repräsentant einer Äquivalenzklasse $[f] \in \operatorname{Dom}(T)$ eindeutig bestimmt ist, denn zwei absolut stetige Funktionen, die μ-fast überall übereinstimmen, sind bereits identisch. Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir jedoch im Folgenden f und $[f]$.

Zunächst bemerken wir, dass T abgeschlossen ist. Dies kann man wie in [Wer05, Bsp. IV.4(c)] zeigen.

Wie angekündigt wollen wir nun zeigen, dass $\sigma(T) = \varnothing$ gilt. Dazu zeigen wir, dass die Resolvente $R(\lambda, T) = (\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$ für beliebig gewähltes $\lambda \in \mathbb{C}$ überall existiert: Es sei dazu $g \in L^2\big([0,1];\mathbb{C}\big)$ ebenfalls beliebig. Wir wollen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \lambda f - f' = g \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

lösen. Wir erhalten die eindeutige Lösung, indem wir beobachten, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(-\mathrm{e}^{-\lambda x} f\Big) = \mathrm{e}^{-\lambda x} g$$

gilt. Als Lösungskandidaten erhalten wir daher

$$f(x) = -\,\mathrm{e}^{\lambda x} \int_0^x \mathrm{e}^{-\lambda t}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass dies in der Tat eine korrekte Lösung ist. Die Resolvente $R(\lambda, T)$ ist also überall definiert vermöge

$$\Big(R(\lambda, T)g\Big)(x) = \Big((\lambda \operatorname{id} - T)^{-1} g\Big)(x) = -\int_0^x \mathrm{e}^{\lambda(x-t)}\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Da T abgeschlossen ist und $\lambda \operatorname{id} - T$ bijektiv ist, folgt sofort die Stetigkeit von $(\lambda \operatorname{id} - T)^{-1}$ (verwende [Wer05, Satz IV.4.4]). $\square$

Es ist sinnvoll an dieser Stelle zu betonen, dass das Spektrum eines selbstadjungierten Operators jedoch ausreichend „groß“ ist, um eine Klassifizierung der unbeschränkten selbstadjungierten Operatoren im Sinne des Spektralsatzes durchzuführen (d. h. der Operator kann mit Hilfe seines Spektrums beschrieben werden). An dieser Stelle bietet es sich an, das Spektrum eines selbstadjungierten Operators näher zu untersuchen. Es stellt sich heraus, dass dieses (wie schon im Falle beschränkter selbstadjungierter Operatoren) rein-reell und nicht-leer ist:

Proposition 4.0.5. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators T auf einem Hilbertraum ist* rein-reell*, d. h. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir orientieren uns an [Kow09, Proposition 4.38]: Sei $\lambda_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Insbesondere sei also $y_0 \neq 0$ gewählt. Wir wollen zeigen, dass $\lambda_0 \in \varrho(T)$ ist. Dazu definieren wir den Hilfsoperator S auf $\mathrm{Dom}(S) = \mathrm{Dom}(T)$ durch

$$S = \frac{1}{y_0}(x_0 \operatorname{id} - T).$$

Wegen Satz 3.5.10 ist

$$S^* = \frac{1}{y_0}(\overline{x_0} \operatorname{id} - T^*) = \frac{1}{y_0}(x_0 \operatorname{id} - T) = S,$$

also ist S selbstadjungiert. Daher können wir Proposition 3.6.5 auf S anwenden.

Wir erhalten

$$\mathrm{Bi}\left(\frac{1}{y_0}(x_0\,\mathrm{id} - T) + \mathrm{i}\right) = \mathcal{H}\,.$$

Daraus schließen wir

$$\mathrm{Bi}(\lambda_0\,\mathrm{id} - T) = \mathcal{H},$$

also die Surjektivität von $\lambda_0\,\mathrm{id} - T$. Das selbe Argument angewandt auf $\overline{\lambda_0}$ liefert

$$\mathrm{Bi}\left(\overline{\lambda_0}\,\mathrm{id} - T\right) = \mathcal{H}\,. \tag{4.3}$$

Um die Injektivität von $\lambda_0\,\mathrm{id} - T$ zu zeigen, wählen wir ein $v \in \mathrm{Ker}(\lambda_0\,\mathrm{id} - T)$. Dann ist

$$0 = \left\langle (\lambda_0\,\mathrm{id} - T)v \,\middle|\, w \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle v \,\middle|\, (\overline{\lambda_0}\,\mathrm{id} - T^*)w \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle v \,\middle|\, (\overline{\lambda_0}\,\mathrm{id} - T)w \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

für alle $w \in \mathrm{Dom}(T)$. Somit ist also $v \in \mathrm{Bi}(\overline{\lambda_0}\,\mathrm{id} - T)^{\perp} \overset{(4.3)}{=} \{0\}$. Dies zeigt die Injektivität von von $\lambda_0\,\mathrm{id} - T$ auf $\mathrm{Dom}(T)$. Insgesamt ist $\lambda_0\,\mathrm{id} - T\colon\ \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ bijektiv. Weiter ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda_0\,\mathrm{id} - T)\,z\|_{\mathcal{H}}^2 &= y_0^2\,\|\mathrm{i}z + Sz\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &= y_0^2\left(\|z\|_{\mathcal{H}}^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle Sz|\mathrm{i}z\rangle_{\mathcal{H}} + \|Sz\|_{\mathcal{H}}^2\right) \geq y_0^2\|z\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \tag{4.4}$$

da für einen selbstadjungierten Operator S wegen

$$\begin{aligned} \langle Sz|z\rangle_{\mathcal{H}} - \overline{\langle Sz|z\rangle}_{\mathcal{H}} &= \langle Sz|z\rangle_{\mathcal{H}} - \langle z|Sz\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle Sz|z\rangle_{\mathcal{H}} - \langle S^*z|z\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle (S - S^*)z|z\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

stets $\langle Sz|z\rangle_{\mathcal{H}} \in \mathbb{R}$ gilt, was $\mathrm{Re}\langle Sz|\mathrm{i}z\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ impliziert. Es ist bekannt, dass (4.4) bedeutet, dass $(\lambda_0\,\mathrm{id} - T)^{-1}$ stetig ist. Somit ist $\lambda_0 \notin \sigma(T)$. □

Proposition 4.0.6. *Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators T auf einem Hilbertraum ist nicht-leer, d. h. es gilt $\sigma(T) \neq \varnothing$.*

Beweis. Wir übernehmen den Beweis auf Seite 64 in [Hel10]. Der Beweis funktioniert mittels Kontraposition. Hätte T leeres Spektrum, so wäre T^{-1} ein beschränkter, nach Korollar 3.5.9 selbstadjungierter Operator mit Spektrum $\sigma(T^{-1}) = \{0\}$. Denn für $\lambda \neq 0$ ist die Inverse von

$$\lambda \operatorname{id} - T^{-1} = (\lambda T - \operatorname{id})T^{-1} = -\lambda \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right) T^{-1}$$

gegeben durch

$$-\frac{1}{\lambda} T \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right)^{-1}.$$

und

$$-T \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right)^{-1} = \left[\left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right) - \frac{1}{\lambda} \operatorname{id}\right] \circ \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right)^{-1} = \operatorname{id} - \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right)^{-1}$$

ist, sofern $\frac{1}{\lambda} \in \varrho(T)$ liegt (was immer der Fall ist, da $\varrho(T) = \mathbb{C}$ ist), ein beschränkter Operator. Somit ist auch $-\frac{1}{\lambda} T \left(\frac{1}{\lambda} \operatorname{id} - T\right)^{-1}$ ein beschränkter Operator. Mit der Spektralradiusformel (4.5) aus nachfolgendem Satz 4.0.8 folgt: $T^{-1} = \mathfrak{o}$. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu $T \circ T^{-1} = \operatorname{id}$. □

Zum Abschluss dieses Kapitels wiederholen wir einige Begriffe und Ergebnisse aus der Spektraltheorie beschränkter Operatoren.

Definition 4.0.7. Für einen beschränkten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ definieren wir seinen *Spektralradius* durch

$$\mathrm{r}(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Satz 4.0.8. *Für einen beschränkten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ gelten die folgenden Aussagen:*

(a) Der Spektralradius von T ist gegeben durch

$$\mathrm{r}(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Insbesondere existiert der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

(b) Falls T normal ist, so gilt die Spektralradiusformel*:*

$$\mathrm{r}(T) = \|T\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}. \tag{4.5}$$

KAPITEL 5

Der operatorwertige Integralbegriff

Um den Spektralsatz formulieren zu können, müssen wir einen neuen Integralbegriff einführen. Dieses Kapitel ist dem operatorwertigen Integralbegriff gewidmet, der eine Art Verallgemeinerung der Riemann-Stieltjes-Integrale darstellt (wir werden diese in einem Schnellkurs in Abschnitt 5.2 dieses Kapitels wiederholen).

Inhalt des Kapitels

5.1. Spektralscharen 49

5.2. Exkurs: Riemann-Stieltjes-Integrale 59

5.3. Spektralmaße 60

5.4. Zusammenhang von Spektralscharen und Spektralmaßen 63

5.5. Integration bezüglich einer Spektralschar 64

5.1 Spektralscharen

Im ersten Abschnitt betrachten wir das wichtigste Hilfsmittel, um den neuen Integralbegriff einzuführen: Die sogenannten Spektralscharen. Um den Begriff der Spektralschar einführen zu können, rufen wir zunächst in Erinnerung, was wir unter einer orthogonalen Projektion in einem Hilbertraum verstehen.

Erinnerung 5.1.1. Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $P \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein stetiger linearer Operator. Dann heißt P *Projektion* oder *Projektor* genau dann, wenn P idempotent ist (d. h. $P^2 = P$ gilt).
Wir nennen die Projektion P eine *Orthogonalprojektion*, falls P zusätzlich selbstadjungiert ist (d. h. $P^* = P$ gilt).
Die *Menge der orthogonalen Projektionen* auf $\mathcal{H}$ notieren wir mit $\operatorname{Proj}(\mathcal{H})$.

Über die Operatornorm jeder nicht-trivialen Orthogonalprojektion lässt sich folgende Aussage treffen, die wir an späterer Stelle verwenden werden:

Lemma 5.1.2. *Ist $P \neq \mathfrak{o}$ eine Orthogonalprojektion auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gilt $\|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = 1$.*

Beweis. Ist $P \neq \mathfrak{o}$, so existiert ein $x \in \mathcal{H}$ mit $Px \neq 0$. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1 liefert dann

$$\|Px\|_{\mathcal{H}} = \frac{\langle Px|Px\rangle_{\mathcal{H}}}{\|Px\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\langle x|P^2x\rangle_{\mathcal{H}}}{\|Px\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\langle x|Px\rangle_{\mathcal{H}}}{\|Px\|_{\mathcal{H}}} \leq \|x\|_{\mathcal{H}},$$

somit ist $\|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$. Umgekehrt gilt für alle $x \in \mathcal{H}$:

$$\|Px\|_{\mathcal{H}} = \|P(Px)\|_{\mathcal{H}} \leq \|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}\|Px\|_{\mathcal{H}}.$$

Für $\|Px\|_{\mathcal{H}} \neq 0$ ist damit $\|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \geq 1$. Insgesamt ist $\|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = 1$. $\square$

Kommen wir nach dieser kurzen Begriffsklärung zur Einführung von Spektralscharen.

Definition 5.1.3. Eine vom reellen Parameter λ abhängige Familie $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset \operatorname{Proj}(\mathcal{H})$ orthogonaler Projektionen $E_\lambda \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt *Spektralschar* (engl. *resolution of the identity*), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Res1) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt: $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}}$.

(Res2) $\lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = \mathfrak{o}$, $\quad \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

(Res3) Die Familie ist *rechtsseitig stetig*, d. h. $\lim_{\lambda \downarrow \mu} E_\lambda = E_\mu$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$.

Die verwendeten Limiten sind alle punktweise zu verstehen (also im Sinne der starken Operatortopologie).

Zur Verdeutlichung der Definition möchte der Autor an dieser Stelle ein selbst ausgearbeitetes Beispiel anführen.

Beispiel 5.1.4. Wir betrachten den Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ der quadrat-integrierbaren, reellwertigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir behaupten, dass die Familie $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$, definiert durch

$$\big(E_\lambda f\big)(x) := \begin{cases} f(x), & \text{für } x \leq \lambda \\ 0, & \text{für } x > \lambda \end{cases}$$

eine Spektralschar in $L^2(\mathbb{R})$ ist. Für den Nachweis gehen wir schrittweise vor:

(I) In der Tat ist die Abbildung E_λ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ linear: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Konstanten. Ist $x \leq \lambda$, dann ist

$$\begin{aligned}\Big(E_\lambda(\alpha f + \beta g)\Big)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x) \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha\big(E_\lambda f\big)(x) + \beta\big(E_\lambda g\big)(x).\end{aligned}$$

Ist $x > \lambda$, so ist $\Big(E_\lambda(\alpha f + \beta g)\Big)(x) = \big(E_\lambda f\big)(x) = \big(E_\lambda g\big)(x) = 0$, also gilt

$$\Big(E_\lambda(\alpha f + \beta g)\Big)(x) = \alpha\big(E_\lambda f\big)(x) + \beta\big(E_\lambda g\big)(x).$$

(II) Offensichtlich ist

$$\Big|\big(E_\lambda f\big)(x)\Big| \leq |f(x)| \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

und somit $E_\lambda f \in L^2(\mathbb{R})$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$.

(III) Aus der Ungleichung (5.1) folgt sofort $\|E_\lambda f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$. Also ist E_λ ein stetiger linearer Operator auf $L^2(\mathbb{R})$ mit Operatornorm $\|E_\lambda\|_{\mathfrak{L}(L^2(\mathbb{R}))} \leq 1$.

(IV) Wir wollen nun die Idempotenz von E_λ für festes $\lambda \in \mathbb{R}$ zeigen. Sei dazu

$f \in L^2(\mathbb{R})$. Ist $x \leq \lambda$, dann ist

$$\Big(E_\lambda\big(E_\lambda f\big)\Big)(x) = \big(E_\lambda f\big)(x) = f(x)$$

und im Falle $x > \lambda$ gilt

$$\Big(E_\lambda\big(E_\lambda f\big)\Big)(x) = 0 = \big(E_\lambda f\big)(x).$$

Dies zeigt die Idempotenz von E_λ.

(V) Um zu zeigen, dass E_λ selbstadjungiert ist, betrachte für zwei Funktionen $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ die folgende Gleichungskette:

$$\begin{aligned}\langle E_\lambda f | g\rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}} \big(E_\lambda f\big)(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)\cdot\big(E_\lambda g\big)(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\\ &= \langle f|E_\lambda g\rangle_{L^2}.\end{aligned}$$

Dies zeigt $E_\lambda^* = E_\lambda$.

(VI) Um (Res1) zu zeigen, beobachten wir, dass $E_\lambda f = \mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]} \cdot f$ gilt. Damit ist

$$\begin{aligned}E_\lambda\big(E_\mu f\big) = E_\lambda\big(f \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\mu]}\big) &= f \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\mu]} \cdot \mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]}\\ &= f \cdot \mathbb{1}_{(\infty,\,\min\{\lambda,\mu\}]} = E_{\min\{\lambda,\mu\}} f.\end{aligned}$$

(VII) Wir zeigen nun die Eigenschaft (Res3), $\lim_{\lambda\downarrow\mu} E_\lambda = E_\mu$ für alle $\mu \in \mathbb{R}$. Es sei dazu $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lambda_n > \mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \mu$. Wir definieren $f_n := \mathbb{1}_{(\mu,\lambda_n]} \cdot |f|^2$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n = 0 \quad \text{punktweise}$$

sowie

$$|f_n| \leq |f|^2 \quad \mu\text{-fast überall.}$$

Da $|f|^2 \in L^1(\mathbb{R})$ lässt sich der Satz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz B.1.2) anwenden, der

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\mu = 0$$

liefert. Somit erhalten wir

$$\|E_{\lambda_n} f - E_\mu f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(\mu,\lambda_n]}(x)\,|f(x)|^2 \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \,\mathrm{d}\mu(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Dies zeigt $\lim_{n\to\infty} E_{\lambda_n} f = E_\mu f$ in $L^2(\mathbb{R})$.

(VIII) Die Eigenschaft (Res2), $\lim_{\lambda\to-\infty} E_\lambda = \mathfrak{o}$ und $\lim_{\lambda\to+\infty} E_\lambda = \mathrm{id}_{L^2(\mathbb{R})}$ zeigt man ähnlich wie in Punkt (VII), denn es ist

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]} = 1 \quad \text{punktweise}$$

sowie

$$\lim_{\lambda\to-\infty} \mathbb{1}_{(-\infty,\lambda]} = 0 \quad \text{punktweise.}$$

Somit ist $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Proj}(L^2(\mathbb{R}))$ tatsächlich eine Spektralschar. $\square$

Um die Notationen der nachfolgenden Betrachtungen kurz zu halten, treffen wir folgende Definition:

Definition 5.1.5. Ein selbstadjungierter beschränkter Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ heißt *nicht-negativ* (in Zeichen $T \succeq \mathfrak{o}$), falls $\langle Tx|x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt. Ist $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein zweiter Operator, so schreiben wir $T \succeq S$ (bzw. $S \preceq T$), falls $T - S \succeq \mathfrak{o}$ gilt.

Bemerkung 5.1.6. In der Literatur findet man statt Bedingung (Res1) in Definition 5.1.3 oft auch folgende Bedingung:

$$E_\lambda \preceq E_\mu \quad \text{für} \quad \lambda \leq \mu. \tag{Res1'}$$

Man kann leicht zeigen, dass die beiden Bedingen aufgrund der Tatsache, dass E_λ Orthogonalprojektionen sind, äquivalent sind.

Beweis. „(Res1) $\longrightarrow$ (Res1')“: Es sei $\lambda \leq \mu$. Dann ist mit Lemma 5.1.2

$$\langle E_\lambda x | x \rangle = \|E_\lambda x\|^2 = \|E_\lambda E_\mu x\|^2 \leq \|E_\mu x\|^2 = \langle E_\mu x | x \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,.$$

„(Res1) $\longleftarrow$ (Res1')“: Wir halten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \leq \mu$ im Folgenden fest. Nach Voraussetzung gilt $\langle E_\lambda x | x \rangle \leq \langle E_\mu x | x \rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Dies ist, wie aus obiger Rechnung ersichtlich wurde, äquivalent zu:

$$\|E_\lambda x\| \leq \|E_\mu x\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,. \tag{5.2}$$

Hieraus folgt direkt

$$\operatorname{Ker}(E_\mu) \subset \operatorname{Ker}(E_\lambda), \tag{5.3}$$

denn ist $x \in \operatorname{Ker}(E_\mu)$, d. h. $\|E_\mu x\|_\mathcal{H} = \|0\|_\mathcal{H} = 0$, dann ist wegen (5.2) auch $\|E_\lambda x\|_\mathcal{H} = 0$, also $x \in \operatorname{Ker}(E_\lambda)$. Aus (5.3) folgt nun für alle $x \in \mathcal{H}$ die Gültigkeit der Gleichung

$$E_\lambda(E_\mu x - x) = 0,$$

weil wegen der Idempotenz von E_μ für alle $x \in \mathcal{H}$ sofort $E_\mu x - x \in \operatorname{Ker} E_\mu \overset{(5.3)}{\subset} \operatorname{Ker}(E_\lambda)$ gilt. Wir haben also

$$E_\lambda E_\mu = E_\lambda.$$

Somit ist auch

$$E_\lambda = E_\lambda^* = (E_\lambda E_\mu)^* = E_\mu^* E_\lambda^* = E_\mu E_\lambda.$$

Diese zwei Gleichungen haben gezeigt: $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}}$. □

Lemma 5.1.7. *Ist $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar, so gelten die folgenden Aussagen:*

a) Zwei Projektionen aus der Spektralschar kommutieren, d. h. es gilt

$$E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda \quad \textit{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

b) Die Abbildung $\lambda \mapsto \langle E_\lambda x | x \rangle$ ist für beliebiges fixiertes $x \in \mathcal{H}$ monoton wachsend.

Beweis. a) Mit Eigenschaft (Res1) folgt sofort $E_\lambda E_\mu = E_{\min\{\lambda,\mu\}} = E_\mu E_\lambda$.

b) Es sei $\mu < \lambda$. Wir müssen zeigen, dass $\langle E_\mu x | x \rangle \leq \langle E_\lambda x | x \rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$ ist. Auf Grund der Linearität des Skalarprodukt im ersten Argument genügt es zu zeigen, dass $E_\lambda - E_\mu \succeq \mathfrak{o}$ ist. Dies ist nach Bemerkung 5.1.6 aber der Fall. □

Wir sind nun daran interessiert für eine gegebene Spektralschar und ein gegebenes Intervall $(\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ aus den reellen Zahlen einen orthogonalen Projektor zu definieren. Wir setzen dazu

$$E_{(\alpha,\beta]} := E_\beta - E_\alpha. \tag{5.4}$$

Lemma 5.1.8. *Für $(\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ definiert die Festlegung in* (5.4) *in der Tat einen orthogonalen Projektor.*

Beweis. Als Summe zweier stetiger Operatoren ist $E_{(\alpha,\beta]}$ offensichtlich stetig. Wir gliedern den Rest des Beweises in zwei Schritte:

(I) Die Idempotenz von $E_{(\alpha,\beta]}$ zeigt man unter Ausnutzung von Lemma 5.1.7 (a) wie folgt:

$$\begin{aligned} E^2_{(\alpha,\beta]} &= (E_\beta - E_\alpha)^2 \\ &= E^2_\beta - 2E_\beta E_\alpha + E^2_\alpha \\ &= E_\beta - 2E_{\min\{\alpha,\beta\}} + E_\alpha \\ &= E_\beta - 2E_\alpha + E_\alpha \\ &= E_\beta - E_\alpha \\ &= E_{(\alpha,\beta]}. \end{aligned}$$

(II) Es ist klar, dass $E_{(\alpha,\beta]}$ selbstadjungiert ist, denn es gilt

$$E^*_{(\alpha,\beta]} = (E_\beta - E_\alpha)^* = E^*_\beta - E^*_\alpha = E_\beta - E_\alpha = E_{(\alpha,\beta]}.$$ □

Lemma 5.1.9 (Orthogonalitätsrelation)**.** *Sind $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ reelle Zahlen, so ist*

$$E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}E_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} = \mathfrak{o}$$

für beliebige $i, j \in \{2, \ldots, N\}$ mit $i \neq j$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $i < j$ (ansonsten tausche die Bezeichnungen). Folglich ist

$$\lambda_{i-1} < \lambda_i \leq \lambda_{j-1} < \lambda_j.$$

Nach Gleichung (5.4) und Eigenschaft (Res1) aus Definition 5.1.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}E_{(\lambda_{i-1},\lambda_i]} &= \left(E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}\right)\left(E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}\right) \\ &= E_{\lambda_j}E_{\lambda_i} - E_{\lambda_j}E_{\lambda_{i-1}} - E_{\lambda_{j-1}}E_{\lambda_i} + E_{\lambda_{j-1}}E_{\lambda_{i-1}} \\ &= E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}} - E_{\lambda_i} + E_{\lambda_{i-1}} \\ &= \mathfrak{o}. \end{aligned}$$

□

Insbesondere liefert die Orthogonalitätsrelation 5.1.9 zusammen mit dem verallgemeinerte Satz des Pythagoras C.3.2 für beliebiges $x \in \mathcal{H}$ folgende überaus wichtige Gleichung:

$$\left\|E_{(\lambda_1,\lambda_N]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\sum_{j=1}^{N} E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=1}^{N}\left\|E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{5.5}$$

Wir führen nun den Begriff der „beschränkten Variation“ für Funktionen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ein, der den aus einführenden Analysis Vorlesungen bekannten Begriff (welcher nur für Funktionen $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ erklärt war) erweitert.

Definition 5.1.10 (vgl. Punkt 6.2.4 in [Wei15])**.** Für eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definieren wir ihre *Variationsfunktion* $V_g\colon \mathbb{R} \to [0, \infty]$ durch

$$V_g(\beta) := \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\beta)} \sum_{j=2}^{N(Z)} \left|g\left(\lambda_j^{(Z)}\right) - g\left(\lambda_{j-1}^{(Z)}\right)\right|,$$

wobei

$$\mathcal{Z}(\beta) := \left\{ Z = \left(\lambda_1^{(Z)}, \dots, \lambda_{N(Z)}^{(Z)}\right) \,\middle|\, \lambda_1^{(Z)} < \lambda_2^{(Z)} < \dots < \lambda_{N(Z)}^{(Z)} = \beta \right\}$$

die Menge alle Partitionen Z des Intervalls $(-\infty, \beta]$ ist. Die Funktion V_g ist offensichtlich nicht-fallend.
Existiert eine positive Konstante $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|V_g(\beta)| \leq C$ für alle $\beta \in \mathbb{R}$ (d. h. V_g ist beschränkt), so nennt man g von *beschränkter Variation*.

Proposition 5.1.11 (vgl. Proposition 8.3.3 in [Hel10])**.** *Ist* $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}} \subset \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ *eine Spektralschar, dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} g_{x,y} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto \langle E_\lambda x | y \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ *von beschränkter Variation. Schärfer gilt:*

$$V_{g_{x,y}}(\beta) \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle } \beta \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Es seien $\beta \in \mathbb{R}$ und $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt und $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N \leq \beta$ die zu einer beliebigen Partition des Intervalls $(-\infty, \beta]$ gehörenden Partitionspunkte. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{N} \left| \left\langle E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} x \,\middle|\, y \right\rangle \right| &= \sum_{j=2}^{N} \left| \left\langle E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} x \,\middle|\, E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} y \right\rangle \right| && (5.6) \\ &\leq \sum_{j=2}^{N} \left\| E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} x \right\| \cdot \left\| E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} y \right\| && (5.7) \\ &\leq \left(\sum_{j=2}^{N} \left\| E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} x \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=2}^{N} \left\| E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]} y \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && (5.8) \\ &= \left(\left\| E_{(\lambda_1,\lambda_N]} x \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\left\| E_{(\lambda_1,\lambda_N]} y \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && (5.9) \\ &\leq \|x\| \cdot \|y\|. && (5.10) \end{aligned}$$

Bevor wir fortfahren, kommentieren wir die einzelnen Umformungsschritte kurz:

(5.6): Wir haben hier die Idempotenz und Selbstadjungiertheit von $E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}$ benutzt.

(5.7): Dies ist die Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1.

(5.8): Dies ist die Hölder-Ungleichung für endliche Summen (Korollar C.1.6).

(5.9): Dies ist Gleichung (5.5).

(5.10): Wir haben an dieser Stelle verwenden, dass für die Operatornorm von $E_{(\lambda_1,\lambda_N]}$ die Abschätzung $\|E_{(\lambda_1,\lambda_N]}\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ gilt (siehe Lemma 5.1.2).

Die Abschätzungen (5.6) – (5.10) haben gezeigt, dass für gegebene $x, y \in \mathcal{H}$ die Abschätzung

$$V_{g_{x,y}}(\beta) = \sup_{Z \in \mathcal{Z}(\beta)} \sum_{j=2}^{N(Z)} \left| \left\langle E_{\left(\lambda_{j-1}^{(Z)},\lambda_j^{(Z)}\right]} x \,\middle|\, y \right\rangle \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

gilt. Mit anderen Worten: $V_{g_{x,y}}$ ist beschränkt. Also ist $g_{x,y}$ von beschränkter Variation. □

Korollar 5.1.12 (vgl. S. 309 in [Yos95])**.** *Für alle $\mu \in \mathbb{R}$ existieren die Operatoren*

$$E_{\mu^+} := \lim_{\lambda \downarrow \mu} E_\lambda, \qquad E_{\mu^-} := \lim_{\lambda \uparrow \mu} E_\mu.$$

Man beachte jedoch, dass i. A. $E_\mu \neq \lim_{\lambda \uparrow \mu} E_\mu$ ist.

Beweis. Wir übernehmen den Beweis aus [Hel10, S. 66]: Wir haben im letzten Beweis Gleichung (5.5) mittels Lemma 5.1.2 verschärft zu

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \left\|E_{(\lambda_1,\lambda_N]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\sum_{j=1}^{N} E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{j=1}^{N} \left\|E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Daraus folgt, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\mu_0 < \mu$ existiert, sodass für alle $\lambda', \lambda'' \in [\mu_0, \mu)$ mit $\lambda' < \lambda''$ gilt:

$$\left\|E_{(\lambda',\lambda'']}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varepsilon.$$

Man sieht leicht, dass daher $E_{\mu-\frac{1}{n}}$ eine Cauchyfolge ist, die konvergiert und deren Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge ist, die gegen μ konvergiert. Die Existenz des zweiten Grenzwertes lässt sich analog zeigen. $\square$

5.2 Exkurs: Riemann-Stieltjes-Integrale

In Proposition 5.1.11 haben wir gesehen, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} g_{x,y} \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda &\longmapsto \langle E_\lambda x | y \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathcal{H}$ von beschränkter Variation ist. Mit ihrer Hilfe wollen wir für stetige komplexwertige Funktionen $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x | y \rangle_{\mathcal{H}}$$

betrachten, die im späteren Verlauf der Arbeit eine Rolle spielen werden. Das hierbei vorkommende Stieltjes-Integral wollen wir in diesem kurzen Exkurs erklären. Wir verzichten auf Beweise und folgen der Darstellung in [Kv13, Abschnitt 16.6].

Wir haben für den Spezialfall $g_{x,y}$ via Korollar 5.1.12 bereits gesehen: Funktionen $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von beschränkter Variation haben eine bemerkenswerte Eigenschaft: In jedem Punkt λ besitzen sie einen rechts- und linksseitigen Grenzwert $g(\lambda^+)$ und $g(\lambda^-)$. Desweiteren sind sie in höchstens abzählbar vielen Punkten unstetig.

Ist g von beschränkter Variation über $[\alpha, \beta]$, so wollen wir einen Inhaltsbegriff für Teilintervalle $[\alpha', \beta'] \subset [\alpha, \beta]$ durch $g(\beta') - g(\alpha')$ erklären. Somit kann man für stetige Funktionen $f \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ die Riemann-Summen

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Big(g(\lambda_j) - g(\lambda_{j-1})\Big)$$

betrachten, wobei wir

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta$$

und $\xi_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ für $j = 1, \dots, n$ gewählt haben. Betrachten wir den Grenzwert dieser Riemann-Summen für $n \to \infty$ und wählen $\max_{j=1,\dots,n} |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, so existiert der Grenzwert dieser Riemann-Summen. Wir wollen ihn mit

$$\int_{\alpha}^{\beta} f \, \mathrm{d}g \tag{5.11}$$

bezeichnen. Den Beweis hierfür kann man analog wie im abstrakteren Fall in Theorem 5.5.1 führen. Für Funktionen g von beschränkter Variation erklärt man uneigentliche Integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f \, \mathrm{d}g$ wie üblich durch den Grenzübergang $\alpha \to -\infty$ und $\beta \to +\infty$ in (5.11).

Die Funktion f in (5.11) nennen wir *Integrand* und die Funktion g *Integrator*.

Das gewöhnliche Riemann-Integral ist offensichtlich ein Spezialfall der Riemann-Stieltjes-Integrale: Man wählt als Integrator/Gewichtsfunktion $f \equiv \mathrm{id}$.

5.3 Spektralmaße

Spektralscharen haben, wie wir bald sehen werden, die Eigenschaft einen leicht zugänglichen operatorwertigen Integralbegriff zuzulassen. Um den Spektralsatz formal zu beweisen, bietet es sich jedoch viel mehr an mit Spektralmaßen zu arbeiten. Diese führen wir nun ein.

Definition 5.3.1. Sei $(\Omega, \mathscr{A})$ ein Messraum und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ein *Spektralmaß* für das Tripel $(\Omega, \mathscr{A}, \mathcal{H})$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} E\colon \mathscr{A} &\longrightarrow \mathrm{Proj}(\mathcal{H}) \\ A &\longmapsto E_A, \end{aligned}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(SMaß1) $E_\Omega = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$,

(SMaß2) Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkte Mengen, dann ist E *stark* σ-

additiv[8], d. h. es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{A_n}(x) = E_{\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n}(x)$$

für alle $x \in \mathcal{H}$.

Das Quadrupel $(\Omega, \mathscr{A}, \mathcal{H}, E)$ nennt man auch *Spektralmaßraum*.

Da die Abbildung E in den Raum der Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{H}$ abbildet, nennt man E auch *projektorwertig*.

Es ist leicht zu zeigen, dass die folgenden Eigenschaften für ein Spektralmaß E gelten:

Lemma 5.3.2. *(a)* $E(\varnothing) = \mathsf{0}$.

(b) Sind $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathscr{A}$ *paarweise disjunkte Mengen, dann ist*

$$E_{A_1} + E_{A_2} + \ldots + E_{A_N} = E_{(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N)}.$$

Beweis. (a) Setze $A_n := \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt mit Eigenschaft (SMaß2) aus Definition 5.3.1.

(b) Setze $A_n := \varnothing$ für alle $n > N$. □

Für die nachfolgende Proposition verweisen wir auf Abschnitt B.2 des Anhangs, wo wir die Theorie der komplexen Maße und der Variationsnorm bereitgestellt haben.

Proposition 5.3.3. *Für alle* $x, y \in \mathcal{H}$ *ist*

$$\begin{aligned} h_{x,y} \colon \mathscr{A} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ A &\longmapsto \langle E_A x | y \rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

ein komplexes Maß mit $\|h_{x,y}\|_{\mathrm{Var}} \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}}$.

[8] Das Wort „stark“ deutet bereits an, wie man die Reihe zu verstehen hat: Im Sinne der starken Konvergenz.

Beweis. Wir zeigen die σ-Additivität von $E_{x,y}$: Es seinen $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkte Mengen. Dann ist

$$h_{x,y}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \left\langle E_{\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n}\, x \,\middle|\, y \right\rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} E_{A_n}\, x \,\middle|\, y \right\rangle$$
$$\overset{(\star)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \langle E_{A_n}\, x \,|\, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} h_{x,y}(A_n).$$

Man beachte, dass die Umformung $(\star)$ für beliebiges festes $y \in \mathcal{H}$ gültig ist (vgl. z. B. [Hal57, S. 18]). Somit konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} h_{x,y}(A_n)$, und zwar gegen $h_{x,y}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right)$.

Um die Ungleichung zu zeigen, orientieren wir uns an [Kal14, S. 35]: Wiederum seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ paarweise disjunkte Mengen. Dann ist auch $A := \biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$. Wir wählen die komplexen Zahlen $\alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_n| = 1$ so, dass $|h_{x,y}(A_n)| = \alpha_n h_{x,y}(A_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir beobachten, dass $\mathrm{Bi}\,(E_{A_m}) \perp \mathrm{Bi}\,(E_{A_n})$ für $m \neq n$ ist. Somit gilt für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ unter Zuhilfenahme der Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} |h_{x,y}(A_n)| &= \sum_{n=1}^{N} \left\langle E_{A_n}(\alpha_n x) \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \left\langle E_{A_n}(\alpha_n x) \,\middle|\, E_{A_n} y \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle \sum_{n=1}^{N} E_{A_n}(\alpha_n x) \,\middle|\, \sum_{n=1}^{N} E_{A_n} y \right\rangle_{\mathcal{H}} \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^{N} E_{A_n}(\alpha_n x) \right\|_{\mathcal{H}} \left\| \sum_{n=1}^{N} E_{A_n} y \right\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Da die $E_{A_n}(\alpha_n x)$ paarweise orthogonal sind, erhalten wir mit Satz C.3.2:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} E_{A_n}(\alpha_n x) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{N} \|E_{A_n}(\alpha_n x)\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=1}^{N} \|E_{A_n} x\|_{\mathcal{H}}^2$$
$$= \left\| \sum_{n=1}^{N} E_{A_n} x \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| E_{\biguplus_{n=1}^{N} A_n} x \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|E_A x\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Genauso zeigt man

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} E_{A_n} y \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|E_A y\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_{x,y}(A_n)| \leq \|E_A x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|E_A y\|_{\mathcal{H}}.$$

Somit gilt für jede beliebige Menge $A \in \mathscr{A}$:

$$|h_{x,y}|(A) \leq \|E_A x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|E_A y\|_{\mathcal{H}}.$$

Insbesondere erhalten wir mit (SMaß1)

$$\|h_{x,y}\|_{\mathrm{Var}} = |h_{x,y}|(\Omega) \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \cdot \|y\|_{\mathcal{H}}. \qquad \square$$

5.4 Zusammenhang von Spektralscharen und Spektralmaßen

Zwischen Spektralscharen und Spektralmaßen gibt es einen einfachen Zusammenhang. Er gestattet es, operatorwertige Integrale nur für Spektralscharen zu definieren und die Definition dieser Integrale für Spektralmaße mittels des nachfolgenden Theorems auf die Definition für Spektralscharen zurückzuführen.

Es sei $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ eine Spektralschar. Analog wie wir in (5.4) die Orthogonalprojektion $E_{(\alpha,\beta]} = E_b - E_a$ definiert haben, definieren wir nun E_I für beliebige Intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $a \leq b$ und $c < d$. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} E_{[a,b]} &:= E_b - E_{a^-}, \\ E_{[a,b)} &:= E_{b^-} - E_{a^-}, \\ E_{(c,d)} &:= E_{d^-} - E_c, \end{aligned}$$

mit der Konvention $E_{-\infty} = 0$ und $E_{+\infty} = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$. Insbesondere erhalten wir

$$E_{\{\lambda\}} = E_\lambda - E_{\lambda^-}$$

sowie

$$E_\lambda = E_{(-\infty,\lambda]} \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit (Res1) und Korollar 5.1.12 lässt sich zeigen, dass alle obigen E_I tatsächlich Orthogonalprojektionen sind.

Auf diese Weise lässt sich E_I sukzessive für alle $I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ definieren.

Theorem 5.4.1. *Ist E ein Spektralmaß auf der Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, dann definiert*

$$E_\lambda := E_{(-\infty,\lambda]} \tag{5.12}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Spektralschar.
Ist andererseits $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ eine Spektralschar, so gibt es ein eindeutiges Spektralmaß E auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass wiederum (5.12) *für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.*

Beweis. Siehe z. B. [Sch12, Theorem 4.6]. □

5.5 Integration bezüglich einer Spektralschar

In diesem Abschnitt wollen wir den seit längerem angesprochen operatorwertigen Integralbegriff mit Spektralscharen definieren.

Theorem 5.5.1 (vgl. Proposition 2 auf Seite 310 in [Yos95])**.** *Für eine stetige komplexwertige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, eine Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ und $x \in \mathcal{H}$ sei*

$$\int_{(\alpha,\beta]} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$$

für $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$ *definiert als starker Limes der Riemann-Summen*

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x), \tag{5.13}$$

wobei

$$\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta$$

und $\xi_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ *für* $j = 1, \ldots, n$, *sowie* $\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j - \lambda_{j-1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *gewählt war.*
Der Limes ist von der Wahl der Folge der Partitionspunkte λ_j *mit* $\max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j - \lambda_{j-1}| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ *und der Zwischenpunkte* ξ_j *unabhängig.*

Beweis. Die stetige Funktion f ist auf jedem kompakten Intervall $[\alpha, \beta]$ gleichmäßig stetig. Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, sodass

$$|f(x) - f(x')| \le \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |x - x'| \le \delta.$$

Betrachte nun zwei Zerlegungen $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\mu}$ des Intervalls $[\alpha, \beta]$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}: &\quad \alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta, &\qquad \max_{j=1,\ldots,n} |\lambda_j - \lambda_{j-1}| \le \delta, \\ \boldsymbol{\mu}: &\quad \alpha = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_m = \beta, &\qquad \max_{j=1,\ldots,m} |\mu_j - \mu_{j-1}| \le \delta. \end{aligned}$$

Wir wählen die Zwischenstellen

$$\begin{aligned} \xi_j^{(\boldsymbol{\lambda})} &\in (\lambda_{j-1}, \lambda_j] \quad \text{für } j = 1, \ldots, n, \\ \xi_j^{(\boldsymbol{\mu})} &\in (\mu_{j-1}, \mu_j] \quad \text{für } j = 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\boldsymbol{\nu}: \quad \alpha = \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_p = \beta, \qquad p \le n + m,$$

die *Superposition* der zwei Partitionen, d. h. $(\nu_0, \ldots, \nu_p)$ ist eine Auflistung von $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_n, \mu_0, \ldots, \mu_m\}$ der Größe nach. Entsprechend sei $\left(\xi_1^{(\boldsymbol{\nu})}, \ldots, \xi_p^{(\boldsymbol{\nu})}\right)$ eine Auflistung von $\left\{\xi_1^{(\boldsymbol{\lambda})}, \ldots, \xi_n^{(\boldsymbol{\lambda})}, \xi_1^{(\boldsymbol{\mu})}, \ldots, \xi_m^{(\boldsymbol{\mu})}\right\}$. Wegen $\left|\xi_{\ell+1}^{(\boldsymbol{\nu})} - \nu_\ell\right| \le \delta$ und $\left|\nu_\ell - \xi_\ell^{(\boldsymbol{\nu})}\right| \le \delta$

erhalten wir

$$D(x) := \sum_{j=1}^{n} f\left(\xi_j^{(\boldsymbol{\lambda})}\right) E_{(\lambda_{j-1},\lambda_j]}(x) - \sum_{j=1}^{m} f\left(\xi_j^{(\boldsymbol{\mu})}\right) E_{(\mu_{j-1},\mu_j]}(x) = \sum_{\ell=1}^{p} \varepsilon_\ell E_{(\nu_{\ell-1},\nu_\ell]}(x),$$

wobei

$$|\varepsilon_\ell| \leq \left|f\left(\xi_{\ell+1}^{(\boldsymbol{\nu})}\right) - f(\nu_\ell)\right| + \left|f(\nu_\ell) - f\left(\xi_l^{(\boldsymbol{\nu})}\right)\right| \leq 2\varepsilon \quad \text{für alle } \ell = 1, \dots, p. \tag{5.14}$$

Mit der Dreiecksungleichung für Normen erhalten wir

$$\begin{aligned} \|D(x)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\|\sum_{\ell=1}^{p} \varepsilon_\ell E_{(\nu_{\ell-1},\nu_\ell]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{p} |\varepsilon_\ell|^2 \left\|E_{(\nu_{\ell-1},\nu_\ell]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \overset{(5.14)}{\leq} 4\varepsilon^2 \sum_{\ell=1}^{p} \left\|E_{(\nu_{\ell-1},\nu_\ell]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 . \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit der Abschätzung (5.5) und Lemma 5.1.2 aus der obigen Rechnung

$$\|D(x)\|_{\mathcal{H}}^2 = 4\varepsilon^2 \left\|E_{(\alpha,\beta]}(x)\right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 4\varepsilon^2 \|x\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Da $\varepsilon > 0$ zu Beginn beliebig gewählt war, schließen wir, dass der Grenzwert $\int_{(\alpha,\beta]} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ unabhängig von der Wahl der Partitionspunkte des Intervalls $(\alpha, \beta]$ ist, solange deren maximaler Abstand gegen 0 strebt, und unabhängig von der Wahl der Zwischenstellen ist. Insbesondere haben wir auch die Existenz des Grenzwertes gezeigt. □

Im Weiteren werden wir für $\int_{(\alpha,\beta]} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ auch die Notation $\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ verwenden.

Wir fassen nun $\displaystyle\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ als Operator auf, vermöge

$$\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda \colon \mathcal{H} \ni x \longmapsto \left(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right)(x) := \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x) \in \mathcal{H}\,.$$

Durch direktes Nachrechnen erhält man folgende elementare Eigenschaften dieses neuen Integralbegriffs (siehe [DR12, Seite 205 f.]):

Proposition 5.5.2 (Eigenschaften operatorwertiger Integrale)**.** *Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetige komplexwertige Funktionen. Dann gilt:*

(a) Die Abbildung $f \longmapsto \int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ *ist linear.*

(b) $\left(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right) \circ \left(\int_a^b g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right) = \left(\int_a^b f(\lambda)g(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right)$

(c) $\left(\int_a^b f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda\right)^* = \int_a^b \overline{f(\lambda)}\,\mathrm{d}E_\lambda$

Korollar 5.5.3. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 5.5.1 können wir*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$$

als starken Limes

$$\lim_{\substack{\beta\uparrow+\infty\\ \alpha\downarrow-\infty}} \int_\alpha^\beta f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x),$$

definieren, sofern der Grenzwert existiert.

Statt $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ wollen wir auch $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ schreiben.

Theorem 5.5.1 legt nahe, dass auch durch $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ ein operatorwertiges Stieltjes-Integral gegeben ist. D. h. der Ausdruck $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ könnte uns einen Operator liefern, der jedem $x \in \mathcal{H}$ ein Element $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x) \in \mathcal{H}$ zugeordnet. Dieser Operator könnte dann bzgl. der Operatornorm durch die Riemannsummen in (5.13) und entsprechende Grenzübergänge approximiert werden. Allerdings tritt das Problem auf, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ nicht existieren könnte. Daher wollen wir im folgenden Satz und Theorem die gerade erklärte Idee präzisieren und insbesondere den Definitionsbereich des Operators passend bestimmen, sodass Konvergenz auftritt.

Im Folgenden bezeichne dazu $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ immer eine Spektralschar.

Satz 5.5.4 (vgl. Theorem 1 aus Seite 310 in [Yos95])**.** *Für $x \in \mathcal{H}$ und eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Der Grenzwert $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ *existiert.*

(b) Es gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\|E_\lambda x\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$.

(c) Die Zuordnung $y \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle E_\lambda y|x\rangle_{\mathcal{H}}$ *definiert ein beschränktes lineares Funktional.*

Beweis. Siehe [Yos95]. □

Dieser Satz hilft uns folgendes Theorem zu formulieren:

Theorem 5.5.5 (vgl. Theorem 2 auf Seite 311 in [Yos95])**.** *Es sei nun* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine stetige* reellwertige *Funktion. Dann ist ein selbstadjungierter Operator* T_f *durch*

$$\mathrm{Dom}(T_f) := \left\{ x \in \mathcal{H} \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2\,\mathrm{d}\|E_\lambda x\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty \right\}$$

und

$$\langle T_f x|y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}\langle E_\lambda x|y\rangle_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathrm{Dom}(T_f),\, y \in \mathcal{H} \tag{5.15}$$

gegeben. Der Untervektorraum $\mathrm{Dom}(T_f)$ *liegt sogar dicht in* $\mathcal{H}$*. Weiter gilt*

$$T_f E_\lambda \supset E_\lambda T_f \quad \textit{für beliebiges } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Siehe [Yos95]. □

Beispiel 5.5.6. Für $f(\lambda) \equiv 1$ ist $T_f = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Korollar 5.5.7 (vgl. Corollary 1 auf Seite 312 in [Yos95])**.** *Für den Spezialfall* $f(\lambda) = \lambda$ *erhalten wir aus Theorem 5.5.5 einen selbstadjungierten Operator* $T := T_f$ *mit*

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\,\mathrm{d}\langle E_\lambda x|y\rangle_{\mathcal{H}} \tag{5.16}$$

für alle $x \in \mathrm{Dom}(T)$ *und alle* $y \in \mathcal{H}$.

Den Operator aus Korollar 5.5.7 wollen wir in Zukunft symbolisch als

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

schreiben. Wir nennen $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ *Spektralauflösung* (engl. spectral resolution), *Spektralzerlegung* oder auch *Spektraldarstellung* (engl. spectral representation) des selbstadjungierten Operators T. Dieser Symbolismus lässt wegen Gleichung (5.16) die formale Symbolmanipulation

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda(x) \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x | y \rangle_{\mathcal{H}} \tag{5.17}$$

für $x \in \mathrm{Dom}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda\right)$ und $y \in \mathcal{H}$ zu.

Korollar 5.5.8 (vgl. Corollary 2 auf Seite 312 f. in [Yos95])**.** *Für* $T = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda$ *gegeben durch* (5.15) *gilt*

$$\|Tx\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, \mathrm{d}\|E_\lambda x\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \textit{für alle } x \in \mathrm{Dom}(T).$$

Für den Spezialfall eines beschränkten selbstadjungierten Operators T erhält man

$$\langle T^n x | y \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)^n \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x | y \rangle_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle } x, y \in \mathcal{H} \textit{ und alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Siehe [Yos95, Seite 313]. □

Beispiel 5.5.9 (vgl. Seite 313 in [Yos95])**.** Wir betrachten in diesem Beispiel die Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}} \subset \mathrm{Proj}(L^2(\mathbb{R}))$ aus Beispiel 5.1.4, die für $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiert war durch

$$\Big(E_\lambda f\Big)(t) := \begin{cases} f(t), & \text{für } t \leq \lambda \\ 0, & \text{für } t > \lambda. \end{cases}$$

Nach Proposition 5.1.11 ist die Funktion

$$\lambda \longmapsto \langle E_\lambda u | w \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\lambda} u(t) \cdot \overline{w(t)} \, \mathrm{d}t$$

für beliebige $u, w \in L^2(\mathbb{R})$ von beschränkter Variation. Die Ausführungen des Exkurses in Abschnitt 5.2 erlauben uns daher Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\mathrm{d}\langle E_\lambda u | w\rangle_{L^2} \tag{5.18}$$

zu studieren. Mit der Vereinbarung, dass der Index λ am Differential d_λ die Variable der Integration kennzeichnet, lässt sich das Integral in (5.18) gemäß der Definition der Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ schreiben als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\mathrm{d}_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} u(t) \cdot \overline{w(t)} \,\mathrm{d}t \right\}.$$

Da $u(t)\,\overline{w(t)}$ absolut integrierbar und messbar ist, ist $\lambda \longmapsto \int_{-\infty}^{\lambda} u(t)\,\overline{w(t)}\,\mathrm{d}t$ nach Grenzübergang im verallgemeinerten Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung [Wer05, Satz A.1.10] eine absolut stetige Abbildung, deren Ableitung fast überall existiert und mit $u(t)\,\overline{w(t)}$ fast überall übereinstimmt. Somit ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \,\mathrm{d}\|E_\lambda u\|_{L^2}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \,\mathrm{d}_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right\} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right\} \right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \, |u(\lambda)|^2 \,\mathrm{d}\lambda \\
&= \|M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} u\|_{L^2}^2,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

wobei $M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}$ der Multiplikationsoperator M_a aus den Beispielen 3.1.5 und 3.5.6 im Spezialfall $a = \mathrm{id}_\mathbb{R}$ ist. Wir schließen daher

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}}) &= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \|M_{\mathrm{id}_\mathbb{R}} u\|_{L^2}^2 < \infty \right\} \\
&= \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|^2 \,\mathrm{d}\|E_\lambda u\|_{L^2}^2 < \infty \right\} = \mathrm{Dom}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda \right) := D.
\end{aligned}$$

Analog wie in (5.19) zeigt man nun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\mathrm{d}\langle E_\lambda u | w\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \,\mathrm{d}_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} u(t) \cdot \overline{w(t)} \,\mathrm{d}t \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} u(t) \cdot \overline{w(t)} \, \mathrm{d}t \right\} \right) \mathrm{d}\lambda \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, u(\lambda) \cdot \overline{w(\lambda)} \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \langle M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} u | w \rangle_{L^2}
\end{aligned}$$

für $u \in D$ und $w \in L^2(\mathbb{R})$. Zusammen mit (5.17) haben wir daher

$$\left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda(u) \middle| w \right\rangle_{L^2} = \langle M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} u | w \rangle_{L^2}$$

für alle $u \in D$ und alle $w \in L^2(\mathbb{R})$. Für fixiertes $u \in D$ steht also

$$\Delta(u) := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda - M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} \right)(u)$$

orthogonal auf allen $w \in L^2(\mathbb{R})$. Daher muss $\Delta(u) = 0$ sein. Da $u \in D$ beliebig gewählt war, ist $\Delta \equiv \mathbf{0}$. Wir haben also die Spektraldarstellung des Multiplikationsoperators $M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}$ gefunden: Es ist

$$M_{\mathrm{id}_{\mathbb{R}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda.$$

Dieses Beispiel soll uns als Motivation dienen, zusammenzufassen, was wir in Abschnitt 5.5 bisher erreicht haben: Korollar 5.5.7 hat uns gezeigt, wie wir zu jeder Spektralschar einen korrespondierenden selbstadjungierten Operator erhalten. Dies haben wir im gerade abgeschlossenen Beispiel illustriert und dabei einen Multiplikationsoperator erhalten.
Der im folgenden Kapitel formulierte Spektralsatz macht eine Aussage über die Umkehrrichtung: Ist es möglich, dass sich jeder selbstadjungierte Operator durch eine solche Integraldarstellung schreiben lässt? Wir werden sehen, dass diese Frage positiv zu beantworten ist.

Zum Abschluss des Kapitels ist anzumerken, dass wir $T = \int_\alpha^\beta \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ im Prinzip nicht nur für stetige Funktionen definiert haben. Mit der bisher geleisteten Vorarbeit ist es problemlos möglich die zulässigen Funktionen auf den *Raum der*

Treppenfunktionen

$$\mathscr{T}([\alpha,\beta];\mathbb{C}) := \{f\colon [\alpha,\beta]\to\mathbb{C} \mid f \text{ ist Treppenfunktion}\}$$

auszuweiten. Es habe $f \in \mathscr{T}([\alpha,\beta];\mathbb{C})$ die Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot \mathbb{1}_{[t_{j-1},t_j)},$$

mit passenden $f_1,\ldots,f_n \in \mathbb{C}$, dann setzen wir

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x) := \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x). \tag{5.20}$$

Die Integrale $\int_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda(x)$ sind für alle $j = 1,\ldots,n$ erklärt, da $\lambda \mapsto f_j(\lambda) = f_j \in \mathbb{C}$ als konstante Funktion stetig ist. Es ist sehr leicht zu zeigen, dass die Definition (5.20) unabhängig von der Darstellung von f ist.
Sei nun f eine beschränkte messbare Funktion. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{T}([\alpha,\beta];\mathbb{C})$ von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert (siehe z. B. [Wer05, Satz A.1.5(e)]). Wir setzen

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda = \lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f_n(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda.$$

Wie zuvor kann somit auch $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda$ für eine beschränkte messbare Funktion definiert werden.

Ebenso können wir unsere Definitionen ausweiten, um zu erklären wie wir die Schreibweise $T = \int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}E$ für eine beschränkte messbare Funktion f und ein Spektralmaß E verstehen wollen: Wir meinen damit

$$\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_\alpha^\beta f\,\mathrm{d}h_{x,y} \quad \text{für alle } x,y\in\mathcal{H},$$

wobei $h_{x,y}(A) := \langle E_A x|y\rangle_{\mathcal{H}}$ für $A \in \mathcal{B}([\alpha,\beta])$ wie in Proposition 5.3.3 sei. Die Bemerkungen in Abschnitt 5.4 sicher, dass dies ein äquivalenter Zugang zum operatorwertigen Integral ist.

KAPITEL 6

Der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren

Wir haben in Kapitel 5 gesehen, dass $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$ für jede Spektralschar $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ einen selbstadjungierten Operator darstellt.
Der Spektralsatz sagt nun, dass jeder selbstadjungierter Operator diese Integraldarstellung besitzt und die Spektralschar in dieser Darstellung eindeutig bestimmt ist.

Theorem 6.0.1 (Spektralsatz). *Jeder selbstadjungierte Operator T in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ lässt eine eindeutige Spektralzerlegung der folgenden Form zu:*

$$\boxed{\begin{aligned} T &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda, \\ \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x|y\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}}$$

Ziel des Kapitels wird es also sein, zu untersuchen, wie man die obige Integraldarstellung (also die Spektralschar) für einen beliebigen Operator findet. Genauer werden wir Existenz und Eindeutigkeit der Spektralschar zeigen.

Das Kapitel ist dabei wie folgt gegliedert. Der angekündigte Beweis findet sich Abschnitt 6.2.

Inhalt des Kapitels

6.1. Verwandte Aussagen und Einordnung des Spektralsatzes . . . 74

6.2. Der Beweis des Spektralsatzes in sechs Schritten . . . 77

Schritt 1: Reduktion auf den beschränkten Fall . . . 77

Schritt 2: Analyse des Spektrums von $P(T)$ . . . 78

Schritt 3: Konstruktion des stetigen Funktionalkalküls . . . 82

Schritt 4: Konstruktion des messbaren Funktionalkalküls . . . 90

Schritt 5: Existenz und Eindeutigkeit des Spektralmaßes . . . 98

Schritt 6: Ausweitung auf beschränkte normale Operatoren . . 101

6.3. Multiplikationsversion des Spektralsatzes . . . 102

Bevor wir den Spektralsatz beweisen, wollen wir ihn in Relation der aus einführenden Funktionalanalysis Veranstaltungen bekannten Spektralsätze einordnen.

6.1 Verwandte Aussagen und Einordnung des Spektralsatzes

Der Mathematiker Paul R. Halmos hielt in [Hal63] fest:

> „It is unfortunate ... that even the bare statement of the spectral theorem is widely regarded as somewhat mysterious and deep, and probably inaccessible to the nonspecialist.“

Um dem vorzubeugen, wiederholen wir zunächst bisher bekannte Versionen des Spektralsatzes. Wir orientieren uns dabei an [Wer05, S. 265 – 267 und S. 313 f.].

Endlich-dimensionaler Spektralsatz. Wir betrachten zunächst den endlich-dimensionalen Fall. Ist der komplexe Hilbertraum $\mathcal{H}$ endlich-dimensional, so gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass $\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n$ ist.
Weiter sei $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter[9] Endomorphismus. Wir bezeichnen mit T ebenfalls die zum Endomorphismus korrespondierende $(n \times n)$-Matrix.
Der Spektralsatz besagt, dass eine Orthonormalbasis $(v_1, \ldots, v_n)$ von $\mathcal{H}$ bestehend aus Eigenvektoren von T existiert. Mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bezeichnen wir die zugehörigen paarweise verschiedenen Eigenwerte von T. Als Folge dessen ist T *unitär diagonalisierbar*, d. h. es existiert eine unitäre $(n \times n)$-Matrix U mit

$$U^*TU = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Es ist bekannt, dass dann

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{k=1}^{n} \operatorname{Eig}(\lambda_k, T)$$

eine direkte orthogonale Summe des Hilbertraums $\mathcal{H}$ darstellt (siehe z. B. [Lüt11], Lemma 6.2.11 oder Korollar 7.6.6). Bezeichnen wir nun mit E_{λ_k} die Orthogonalprojektion auf $\operatorname{Eig}(\lambda_k, T)$ für $k = 1, \ldots, n$, dann erhalten wir die sogenannte *Spektraldarstellung* von T durch

$$T = \sum_{k=1}^{N} \lambda_j E_{\lambda_k}. \tag{6.1}$$

Spektralsatz für kompakte Operatoren. Nun sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum beliebiger (nicht notwendigerweise endlicher) Dimension und T ein kompakter selbstadjungierter[10] Operator. Dann existiert ein Orthonormalsystem $(e_k)_{k\in I}$ (wobei $I \subset \mathbb{N}$ ist) und eine (evtl. abbrechende) Nullfolge $(\lambda_k)_{k\in I} \subset \mathbb{C}^\times$, sodass

- für alle $k \in I$ der Vektor e_k Eigenvektor zum Eigenwert λ_k ist, d. h. es gilt $Te_k = \lambda_k e_k$ für alle $k \in I$,

[9] Allgemeiner darf der Endomorphismus sogar normal sein.
[10] Auch diese Aussage ist noch für normale Operatoren gültig.

- $\mathcal{H} = \operatorname{Ker}(T) \oplus \overline{\operatorname{span}\{e_k | k \in I\}}$ gilt[11],
- $Tx = \sum_{k \in I} \lambda_k \langle x | e_k \rangle e_k$ für alle $x \in \mathcal{H}$ ist.

Wir haben dabei die Folge $(\lambda_k)_{k \in I}$ als Wiederholung der paarweise verschiedenen Eigenwerte μ_j entsprechend ihrer geometrischen Vielfachheit $d_j := \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Eig}(\mu_j, T)$ aufgefasst:

$$(\lambda_k) = (\underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{\mu_2, \ldots, \mu_2}_{d_2\text{-mal}}, \underbrace{\mu_3, \ldots, \mu_3}_{d_3\text{-mal}}, \ldots \ldots).$$

Definiert man in diesem Fall

$$E_k(x) := \sum_{j=1}^{d_k} \left\langle x | e_j^{(k)} \right\rangle e_j^{(k)},$$

wobei $\left\{ e_1^{(k)}, \ldots, e_{d_k}^{(k)} \right\}$ eine Orthonormalbasis des Eigenraums $\operatorname{Ker}(\mu_k \operatorname{id} - T)$ ist, dann liefert der Spektralsatz die Darstellung

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,.$$

Man kann zeigen (siehe z. B. [Wer05, Korollar VI.3.3]), dass die Reihe nicht nur punktweise, sondern auch in der Operatornorm konvergiert, d. h. wir erhalten die Spektraldarstellung

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k E_k. \tag{6.2}$$

Dies verallgemeinert Formel (6.1).

Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren. Auf analoge Weise stellt die Spektraldarstellung

$$T = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

eine Verallgemeinerung von (6.2) dar, indem die Reihe durch ein Integral ersetzt wird.

[11] Dies ist sogar eine orthogonale Summe.

6.2 Der Beweis des Spektralsatzes in sechs Schritten

In diesem Abschnitt wollen wir den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren beweisen. Die Grundstruktur des Beweises folgt dabei der Beweisskizze des Theorems 8.4.1 in [Hel10]:

Statt den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren zu beweisen, wählen wir folgendes Vorgehen:

1. Wir beweisen den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren (siehe untenstehendes Theorem 6.2.1).

2. Wir weiten diesen Spektralsatz auf beschränkte normale Operatoren aus.

3. Der Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren folgt aus dieser Aussage mit der in Schritt 1 (siehe unten) erwähnten Reduktionsidee.

Theorem 6.2.1 (Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren)**.** *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann ist*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda$$

für ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf den Borelmengen von $\sigma(T)$.

Eine Übersicht über die Beweisstruktur und Einteilung in sechs Schritte findet sich auf Seite 74.

Schritt 1: Reduktion auf den beschränkten Fall

Die Hauptidee des Beweises ist es, den selbstadjungierten Operator T als die unbeschränkte Inverse S^{-1} eines geeigneten normalen *beschränkten* Operators $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ darzustellen.

Eine „Standardwahl“ ist $S = (T+\mathrm{i})^{-1}$. Wir zeigen, dass dieser Operator tatsächlich normal und beschränkt ist:

(I) Da T selbstadjungiert ist, ist T insbesondere symmetrisch. Mit Proposition 3.6.5 folgt, dass $\mathrm{Bi}(T \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$ ist.

(II) Da T selbstadjungiert ist, liegt $-\mathrm{i}$ wegen Proposition 4.0.5 in der Resolventenmenge $\varrho(T)$. Daher ist $S = (T + \mathrm{i})^{-1}$ in der Tat stetig.

(III) Bestimmen wir nun die Adjungierte S^* von S. Eine erste Vermutung ist $S^* = (T - \mathrm{i})^{-1}$. Dies zeigen wir nun formal: Seien dazu $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt. Wir setzen nun, um die folgende Rechnung übersichtlich zu halten $\Phi := (T + \mathrm{i})\varphi$ und $\Psi := (T - \mathrm{i})\psi$. Da $\mathrm{Bi}(T \pm \mathrm{i}) = \mathcal{H}$ nach Schritt (I) gilt, sind Ψ und Φ wiederum beliebige Elemente aus $\mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle S\Phi|\Psi\rangle &= \left\langle (T+\mathrm{i})^{-1}(T+\mathrm{i})\varphi \,\middle|\, \Psi \right\rangle \\ &= \langle \varphi \,|\, (T-\mathrm{i})\psi\rangle \\ &\overset{(\star)}{=} \langle (T+\mathrm{i})\varphi \,|\, \psi\rangle \\ &= \left\langle \Phi \,\middle|\, (T-\mathrm{i})^{-1}\Psi \right\rangle \end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle $(\star)$ die Selbstadjungiertheit von T bzw. die mittels Satz 3.5.10 daraus resultierende Identität

$$(T + \mathrm{i})^* = T^* + (\mathrm{i} \cdot \mathrm{id})^* = T^* + \bar{\mathrm{i}} \cdot \mathrm{id}^* = T - \mathrm{i}$$

benutzt haben. Da S ein beschränkter Operator auf $\mathcal{H}$ ist, zeigt dies bereits die Behauptung $S^* = (T - \mathrm{i})^{-1}$.

(IV) Schließlich kommutieren $S = (T + \mathrm{i})^{-1}$ und $S^* = (T - \mathrm{i})^{-1}$ als Resolventen nach der Resolventengleichung aus Theorem 4.0.3. Somit ist S normal. □

Schritt 2: Analyse des Spektrums von $P(T)$ mit einem Polynom P

Bevor wir mit der konkreten Formulierung des Ziels in Schritt 2 beginnen, sollte sich der Leser mit den Begriffen der *Algebra über einem Körper*, der *Involution* und des *involutiven Algebrenhomomorphismus* vertraut machen. Wir haben diese in Anhang A zusammengestellt.

Wir weisen darauf hin, dass die Menge $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ der beschränkten Operatoren auf $\mathcal{H}$ eine $*$-Algebra bezüglich der Involution $T \mapsto T^*$ ist.

In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[X]$ die $*$-Algebra der formalen Polynome $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ mit komplexen Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0 \in \mathbb{C}$. Die Involution $*$ definieren wir durch $P \mapsto \overline{P}$, mit $\overline{P} := \overline{a_n} X^n + \overline{a_{n-1}} X^{n-1} + \ldots + \overline{a_1} X + \overline{a_0}$.

Wichtigstes Ziel in Schritt 2 wird es sein $P(T)$ für Operatoren $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und Polynome $P \in \mathbb{C}[X]$ zu definieren und das Spektrum des Operators $P(T)$ zu untersuchen, um damit die Operatornorm von $P(T)$ berechnen zu können.

Definition 6.2.2. Für einen beschränkten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und ein Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ mit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ definieren wir

$$P(T) := a_n T^n + a_{n-1} T^{n-1} + \ldots + a_1 T + a_0 T^0.$$

Wir erinnern dazu an die Konvention, die wir in Definition 3.2.1 getroffen haben: $T^0 := \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

Theorem 6.2.3 (Polynomialer Funktionalkalkül)**.** *Definition 6.2.2 liefert uns für einen beschränkten normalen Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ einen* involutiven Algebrenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi_0 \colon \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \\ P &\longmapsto \Phi_0(P) := P(T). \end{aligned}$$

Beweis. Es seien P und Q beliebige Elemente in $\mathbb{C}[X]$. Wir schreiben $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ und $Q = \sum_{k=1}^{m} b_k X^k$ mit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{C}$. Mit der Konvention $a_j = 0$ für $n+1 \leq j \leq n+m$ und $b_k = 0$ für $m+1 \leq k \leq n+m$ folgt:

- Φ_0 ist $\mathbb{C}$-linear, da

$$\begin{aligned}\Phi_0(P+Q) &= \Phi_0\left(\sum_{\ell=0}^{\max\{n,m\}}(a_\ell+b_\ell)X^\ell\right) = \sum_{\ell=0}^{\max\{n,m\}}(a_\ell+b_\ell)T^\ell \\ &= \sum_{j=0}^{\max\{n,m\}} a_jT^j + \sum_{k=0}^{\max\{n,m\}} b_kT^k = \sum_{j=0}^{n} a_jT^j + \sum_{k=1}^{m} b_kT^k \\ &= \Phi_0(P)+\Phi_0(Q),\end{aligned}$$

  sowie

$$\Phi_0(\lambda P) = \Phi_0\left(\sum_{j=0}^{n}\lambda a_jX^j\right) = \sum_{j=0}^{n}\lambda a_jT^j = \lambda\sum_{j=0}^{n}a_jT^j = \lambda\Phi_0(T)$$

  gilt.

- Φ_0 ist multiplikativ, da gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_0(P\cdot Q) = \Phi_0\left(\sum_{\ell=0}^{n+m}\left(\sum_{j+k=\ell}a_j\cdot b_k\right)X^\ell\right) &= \sum_{\ell=0}^{n+m}\left(\sum_{j+k=\ell}a_j\cdot b_k\right)T^\ell \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n}a_jT^j\right)\circ\left(\sum_{k=1}^{m}b_kT^k\right) = \Phi_0(P)\circ\Phi_0(Q).\end{aligned}$$

- Φ ist involutiv, da

$$\Phi_0(\overline{P}) = \Phi_0\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}X^j\right) = \sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}T^j \overset{(\star)}{=} \left(\sum_{j=0}^{n}a_jT^j\right)^* = \Phi_0(P)^*$$

  gilt. Hierbei haben wir an der Stelle $(\star)$ die Selbstadjungiertheit von T sowie elementare Rechenregeln für die Hilbertraumadjungierte ausgenutzt. □

Proposition 6.2.4 (Spektralabbildungssatz für Polynome; vgl. Lemma 3.6 in [Kow09])**.** *Ist P ein Polynom, dann ist das Spektrum von $P(T)$ gegeben durch*

$$\sigma\Big(P(T)\Big) = P\Big[\sigma(T)\Big] := \Big\{P(\lambda)\,\Big|\,\lambda\in\sigma(T)\Big\}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $n := \deg P > 0$ (ansonsten ist die Aussage trivial). Zunächst sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt. Der *Fundamentalsatz der Algebra* liefert eine Faktorisierung des Polynoms $\lambda - P(X)$ über $\mathbb{C}[X]$ der Form

$$\lambda - P(X) = \alpha \cdot \prod_{j=1}^{n} (\mu_j - X)$$

für ein $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ und (nicht notwendigerweise verschiedene) komplexe Zahlen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$. Da die Abbildung $P \mapsto P(T)$ nach Theorem 6.2.3 ein Algebrenhomomorphismus ist, folgt

$$\lambda \operatorname{id} - P(T) = \alpha \cdot \prod_{j=1}^{n} (\mu_j \operatorname{id} - T). \tag{6.3}$$

Nach dieser Vorarbeit beweisen wir die zu zeigenden Inklusionen:

„$\subset$“: Wir zeigen die Inklusion $\sigma\big(P(T)\big) \subset P\big[\sigma(T)\big]$ durch Kontraposition. Wir wählen dazu ein λ, das nicht in $P\big[\sigma(T)\big]$ ist. Somit liegen die (durch den Fundamentalsatz der Algebra gegebenen) Lösungen $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{C}$ der Gleichung

$$P(\mu) = \lambda \tag{6.4}$$

nicht in $\sigma(T)$. Daher sind die Operatoren $(\mu_j \operatorname{id} - T)$ für $j = 1, \ldots, n$ invertierbar. Wegen (6.3) ist dann auch $\lambda \operatorname{id} - P(T)$ invertierbar. Also ist λ nicht in $\sigma\big(P(T)\big)$.

„$\supset$“: Mit der Argumentation von gerade erhält man: Ist $\lambda \in P\big[\sigma(T)\big]$, so ist mindestens ein μ_{j_0}, das (6.4) löst, in $\sigma(T)$. Da die Faktoren in (6.3) kommutieren, nehmen wir ohne Einschränkung $j_0 = n$ an, falls $(\mu_{j_0} \operatorname{id} - T)$ nicht injektiv ist. Dann ist es auch $\lambda \operatorname{id} - P(T)$ nicht. Ebenso nehmen wir ohne Einschränkung $j_0 = 1$ an, falls $(\mu_{j_0} \operatorname{id} - T)$ nicht surjektiv ist. Dann ist auch $\lambda \operatorname{id} - P(T)$ nicht surjektiv. Damit ist $\lambda \operatorname{id} - P(T)$ (egal in welchem Fall) nicht bijektiv, also ist $\lambda \in \sigma\big(P(T)\big)$. $\square$

Der Spektralabbildungssatz für Polynome hat eine starke Konsequenz:

Theorem 6.2.5. *Ist $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter normaler Operator und $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, dann ist $P(T)$ wieder ein beschränkter normaler Operator mit Operatornorm*

$$\|P(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|.$$

Beweis. (I) Wir zeigen, dass $P(T)$ normal ist mittels Satz 3.7.2 (b). Betrachte dazu

$$P(T)^* \circ P(T) = \overline{P}(T) \circ P(T) = (\overline{P} \cdot P)(T),$$
$$P(T) \circ P(T)^* = P(T) \circ \overline{P}(T) = (P \cdot \overline{P})(T).$$

Da aber $\mathbb{C}[X]$ ein kommutativer Ring ist, gilt auch $\overline{P} \cdot P = P \cdot \overline{P}$, weshalb die obigen beiden Zeilen übereinstimmen.

(II) Für den Beweis der zweiten Behauptung folgen wir Seite 37 in [Kow09]. Mit der Spektralradiusformel (4.5) für normale Operatoren erhalten wir

$$\|P(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \mathrm{r}(P(T)) = \sup_{\lambda \in \sigma(P(T))} |\lambda|.$$

Der Spektralabbildungssatz für Polynome 6.2.4 liefert dann

$$\|P(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\lambda \in P[\sigma(T)]} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)|. \qquad \square$$

Schritt 3: Konstruktion des stetigen Funktionalkalküls

Unser nächstes Ziel wird es sein, den Ausdruck $f(T)$ für möglichst viele Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zu definieren (und zwar so, dass man mit ihm „sinnvoll“ und „wie zu erwarten“ rechnen kann). Wir beginnen wie folgt:

Zunächst wollen wir $f(T)$ für einen beschränkten selbstadjungierten Operator T und eine Funktion $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ definieren. Dazu betrachten wir Definition 6.2.2 erneut. Ist $P(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ein Polynom in $\mathbb{C}[X]$, das auf das Spektrum $\sigma(T)$ eingeschränkt ist, so haben wir $P(T) = \sum_{j=0}^n a_j T^j \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ definiert. Wo wir in Definition 6.2.2 keine Einschränkungen an die zugelassenen beschränkten Operatoren machen mussten, ist dies hier nötig. Wir lassen nur normale Operatoren zu.

Der Grund ist der Folgende: Ist $\sigma(T)$ endlich, so sind Polynome nicht mehr notwendigerweise eindeutig durch ihre Einschränkung auf die Menge $\sigma(T)$ bestimmt. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 6.2.6 (vgl. Seite 35 in [Kow09])**.** Einer der einfachsten beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ wird durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

induziert. Wegen $A^{\mathrm{T}}A = \operatorname{diag}(0,1) \neq \operatorname{diag}(1,0) = AA^{\mathrm{T}}$ ist A *nicht* normal. Man erhält als Spektrum $\sigma(A) = \{0\}$. Betrachten wir nun die formalen Polynome $P_1 = X$ und $P_2 = X^2$. Die Einschränkungen dieser Polynome auf der Menge $\{0\}$ stimmt überein. Jedoch ist

$$P_1(A) = A \neq \mathfrak{o} = P_2(A).$$

Lässt man nur beschränkte normale Operatoren T zu, erhält man keine derartige Probleme. Denn ist $P \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom, das auf $\sigma(T)$ Null ist, dann ist $P(T)$ im Falle eines beschränkten normalen Operators T sofort der Nulloperator $\mathfrak{o}$. Dies folgt sofort aus Satz 6.2.5.

Um unsere Definition aus dem vorherigen Schritt auszuweiten, fassen wir kurz zusammen, was wir dort erreicht haben. Für einen normalen Operator T haben wir eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi_0 \colon \mathbb{C}[X] &\longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \\ P &\longmapsto \Phi_0(P) := P(T) \end{aligned}$$

definiert, die wegen $\|\Phi_0(P)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |P(\lambda)| = \|P\|_\infty$ (Theorem 6.2.5) stetig ist. Das bisher Erreichte lässt sich für ein Approximationsargument nutzen. Dazu wiederholen wir den Weierstraßschen Approximationssatz:

Satz 6.2.7 (Weierstraßscher Approximationssatz, vgl. Satz I.2.10 in [Wer05])**.** *Der Untervektorraum der Polynomfunktionen auf dem reellen Intervall* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *liegt* *dicht in* $\left(\mathscr{C}^0\left([a,b]\right), \|\cdot\|_\infty\right)$.

Wir erinnern zudem an einen aus einführenden Funktionalanalysis Veranstaltungen bekannten Satz, der Proposition 4.0.5 für beschränkte Operatoren verschärft:

Satz 6.2.8 (siehe Korollar VII.1.2 in [Wer05])**.** *Ist* $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ *ein beschränkter selbstadjungierter Operator, dann gilt*

$$\sigma(T) \subset [m(T), M(T)] \subset \mathbb{R},$$

mit $m(T) := \inf_{\|x\|=1}\langle Tx|x\rangle_{\mathcal{H}}$ *und* $M(T) := \sup_{\|x\|=1}\langle Tx|x\rangle_{\mathcal{H}}$.

Somit ist also die abgeschlossene Menge $\sigma(T)$ immer Teilmenge eines reellen abgeschlossenen Intervalls $[m(T), M(T)]$, auf das sich der Weierstraßsche Approximationssatz 6.2.7 anwenden lässt. Wir müssen lediglich sichern, dass stetige Funktionen auf $\sigma(T)$ auf das umfassende Intervall $[m(T), M(T)]$ stetig fortgesetzt werden können. Dies garantiert der Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn (beachte dazu, dass ein Polynom wegen seiner Stetigkeit auf der kompakten Menge $\sigma(T)$ nach dem Satz von Weierstraß über Minima und Maxima immer beschränkt ist):

Satz 6.2.9 (Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn für den metrischen Raum $\mathbb{R}$)**.** *Es sei* $A \subset \mathbb{R}$ *eine abgeschlossene Teilmenge. Für jede stetige, beschränkte Funktion* $f\colon A \to [a,b]$ *existiert eine stetige, beschränkte Fortsetzung* $F\colon \mathbb{R} \to [a,b]$.

Beweis. Für eine knappe Beweisidee im Falle eines allgemeinen metrischen Raumes verweisen wir auf [Wer05, Satz B.1.5]. Der obige Spezialfall ist in Tietzes Originalarbeit [Tie15] zu finden. □

Insgesamt folgt somit die Dichtheit der Polynomfunktionen auf $\sigma(T)$ in $\mathscr{C}^0(\sigma(T))$. Dies legt die Definition $f(T) = \lim_{n\to\infty} P_n(T)$ für eine Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Polynomfunktionen mit $\lim_{n\to\infty}\|f - P_n\|_\infty = 0$ nahe. Die aus dieser Definition resultierenden Eigenschaften hält das folgende Theorem fest.

Wir bezeichnen angelehnt an Seite 315 in [Wer05] mit $\mathfrak{t}$ die Identität $\sigma(T) \supset t \mapsto t$ und mit $\mathbb{1}$ die konstante Funktion $\sigma(T) \supset t \mapsto 1$.

Theorem 6.2.10 (Stetiger Funktionalkalkül). *Für jeden beschränkten selbstadjungierten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ existiert eine* eindeutige *Abbildung*

$$\Phi_T = \Phi \colon \mathscr{C}^0(\sigma(T)) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(a) Die Abbildung Φ erweitert (wie oben beschrieben) die Definition von $P(T)$, d. h. für ein $P \in \mathbb{C}[X]$ mit $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ haben wir wie bisher

$$\Phi(P) = P(T) = \sum_{j=0}^{n} a_j T^j.$$

(b) Es ist $\Phi(\mathfrak{t}) = T$, und $\Phi(\mathbb{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

(c) Φ ist ein involutiver Algebrenhomomorphismus, *d. h. für beliebige $f, g \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:*

- *Φ ist $\mathbb{C}$-linear, d. h.*

$$\Phi(f + g) = \Phi(f) + \Phi(g),$$
$$\Phi(\lambda f) = \lambda \Phi(f).$$

- *Φ ist multiplikativ, d. h.*

$$\Phi(fg) = \Phi(f) \circ_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \Phi(g).$$

- *Φ ist involutiv, d. h.*

$$\Phi(\overline{f}) = \Phi(f)^*.$$

(d) Φ ist stetig; es gilt $\|\Phi(f)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty$.

Die Abbildung Φ heißt *stetiger Funktionalkalkül* von T. Wir vereinbaren die suggestive Schreibweise $f(T) := \Phi_T(f)$ für $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$.

Beweis der Eindeutigkeit in Theorem 6.2.10. Wir gehen vor, wie in [Wer05, Seite 315]. Angenommen die postulierte Abbildung Φ existiere und habe die Eigenschaften (a) – (d) aus dem Theorem (dass dies tatsächlich der Fall ist, werden wir weiter unten zeigen). Durch die Eigenschaft (d) ist Φ durch seine Werte auf dem dichten Untervektorraum der Polynomfunktionen eindeutig bestimmt. Wir müssen also lediglich zeigen, dass Φ auf diesem Untervektorraum eindeutig ist. Da Φ jedoch linear ist, genügt es, dass $\Phi(\mathtt{t}^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ eindeutig erklärt ist. Wegen der Multiplikativität von Φ muss man dazu nur die Werte $\Phi(\mathtt{t})$ und $\Phi(\mathtt{1})$ kennen. Diese sind in (b) jedoch eindeutig vorgegeben. □

Beweis der Existenz in Theorem 6.2.10. Wir haben die grundsätzliche Beweisidee bereits in der hinführenden Motivation gegeben. Wir zeigen die verbleibenden Eigenschaften:

(I) Um (a) zu erfüllen setzen wir natürlich $\Phi(P) = \Phi_0(P) = P(T)$ für $P \in \mathbb{C}[X]$. Dann sind alle anderen Bedingungen des Theorems für $P \in \mathbb{C}[X]$ erfüllt:

„ad (b)“: Der Funktion $\mathtt{t}\colon t \mapsto t$ entspricht das Polynom $P_{\mathtt{t}} = X$ in $\mathbb{C}[X]$. Nach Definition erhält man sofort $\Phi_0(P_{\mathtt{t}}) = T$, wie gewünscht.
Der Funktion $\mathtt{1}\colon t \mapsto 1$ entspricht das Polynom $P_{\mathtt{1}} = 1$ in $\mathbb{C}[X]$. Wieder mit der Definition ergibt sich $\Phi_0(P_{\mathtt{1}}) = 1 \cdot T^0 = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

„ad (c)“: Dies ist genau der Beweis von Theorem 6.2.3.

„ad (d)“: Die Stetigkeit von $\Phi_0(P)$ ist der entscheidende Schritt. Diese haben wir bereits in Theorem 6.2.5 gezeigt.

(II) Die Abbildung Φ_0 aus Teil (I) ist wegen der unter (d) nachgewiesenen Stetigkeit sogar eindeutig auf $\mathscr{C}^0(\sigma(T))$ stetig fortsetzbar. Wie dies mit dem Weierstraßschen Approximationssatz und dem Satz von Tietze-Urysohn funktioniert, haben wir bereits beschrieben. Wir nennen diese Fortsetzung Φ. Dann erfüllt Φ als stetige Fortsetzung die Stetigkeitseigenschaft (d). Einfache Limesargumente zeigen, dass die Abbildung Φ die Eigenschaft (b) ebenfalls weiterhin erfüllt. Wir zeigen, dass sie auch die Eigenschaft (c) erfüllt:

- Die $\mathbb{C}$-Linearität lässt sich durch ein einfaches Limes-Argument zeigen.
- Gleiches gilt für die Multiplikativität.

- Die Involutivität von Φ sieht man wie folgt ein (vgl. [Wer05, Seite 316]):

$$\begin{aligned}
\Phi(\overline{f}) &= \Phi\left(\overline{\lim_{n\to\infty} P_n}\right) \\
&= \Phi\left(\lim_{n\to\infty} \overline{P_n}\right) && \text{da komplexes Konjugieren stetig ist} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi(\overline{P_n}) && \text{wegen der Stetigkeit von } \Phi \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_0(\overline{P_n}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi_0(P_n)^* \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \Phi_0(P_n)\right)^* && \text{da } S \mapsto S^* \text{ stetig ist} \\
&= \left(\Phi\left(\lim_{n\to\infty} P_n\right)\right)^* \\
&= \Phi(f)^*.
\end{aligned}$$

Dieser Beweis soll exemplarisch das Prinzip für den Nachweis der $\mathbb{C}$-Linearität und Multiplikativität von Φ verdeutlichen. □

Beispiel 6.2.11 (Quadratwurzel eines Operators)**.** Es sei T ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit $\sigma(T) \subset [0,\infty)$. Dann gibt es einen beschränkten selbstadjungierten Operator A mit $A^2 = T$. Dies folgt durch Betrachten der auf $[0,\infty)$ stetigen Funktion $f\colon t \mapsto \sqrt{t}$ wie folgt: Der durch den stetigen Funktionalkalkül eindeutig gegebene Operator $A = f(T)$ erfüllt

$$A^2 = f(T)f(T) = f^2(T) = \mathfrak{t}(T) = T.$$

Der Ausdruck $\sqrt{T}$ als Bezeichnung für den Operator A hat also Sinn.

Wir notieren noch einige Konsequenzen aus Theorem 6.2.10.

Korollar 6.2.12. *Mit den Bezeichnungen aus dem stetigen Funktionalkalkül gilt:*

(e) Φ *ist isometrisch, d. h. es gilt* $\|\Phi(f)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |f(\lambda)| = \|f\|_\infty$. *Dies verschärft (d).*

(f) $\sigma\big(f(T)\big) = f\big[\sigma(T)\big] := \big\{f(\lambda)\,\big|\,\lambda \in \sigma(T)\big\}$.

(g) Falls $x \in \mathcal{H}$ die Gleichung $Tx = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt, so gilt auch $f(T)x = f(\lambda)x$. Insbesondere gilt also die Inklusion $f(\sigma_P(T)) \subset \sigma_P(f(T))$.

(h) Der Operator $f(T)$ ist normal. Falls f reellwertig ist, so ist $f(T)$ sogar selbstadjungiert.

(i) Die Menge $\left\{ f(T) \,\middle|\, f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T)) \right\}$ bildet eine kommutative Algebra von Operatoren.

(j) Ist $f \geq 0$, so ist auch $f(T) \succeq \mathbb{0}$.

Beweis. (e) Durch die Dichtheit der Polynome in den stetigen Funktionen erhalten wir dies aus Theorem 6.2.5.

(f) Wir zeigen die Inklusionen separat und folgen [Wer05, Seite 317 f.]:

„$\subset$“: Es sei $\lambda \in \sigma\big(f(T)\big)$. Falls λ dann nicht in $f\big[\sigma(T)\big]$ wäre, so wäre $g := (f - \lambda)^{-1}$ eine auf $\sigma(T)$ definierte stetige Funktion mit

$$g(f - \lambda) = (f - \lambda)g = \mathbb{1}.$$

Aus den Eigenschaften des stetigen Funktionalkalküls ergibt sich

$$g(T)\big(f(T) - \lambda \operatorname{id}\big) = \big(f(T) - \lambda \operatorname{id}\big)g(T) = \operatorname{id}_{\mathcal{H}},$$

weshalb $\lambda \in \varrho\big(f(T)\big)$ ist und damit nicht in $\sigma\big(f(T)\big)$. Ein Widerspruch!

„$\supset$“: Sei $\mu \in f\big[\sigma(T)\big]$, d. h. es ist $\mu = f(\lambda)$ für ein $\lambda \in \sigma(T)$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein Polynom g_n mit

$$\|f - g_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$|f(\lambda) - g_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n},$$

und mit Korollar 6.2.12 (e) erhält man

$$\|f(T) - g_n(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Proposition 6.2.4 ist $g_n(\lambda) \in \sigma\Big(g_n(T)\Big)$. Da für normale Operatoren das Spektrum des Operators gleich dem approximativen Punktspektrum ist (siehe z. B. [Ham08, Corollary 2.4]) gibt es ein $x_n \in \mathcal{H}$ mit $\|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ und

$$\left\|\Big(g_n(T) - g_n(\lambda)\Big)(x_n)\right\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{n}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\left\|\Big(f(T) - \mu\Big)x_n\right\|_{\mathcal{H}} &\leq \left\|\Big(f(T) - g_n(T)\Big)x_n\right\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + \left\|\Big(g_n(T) - g_n(\lambda)\Big)x_n\right\|_{\mathcal{H}} \\ &\quad + |g_n(\lambda) - \mu| \cdot \|x_n\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{2}{n} + \left\|\Big(g_n(T) - g_n(\lambda)\Big)x_n\right\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{3}{n}.\end{aligned}$$

Es ist also möglich, dass $(f(T) - \mu)x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ gilt, während $\|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1$ ist. Somit kann $f(T) - \mu$ nicht stetig invertierbar sein. Daher haben wir $\mu \in \sigma\Big(f(T)\Big)$.

(g) Falls $x \in \mathcal{H}$ die Gleichung $Tx = \lambda x$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ erfüllt, folgt $P(T)x = P(\lambda)x$ für jedes $P \in \mathbb{C}[X]$. Dies ist elementar nachzurechnen: Ist $P = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, so gilt

$$P(T)x = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j T^j\right) x = \sum_{j=0}^{n} a_j (T^j x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j x = P(\lambda)x.$$

Ist nun $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ beliebig, dann wählen wir eine Approximationsfolge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}[X]$ mit $\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\|_\infty = 0$. Dann ist wegen dem gerade Gezeigten

$$P_n(T)x = P_n(\lambda)x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Mit (e) erhalten wir dann

$$\|f(T) - P_n(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \|(f - P_n)(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \|f - P_n\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Desweiteren ist auch $P_n(\lambda) \xrightarrow{n\to\infty} f(\lambda)$, da ja $\lambda \in \sigma(T)$ ist. Somit folgt die Behauptung.

(h) Die Normalität folgt exakt wie im Beweis zu Theorem 6.2.5 aus dem Fakt, dass $\overline{f} \cdot f = f \cdot \overline{f}$ für alle $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ ist. Ist f reellwertig, so ist $f(T)^* = \overline{f}(T) = f(T)$.

(i) Dies folgt wie in (h).

(j) Es sei $f \geq 0$. Dann ist $f = \sqrt{f}^2$ und $\sqrt{f} \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$. Somit ist

$$f(T) = \left(\sqrt{f}(T)\right)^2 \overset{(h)}{=} \sqrt{f}(T) \cdot \left(\sqrt{f}(T)\right)^* \succeq \mathfrak{o},$$

da für beliebige $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ die Abschätzung $AA^* \succeq \mathfrak{o}$ gilt. Dies folgt durch direktes Nachrechnen: Es ist

$$\|A^*x\|_{\mathcal{H}}^2 = \langle A^*x|A^*x\rangle = \langle AA^*x|x\rangle \geq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,. \qquad \square$$

Schritt 4: Konstruktion des messbaren Funktionalkalküls

Bevor wir fortfahren betrachten wir ein Beispiel:

Beispiel 6.2.13 (vgl. [Wer05], S. 318; [Sch06], Abschnitt 6.5; [FK98], S. 587 f.)**.** Wir betrachten einen beschränkten selbstadjungierten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$. Es sei $\lambda \in \sigma(T)$ ein isolierter Punkt[12] im Spektrum von T. Dann ist die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ eine stetige Funktion auf $\sigma(T)$, da der Definitionsbereich beim Überprüfen der Stetigkeit mit eingeht. Nach unserem bisher Erreichten ist somit auch $P := \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(T)$ definiert. Der Funktionalkalkül für stetig Funktionen liefert

[12] Der Punkt λ ist isoliert im Spektrum $\sigma(T)$, falls $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)\cap\sigma(T) = \{\lambda\}$ für genügend kleines $\varepsilon > 0$ gilt. Ist $\dim \mathcal{H} < \infty$, so ist jeder Punkt im Spektrum von T isoliert, denn $\sigma(T)$ besteht (wie aus der Linearen Algebra bekannt ist) aus den endlich vielen Eigenwerten von T. Ist $\lambda \neq 0$ und T kompakt, ist λ ebenfalls isolierter Punkt im Spektrum von T. Isolierte Punkte im Spektrum können also tatsächlich vorkommen.

außerdem $P^2 = P = P^*$ durch Korollar 6.2.12 (h), da $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ reellwertig ist. Daher ist $P\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein orthogonaler Projektor auf $\mathrm{Bi}(P)$. Wegen Korollar 6.2.12 (e) ist zudem $\|P\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \|\mathbb{1}_{\{\lambda\}}\|_\infty = 1$, also ist $\mathrm{Bi}(P) \neq \{0\}$.

Durch Fallunterscheidung $t = \lambda$ und $t \neq \lambda$ zeigt man, dass $t\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(t) = \lambda\mathbb{1}_{\{\lambda\}}(t)$ für alle $t \in \sigma(T)$ gilt. Mit anderen Worten gilt auf $\sigma(T)$ die Identität

$$\mathsf{t} \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}} \equiv \lambda \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}}. \tag{6.5}$$

Mit den Eigenschaften des stetigen Funktionalkalküls folgt daher

$$\begin{aligned} T(Pv) = \left[\Phi_T(\mathsf{t}) \circ \Phi_T\left(\mathbb{1}_{\{\lambda\}}\right)\right](v) &= \Phi_T\left(\mathsf{t} \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}}\right)(v) \\ &\overset{(6.5)}{=} \Phi_T\left(\lambda \cdot \mathbb{1}_{\{\lambda\}}\right)(v) = \left[\lambda \cdot \Phi_T\left(\mathbb{1}_{\{\lambda\}}\right)\right](v) = \lambda(Pv). \end{aligned}$$

Wegen $T(Pv) = \lambda(Pv)$ und $\mathrm{Bi}(P) \neq \{0\}$ besteht $\mathrm{Bi}(P)$ aus den Eigenvektoren von T zum Eigenwert λ.

Ist umgekehrt $Tv = \lambda v$, so ist nach Korollar 6.2.12 (g) auch $Pv = \mathbb{1}_{\{\lambda\}}(\lambda)(v) = v$.

Zusammengefasst haben wir also gesehen, dass $\mathrm{Bi}(P)$ genau der geometrische Eigenraum $\mathrm{Eig}(\lambda, T)$ von T zum Eigenwert λ ist.

Betrachten wir im Speziellen den Fall $\dim \mathcal{H} < \infty$: Wir schreiben $\sigma(T) = \{\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n\}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T sind. Wir setzen $\mathbb{1}_j := \mathbb{1}_{\{\lambda_j\}}$ und $P_j := \mathbb{1}_j(T)$ für $j = 1, \ldots, n$. Mit diesen Festlegungen können wir nun jedes $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ als $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_j$ mit passenden $\alpha_j \in \mathbb{C}$ schreiben. Somit haben wir $f(T) = \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j$. Wir sehen: $f(T)$ ist durch Multiplikation der Eigenvektoren zum Eigenwert λ_j mit α_j gegeben.

Ist nun jedoch $\dim \mathcal{H} = \infty$, dann tritt häufig der Fall $\sigma(T) = \left[-\|T\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}, \|T\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})}\right]$ auf. Die im Beispiel hergeleitete einfache Darstellung von $f(T)$ ist dann nicht mehr gegeben, da $\mathbb{1}_{\{\lambda\}}$ nicht mehr stetig auf $\sigma(T)$ ist. Trotzdem sind wir weiter an der Untersuchung der Eigenräume (bzw. einer Verallgemeinerung dieser) interessiert. Dies dient uns als Motivation den Funktionalkalkül auf messbare Funktionen auszudehnen.

Definition 6.2.14. Mit $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ bezeichnen wir den Vektorraum der beschränkten Borel-messbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Analog erklären wir $\mathscr{B}(M)$ für kompakte Mengen $M \subset \mathbb{C}$.

Man beachte, dass $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \neq L^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$ ist, da bei $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ auch Werte auf Nullmengen berücksichtigt werden.

Bevor wir einige Eigenschaften von $\mathscr{B}(M)$ festhalten, sei auf den maßtheoretischen Anhang B verwiesen. Wir werden im Folgenden häufig von ihm Gebrauch machen.

Lemma 6.2.15. *(a) $\mathscr{B}(M)$ ist ein Banachraum bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.*

(b) Es sei $\mathscr{C}^0(M) \subset U \subset \mathscr{B}(M)$ mit der folgenden „Abschlusseigenschaft“:

$$\begin{aligned} &\textit{Ist } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U \textit{ mit } \sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty, \textit{ sodass} \\ &f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t) \textit{ für alle } t \in M \textit{ existiert, dann ist bereits } f \in U. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Dann ist $U = \mathscr{B}(M)$.

Beweis. Wir folgen [Wer05, S. 319]:

(a) Die Vollständigkeit folgt sofort aus den beiden Fakten, dass
   - der gleichmäßige Limes beschränkter Funktionen wiederum eine beschränkte Funktion ist,
   - und der Limes messbarer Funktionen wiederum messbar ist (siehe z. B. [Wer05, A.1.5(c)]).

(b) Wir definieren

$$V := \bigcap_{\substack{\mathscr{C}^0(M)\subset S\subset\mathscr{B}(M)\\ S \text{ erfüllt (6.6)}}} S$$

   (I) Obiges System ist nicht-leer, denn $\mathscr{B}(M)$ war Teil des Mengenschnitts, da $\mathscr{B}(M)$ die Eigenschaft (6.6) erfüllt (der Limes messbarer Funktionen ist messbar). Folglich ist $\mathscr{C}^0(M) \subset V$.

(II) Tatsächlich ist V sogar ein Vektorraum: Für beliebiges $f_0 \in V$ definieren wir $V_{f_0} = \{g \in \mathscr{B}(M) \mid f_0 + g \in V\}$. Es sei nun $f_0 \in \mathscr{C}^0(M)$. Dann ist $\mathscr{C}^0(M) \subset V_{f_0}$ und V_{f_0} erfüllt (6.6). Somit ist $V \subset V_{f_0}$; mit anderen Worten:

$$\text{Ist } f_0 \in \mathscr{C}^0(M) \text{ und } g \in V, \text{ dann ist auch } f_0 + g \in V.$$

Nun sei $g_0 \in V$. Nach dem eben Bewiesenen ist $\mathscr{C}^0(M) \subset V_{g_0}$. Daher gilt auch $V \subset V_{g_0}$, da V_{g_0} die Eigenschaft (6.6) erfüllt. Damit folgt:

$$\text{Ist } g_0 \in V \text{ und } g \in V, \text{ dann ist } g \in V_{g_0} \text{ und damit auch } g + g_0 \in V.$$

Nach diesem Prinzip zeigt man ebenso, dass $\lambda g \in V$ ist, falls $\lambda \in \mathbb{C}$ und $g \in V$ sind.

(III) Wir zeigen jetzt, dass der Raum der Treppenfunktionen $\mathscr{T}(M)$ in V liegt. Daraus folgt dann bereits die Behauptung, $V = \mathscr{B}(M)$, da $\mathscr{T}(M)$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm dicht in $\mathscr{B}(M)$ liegt (siehe z. B. [Wer05, Satz A.1.5(e)]). Da V wie in (II) gezeigt ein Vektorraum ist, müssen wir lediglich zeigen, dass

$$\mathbb{1}_E \in V \quad \text{für alle } E \in \mathcal{B}(M)$$

gilt. Hierzu betrachten wir die Menge $\mathscr{D} = \{E \in \mathcal{B}(M) \mid \mathbb{1}_E \in V\}$, die alle (relativ) offenen Mengen umfasst: Denn für offenes E existieren stetige Funktionen f_n mit $0 \leq f_n \leq 1$ und $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \mathbb{1}_E(t)$ für alle t. Dies zeigt, dass $\mathscr{D}$ einen durchschnittsstabilen Erzeuger von $\mathcal{B}(M)$ umfasst. Um $\mathscr{D} = \mathcal{B}(M)$ zu schließen genügt es daher nach Korollar B.5.5 zu zeigen, dass $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist. Wir prüfen daher die Bedingungen aus Definition B.5.1:

(Dyn1) $M \in \mathscr{D}$: Dies ist klar, da $\mathbb{1}_M \in V$ ist.

(Dyn2) $E, F \in \mathscr{D}$ mit $E \subset F$ impliziert $F \backslash E \in \mathscr{D}$: Dies folgt wegen $\mathbb{1}_{F\backslash E} = \mathbb{1}_F - \mathbb{1}_E$ aus den Vektorraumeigenschaften von V.

(Dyn3) Sind $E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{D}$ paarweise disjunkt, dann ist auch

$E := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathscr{D}$: Im Sinne der punktweisen Konvergenz ist $\mathbb{1}_E = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_k}$ gültig. Weiter gilt: $\left(\sum_{k=1}^N \mathbb{1}_{E_k}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge in V mit

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{E_k} \xrightarrow{N\to\infty} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{E_k} \quad \text{punktweise}$$

und

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} \left\| \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{E_k} \right\|_\infty \leq 1$$

Wegen der Abschlusseigenschaft (6.6) ist dann $\mathbb{1}_E \in V$, also $E \in \mathscr{D}$.

Somit folgt $\mathscr{D} = \mathcal{B}(M)$, was wir zeigen wollten. □

Dirk Werner liefert in [Wer05, S. 319] eine anschauliche Interpretation des Punktes (b) im vorausgehenden Lemma: $\mathscr{B}(M)$ ist der kleinste Funktionenraum, der abgeschlossen gegenüber punktweisen Limiten von gleichmäßig beschränkten Folgen ist und alle stetigen Funktionen enthält.

Theorem 6.2.16 (Spektralsatz in der Funktionalkalkül-Form / Messbarer Funktionalkalkül)**.** *Für jeden beschränkten selbstadjungierten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ existiert eine* eindeutige *Abbildung*

$$\widehat{\Phi}_T = \widehat{\Phi} \colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathcal{H})$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\widehat{\Phi}(\mathfrak{t}) = T$, $\widehat{\Phi}(\mathfrak{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$,

(b) $\widehat{\Phi}$ *ist ein involutiver Algebrenhomomorphismus,*

(c) $\widehat{\Phi}$ *ist stetig; es gilt* $\|\widehat{\Phi}(f)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty$.

(d) Angenommen es gilt $f_n \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$, *sowie* $f_n(t) \xrightarrow{n\to\infty} f(t)$ *für alle* $t \in \sigma(T)$, *dann gilt*

$$\widehat{\Phi}(f_n)x \xrightarrow{n\to\infty} \widehat{\Phi}(f)x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,.$$

Wie zuvor wollen wir die suggestive Schreibweise $f(T) := \widehat{\Phi}_T(f)$ für $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ vereinbaren.

Im Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis folgen wir jeweils [Wer05, Satz VII.1.6].

Beweis der Eindeutigkeit in Theorem 6.2.16. Gemäß dem stetigen Funktionalkalkül bestimmen die Eigenschaften (a) – (c) den Ausdruck $\widehat{\Phi}(f)$ für alle $f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ eindeutig. Eigenschaft (d) und Lemma 6.2.15 zeigen die Eindeutigkeit für $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$: Für alle $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$, die der punktweise Limes gleichmäßig beschränkter stetiger Funktionen sind, ist $\widehat{\Phi}(f)$ eindeutig bestimmt. Dies sind aber gerade alle $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$. $\square$

Beweis der Existenz in Theorem 6.2.16. Es seien $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt und $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ sei ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \ell_{x,y} \colon \mathscr{C}^0(\sigma(T)) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f \quad &\longmapsto \ell_{x,y}(f) := \langle f(T)x|y\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Da $f \mapsto f(T)$ nach dem stetigen Funktionalkalkül 6.2.10 linear ist, folgt mit der Linearität des Skalarproduktes in der ersten Komponente die Linearität von $\ell_{x,y}$. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1 und Korollar 6.2.12 (e) erhält man weiter

$$|\ell_{x,y}(f)| \le \|f(T)x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}} \le \|f(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}} = \|f\|_\infty \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}}. \tag{6.7}$$

Dies zeigt, dass $\ell_{x,y}$ ein stetiges lineares Funktional auf $\left(\mathscr{C}^0(\sigma(T)), \|\cdot\|_\infty\right)$ ist. Der Satz von Riesz-Markov (Theorem B.4.1) garantiert uns daher die Existenz eines eindeutigen regulären komplexen Borelmaßes $\mu_{x,y}$ (siehe Definition & Satz B.2.7) mit $\|\mu_{x,y}\|_{\mathrm{Var}} = \|\ell_{x,y}\|_{\mathfrak{L}(\mathscr{C}^0(\sigma(T));\mathbb{C})}$ sowie

$$\ell_{x,y}(f) = \langle f(T)x|y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad \text{für alle } f \in \mathscr{C}^0(\sigma(T)).$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathscr{M}(\sigma(T)) \\ (x, y) &\longmapsto \mu_{x,y}, \end{aligned}$$

die jedem Tupel $(x, y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ das oben postulierte eindeutige Element $\mu_{x,y}$ im Raum der komplexen regulären Borelmaße $\mathscr{M}(\sigma(T))$ zuordnet. Diese Abbildung ist sesquilinear (siehe Definition C.3.5) und wegen

$$\|\mu_{x,y}\|_{\mathrm{Var}} = \|\ell_{x,y}\|_{\mathfrak{L}(\mathscr{C}^0(\sigma(T));\mathbb{C})} \overset{(6.7)}{\leq} \|x\|_{\mathcal{H}}\,\|y\|_{\mathcal{H}} \tag{6.8}$$

gemäß dem Satz von Lax-Milgram C.3.6 stetig. Dies gestattet eine nähere Untersuchung der Abbildung

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y}, \end{aligned}$$

für $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$. Diese Abbildung ist wegen

$$\left| \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \right| \leq \|f\|_\infty \,\|\mu_{x,y}\|_{\mathrm{Var}} \overset{(6.8)}{\leq} \|f\|_\infty \,\|x\|_{\mathcal{H}}\,\|y\|_{\mathcal{H}}$$

ebenfalls eine stetige Sesquilinearform. Folglich gibt es nach dem Satz von Lax-Milgram C.3.6 einen eindeutig bestimmten, beschränkten Operator, welchen wir $\widehat{\Phi}(f)$ nennen, mit

$$\left\langle \widehat{\Phi}(f)x \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H} \tag{6.9}$$

und $\|\widehat{\Phi}(f)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq \|f\|_\infty$.

Wir müssen nun noch verifizieren, dass $\widehat{\Phi}(f)$ alle Eigenschaften (a) – (d) des Theorems erfüllt:

„ad (a)“: Da für stetige f die Gleichungskette $\widehat{\Phi}(f) = \Phi(f) = f(T)$ gilt, folgt bereits $\widehat{\Phi}(\mathfrak{t}) = T$ und $\widehat{\Phi}(\mathfrak{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$.

„ad (d)“: Für beliebige $x, y \in \mathcal{H}$ gilt nach dem Satz von Lebesgue (Satz von der majorisierten Konvergenz B.1.1), der hier wegen Notiz B.3.4 anwendbar ist:

$$\left\langle \widehat{\Phi}(f_n)x \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\sigma(T)} f_n \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \xrightarrow{n\to\infty} \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} = \left\langle \widehat{\Phi}(f)x \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}}. \qquad (6.10)$$

Mit anderen Worten haben wir $\widehat{\Phi}(f_n)x \rightharpoonup \widehat{\Phi}(f)x$ für $n \to \infty$. Um diese (durchaus bereits starke) Aussage noch zu verschärfen zeigen wir weiter, dass

$$\|f_n(T)x\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n\to\infty} \|f(T)x\|_{\mathcal{H}}$$

gilt: Es ist

$$\begin{aligned}
\|f_n(T)x\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle f_n(T)x \,|\, f_n(T)x \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \langle f_n(T)^* f_n(T)x \,|\, x \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \left\langle (\overline{f_n}\, f_n)(T)\, x \,\middle|\, x \right\rangle_{\mathcal{H}} \xrightarrow[(6.10)]{n\to\infty} \left\langle (\overline{f}\, f)(T)\, x \,\middle|\, x \right\rangle_{\mathcal{H}} = \|f(T)x\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Da in einem Hilbertraum schwache Konvergenz einer Folge zusammen mit der Normkonvergenz der Folge die starke Konvergenz der Folge impliziert, erhalten wir $f_n(T)x \xrightarrow{n\to\infty} f(T)x$ für alle $x \in \mathcal{H}$.

„ad (b)“: Die Linearität der Abbildung $\widehat{\Phi}$ folgt direkt aus der obiger Konstruktion. Wir wissen, dass für stetige Funktionen f und g die Multiplikativität $\widehat{\Phi}(f \cdot g) = \widehat{\Phi}(f) \circ \widehat{\Phi}(g)$ gilt. Sei nun $g \in \mathscr{C}^0(\sigma(T))$ und

$$U = \left\{ f \in \mathscr{B}(\sigma(T)) \,\middle|\, \widehat{\Phi}(f \cdot g) = \widehat{\Phi}(f) \circ \widehat{\Phi}(g) \right\}.$$

Wir haben gerade festgestellt, dass $\mathscr{C}^0(\sigma(T)) \subset U$ ist. Mithilfe von Lemma 6.2.15 (b) wollen wir nun $U = \mathscr{B}(\sigma(T))$ schließen. Dazu sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ und der Grenzwert $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ existiere für alle $t \in \sigma(T)$. Nach (6.10) ist

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \widehat{\Phi}(f_n) \left(\widehat{\Phi}(g)\, x\right) \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \widehat{\Phi}(f) \left(\widehat{\Phi}(g)\, x\right) \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

und da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ ist, gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \left\langle \widehat{\Phi}(f_n)\left(\widehat{\Phi}(g)\,x\right) \,\middle|\, y\right\rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{n\to\infty} \left\langle \widehat{\Phi}(f_n\,g)\,x \,\middle|\, y\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \widehat{\Phi}(fg)\,x \,\middle|\, y\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

Da die Elemente $x, y \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt waren, erhalten wir $f \in U$. Wie angekündigt schließen wir $U = \mathscr{B}(\sigma(T))$. Nun sei $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ und wir setzen

$$V = \left\{ g \in \mathscr{B}(\sigma(T)) \,\middle|\, \widehat{\Phi}(f\cdot g) = \widehat{\Phi}(f) \circ \widehat{\Phi}(g) \right\}.$$

Wir haben gerade gezeigt, dass $\mathscr{C}^0(\sigma(T)) \subset V$ ist. Analog kann man nun mit Lemma 6.2.15 (b) schließen, dass $V = \mathscr{B}(\sigma(T))$ ist. Dies zeigt die Multiplikativität von $\widehat{\Phi}$.

Fast analog folgert man die Involutivität von $\widehat{\Phi}$.

„ad (c)“: Die Stetigkeit wurde bereits durch das Anwenden von Lax-Milgram gezeigt. □

Notiz 6.2.17. Durch Gleichung (6.9) im Existenzbeweis des messbaren Funktionalkalküls haben wir gesehen, dass für einen beliebigen beschränkten selbstadjungierten Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ gilt:

$$\langle f(T)x \,|\, y\rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}\mu_{x,y} \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H},$$

wobei die $\mu_{x,y}$ eindeutig bestimmte komplexe reguläre Borelmaße sind. Man nennt die Familie $(\mu_{x,y})_{x,y\in\mathcal{H}}$ auch *Familie der zu T assoziierten Spektralmaße.*

Schritt 5: Existenz und Eindeutigkeit des Spektralmaßes

In Theorem 6.2.1 hatten wir behauptet, dass jeder beschränkte selbstadjungierte Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ eine Darstellung der Form

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \,\mathrm{d}E_\lambda \tag{6.11}$$

für ein eindeutig bestimmtes Spektralmaß E auf den Borelmengen von $\sigma(T)$ besitzt.

Die Existenz dieses Spektralmaßes werden wir nun mit dem bisher Erreichten zeigen. Notiz 6.2.17 wirft die Frage auf, ob es möglich ist $(\mu_{x,y})_{x,y\in\mathcal{H}}$ – die Familie der zu T assoziierten Spektralmaße – durch ein einziges Spektralmaß, analog wie in Proposition 5.3.3, darzustellen. Dies ist tatsächlich der Fall. Es reicht dazu folgendes Theorem zu zeigen:

Theorem 6.2.18 (Übergang vom messbaren Funktionalkalkül zum Spektralsatz)**.** *Es sei $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter selbstadjungierter Operator. Dann gibt es ein eindeutiges Spektralmaß $E\colon \mathcal{B}(\sigma(T)) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$, sodass*

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda \tag{6.12}$$

gilt. Desweiteren erhält man für beliebiges $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ die Gleichung

$$f(T) = \int_{\sigma(T)} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda. \tag{6.13}$$

Für $B \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ ist

$$E_B = \mathbb{1}_B(T). \tag{6.14}$$

Existenz des Spektralmaßes. Wir übernehmen den Beweis von [Cer10, Theorem 8.22]: Wie bisher bezeichne $\widehat{\Phi}\colon \mathscr{B}(\sigma(T)) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ den involutiven Algebrenhomomorphismus des messbaren Funktionalkalküls. Damit (6.13) gilt, müssen wir das Spektralmaß E wie in (6.14) wählen. Für $B \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ definieren wir also

$$E_B := \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B).$$

Man beachte dabei, dass $\mathbb{1}_B \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ ist. Im Folgenden überprüfen wir, ob E alle gewünschten Eigenschaften erfüllt:

(I) Zunächst zeigen wir, dass E_B tatsächlich für alle $B \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ eine Projektion definiert. Es ist mit der Multiplikativität des messbaren Funktionalkalküls

$$E_B^2 = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B)^2 = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B^2) = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B) = E_B,$$

d. h. E ist idempotent. Da $\mathbb{1}_B$ reellwertig ist, folgt mit der Involutivität des messbaren Funktionalkalküls auch

$$E_B = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B) = \widehat{\Phi}_T\left(\overline{\mathbb{1}_B}\right) = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_B)^* = E_B^*.$$

Somit ist E_B eine Orthogonalprojektion.

(II) Es ist $E_{\sigma(T)} = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{\sigma(T)}) = \widehat{\Phi}_T(\mathtt{1}) = \mathrm{id}_{\mathcal{H}}$ nach dem stetigen Funktionalkalkül. Ebenso ist $E_\varnothing = \widehat{\Phi}(0) = \mathtt{0}$. Somit gilt insbesondere (SMaß1).

(III) Mit Notiz 6.2.17 ist

$$\langle E_B x | y \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \widehat{\Phi}(\mathbb{1}_B) x \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}} = \mu_{x,y}(B), \tag{6.15}$$

woraus wir

$$\int_{\sigma(T)} f \,\mathrm{d}E = \widehat{\Phi}_T(f) = f(T)$$

für $f \in \mathscr{B}(\sigma(T))$ erhalten. Dies zeigt Gleichung (6.13). Gleichung (6.12) ist lediglich ein Spezialfall mit $f \equiv \mathtt{t}$ hiervon und folgt sofort.

(IV) Es seien $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\sigma(T))$ disjunkte Mengen. Dann ist $\mathbb{1}_{B_1 \uplus B_2} = \mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2}$. Mit der Linearität von $\widehat{\Phi}_T$ ist

$$E_{B_1} + E_{B_2} = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_1}) + \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_2}) = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_1 \uplus B_2}) = E(B_1 \uplus B_2).$$

Dies zeigt die Additivität von E. Ist nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Borelmengen, dann ist

$$E_{B_n} E_{B_m} = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_n})\widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_m}) = \widehat{\Phi}_T(\mathbb{1}_{B_n}\mathbb{1}_{B_m}) = \mathtt{0} \quad \text{für } n \neq m.$$

Für jedes $x \in \mathcal{H}$ gilt nach Hilfssatz C.3.3, dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} E_{B_n} x$ gegen ein $Px \in \mathcal{H}$ konvergiert. Nun gilt aber wegen (6.15) für alle $y \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle Px | y \rangle_{\mathcal{H}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \langle E_{B_n} x \,|\, y \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \langle E_{B_n} x \,|\, y \rangle_{\mathcal{H}} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \mu_{x,y}(B_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{x,y}(B_n) \overset{(\star)}{=} \mu_{x,y}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \left\langle E_{\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n} x \,\middle|\, y \right\rangle_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir an der Stelle ($\star$) die σ-Additivität des komplexen Maßes $\mu_{x,y}$ ausgenutzt. Wir haben also

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{B_n} x = Px = E_{\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n} x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}$$

verifiziert. Dies ist die starke σ-Additivität von E. Mit anderen Worten: E erfüllt auch (SMaß2). □

Eindeutigkeit des Spektralmaßes. Dies folgt direkt aus der Eindeutigkeit der Abbildung $\widehat{\Phi}$. □

Schritt 6: Ausweitung auf beschränkte normale Operatoren

Auf Seite 77 hatten wir das Vorgehen für den Beweis des Spektralsatzes für *unbeschränkte* selbstadjungierte Operatoren erläutert. Punkt 2 sah vor, den Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren auf die größere Klasse der beschränkten normalen Operatoren auszuweiten. Wir geben hierfür lediglich die Beweisidee. Details sind z. B. in [Wer05, S. 335 f.] zu finden.

Die grundsätzliche Idee ist es, den normalen Operator als Summe zweier selbstadjungierter Operatoren zu schreiben. Das dies funktioniert, garantiert der folgende Satz:

Satz 6.2.19. *Ist $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ ein beschränkter normaler Operator, dann existieren zwei beschränkte selbstadjungierte Operatoren $S_1, S_2 \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit*

$$T = S_1 + \mathrm{i} S_2$$

und $S_1 S_2 = S_2 S_1$.

Beweis. Setze

$$S_1 := \frac{T + T^*}{2} \qquad \text{und} \qquad S_2 := \frac{T - T^*}{2\mathrm{i}}.$$

Dann ist $T = S_1 + \mathrm{i} S_2$ und die Operatoren S_1, S_2 sind offensichtlich selbstadjungiert. Da T normal ist, kommutieren S_1, S_2 im Raum $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, denn es ist

$$S_1 S_2 = S_2 S_1 = \frac{T^2 - (T^*)^2}{4\mathrm{i}}. \qquad \square$$

Dies schließt den Beweis des Spektralsatzes für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren, wie in Theorem 6.0.1 formuliert, ab.

Es erscheint sinnvoll als Abschluss des Beweises die starke Korrespondenz zwischen selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbertraum und Spektralmaßen auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$ zu betonen, die wir als sofortige Konsequenz einiger Theoreme erhalten:

Notiz 6.2.20. Für einen gegebenen Hilbertraum $\mathcal{H}$ liefert der Spektralsatzes für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren – Theorem 6.0.1 – zusammen mit Theorem 5.5.5 (bzw. Korollar 5.5.7) durch

$$T = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda$$

eine Bijektion zwischen

$$\Big\{ T \,\Big|\, T \text{ ist selbstadjungierter Operator auf } \mathcal{H} \Big\}$$

und

$$\Big\{ E \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Proj}(\mathcal{H}) \,\Big|\, E \text{ ist Spektralmaß} \Big\}.$$

6.3 Multiplikationsversion des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren

Eine geringfügige Umformulierung des Spektralsatzes liefert die Aussage, dass jeder selbstadjungierte Operator als Multiplikationsoperator auf einem geeigneten Maßraum aufgefasst werden kann. Wir formulieren diese Version zum Abschluss:

Theorem 6.3.1. *Es sei* $T\colon \mathcal{H} \supset \mathrm{Dom}(T) \to \mathcal{H}$ *ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum* $\mathcal{H}$*. Dann ist* T *unitär äquivalent zu einem Multiplikationsoperator. D. h. es existiert ein Maßraum* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$*, eine messbare Funktion* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *und ein unitärer Operator* $U\colon \mathcal{H} \to L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *mit*

$$x \in \mathrm{Dom}(T) \text{ genau dann wenn } f \cdot Ux \in L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu);$$

sowie

$$\boxed{(UTU^*)\varphi = f \cdot \varphi = M_f(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in \mathrm{Dom}(M_f).}$$

Mit anderen Worten: Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \arrow[r, "M_f"] \arrow[d, "U"'] & L^2(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \arrow[d, "U"] \\
\mathcal{H} \arrow[r, "T"'] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Siehe [Wer05, Satz VII.1.21 und VII.3.1]. □

Notiz 6.3.2. In der Literatur wird der Name Spektralsatz austauschbar für einen der folgenden drei Sätze vergeben:

- Für den messbaren Funktionalkalkül,
- Für die Darstellung des Operators als Multiplikationsoperator,
- Für die Darstellung durch ein Integral.

Man kann zeigen, dass diese alle äquivalent sind.

ANHANG A

Algebren

Dieser Anhang sei der Darstellung einiger algebraischer Begriffe gewidmet. Für eine weitergehende Darstellung verweisen wir auf [Kab14, Abschnitt 15.1], an welchem wir uns hier orientiert haben.

Definition A.0.1. Eine Algebra A über einem Körper $\mathbb{K}$ ist ein $\mathbb{K}$-Vektorraum zusammen mit einer Verknüpfung

$$\diamond : A \times A \longrightarrow A,$$

die wir *Multiplikation* nennen und mit $x \diamond y$ (oder kurz mit xy) symbolisieren, sodass für alle $x, y, z \in A$ und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(Alg1) $(x + y) \diamond z = xz + yz$,

(Alg2) $x \diamond (y + z) = xy + xz$,

(Alg3) $\lambda \cdot (x \diamond y) = (\lambda \cdot x) \diamond y = x \diamond (\lambda \cdot y)$.

Beispiel A.0.2. Die zwei wichtigsten Beispiele für Algebren im Rahmen dieser Arbeit sind einerseits der Raum der beschränkten Operatoren $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ und andererseits der Raum der beschränkten Borel-messbaren Funktionen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ beziehungsweise $\mathscr{B}(M)$ für eine Kompaktum $M \subset \mathbb{C}$.

Definition A.0.3. Eine *Involution* auf einer Algebra A über dem Körper $\mathbb{C}$ ist eine Abbildung

$$*\colon A \longrightarrow A,$$

sodass die folgenden Bedingungen für alle $x, y \in A$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ erfüllt sind:

(Inv1) $(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*$,

(Inv2) $(xy)^* = y^* x^*$,

(Inv3) $(x^*)^* = x$.

Falls auf einer Algebra eine Involution $*$ definiert ist, so nennen wir diese Algebra *involutive Algebra* oder $*$-*Algebra* und notieren sie als Tripel $(A, \diamond, *)$. Falls aus dem Zusammenhang klar ist, welche Multiplikation und Involution verwendet wird, verzichten wir jedoch auf die Tripeldarstellung.

Definition A.0.4. Ein Homomorphismus $\Phi\colon A \to B$ zwischen zwei Algebren $(A, \diamond, *)$, $(B, \circ, \dagger)$ über $\mathbb{C}$ mit Involutionen heißt *involutiver Homomorphismus* (auch: $*$-*Homomorphismus*), falls $\Phi(x^*) = \Phi(x)^\dagger$ für alle $x \in A$ gilt.
Gilt zusätzlich $\Phi(x \diamond y) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$ für alle $x, y \in A$, so heißt Φ *involutiver Algebrenhomomorphismus* (auch: $*$-*Algebrenhomomorphismus*).

ANHANG B

Maßtheorie

In diesem Kapitel diskutieren wir die benötigten maßtheoretischen Ergebnisse, die über einführende Maßtheorie Vorlesungen hinausgehen.

B.1 Der Satz von Lebesgue über majorisierte Konvergenz

Satz B.1.1 (Satz über majorisierte Konvergenz)**.** *Es sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge* $\mathscr{A}$*-messbarer Funktionen* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{K}$*. Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere* μ*-fast überall gegen eine* $\mathscr{A}$*-messbare Funktion* f *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *werde von einer* μ*-integrierbaren Funktion* $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ majorisiert*, d. h. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gelte* $|f_n| \le g$ μ*-fast überall.*
Dann sind f *und* f_n *für alle* $n \in \mathbb{N}$ μ*-integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Insbesondere gilt der Vertauschungssatz

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Satz B.1.2 (Satz über majorisierte Konvergenz für L^p-Räume)**.** *Es sei* $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ *ein Maßraum,* $1 \le p < +\infty$*, und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge* $\mathscr{A}$*-messbarer Funktionen* $f_n\colon \Omega \to \mathbb{K}$*. Die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiere* μ*-fast überall gegen eine* $\mathscr{A}$*-messbare Funktion* f *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *werde von* $g \in L^p\left((\Omega, \mathscr{A}, \mu); \mathbb{R}\right)$ majorisiert*, d. h. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gelte* $|f_n| \le g$ μ*-fast überall.*

Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p((\Omega, \mathscr{A}, \mu); \mathbb{K})$ *und* $f \in L^p((\Omega, \mathscr{A}, \mu); \mathbb{K})$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

B.2 Reguläre komplexe Borelmaße

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Maßes verallgemeinern, indem wir komplexe Zahlen als Wertebereich zulassen. Wir folgen dabei [Rud87, S. 116]. Dabei bezeichne X im Folgenden einen topologischen Raum und $(X, \mathscr{A})$ einen Messraum.

Definition B.2.1. Die Abbildung $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ heißt *komplexes Maß*, falls sie *σ-additiv* ist, d. h. wenn für paarweise disjunkte Mengen $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$ die Relation

$$\mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \tag{B.1}$$

gilt.

Anders als bei Maßen ist die Konvergenz der Reihe in Gleichung (B.1) hier bereits implizit in den Voraussetzungen enthalten (zur Erinnerung: Die auftretende Reihe durfte bei Maßen entweder konvergieren, oder den Wert $+\infty$ annehmen).
Betrachten wir eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so nennen wir die Mengenfolge $\left(A_n^{(\pi)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Umordnung* von $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls $A_\ell^{(\pi)} = A_{\pi(l)}$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt, wobei $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung ist. Offensichtlich ist $A := \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n^{(\pi)}$ für jedes bijektive $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Daher muss auch

$$\mu(A) = \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n^{(\pi)}\right) = \mu\left(\biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n^{(\pi)}\right)$$

für jedes bijektive $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gelten. Mit anderen Worten muss also auch jede *Umordnung* der Reihe in (B.1) konvergieren. Man spricht von *unbedingter Konvergenz* der Reihe. Da die $\mu(A_n) \in \mathbb{C}$ sind, konvergiert die Reihe auch absolut.

Wie bei Maßen hat man $\mu(\varnothing) = 0$, denn es ist

$$\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing \uplus \varnothing \uplus \ldots) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing) + \cdots ,$$

und μ nimmt nur endliche Werte (nicht aber $+\infty$ und $-\infty$ an).

Mit $\mathcal{B}(X)$ bezeichnen wir nachfolgend, wie bereits in den Präliminarien festgehalten, die Borel-σ-Algebra auf X. Dies ist die von den offenen Mengen aus X erzeugte σ-Algebra.

Definition B.2.2. Ein komplexes Maß $\mu\colon \mathcal{B}(X) \to \mathbb{C}$ heißt *komplexes Borelmaß*.

Sei nun die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ in $\mathscr{A}$ enthalten. Dann liegen in $\mathscr{A}$ alle offenen, abgeschlossenen, sowie kompakten Teilmengen von X. Dies lässt die folgende Definition zu:

Definition B.2.3. Wir nennen ein Maß $\mu\colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ *regulär*, falls

(Reg1) $\mu(K) < \infty$ für alle Kompakta $K \in \mathscr{A}$ gilt,

(Reg2) und für alle $A \in \mathscr{A}$ *innere* und *äußere Regularität* gelten, d. h.

$$\mu(A) = \sup_{\substack{K \subset A \\ K \text{ kompakt}}} \mu(K)$$

sowie

$$\mu(A) = \inf_{\substack{O \supset A \\ O \text{ offen}}} \mu(O)$$

ist.

Jedem komplexen Maß μ, können wir ein Maß $\nu := |\mu|$ zuordnen, das wie folgt definiert ist:

Definition B.2.4. Die *Variation* $|\mu|$ eines komplexen Maßes μ sei durch die Vorschrift

$$\begin{aligned}|\mu|\colon \mathscr{A} &\longrightarrow [0,\infty)\\ A &\longmapsto \sup\left\{\sum_{j=1}^{n}|\mu(E_j)| \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{N} \text{ und } E_1,\dots,E_n\in\mathscr{A} \text{ paarweise disjunkt}\\ \text{mit } X=\biguplus_{j=1}^{n} E_j\end{array}\right\}\end{aligned}$$

erklärt.

Bemerkung B.2.5. Man kann zeigen, dass $\nu := |\mu|$ ein *endliches Maß* definiert, d. h. es gilt $|\nu(A)| < \infty$ für alle $A \in \mathscr{A}$. Man bezeichnet $|\mu|$ daher auch als *Variationsmaß* von μ. Siehe dazu [Rud87, Theorem 6.2 und 6.4].

Definition B.2.6. Ein komplexes Maß heißt *regulär*, falls sein Variationsmaß regulär ist.

Definition & Satz B.2.7. *Mit $\mathscr{M}(X)$ bezeichnen wir die Menge der komplexen regulären Borelmaße. $\mathscr{M}(X)$ ist sogar ein Vektorraum.*

Definition & Satz B.2.8. *Jedem Maß $\mu \in \mathscr{M}(X)$ ordnen wir seine* Variationsnorm *zu:*

$$\|\mu\|_{\mathrm{Var}} = |\mu|(X).$$

Dann ist $\big(\mathscr{M}(X), \|\cdot\|_{\mathrm{Var}}\big)$ ein Banachraum.

Beweis. Siehe z. B. [Wer05, Seite 22]. □

B.3 Signierte Maße und die Jordan-Zerlegung

Ähnlich wie wir eben einen Maßbegriff definiert haben, bei dem wir komplexe Zahlen als Werte zulassen, wollen wir auch einen Maßbegriff definieren, bei welchem reelle Zahlen als Wertebereich zugelassen sind.

Definition B.3.1. Eine Abbildung $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ heißt *signiertes Maß*, falls die σ-Additivität aus (B.1) gilt.

Wie in Definition B.2.4 sei auch $|\mu|$ für ein signiertes Maß erklärt.

Eine Konsequenz des berühmten Zerlegungssatzes von Hahn-Jordan ist der Jordansche Zerlegungssatz:

Satz B.3.2 (Jordan-Zerlegung)**.** *Es sei $\mathscr{A}$ eine σ-Algebra und $\mu\colon \mathscr{A} \to \mathbb{R}$ ein signiertes Maß. Dann gibt es eine eindeutige Zerlegung von μ in die Differenz $\mu = \mu^+ - \mu^-$ zweier (positiver[13]) Maße μ^+ und μ^-. Das Paar (μ^+, μ^-) bezeichnet man als* Jordan-Zerlegung*.*

Definition B.3.3 (Integration bezüglich komplexer und signierter Maße)**.** Ist μ ein signiertes Maß mit Jordanzerlegung $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $f\colon X \to \mathbb{K}$ messbar, dann heißt f μ-integrierbar, falls f $|\mu|$-integrierbar ist. Man setzt dann

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu^+ - \int_X f \,\mathrm{d}\mu^-.$$

Für komplexe Maße μ nimmt man eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil vor, $\mu = \mu_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i} \cdot \mu_{\mathrm{Im}}$, und setzt für $|\mu|$-integrierbares f wie üblich

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i} \int_X f \,\mathrm{d}\mu_{\mathrm{Im}}.$$

Notiz B.3.4. Auch für ein komplexes Maß μ lässt sich ein Lebesguescher Konvergenzsatz formulieren, da μ umgeschrieben werden kann zu

$$\mu = \mu_{\mathrm{Re}} + \mathrm{i} \cdot \mu_{\mathrm{Im}},$$

wobei sich dann μ_{Re} und μ_{Im} als signierte Maße mit dem Jordanschen Zerlegungssatz B.3.2 als

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{Re}} &= \mu_{\mathrm{Re}}^+ - \mu_{\mathrm{Re}}^-, \\ \text{respektive} \quad \mu_{\mathrm{Im}} &= \mu_{\mathrm{Im}}^+ - \mu_{\mathrm{Im}}^- \end{aligned}$$

[13] Man nennt ein gewöhnliches, vorzeichenloses Maß auch positiv, um Verwechslungen mit signierten und komplexen Maßen auszuschließen

schreiben lassen. Insgesamt haben wir

$$\mu = \mu_{\mathrm{Re}}^{+} - \mu_{\mathrm{Re}}^{-} + \mathrm{i} \cdot \left(\mu_{\mathrm{Im}}^{+} - \mu_{\mathrm{Im}}^{-}\right).$$

B.4 Der Satz von Riesz-Markov

Der Satz von Riesz-Markov spielt eine zentrale Rolle in unserem Beweis des messbaren Funktionalkalküls. Er charakterisiert den Dualraum der stetigen Funktionen auf einem kompakten metrischen Raum[14] Für die stetigen linearen Funktionale aus $\mathscr{C}^0(K)'$ liefert er eine Integraldarstellung:

Theorem B.4.1 (Satz von Riesz-Markov)**.** *Es sei K ein kompakter metrischer Raum und $F\colon \mathscr{C}^0(K) \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, reguläres komplexes Borelmaß μ auf K, so dass*

$$F(f) = \int_K f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

für alle $f \in \mathscr{C}^0(K)$ gilt und weiter

$$\|\mu\|_{\mathrm{Var}} = \|F\|_{\mathfrak{L}(\mathscr{C}^0(K);\mathbb{C})}$$

ist.

Bemerkung B.4.2. Tatsächlich liefert der Satz in seiner vollen Version für jedes reguläre komplexe Borelmaß auf K auch ein stetiges Funktional $F\colon \mathscr{C}^0(K) \to \mathbb{C}$. Uns interessiert aber nur die oben erwähnte Aussage.

Beweis von Theorem B.4.1. Für einen Beweis verweisen wir z. B. auf [Wer05, Theorem II.2.5], der die volle Version des Satzes liefert. □

[14] Wir halten an dieser Stelle fest, dass $K := \sigma(T)$ im Falle eines beschränkten selbstadjungierten Operators T nach Satz 6.2.8 immer Teilmenge eines kompakten Intervalls der reellen Zahlen ist.

B.5 Dynkin-Systeme

Definition B.5.1. Eine Familie $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ heißt *Dynkin-System* auf X, falls gilt:

(Dyn1) $X \in \mathscr{D}$,

(Dyn2) $E, F \in \mathscr{D}$ mit $E \subset F$ impliziert $F \backslash E \in \mathscr{D}$,

(Dyn3) Sind $E_1, E_2, \ldots \in \mathscr{D}$ paarweise disjunkt, dann ist auch $E := \biguplus_{k \in \mathbb{N}} E_k \in \mathscr{D}$.

Definition B.5.2. Ein Mengensystem $\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ heißt *durchschnittsstabil*, falls für je zwei Mengen $A, B \in \mathscr{E}$ auch ihr Durchschnitt $A \cap B$ in $\mathscr{E}$ ist.

Definition & Satz B.5.3. *Zu jedem Mengensystem $\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ gibt es ein kleinstes, $\mathscr{E}$ enthaltendes Dynkin-System $\delta(\mathscr{E})$. Es heißt das von $\mathscr{E}$* erzeugte Dynkin-System*.*
Analog gibt es zu jedem Mengensystem $\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine kleinste, $\mathscr{E}$ enthaltende σ-Algebra $\sigma(\mathscr{E})$. Dies ist die von $\mathscr{E}$ erzeugte σ-Algebra*.*

Satz B.5.4. *Ist das Mengensystem $\mathscr{E} \subset \mathfrak{P}(X)$ durchschnittsstabil, so ist das von $\mathscr{E}$ erzeugte Dynkin-System gleich der von $\mathscr{E}$ erzeugten σ-Algebra; in Zeichen: $\delta(\mathscr{E}) = \sigma(\mathscr{E})$.*

Beweis. Siehe z. B. [Els11, Satz 6.8]. □

Korollar B.5.5. *Es sei $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System, das einen durchschnittsstabilen Erzeuger $\mathscr{U}$ der σ-Algebra $\mathscr{A}$ umfasst (es gelte also die Inklusion $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}$). Dann ist $\mathscr{D} = \mathscr{A}$.*

Beweis. Da $\mathscr{D}$ bereits ein Dynkin-System ist, gilt $\delta(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$ nach Definition & Satz B.5.3. Eben jener Satz liefert auch $\mathscr{D} \supset \delta(\mathscr{U})$, da $\mathscr{D} \supset \mathscr{U}$ ist und $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System ist. Mit Satz B.5.4 folgt nun

$$\mathscr{D} \supset \delta(\mathscr{U}) = \sigma(\mathscr{U}) = \mathscr{A}.$$

Mit der trivialen Inklusion $\mathscr{D} \subset \mathscr{A}$ folgt die Behauptung. □

ANHANG C

Funktionalanalytische Resultate

Zum Schluss geben wir noch einige Resultate aus der Funktionalanalysis an, die entweder sehr wichtig bei Beweisen in dieser Arbeit sind, oder grundlegend über Kenntnisse hinausgehen, die in einführenden Veranstaltungen erworben werden.

C.1 Ungleichungen

Satz C.1.1 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Ist* $(\mathcal{X}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ *ein Prähilbertraum, so gilt für alle* $x, y \in \mathcal{X}$ *die* Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle x|y\rangle| \leq \sqrt{\langle x|x\rangle}\,\sqrt{\langle y|y\rangle},$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn x *und* y *linear abhängig sind.*

Notiz C.1.2. Unter Verwendung der vom Skalarprodukt induzierten Norm

$$\|x\| := \sqrt{\langle x|x\rangle}$$

erhält man folgende äquivalente Formulierung der Ungleichung: Für alle $x, y \in \mathcal{X}$ gilt

$$|\langle x|y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Definition C.1.3. Wir nennen $p \in [1, \infty]$ *konjugierten Index* zu $q \in [1, \infty]$, falls

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

gilt. Wir lassen dabei formal auch $p = \infty$ zu und definieren den konjugierten Index als $q = 1$ und vice versa.

Bemerkung & Beispiel C.1.4. Historisch interessant ist das einfachste Beispiel eines konjugierten Index: Die Zahl 2 ist zu sich selbst konjugiert. Die nachfolgende Hölder-Ungleichung ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Satz C.1.5 (Hölder-Ungleichung)**.** *Es sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ ein Maßraum und p konjugierter Index zu q. Weiter sei $f \in L^p(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ und $g \in L^q(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. Dann ist*

$$fg \in L^1(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$$

und es gilt die Hölder-Ungleichung

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Korollar C.1.6 (Hölder-Ungleichung für endliche Summen)**.** *Es seien $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und p konjugierter Index zu q. Dann ist*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweisidee. Wir betrachten den Maßraum

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \Big(\{1, \ldots, n\}, \mathfrak{P}\big(\{1, \ldots, n\}\big), \zeta \Big),$$

wobei $\mathfrak{P}(\{1, \ldots, n\})$ die *Potenzmenge* von $\{1, \ldots, n\}$ bezeichne und

$$\begin{aligned} \zeta \colon \mathfrak{P}\big(\{1, \ldots, n\}\big) &\longrightarrow [0, \infty] \\ A &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_A(j) \end{aligned}$$

das *Zählmaß* auf dem Messraum $\Big(\{1,\dots,n\},\mathfrak{P}\big(\{1,\dots,n\}\big)\Big)$ ist. Mit der Hölder-Ungleichung folgt die Behauptung. □

C.2 Hauptsätze für beschränkte Operatoren auf Banachräumen

Satz C.2.1 (Satz von Banach-Steinhaus). *Es sei $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ein Banachraum, $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ ein normierter Raum, sowie $\mathcal{T}\subset\mathfrak{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ eine Familie stetiger Operatoren mit*

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}\|Tx\|_{\mathcal{Y}}<\infty\quad \text{für alle } x\in\mathcal{X}.$$

Dann ist $\mathcal{T}$ eine beschränkte Menge in $\mathfrak{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, d. h. es gilt

$$\sup_{T\in\mathcal{T}}\|T\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})}<\infty.$$

Satz C.2.2 (Satz vom abgeschlossenen Graphen). *Es seien $(\mathcal{X},\|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ und $(\mathcal{Y},\|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ zwei Banachräume und $T\colon\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ ein Operator mit* $\mathrm{Dom}(T)=\mathcal{X}$. *Dann ist T genau dann beschränkt, wenn T abgeschlossen ist.*

C.3 Hilberträume

In einem Hilbertraum lässt sich der analytische Begriff der Dichtheit mittels einer algebraischen Eigenschaft – der Orthogonalität – beschreiben. Das folgende Lemma, das diesen Zusammenhang beschreibt, wollen wir daher auch mit „Algebraisierung der Analysis“ bezeichnen.

Fundamentallemma C.3.1 (Algebraisierung der Analysis). *Ist $(\mathcal{H},\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{H}})$ ein Hilbertraum und $U\subset\mathcal{H}$ ein Untervektorraum, dann ist U genau dann dicht in $\mathcal{H}$, wenn das* orthogonale Komplement *von U trivial ist, d. h. $U^\perp=\{0\}$ gilt.*

Beweis. Ist $\mathcal{H}=\overline{U}$ und $x\in U^\perp$, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset U$ mit $x_n\to x$ für $n\to\infty$. Mit der Stetigkeit des Skalarproduktes ergibt sich

$$\|x\|_{\mathcal{H}}^2=\langle x|x\rangle_{\mathcal{H}}=\lim_{n\to\infty}\langle x|x_n\rangle_{\mathcal{H}}=0,$$

also erhalten wir $x = 0$.

Es sei nun andererseits $U^\perp = \{0\}$. Dann gilt auch $\overline{U}^\perp = \{0\}$. Da $\overline{U}$ eine abgeschlossene Menge ist, gilt
$$\mathcal{H} = \overline{U} \oplus \overline{U}^\perp = \overline{U}. \qquad \square$$

Ebenfalls eine zentrale Rolle in einigen Beweisen der vorliegenden Arbeit spielt eine Verallgemeinerung des Satzes des Pythagoras:

Satz C.3.2 (Verallgemeinerter Satz des Pythagoras). *Ist $\{u_1, \dots, u_N\}$ ein Orthogonalsystem paarweiser orthogonaler Vektoren u_k im Hilbertraum $\mathcal{H}$, dann gilt*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} u_k \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Mit dem verallgemeinerten Satz des Pythagoras lässt sich folgender Hilfssatz zeigen:

Hilfssatz C.3.3. *Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $(P_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ eine Folge von Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{H}$ mit $P_n P_m = 0$ für $n \neq m$. Dann konvergiert die Reihe*
$$P := \sum_{n\in\mathbb{N}} P_n$$
im Sinne der starken Operatortopologie, d. h. es gilt

$$Px = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P_n x \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{H}\,.$$

Beweis. Sei $x \in \mathcal{H}$ im Folgenden fest. Es ist leicht nachzuweisen, dass $P_n P_m = P_m P_n = 0$ für $n \neq m$ impliziert, dass $\sum_{n=1}^{N} P_n$ eine Orthogonalprojektion ist. Insbesondere haben wir $\left\|\sum_{n=1}^{N} P_n\right\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} \leq 1$ mithilfe von Lemma 5.1.2. Somit erhalten wir mit dem verallgemeinerten Satz des Pythagoras C.3.2

$$\sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{n=1}^{N} P_n x \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|x\|_{\mathcal{H}}^2,$$

was bedeutet, dass $\left(\sum_{n=1}^{N} \|P_n x\|_{\mathcal{H}}^2\right)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Insbesondere ist die Folge Cauchy in $\mathbb{R}$. Für $M \leq N$ erhalten wir weiter

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} P_n x - \sum_{n=1}^{M} P_n x\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} P_n x\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n=M+1}^{N} \|P_n x\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

Demnach ist auch $\left(\sum_{n=1}^{N} P_n x\right)_{N\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{H}$ und als solche konvergent gegen $Px \in \mathcal{H}$. □

Einer der wichtigsten Sätze in den Hauptkapiteln ist der Rieszsche Darstellungssatz. Er liefert für alle stetigen linearen Funktionale in einem Hilbertraum eine Darstellung durch ein Skalarprodukt.

Satz C.3.4 (Rieszscher Darstellungssatz)**.** *Es sei $\mathcal{H}$ ein $\mathbb{K}$-Hilbertraum. Für jedes stetige lineare Funktional $F\colon \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ existiert ein eindeutig bestimmtes darstellendes Element $y_F \in \mathcal{H}$ mit*

$$F(x) = \langle x|y_F\rangle \quad \textit{für alle } x \in \mathcal{H}$$

und $\|F\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \|y_F\|_{\mathcal{H}}$.

Um den Satz von Lax-Milgram formulieren zu können, erläutern wir, was wir unter einer Sesquilinearform verstehen wollen.

Definition C.3.5. Sind V und W komplexe Vektorräume, so nennen wir eine Abbildung $B\colon V \times W \to \mathbb{C}$ *sesquilinear* (bzw. *Sesquilinearform*), falls B linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument ist[15].

Satz C.3.6 (Satz von Lax-Milgram)**.** *Es sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum und $B\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

[15]In der Physik ist es üblich dies genau andersherum zu definieren – dies ist jedoch nur ein formaler Unterschied. Immer jedoch ist B eine *Linearform* bezüglich des einen und eine *Antilinearform* bezüglich des anderen Arguments. Der Name Sesquilinearform, abgeleitet vom lateinischen Wort sēsqui („anderthalb“), beschreibt dies sehr passend.

(i) B ist stetig.

(ii) Es existiert eine reelle Zahl $M \geq 0$, sodass für alle $x, y \in \mathcal{H}$ gilt:

$$|B(x,y)| \leq M\|x\|\|y\|. \tag{C.1}$$

(iii) Es existiert genau ein beschränkter Operator $T \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ mit

$$B(x,y) = \langle Tx|y\rangle_{\mathcal{H}} \quad \textit{für alle } x, y \in \mathcal{H}\,.$$

Für die Operatornorm von T wie unter (iii) gilt dann: $\|T\|$ ist die kleinste Konstante M für die (C.1) *gilt.*

Beweis. Wir zeigen die einzelnen Implikationen separat.

„(i) $\longleftarrow$ (ii)“: Es sei $(x,y) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ein beliebiger Punkt und $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ eine Folge mit $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x,y)$. Nach Voraussetzung existiert eine reelle Zahl $M \geq 0$ mit

$$\begin{aligned}
|B(x_n,y_n) - B(x,y)| &= |B(x,y_n) + B(x_n - x, y_n) + B(x, y_n - y) - B(x,y_n)| \\
&\leq |B(x_n - x, y_n) + B(x, y_n - y)| \\
&\leq M\|x_n - x\|\|y_n\| + M\|x\|\|y_n - y\| \\
&\xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Somit ist B stetig.

„(i) $\longrightarrow$ (ii)“: Wir wollen den Satz von Banach-Steinhaus C.2.1 anwenden. Dazu betrachten wir die Familie

$$\mathcal{T} := \Big\{B(\,\cdot\,,y)\,\Big|\, y \in \mathcal{H},\ \|y\|_{\mathcal{H}} = 1\Big\}.$$

Nach Annahme besteht diese Familie wegen der Stetigkeit von $B(\,\cdot\,,y)$ aus beschränkten Operatoren von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{C}$.

Für festes $x \in \mathcal{H}$ gilt wegen der Stetigkeit von $B(x, \cdot\,)$ zudem

$$|B(x,y)| \leq M_x < \infty \quad \text{für alle } y \in \mathcal{H} \text{ mit } \|y\|_{\mathcal{H}} = 1 \text{ und alle } B \in \mathcal{T}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes von Banach-Steinhaus C.2.1 sind damit erfüllt. Demnach ist

$$\sup_{B \in \mathcal{T}} \|B(\,\cdot\,, y)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H};\mathbb{C})} < \infty.$$

Nach Definition der Menge $\mathcal{T}$ ist also

$$|B(x,y)| \leq M\|x\|\|y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathcal{H},$$

was zu zeigen war.

„(i) $\longleftarrow$ (iii)“: Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung C.1.1 ergibt sich

$$|B(x,y)| = |\langle Tx|y\rangle| \leq \|Tx\|\|y\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|.$$

Das heißt (ii) gilt, und nach der bereits gezeigten Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (ii) gilt damit auch (i).

„(i) $\longrightarrow$ (iii)“: Wir verwenden den Rieszschen Darstellungssatz C.3.4. Wir definieren $S_y(x) := B(x,y)$. Für fixiertes $y \in \mathcal{H}$ ist S_y gemäß Annahme ein beschränktes lineares Funktional von $\mathcal{H}$ nach $\mathbb{C}$:

- Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} S_y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= B(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) \\ &= \lambda_1 B(x_1, y) + \lambda_2 B(x_2, y) \\ &= \lambda_1 S_y(x_1) + \lambda_2 S_y(s_2). \end{aligned}$$

  Dies zeigt die Linearität von S_y.

- Zum Nachweis der Stetigkeit von S_y betrachte die nach Voraussetzung gültige Gleichungskette

$$\begin{aligned}\|S_y\| = \sup_{\|x\|=1} |S_y(x)| &= \sup_{\|x\|=1} |B(x,y)| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} M\,\|x\|\,\|y\| = M\|y\|.\end{aligned} \tag{C.2}$$

Somit existiert ein eindeutiges darstellendes Element $\widetilde{y} = \widetilde{y}(y) \in \mathcal{H}$, mit $\|\widetilde{y}(y)\| = \|S_y\|$ und

$$S_y(x) = B(x,y) = \langle x|\widetilde{y}\rangle \quad \text{für alle } x \in \mathcal{H}\,.$$

Die Abbildung T wollen wir nun gerade so definieren, dass diese jedem y das korrespondierende eindeutige Element $\widetilde{y}$ zuordnet. Wir setzen also $T\colon\ \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ mit $Ty := \widetilde{y}$. Man beachte, dass die Abbildung T wegen der Eindeutigkeit des darstellenden Elements $\widetilde{y}$ wohldefiniert ist. Es bleibt zu zeigen, dass T in der Tat linear (also ein Operator) und beschränkt ist:

- Es seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ und $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\Big\langle x \,\Big|\, T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)\Big\rangle &= B(x, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \overline{\lambda_1} B(x,y_1) + \overline{\lambda_2} B(x,y_2) \\ &= \overline{\lambda_1}\langle x|Ty_1\rangle + \overline{\lambda_2}\langle x|Ty_2\rangle = \langle x|\lambda_1 Ty_1 + \lambda_2 Ty_2\rangle\end{aligned}$$

  für alle $x \in \mathcal{H}$. Aus den Skalarprodukteigenschaften folgt dann $T(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 Ty_1 + \lambda_2 Ty_2$.

- Die Beschränktheit von T sieht man wie folgt ein: Es ist

$$\|T\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ty\|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|\widetilde{y}(y)\|}{\|y\|} = \sup_{y\neq 0} \frac{\|S_y\|}{\|y\|} \overset{\text{(C.2)}}{\leq} \frac{M\|y\|}{\|y\|} = M.$$

  Dies zeigt nicht nur die Beschränktheit von T, sondern auch, dass $\|T\|$ in der Tat das kleinste $M \in \mathbb{R}$ ist, für das (C.1) gilt.

Angenommen es gibt noch einen weiteren Operator $S \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$, für den $B(x,y) = \langle Sx|y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ ist. Für alle $x, y \in \mathcal{H}$ ist dann auch

$$0 = B(x,y) - B(x,y) = \langle x|Tx\rangle - \langle x|Sx\rangle = \Big\langle x \,\Big|\, (T-S)y\Big\rangle.$$

Somit ist $(T - S)y$ orthogonal zu jedem $x \in \mathcal{H}$, also muss für alle $y \in \mathcal{H}$ die Gleichung $(T - S)y = 0$ gelten. Dies wiederum bedeutet $T = S$. $\square$

Literaturverzeichnis

[Att] Attal, Stéphane: *Lectures in Quantum Noise Theory – Lecture 1: Operator and Spectral Theory.* Institut Camille Jordan, Université Lyon, Frankreich : Vorlesungsmanuskript. `http://math.univ-lyon1.fr/~attal/Op_and_Spect.pdf`, Abruf: 19.08.2015.

[Cer10] Cerdà, Joan: *Linear Functional Analysis.* Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2010.

[DR12] Denk, Robert ; Racke, Reinhard: *Kompendium der Analysis – Ein kompletter Bachelor-Kurs von Reellen Zahlen zu Partiellen Differentialgleichungen: Band 2: Maß- und Integrationstheorie, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Partielle Differentialgleichungen.* Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2012.

[DS64] Dunford, Nelson ; Schwartz, Jacob T.: *Linear Operators – Part II: Spectral theory, self adjoint operators in Hilbert space.* 2. Ausgabe. New York, London : Interscience Publishers, 1964.

[Els11] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* 7. korrigierte und aktualisierte Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 2011

[Eva10] Evans, Lawrence C.: *Partial Differential Equations.* 2. Ausgabe. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2010.

[FK98] Fischer, Helmut ; Kaul, Helmut: *Mathematik für Physiker – Band 2: Gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen, mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Stuttgart : Teubner Verlag, 1998.

[Hal57] HALMOS, Paul R.: *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplication*. 2. Ausgabe. New York : Chelsea Publishing Company, 1957.

[Hal63] HALMOS, Paul R.: What Does the Spectral Theorem Say? In: *The American Mathematical Monthly* 70 (1963), Nr. 3, S. 241–247.

[Ham08] HAMHALTER, Jan: *Classes of Operators on Hilbert Spaces*. Department of Mathematics, Faculty of Electrical Engineering, Tschechische Technische Universität Prag : Erweitertes Vorlesungsmanuskript. `http://math.feld.cvut.cz/hamhalte/malta07.pdf`. Version: 2008, Abruf: 19.08.2015.

[Hel10] HELFFER, Bernard: Spectral theory and applications. An elementary introductory course. Bucarest Version. (2010). `http://www.math.u-psud.fr/~helffer/m2bucarest2010.pdf`, Abruf: 19.08.2015.

[Kab11] KABALLO, Winfried: *Hilberträume und Quantenmechanik – II. Unbeschränkte Operatoren und Observable der Quantenmechanik*. Vorlesungsmanuskript 2011. `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsi/kaballo/Hilbert/Kap11-13.pdf`. Version: 2011, Abruf: 19.08.2015.

[Kab14] KABALLO, Winfried: *Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Distributionen – lokalkonvexe Methoden – Spektraltheorie*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2014

[Kal14] KALTENBÄCK, Michael: *Funktionalanalysis 2*. Institut für Analysis und Scientific Computing, Technische Universität Wien, Österreich : Vorlesungsmanuskript. `http://www.asc.tuwien.ac.at/funkana/skripten/main.pdf`. Version: 2014, Abruf: 19.08.2015.

[Kat95] KATO, Tosio: *Perturbation Theory for Linear Operators*. Neuauflage der Version von 1980. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1995

[Kow09] KOWALSKI, Emmanuel: *Spectral theory in Hilbert spaces.* Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, Schweiz : Vorlesungsmanuskript FS 2009. `https://people.math.ethz.ch/~kowalski/spectral-theory.pdf`. Version: 2009, Abruf: 19.08.2015.

[Kv13] KERNER, Hans ; VON WAHL, Wolf: *Mathematik für Physiker.* Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2013.

[Lüt11] LÜTKEBOHMERT, Werner: *Lineare Algebra.* Institut für Reine Mathematik, Universität Ulm : Vorlesungsmanuskript WS 2009/10, 2011.

[Mut15] MUTHUKUMAR, T.: *Sobolev Spaces and Applications.* Department of Mathematics & Statistics, Indian Institute of Technology Kanpur, Indien : Vorlesungsmanuskript. `http://home.iitk.ac.in/~tmk/courses/mth656/main.pdf`. Version: 2015, Abruf: 19.08.2015.

[Puz13] PUZIO, Raymond: Operator norm of multiplication operator on L^2. (2013). `http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/37798.pdf`, Abruf: 19.08.2015.

[RS80] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume 1: Functional Analysis.* San Diego : Academic Press, 1980.

[Rud87] RUDIN, Walter: *Functional Analysis.* New York, St. Louis [u.a.] : McGraw-Hill Book Company, 1987.

[Sch06] SCHICK, Thomas: *Kurz-Skript zu „Funktionalanalysis I“.* Mathematisches Institut, Fachbereich Mathematik, Universität Göttingen : Vorlesungsskript. `http://www.uni-math.gwdg.de/schick/teach/FA.pdf`. Version: 2006, Abruf: 19.08.2015.

[Sch12] SCHMÜDGEN, Konrad: *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space.* Dordrecht, Heidelberg, New York, London : Springer Science & Business Media, 2012.

[Tie15] TIETZE, Heinrich: Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 145 (1915)

[Wei13] WEIDMANN, Joachim: *Lineare Operatoren in Hilberträumen: Teil 1 Grundlagen*. Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag, 2013.

[Wei15] WEIKARD, Rudi: *Real Analysis*. Department of Mathematics, University of Alabama at Birmingham, Vereinigte Staaten von Amerika : Lecture notes for MA 645/646. Vorlesungsmanuskript. `http://people.cas.uab.edu/~weikard/teaching/reals.pdf`. Version: 2015, Abruf: 19.08.2015.

[Wer05] WERNER, Dirk: *Funktionalanalysis*. 5. Auflage. Berlin, Heidelberg, New York : Springer-Verlag, 2005.

[Yos95] YOSIDA, Kôsaku: *Functional Analysis*. Neuauflage der Version von 1980. Berlin, Heidelberg : Springer, 1995.

Index

A

absolut stetig **43**, 70
Adjungierte 29
  Abgeschlossenheit 31
  Eindeutigkeit 29
  Fundamentaleigenschaft 30
  Hilbertraumadjungierte 29, 30
  selbstadjungiert 30
Algebra über einem Körper 105
  $*$-Algebra . *siehe* involutive Algebra
  involutive Algebra 106
Algebrenhomomorphismus .... *siehe* involutiver Algebrenhomomorphismus
antilinear 6, 119

B

Banachraum 28
beschränkte Borel-messbare Funktionen $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ und $\mathscr{B}(M)$ 92
beschränkte Variation **56**, 57, 59
Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ 6, 109

D

diagonalisierbar 75
Differentialoperator 17, 42
durchschnittsstabil 113
Dynkin-System 113
  erzeugtes 113

E

Eigenvektor . *siehe auch* Eigenwert, 40, 75, 91
Eigenwert *siehe auch* Spektrum, 40, 90
  approximativer .... *siehe auch* Punktspektrum, approximatives, 40
  geometrische Vielfachheit 40
  geometrischer Eigenraum 40

F

Fundamentalsatz der Algebra 81
Funktionalkalkül
  messbarer 94
  polynomialer 79
  stetiger 85

G

Graph 18
  Abgeschlossenheit 18
  $\mathrm{Gr}(\overline{T}) = \overline{\mathrm{Gr}(T)}$ 25, 27
  Graphennorm 28

H

Hilbertraum 6

kartesisches Produkt zweier Hilberträume . . . 19
Skalarprodukt . . . 6
holomorph . . . 42

I

Idempotenz . . . 50
Identität . . . 7
Indikatorfunktion . . . 7
Integral
$\int_\alpha^\beta f \, \mathrm{d}E$ . . . 72
$\int_\alpha^\beta f(x) \, \mathrm{d}g(x)$ . . . 60
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}\langle E_\lambda x \mid y\rangle_{\mathcal{H}}$ . . . 59
$\int_{(\alpha,\beta]} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda(x)$ . . . 64
$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, \mathrm{d}E_\lambda(x)$ . . . 67
Gewichtsfunktion . *siehe* Integrator
Integrand . . . 60
Integrator . . . 60
operatorwertig . . . 49, **64**
Partitionspunkte . . . 65
Riemann-Integral . . . 60
Riemann-Stieltjes . . . 49, 59
Riemann-Summe . . . 59, 65
Zwischenpunkte . . . 65
Involution . . . 106
involutiver Algebrenhomomorphismus 106
involutiver Homomorphismus . . . 106

J

Jordan-Zerlegung . . . 111

K

Komposition
von Abbildungen . . . 7
von Operatoren . . . 15

L

Laplace-Operator . . . 11, 20
Lebesgue-Raum . . . 6

M

Maß
endliches . . . 110
innere und äußere Regularität *siehe* reguläres Maß
komplexes . . . 108
komplexes Borelmaß . . . 109
positives . . . 111
reguläres . . . 109, 110
signiertes . . . 110
Variation . . . 109
Variationsmaß . . . 110
Multiplikationsoperator . . . 13, 31, 70
Spektraldarstellung . . . 71

O

Observable . . . 1
Operator
abgeschlossener . . . 18–20
abschließbarer . . . 18, 24, 26, 27
Abschluss . . . 24, 27
beschränkter . . . 10
Bild . . . 10
Definitionsbereich . . . 10
dicht definierter . . . 17, 18
dichter Definitionsbereich . . . *siehe* dicht definierter
Distributivgesetz . . . 16
Einschränkung . . . 15
Erweiterung . . . 15
Gleichheit zweier Operatoren . . . 15
injektiver . . . 16

Inverses . . . 16
invertierbarer . . . *siehe* Inverses
Kern . . . 10
kompakter . . . 90
komplexes Vielfaches . . . 14
Komposition . . . 15
Multiplikation . . *siehe* Komposition
nicht notwendigerweise beschränkter . . . 10
nicht-negativ . . . 53
Norm . . . 50
normaler . . . 37
Nulloperator . . . 14
Potenzen . . . 15
Produkt . . . *siehe* Komposition
stetige Fortsetung . . . 17
stetiger linearer *siehe* beschränkter
Summe . . . 14
symmetrischer . . . 35
unbeschränkter . . . 9, 11
unstetiger . . . *siehe* unbeschränkter
Wertebereich . . . 10
orthogonales Komplement . . . 117
Orthonormalbasis . . . 75

P

$P(T)$ . . . 79, 82
$\|P(T)\|_{\mathfrak{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} | P(\lambda) |$ . . . 82
Partitionen . . . 57
Polynome $\mathbb{C}[X]$ . . . 79
Involution . . . 79
Projektion . . . 50
Orthogonalprojektion . . . 50
$\mathrm{Proj}(\mathcal{H})$ . . . 50
projektorwertig . . . 61
Projektor . . . *siehe* Projektion

Q

Quantenmechanik . . . 1, 33
Bra-Ket-Notation . . . 6
Ortsoperator . . . 33

R

Reihe
absolute Konvergenz . . . 108
Umordnung . . . 108
unbedingte Konvergenz . . . 108
Resolution of the identity . . . *siehe* Spektralschar
Resolvente . . . 39, 41
Resolventengleichung . . . **42**, 78
Resolventenmenge . . . *siehe auch* Spektrum, 39
leere . . . 42
Riemann-Summen . . . *siehe* Integral
Rieszscher Darstellungssatz . . . 119

S

Satz
Approximationssatz von Weierstraß 83
des Pythagoras . . . 118
Fortsetzungssatz von Tietze-Urysohn . . . 84
vom abgeschlossenen Graphen . 20, 28, **117**
von Banach-Steinhaus . . . **117**, 120
von der majorisierten Konvergenz *siehe* Satz von Lebesgue
von Hellinger-Toeplitz . . . 35
von Lax-Milgram . . . 119

von Lebesgue 31, 53, **107**, 111
Selbstadjungiert . . . . *siehe* Adjungierte, selbstadjungiert
Sesquilinearform 119
σ-additiv 108
Skalarprodukt 6
Sobolevraum 7
schwache Ableitung 7, 23
spectral representation . . . . *siehe* Spektraldarstellung
spectral resolution . . . . *siehe* Spektraldarstellung
Spektralabbildungssatz für Polynome 80
Spektralauflösung . . . . *siehe* Spektraldarstellung
Spektraldarstellung 69, 75
Spektralmaß 60
Spektralmaßraum 61
Zusammenhang zu Spektralscharen 63
Spektralradius 46
Spektralradiusformel 47
Spektralsatz **73**
für beschränkte normale Operatoren 77
für beschränkte selbstadjungierte Operatoren 77
für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren 77
Reduktion auf beschränkten Fall 77
Spektralschar 49, **50**
Zusammenhang zu Spektralmaßen 63
Spektralzerlegung . . . . *siehe* Spektraldarstellung
Spektrum 39
approximatives Punktspektrum . 40
isolierter Punkt 90
kontinuierliches 39
leeres 42
nicht-leeres 45
Punktspektrum 39
rein-reell 44
Residualspektrum 39
Restspektrum *siehe* kontinuierliches
eines selbstadjungierten Operators 44

T

Testfunktion 6
Träger 6
Treppenfunktionen $\mathscr{T}([\alpha, \beta]; \mathbb{C})$ 72

U

Ungleichung
Cauchy-Schwarz 50, **115**
Hölder 23, 58, **116**
unitäre Matrix 75

V

Variationsfunktion . . . *siehe* beschränkte Variation

Satz: $\LaTeX\,2_\varepsilon$, 20. August 2015.

$\because$