Projet d'optimisation linéaire

Démixage d'une image hyperspectrale

Deadline: 6 décembre 2019

1 Description du problème

Une image couleur contient l'information correspondant à trois longueurs d'ondes (rouge, vert et bleu). Les images hyperspectrales comportent davantage de longueurs d'ondes (plus de 100 en général). Ces images permettent donc d'identifier des détails invisibles à l'oeil nu et sont utilisées dans de nombreuses applications industrielles, militaires et médicales, voir par exemple `https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperspectral_imaging`.

Pour chaque pixel d'une image hyperspectrale, on mesure la quantité de lumière réfléchie à chaque longueur d'onde: on obtient ainsi ce qu'on appelle la signature spectrale du pixel. On a donc une image différente pour chaque longueur d'onde.

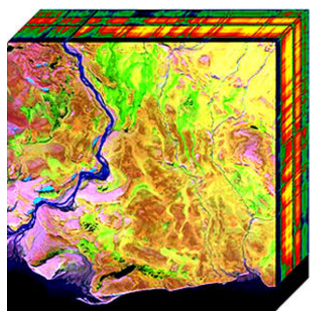

Figure 1: Image hyperspectrale.

Supposons que l'on ait une image hyperspectrale représentée par une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ où m est le nombre de longeurs d'onde et n le nombre de pixel. Ainsi, la $i$ème colonne de M, dénotée $M(:,i)$, est le vecteur contenant la signature spectrale du $i$ème pixel.

Supposons également que l'on connaisse la signature spectrale des matériaux présents dans cette image (il y a des bases de données existantes pour cela): notons $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$ la matrice dont chaque colonne contient la signature spectrale d'un matériau, ainsi r est le nombre de matériaux.

On peut montrer que, pour tout pixel i, on aura, s'il n'y a pas de bruit,

$$M(:,i) \; = \; Ux \; = \; \sum_{k=1}^{r} U(:,k)x(k), \qquad \text{pour } x \geq 0.$$

La raison est que la signature spectrale de chaque pixel résulte de la combinaison linéaire des signatures spectrales des matériaux contenus dans l'image. Par exemple, si le pixel i contient 50% du premier matériau et 50% du deuxième, on aura $x(1) = 0.5$, $x(2) = 0.5$ et $x(k) = 0$ pour tout $k \geq 3$. Le vecteur x est appelé le vecteur d'abondance du pixel i et permet de savoir quels matériaux le pixel i contient.

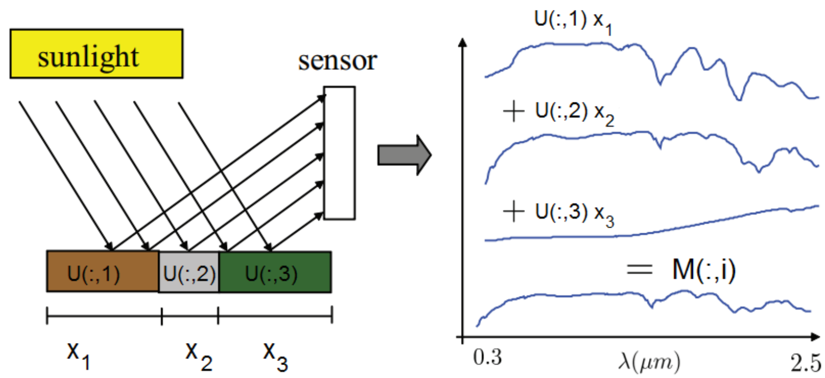

Figure 2: Signature spectrale d'un pixel comme une combinaison linéaire, avec poids positifs, des signatures spectrales des matériaux contenus dans l'image.

Finalement, étant donné une image hyperspectrale M et les signatures spectrales U des matériaux contenus dans l'image, on veut calculer les vecteurs d'abondance de tous les pixels: Pour tout $1 \leq i \leq n$, on veut résoudre

$$\min_{x \in \mathbb{R}^r} \; ||M(:,i) - Ux||_1 \quad \text{tel que} \quad x \geq 0. \tag{1}$$

Ceci est un problème de régression linéaire en norme 1 avec contraintes de positivité, où $||y||_1 = \sum_i |y_i|$. On utilise ici la norme 1 pour évaluer l'erreur car on suppose que le bruit présent dans l'image est Poissonien (cf. cours de math' et de stat').

En définissant la matrice $X \in \mathbb{R}^{r \times n}$ dont chaque colonne contient la solution du problème ci-dessus pour chaque i, on veut résoudre

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{r \times n}} \; ||M - UX||_1 \quad \text{tel que} \quad X \geq 0,$$

où $||M - UX||_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |M - UX|_{ij}$.

L'objectif de ce projet est l'étude du problème (1) (modélisation et résolution), et ainsi de pouvoir identifier les matériaux que chaque pixel contient dans l'image hyperspectrale du téléscope Hubble (qui contient 8 matériaux).

2 Questions

1. Modélisez le problème comme un problème d'optimisation linéaire. Expliquez votre raisonnement.
2. Ecrivez ce problème linéaire sous forme standard.
3. Utilisez Octave[1] et la fonction `glpk` pour résoudre ce problème. Affichez le résultat de démixage que vous avez obtenu afin d'identifier les matériaux que chaque pixel contient dans l'image hyperspectrale du téléscope Hubble (qui contient 8 matériaux).
4. La solution obtenue est-elle un sommet du polyèdre correspondant? Justifiez.

3 Aller plus loin

On vous donne maintenant une nouvelle matrice M: elle correspond à une image du cerveau d'un patient attein d'une tumeur (Tumor.mat). L'objectif est de séparer les tissus cancéreux des tissus sains afin de pouvoir opérer le patient en iradiant les tissus cancéreux. Dans cette image, il y a donc deux 'matériaux' présents dans les pixels. Cependant, on ne connait pas la signature spectrale de ces deux tissus. Un manière de faire est de prendre U comme une variable et résoudre

$$\min_{U \in \mathbb{R}^{r \times n}, X \in \mathbb{R}^{r \times n}} ||M - UX||_1 \quad \text{tel que} \quad X \geq 0 \text{ et } U \geq 0. \tag{2}$$

Comment pourriez-vous utiliser le code précedemment dévelopées pour résoudre ce problème? Pourrez-vous sauver ce patient en identifiant la zone tuméreuse (qui a une forme plutôt ovale)? Affichez le résultat de séparation que vous avez obtenu et essayer d'identifier la tumeur.

Consignes. Le travail se réalise par groupe de 2 (*un* groupe de 3 est autorisé si nécessaire). Veuillez fournir avec le rapport les codes implémentés en annexe. Le tout est à envoyer pour le 6 décembre à valentin.leplat@umons.ac.be.

[1] Octave est un langague extrêment similaire à Matlab, excepté qu'Octave est un logiciel libre (=gratuit); voir par exemple `https://www.gnu.org/software/octave/`. Cependant, il est également possible de faire le projet en Matlab en utilisant la fonction `linprog`.