

# BỘ TÀI LIỆU

## GIẢI TÍCH 2

Tóm tắt lý thuyết  
Bài tập tự luyện

PHIÊN BẢN 2024-2025  
DÀNH CHO NHÓM NGÀNH 1  
SINH VIÊN ĐH BÁCH KHOA HÀ NỘI

## **MỤC LỤC**

### **PHẦN 1: TỔNG QUAN LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Chương 1: Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học	3
Chương 2: Tích phân bội .....	19
Chương 3: Tích phân phụ thuộc tham số .....	57
Chương 4: Tích phân đường .....	70
Chương 5: Tích phân mặt .....	83
Chương 6: Lý thuyết trường .....	94

## Chương 1. Các ứng dụng của phép tính vi phân trong hình học

### I. Ứng dụng trong hình học phẳng

#### 1. Điểm kì dị

- Cho đường cong (L) xác định bởi phương trình  $f(x, y) = 0$ . Điểm  $M(x_0, y_0)$  thuộc (L) được gọi là điểm chính quy của đường cong (L) nếu tồn tại các đạo hàm riêng  $f'_x(M), f'_y(M)$  không đồng thời bằng 0

$$(f'_x(M))^2 + (f'_y(M))^2 > 0$$

- Nếu (L) được cho dưới dạng đường cong tham số  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  thì điểm  $M(x(t_0), y(t_0))$  thuộc (L) được gọi là điểm chính quy của đường cong nếu các đạo hàm  $x'(t_0), y'(t_0)$  không đồng thời bằng 0

$$(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2 > 0$$

- Một điểm không phải là điểm chính quy được gọi là điểm kì dị.

#### 2. Phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến

- Đường cong cho bởi phương trình  $f(x, y) = 0$
- Phương trình tiếp tuyến

$$f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)}$$

**NOTE:**  $\vec{n} = (f'_x(M), f'_y(M))$  là vector pháp tuyến của đường cong tại điểm M

- Đường cong cho dưới dạng tham số  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$
- Phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}$$

- Phương trình pháp tuyến

$$x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) = 0$$

NOTE:  $\vec{n} = (x'(t_0), y'(t_0))$  là vector tiếp tuyến của đường cong tại điểm  $M(x(t_0), y(t_0))$

### 3. Độ cong

#### Các công thức cần nhớ

Độ cong của đường được cho bởi  $y = f(x)$  là

$$C = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

Độ cong của đường được cho bởi  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$  là

$$C = \frac{|x'y'' - x''y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}}$$

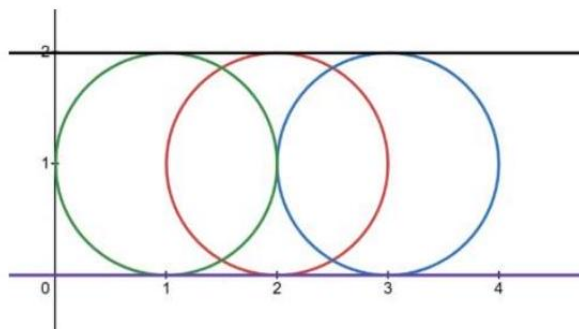
Độ cong của đường được cho trong hệ tọa độ cực  $r = f(\varphi)$  :

$$C = \frac{|r^2 + 2(r')^2 - rr''|}{[r^2 + (r')^2]^{3/2}}$$

## 4. Hình bao

- Cho họ đường cong (L) phụ thuộc vào một hay nhiều tham số. Nếu mỗi đường cong trong họ (L) đều tiếp xúc với đường cong (E) tại một điểm nào đó trên E và ngược lại, tại mỗi điểm thuộc (E) đều tồn tại một đường cong của họ (L) tiếp xúc với (E) tại điểm đó thì (E) được gọi là hình bao của họ đường cong (L).

Họ đường cong:  $F(x, y, c) = 0$



- Cách tìm hình bao

*Bước 1:* Xác định xem họ đường cong có điểm kì dị hay không (thường là không có) bằng cách xét

$$\begin{cases} F'_x(x, y, c) = 0 \\ F'_y(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

*Bước 2:* Nếu họ đường cong trên không có điểm kì dị thì phương trình hình bao (E) của nó được xác định bằng cách khử c từ hệ phương trình

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$$

Nếu họ đường cong đã cho có điểm kì dị thì hệ phương trình bao gồm hình bao (E) và quỹ tích các điểm kì dị thuộc họ các đường cong đã cho.

## II. Ứng dụng trong hình học không gian

### 1. Hàm vector và một vài tính chất

Giả sử  $I$  là một khoảng trong  $\mathbb{R}$ .

- Ánh xạ  $I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$  được gọi là hàm véctơ của biến số  $t$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Nếu  $n = 3$ , ta viết

$$\vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$$

Đặt  $M(x(t), y(t), z(t))$ , quỹ tích  $M$  khi  $t$  biến thiên trong  $I$  được gọi là tốc độ của hàm véctơ  $\vec{r}(t)$ .

- Giới hạn: Người ta nói hàm véctơ có giới hạn là  $\vec{a}$  khi  $t \rightarrow t_0$  nếu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$$

kí hiệu  $\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$ .

- Liên tục: Hàm véctơ  $\vec{r}(t)$  xác định trên  $I$  được gọi là liên tục tại  $t_0 \in I$  nếu

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0).$$

(Tương đương với tính liên tục của các thành phần tương ứng  $x(t), y(t), z(t)$  )

- Đạo hàm: Giới hạn, nếu có, của tỉ số

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0 + h) - \vec{r}(t_0)}{h}$$

được gọi là đạo hàm của hàm véctơ  $\vec{r}(t)$  tại  $t_0$ , kí hiệu  $\vec{r}'(t_0)$  hay  $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$ , khi đó ta nói hàm véctơ  $\vec{r}(t)$  khả vi tại  $t_0$ .

## 2. Đường cong trong không gian

Xét đường cong  $L$  trong không gian với phương trình tham số

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Hàm vectơ tương ứng

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

- Phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

- Phương trình pháp diện

$$x'(t_0) \cdot (x - x(t_0)) + y'(t_0) \cdot (y - y(t_0)) + z'(t_0) \cdot (z - z(t_0)) = 0.$$

**NOTE:**  $\vec{n} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$  là vector tiếp tuyến của đường cong tại điểm  $M$

- Độ cong

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}.$$

## 3. Mặt cong trong không gian

- Phương trình mặt cong trong không gian

$$f(x, y, z) = 0$$

- Phương trình tiếp diện

$$f'_x(M) \cdot (x - x_0) + f'_y(M) \cdot (y - y_0) + f'_z(M) \cdot (z - z_0) = 0.$$

- Phương trình pháp tuyến

$$\frac{x - x_0}{f'_x(M)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M)} = \frac{z - z_0}{f'_z(M)}$$

**NOTE:**  $\vec{n} = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$  là vector pháp tuyến của mặt cong tại điểm M

#### 4. Đường cong là giao của hai mặt cong

- Đường cong được cho bởi  $\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$ . Khi đó  
 $\vec{n}_1 = (f'_x(M), f'_y(M), f'_z(M))$  là vector pháp tuyến của mặt cong  $f(x, y, z) = 0$  tại điểm M  
 $\vec{n}_2 = (g'_x(M), g'_y(M), g'_z(M))$  là vector pháp tuyến của mặt cong  $g(x, y, z) = 0$  tại điểm M  
 Từ đó suy ra:  $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$  là vector chỉ phương tiếp tuyến đường cong tại M
- Phương trình tiếp tuyến

*Bước 1:* Tìm vector  $\vec{n} = (a, b, c)$

*Bước 2:* Viết phương trình tiếp tuyến

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- Phương trình pháp diện

*Bước 1:* Tìm vector  $\vec{n} = (a, b, c)$

*Bước 2:* Viết phương trình pháp diện

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

### III. Các ví dụ minh họa

**VD 1:** Viết phương trình tiếp tuyến và phương trình pháp tuyến

a) Đối với đường cong  $y = x^2$  tại điểm  $M(1, 1)$ .

b) Cho họ tham số

$$\begin{cases} x = 2 - \cos t, \\ y = 2 + \sin t, \end{cases}$$

xét tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$ .

**Giải:**

a)

Xét  $f(x, y) = y - x^2$ .

$$\begin{cases} f_x(x, y) = -2x & \Rightarrow f_x(M) = -2, \\ f_y(x, y) = 1 & \Rightarrow f_y(M) = 1. \end{cases}$$

$$\text{pttt: } -2(x - 1) + 1(y - 1) = 0$$

$$-2x + y + 1 = 0.$$

$$\text{ptpt: } \frac{x - 1}{-2} = \frac{y - 1}{1} = 0.$$

b) Tại  $t_0 = \frac{\pi}{2}$ , ta có

$$M(x(t_0), y(t_0)) = M(2, 3).$$

Tính đạo hàm:

$$x'(t) = \sin t, \quad y'(t) = \cos t.$$

Suy ra

$$x'(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0.$$

Phương trình **tiếp tuyến** tại  $M$  dưới dạng tham số:

$$\frac{x-2}{x'(t_0)} = \frac{y-3}{y'(t_0)} \implies \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{0}.$$

Còn **pháp tuyến** là

$$x-2=0 \implies x=2.$$

**VD 2:** Tính độ cong của  $y = x^2$  tại  $M(1, 1)$ , điểm bất kỳ?

**Giải:**

Ta có:

$$y' = 2x, \quad y'' = 2.$$

Công thức độ cong tại một điểm trên đồ thị  $y = f(x)$  là

$$C_M = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Tại  $M(1, 1)$ , ta có  $y'(1) = 2$ . Do đó

$$C_M = \frac{2}{[1 + (2)^2]^{3/2}} = \frac{2}{(1 + 4)^{3/2}} = \frac{2}{5^{3/2}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}.$$

**VD 3:** Tìm hình bao của họ đường cong  $y = \frac{x}{c} + c^2, \quad c \neq 0$

**Giải:**

Đặt

$$F(x, y, c) = y - \frac{x}{c} - c^2 = 0, \quad c \neq 0.$$

Muốn tìm hình bao, trước hết ta tìm các điểm kỳ dị (nếu có) bằng cách giải hệ

$$\begin{cases} F(x, y, c) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y, c) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Tuy nhiên,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{c}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1.$$

Rõ ràng  $\frac{\partial F}{\partial x}$  và  $\frac{\partial F}{\partial y}$  đều không thể đồng thời bằng 0, hệ vô nghiệm nên họ đường cong không có điểm kỳ dị.

$$F(x, y, c) = y - \frac{x}{c} - c^2 = 0,$$

$$F_c(x, y, c) = \frac{x}{c^2} - 2c = 0,$$

Với  $c \neq 0$ .

Khi đó, ta giải được

$$x = 2c^3, \quad y = 3c^2.$$

Vì  $c \neq 0$ , suy ra  $x \neq 0$  và  $y \neq 0$ .

Khử  $c$  từ hệ trên, ta được:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0.$$

Vậy **hình bao** là đường

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^3 = 0,$$

loại trừ điểm O (0,0)

**VD 4:** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong  $x = 4 \sin^2 t, y = 4 \cos t, z = 2 \sin t + 1$  tại điểm  $M(1, -2\sqrt{3}, 2)$

**Giải**

Xét tại M ta có:  $\cos t = -\sqrt{3}/2; \sin t = 1/2$

$$\begin{cases} x = 4 \sin^2 t \\ y = 4 \cos t \\ z = 2 \sin t + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 4.2 \sin t \cdot \cos t \\ y' = -4 \sin t \\ z' = 2 \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(M) = -2\sqrt{3} \\ y'(M) = -2 \\ z'(M) = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến:

$$\frac{x-1}{-2\sqrt{3}} = \frac{y+2\sqrt{3}}{-2} = \frac{z-2}{-\sqrt{3}}$$

Phương trình pháp diện:

$$-2\sqrt{3}(x-1) - 2(y+2\sqrt{3}) - \sqrt{3}(z-2) = 0$$

**VD 5:** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến mặt cong  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$  tại  $M(2, 2, 3)$

**Giải:**

Xét:  $f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 2z^2 - 6$

Ta có: 
$$\begin{cases} f'_x = 2x \\ f'_y = -8y \\ f'_z = 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(M) = 4 \\ f'_y(M) = -16 \\ f'_z(M) = 12 \end{cases}$$

PTPT:  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{-16} = \frac{z-3}{12}$

PTTD:  $4(x-2) - 16(y-2) + 12(z-3) = 0$  hay  $x - 4y + 3z - 19 = 0$

**VD 6:** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện đường cho bởi giao của hai mặt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ y^2 + z^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

**Giải:**

Ta có: 
$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ g(x, y, z) = y^2 + z^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = 2x \\ f'_y = 2y \\ f'_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(A) = 2 \\ f'_y(A) = 6 \\ f'_z(A) = 0 \end{cases} \Rightarrow n_s = (2; 6; 0)$$

$$\begin{cases} g'_x = 0 \\ g'_y = 2y \\ g'_z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'_x(A) = 0 \\ g'_y(A) = 6 \\ g'_z(A) = 8 \end{cases} \Rightarrow \overline{n_g} = (0; 6; 8)$$

$$\overline{n_s} \wedge \overline{n_g} = 4(12; -4; 3)$$

PTTT:  $\frac{x-1}{12} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z-4}{3}$

PTPD:  $12(x-1) - 4(y-3) + 3(z-4) = 0$  hay  $12x - 4y + 3z - 12 = 0$

## IV. Bài tập tự luyện

**ID 6904** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $3x^2 + 2xy^3 + z^2 + 4 = 0$  tại điểm  $P(1; -2; 3)$ .

**ID 6896** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ;  $3x + 4y + 5z = 0$  tại điểm  $M(4; -3; 0)$ .

**ID 6876** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại  $P(1, 1, -1)$  của đường  $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6, \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

**ID 6864** Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn cho dưới dạng giao của mặt paraboloid  $z = 30 - x^2 - y^2$  và mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  tại điểm  $M(3; 4; 5)$ .

**ID 6834** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong  $x = t \cos 2t, y = t \sin 2t, z = 3t$  tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$ .

**ID 6825**, Viết phương trình tiếp diện của mặt  $x^2 + 3y^2 - z^2 = 3$ , biết nó song song với mặt phẳng  $x + 3y - z = 0$ .

**ID 6814** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại  $A(-1; 2; 1)$  của đường  $x = t - 1, y = 2 - \sin t, z = e^{2t}$ .

**ID 6804**, Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại  $A(-1; 2; 0)$  của đường  $x = 2t - \cos t, y = e^{3t} + 1, z = t^2 + \sin t$

**ID 6794**, Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến tại  $A(2; 1; 1)$  của mặt cong  $2x^2 - 4y^3 + z^4 = 5$

**ID 6711** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt  $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 6$  tại điểm  $P(1, -1, 1)$ .

**ID 6703** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $x^2 + 3y + z^3 + 1 = 0$  tại điểm  $M(1, -1, 1)$ .

**ID 6702** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{4}$  của đường

cong được cho bởi  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t. \\ z = \sin^2 t \end{cases}$

**ID 6694** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $x^2 + 3y + z^3 + 1 = 0$  tại điểm  $M(1, -1, 1)$ .

**ID 6693** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{4}$  của đường

cong được cho bởi 
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin 2t. \\ z = \sin^2 t \end{cases}$$

**ID 6685** Một đường cong  $C$  cho bởi phương trình  $x^2 + y^3 - 3y^2 + 4 = 0$  a/ Tìm các điểm kì dị của đường cong này. b/ Viết phương trình tiếp tuyến của nó tại điểm  $(4; -2)$

**ID 6678** Viết phương trình pháp tuyến của mặt cong :  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  tại điểm  $M(2; 2; 3)$

**ID 6677** Viết phương trình pháp diện của đường cong  $x = \sin t, y = 3e^{-t}, z = 3e^t$  tại điểm  $M(0; 3; 3)$

**ID 6675** Viết phương trình pháp tuyến của đường cong :  $y = x^3 - 3x^2 + x - 1$  tại điểm  $A(1; -2)$

**ID 6666** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cầu  $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25$  tại điểm  $M(4, 1, -4)$ .

**ID 6665** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong cho dưới dạng giao của hai mặt cong 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 4x + 3y + 5z = 0 \end{cases}$$
, tại điểm  $M(3, -4, 0)$ .

**ID 6649** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $\ln(2x + y^2) + 3z^3 = 3$  tại điểm  $M(0; -1; 1)$ .

**ID 6639** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong :

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \text{ tại điểm ứng với } t = \pi/2$$

**ID 6629** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong  $x = \sin t, y = \cos t, z = e^{2t}$  tại điểm  $M(0; 1; 1)$

**ID 6619** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong  $x = 2 \cos t, y = 4 \sin t, z = 4 \cos^2 t + 1$  tại điểm  $M(\sqrt{3}; 2; 4)$ .

**ID 6610** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $x^2 - y^2 - e^z + 2yxz = 0$  tại điểm  $M(1; 0; 0)$ .

**ID 6600** Viết Phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong :  $x^3 + y^3 = 9xy$  Tại điểm  $(2; 4)$

**ID 6590** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong có phương trình  $x^2 - y^3 = 2xz$  tại điểm  $M(1; -1; 1)$

**ID 6581** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $y^2 = 3(x^2 + z^2)$  tại điểm  $(\sqrt{2}; 3; 1)$ .

**ID 6572** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $x^2 + 2y + z^3 + 1 = 0$  tại điểm  $M(1, -1, 0)$ .

**ID 6571** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện tại điểm ứng  $t = \frac{\pi}{4}$  của đường cong

$$\text{được cho bởi } \begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 2t. \\ z = \sin^2 t \end{cases} .$$

**ID 6562** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt  $z = \ln(2x + y)$  tại điểm  $M(-1; 3; 0)$ .

**ID 6551** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $x = \ln(2y + 3z^2)$  tại điểm  $M(0; -1; 1)$ .

**ID 6541** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $\arctan(x^2 + y) + z = 0$  tại điểm  $M(-1; -1; 0)$ .

**ID 6533** Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong  $z = x^2 + 2y^2$  tại điểm  $M(1, 1, 3)$ .

**ID 6027** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường  $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 47 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$  tại điểm  $B(-2; 1; 6)$

**ID 6026** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$  tại điểm  $A(1; 3; 4)$

**ID 6025** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $x^2 + 2y^3 - yz = 0$  tại điểm  $(1; 1; 3)$

**ID 6024** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $\ln(2x + y^2) + 3z^3 = 3$  tại điểm  $(0; -1; 1)$

**ID 6023** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $z = 2x^2 + 4y^2$  tại điểm  $(2; 1; 12)$

**ID 6022** Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt cong  $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 6$  tại điểm  $(2; 2; 3)$

**ID 6018** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường  $\begin{cases} x = 4 \sin^2 t \\ y = 4 \cos t \\ z = 2 \sin t + 1 \end{cases}$  tại điểm  $M(1; -2\sqrt{3}; 2)$

**ID 6017** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường  $\begin{cases} x = a \sin^2 t \\ y = b \sin t \cos t \\ z = c \cos^2 t \end{cases}$  tại điểm ứng với

**ID 6003** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 5$  tại điểm  $M(8; 1)$

**ID 6002** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong  $\begin{cases} x = 2t - \cos(\pi t) \\ y = 2t + \sin(\pi t) \end{cases}$  tại điểm  $A$  ứng với  $t = 1/2$

**ID 6001** Viết phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến với đường cong  $y = e^{1-x^2}$  tại giao điểm của đường cong với đường thẳng  $y = 1$

**ID 5751** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cycloid  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  Tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$ .

**ID 5609** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong cho trong tọa độ cực  $(r; \theta)$  bởi phương trình  $r = 1 + \cos \theta, \theta \in [0, 2\pi)$  tại điểm có tọa độ Decartes  $(x, y) = (0; 1)$ .

**ID 3335** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cycloid  $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$  Tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$ .

**ID 3326** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong  $r = 2 + \cos \varphi$  Tại điểm ứng với  $\varphi = 0$

**ID 1299** Viết phương trình tiếp tuyến tại  $M(0; 0)$  của đường  $\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = t + \arctan t \end{cases}$

**ID 6824** Tính độ cong tại gốc tọa độ  $O(0; 0; 0)$  của đường cong cho bởi phương trình  $x = t \cos 2t, y = t \sin 2t, z = 3t$ .

**ID 6784** Tính độ cong của đường  $x = 2 \cos t, y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t$  tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{3}$ .

**ID 6754** Cho  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Tính độ cong của  $(E)$  tại điểm  $A(4, 0)$ .

**ID 6727** Tính độ cong của đường  $r(t) = (t, t^2, t^3)$  tại  $M(1, 1, 1)$ .

**ID 6710** Tính độ cong tại điểm  $(0, 0)$  của đường

$$y = \ln(e^{2x} - x)$$

**ID 6701** Tính độ cong của đường  $y = \tan x$  tại điểm  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**ID 6692** Tính độ cong của đường  $y = \tan x$  tại điểm  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**ID 6676** Tính độ cong của đường  $x = e^t, y = e^{-t}$  tại điểm  $M(1; 1)$

**ID 6651** Tính độ cong của đường  $y = \ln(\cos x)$  tại điểm ứng với  $x = \frac{\pi}{4}$ .

**ID 6640** Tính độ cong của đường cong  $y = e^{2x}$  tại điểm  $A(0; 1)$

**ID 6630** Tính độ cong của đường  $x = t^2, y = t \ln t, t > 0$  tại điểm ứng với  $t = e$ .

**ID 6621** Tính độ cong của đường cong

$$x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t \text{ tại điểm ứng với } t = \pi.$$

**ID 6617** Tính độ cong tại điểm  $M(-1; 0; -1)$  của đường là giao của mặt trụ  $4x^2 + y^2 = 4$  và mặt phẳng  $x - 3z = 2$ .

**ID 6601** Tính độ cong của đường  $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$  tại điểm ứng với  $t = -\pi/2$

**ID 6574** Tính độ cong của đường  $\begin{cases} x = -1 + \sin t \\ y = 1 + \cos t \\ z = \sin t + \cos t - 2 \end{cases}$  tại  $M(0, 1, -1)$ .

**ID 6561** Tính độ cong của đường  $y = x^3 + x$  tại điểm  $M(1; 2)$ .

**ID 6552** Tính độ cong của đường  $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2(x - y) \\ x + y + z = 2 \end{cases}$  tại điểm  $A(1; 0; 1)$ .

**ID 6543** Tính độ cong tại điểm  $A(2, 0, 4)$  của đường cong xác định bởi  $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x \end{cases}$ .

**ID 6531** Tính độ cong của đường tròn có phương trình  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$  tại điểm  $M(2, 4)$ .

**ID 6021** Tính độ cong của các đường cong Tính độ cong tại điểm  $M(1; 0; -1)$  của đường là giao của mặt trụ  $4x^2 + y^2 = 4$  và mặt phẳng  $x - 3z = 4$

**ID 6020** Tính độ cong của các đường cong  $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \\ z = t \end{cases}$  tại điểm ứng với  $t = \pi$

**ID 6019** Tính độ cong của các đường cong  $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$  tại điểm ứng với  $t = \frac{\pi}{2}$

**ID 6007** Tính độ cong của đường  $y = \ln x$  tại điểm có hoành độ  $x > 0$ . Khi nào độ cong đạt cực đại? Khi  $x \rightarrow \infty$  thì độ cong sẽ như thế nào ?

**ID 6006** Tính độ cong tại điểm bất kỳ của  $r = ae^{b\varphi}, (a, b > 0)$

**ID 6005** Tính độ cong tại điểm bất kỳ của  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$

**ID 6004** Tính độ cong tại điểm bất kỳ của  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (a > 0).$

**ID 640** Cho  $(E)$  có phương trình  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Tính độ cong của  $(E)$  tại điểm  $A(4, 0)$ .

**ID 630** Tính độ cong tại điểm  $M(4, -2, 1)$  của đường cho bởi  $x = 2 + 2 \cos t, y = -2 + 2 \sin t, z = 2 \sin t + 2 \cos t - 1$

**ID 6650** Tìm hình bao của họ đường cong sau:  $cx^2 - 3y - c^3 + 2 = 0$ , với  $c$  là tham số.

**ID 6641** Tìm hình bao của họ đường cong  $y = 4cx^3 + c^4, c$  là tham số

**ID 6620** Tìm hình bao của họ đường cong sau:  $4x - 3cy + 2c^3 = 0$ , với  $c$  là tham số.

**ID 6611** Tìm hình bao của họ đường cong sau:  $(x + C)^2 + (y - 2C)^2 = 5$ .

**ID 6602** Tìm hình bao của họ đường cong  $x^2 + y^2 - 4yc + 2c^2 = 0, c$  là tham số,  $c \neq 0$

**ID 6591** Tìm hình bao của họ đường cong  $x^2 + c^2 + cy = 1$

**ID 6582** Tìm hình bao của họ đường cong  $y = (2x + 3c)^4$ .

**ID 6573** Tìm hình bao của họ đường cho bởi phương trình  $x \sin \frac{c}{3} + y \cos \frac{c}{3} = 1$ , trong đó  $c$  là tham số.

**ID 6563** Tìm hình bao của họ đường  $(\Gamma_c)$  :

$$2x \cos c + y \sin c = 1.$$

**ID 6553** Tìm hình bao của họ đường  $2x \sin \alpha + 5y \cos \alpha = 1$ , với  $\alpha$  là tham số.

## Chương 2. Tích phân bội

### I. Tích phân kép

#### 1. Định nghĩa

Định nghĩa Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trong một miền đóng, bị chặn  $D$ . Chia miền  $D$  một cách tùy ý thành  $n$  mảnh nhỏ. Gọi các mảnh đó và diện tích của chúng là  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ . Trong mỗi mảnh  $\Delta S_i$  lấy một điểm tùy ý  $M(x_i, y_i)$  và thành lập tổng tích phân  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ . Nếu khi  $n \rightarrow \infty$  sao cho  $\max\{\Delta S_i \rightarrow 0\}$  mà  $I_n$  tiến tới một giá trị hữu hạn  $I$ , không phụ thuộc vào cách chia miền  $D$  và cách chọn điểm  $M(x_i, y_i)$  thì giới hạn ấy được gọi là tích phân kép của hàm số  $f(x, y)$  trong miền  $D$ , kí hiệu là

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

- Nếu tồn tại tích phân trên thì ta nói  $f(x, y)$  là hàm khả tích trong miền  $D$

#### 2. Các tính chất cơ bản

Cho  $f(x, y), g(x, y)$  là các hàm khả tích trên miền  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ , và  $c, m, M$  là các số thực. Khi đó,

$$(1) \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy;$$

$$(2) \iint_D c \cdot f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy;$$

(3) Nếu  $D = D_1 \cup D_2$ , trong đó  $D_1$  và  $D_2$  không giao nhau ngoại trừ biên của chúng, thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

$$(4) \text{ Nếu } f(x, y) \geq g(x, y), \forall (x, y) \in D, \text{ thì } \iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

### 3. Định lý Fubini

- Nếu  $f(x, y)$  là một hàm số khả tích trên miền hình chữ nhật  $R = [a, b] \times [c, d]$  thì

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

- Đặc biệt nếu  $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$  thì

$$\iint_R g(x)h(y) dx dy = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d h(y) dy \right)$$

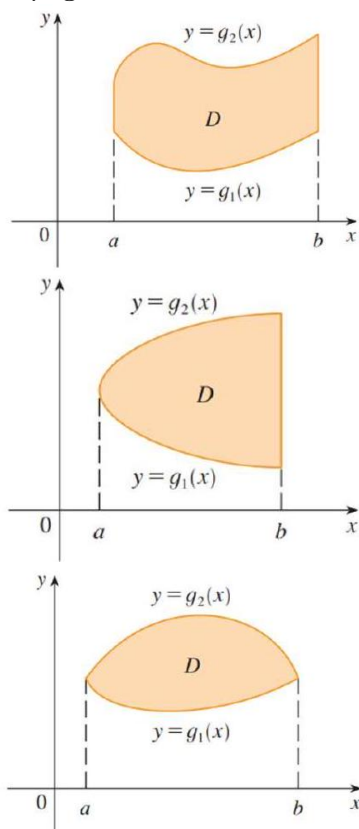
### 4. Các cách lấy miền để tính tích phân

Cho  $f(x, y)$  là một hàm số khả tích trên miền  $D$

- Nếu miền  $D : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$  (Miền chữ nhật)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

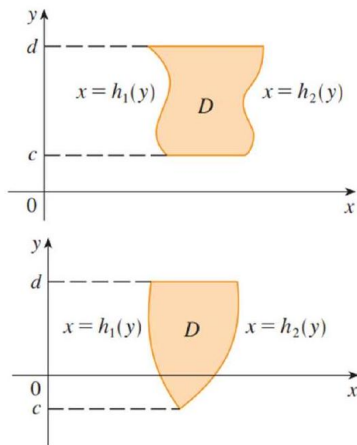
- Dạng 1: Nếu miền  $D : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$



Thì ta có:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy$$

- Dạng 2: Nếu miền  $D : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$



Thì ta có:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx$$

- Nếu miền  $D$  là một miền phức tạp thì ta thực hiện chia miền  $D$  và các miền dạng 1, dạng 2 để thực hiện tính toán tích phân

**Lưu ý:** Trường hợp miền lấy tích phân là đối xứng

Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục  $Ox$  (tương ứng  $Oy$ ) và hàm là hàm lẻ đối với  $y$  (tương ứng đối với  $x$ ) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục  $Ox$  (tương ứng  $Oy$ ) và hàm là hàm chẵn đối với  $y$  (tương ứng đối với  $x$ ) thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 2 \iint_{D^+} f(x, y) dx dy$$

trong đó  $D^+$  là phần nằm bên trên trục  $Ox$  của  $D$  (tương ứng phía phải trục  $Oy$  của  $D$ ).

Nếu miền  $D$  là miền đối xứng qua trục gốc tọa độ  $O$  và hàm  $f(x, y)$  thỏa mãn  $f(-x, -y) = -f(x, y)$  thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = 0$$

## 5. Phương pháp đổi thứ tự lấy tích phân để tính tích phân kép

Bước 1: Sử dụng các cách lấy miền ở trên, đưa tích phân kép về tích phân lặp

Bước 2: Vẽ phác thảo miền  $D$

Bước 3: Nếu miền  $D$  có dạng 1, ta chia miền  $D$  thành các miền dạng 2. Nếu miền  $D$  có dạng 2 thì ta chia nó thành các miền có dạng 1.

Bước 4: Thực hiện tính tích phân

## 6. Phương pháp đổi biến số

Cho  $f(x, y)$  là một hàm số khả tích trên miền  $D$

### a) Dạng tổng quát

Bước 1: Đổi biến số  $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}$  với  $x(u, v), y(u, v)$  liên tục và khả vi trên  $D_{uv}$

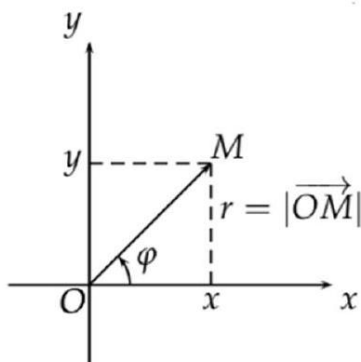
Bước 2: Đổi cận từ  $D \rightarrow D_{uv}$

Bước 3: Tính định thức Jacobi:  $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \neq 0 \forall (u, v) \in D_{uv}$ .

Hoặc tính  $J$  thông qua  $J^{-1} = \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}$ .

Bước 4: Áp dụng công thức đổi biến số

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

**b) Trong tọa độ cực**Tọa độ cực:  $M(r, \varphi)$ 

Bước 1: Đổi biến số  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$

Bước 2: Đổi cận từ  $D \rightarrow D_{r\varphi}$

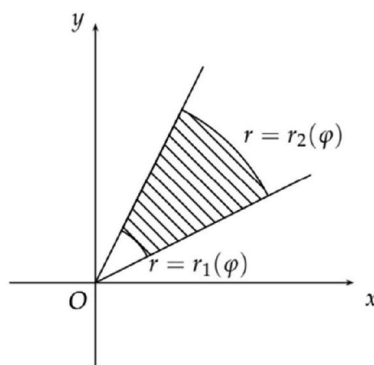
Bước 3: Tính định thức Jacobi:  $J = r$

Bước 4: Áp dụng công thức đổi biến số

$$I = \iint_{D_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Đặc biệt, nếu miền lấy tích phân có dạng hình quạt  $\begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$  (xem hình vẽ) thì

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$



### c) Trong tọa độ cực suy rộng

1. Nếu  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , thực hiện phép đổi biến  $\begin{cases} x = ar \cos \varphi \\ y = br \sin \varphi \end{cases}, J = abr.$

2. Nếu  $D: (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ , thực hiện phép đổi biến  $\begin{cases} x = a + r \cos \varphi \\ y = b + r \sin \varphi \end{cases}, J = r.$

## II. Tích phân bội ba

### 1. Định nghĩa

Định nghĩa Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trong một miền đóng, bị chặn  $V$  của không gian Oxyz. Chia miền  $V$  một cách tùy ý thành  $n$  miền nhỏ. Gọi các miền đó và thể tích của chúng là  $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$ . Trong mỗi miền  $\Delta_i$  lấy một điểm tùy ý  $M(x_i, y_i, z_i)$  và thành lập tổng tích phân  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$ . Nếu khi  $n \rightarrow +\infty$  sao cho  $\max \{\Delta V_i \rightarrow 0\}$  mà  $I_n$  tiến tới một giá trị hữu hạn  $I$ , không phụ thuộc vào cách chia miền  $V$  và cách chọn điểm  $M(x_i, y_i, z_i)$  thì giới hạn ấy được gọi là tích phân bội ba của hàm số  $f(x, y, z)$  trong miền  $V$ , kí hiệu là  $\iiint_V f(x, y, z) dV$ .

Khi đó ta nói rằng hàm số  $f(x, y, z)$  khả tích trong miền  $V$ .

Do tích phân bội ba không phụ thuộc vào cách chia miền  $V$  thành các miền nhỏ nên ta có thể chia  $V$  bởi ba họ mặt thẳng song song với các mặt phẳng tọa độ, khi đó  $dV = dxdydz$  và ta có thể viết

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz$$

### 2. Các tính chất cơ bản

Cho  $f(x, y, z)$  và  $g(x, y, z)$  là các hàm khả tích trong miền  $E \subseteq \mathbb{R}^3$ .

(1) (Tích tuyến tính) Với  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , hàm  $\alpha f + \beta g$  khả tích trên  $E$  và ta có

$$\iiint_E [\alpha f(x, y, z) + \beta g(x, y, z)] dxdydz = \alpha \iiint_E f(x, y, z) dxdydz + \beta \iiint_E g(x, y, z) dxdydz.$$

(2) (Tích cộng tính) Nếu  $E = E_1 \cup E_2$ , với  $E_1$  và  $E_2$  không giao nhau ngoại trừ trên biên, thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E_1} f(x, y, z) dx dy dz + \iiint_{E_2} f(x, y, z) dx dy dz$$

(3) (Tính bảo toàn thứ tự) Nếu  $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$  trên  $E$  thì

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \leq \iiint_E g(x, y, z) dx dy dz.$$

Đặc biệt,  $|f|$  cũng khả tích trên  $E$  và  $\left| \iiint_E f(x, y, z) dx dy dz \right| \leq \iiint_E |f(x, y, z)| dx dy dz.$

### 3. Định lý Fubini

- Nếu  $f(x, y, z)$  là một hàm khả tích trên hình hộp  $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$  thì

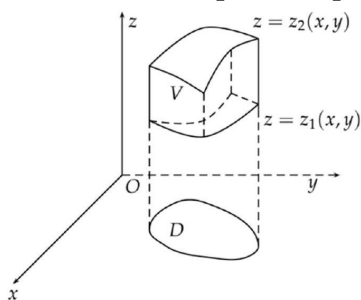
$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \int_r^s \left[ \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right] dz =: \int_r^s dz \int_c^d dy \int_a^b f(x, y, z) dx \\ &= \int_r^s \left[ \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y, z) dy \right) dx \right] dz =: \int_r^s dz \int_a^b dx \int_c^d f(x, y, z) dy \end{aligned}$$

- Đặc biệt, nếu  $f(x, y, z) = g(x) \cdot h(y) \cdot k(z)$  thì

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B g(x)h(y)k(z) dx dy dz = \left( \int_a^b g(x) dx \right) \cdot \left( \int_c^d h(y) dy \right) \cdot \left( \int_r^s k(z) dz \right).$$

### 4. Cách tính tích phân bội ba

- Cho  $f(x, y, z)$  là một hàm khả tích trên  $V$ . Cách tính tích phân bội ba tổng quát là ta đưa về tích phân kép để tính



Nếu miền  $V$  được giới hạn bởi các mặt  $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$ , trong đó  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  là các hàm số liên tục trên miền  $D$ ,  $D$  là hình chiếu của miền  $V$  lên mặt phẳng  $Oxy$  thì ta có:

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \quad (2.5)$$

Trong đó  $D$  và các biên  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  được ưu tiên xác định bằng cách vẽ hình.

- Vai trò của  $x, y, z$  có thể thay đổi trong các trường hợp khác nhau
- **Lưu ý:** Trường hợp miền lấy tích phân đối xứng

Nếu  $V$  là miền đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0(Oxy)$  và  $f(x, y, z)$  là hàm số lẻ đối với  $z$  thì  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 0$ .

Nếu  $V$  là miền đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0(Oxy)$  và  $f(x, y, z)$  là hàm số chẵn đối với  $z$  thì  $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = 2 \iiint_{V^+} f(x, y, z) dx dy dz$ , trong đó  $V^+$  là phần phía trên mặt phẳng  $z = 0$  của  $V$ .

## 5. Phương pháp đổi biến số

### a) Dạng tổng quát

Bước 1: Đổi biến số  $\begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$  với  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  liên tục và khả vi trên

$V_{uvw}$

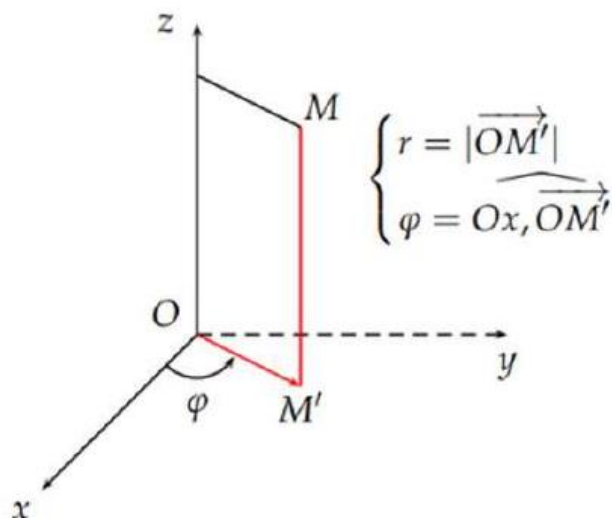
Bước 2: Đổi cận từ  $V \rightarrow V_{uvw}$

Bước 3: Tính định thức Jacobi:  $J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0$

Hoặc tính  $J$  thông qua  $J^{-1} = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ .

Bước 4: Áp dụng công thức đổi biến số

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{uvw}} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |J| du dv dw$$

**b) Trong tọa độ trụ**Tọa độ trụ:  $M(r, \varphi, z)$ 

Bước 1: Đổi biến số  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$

Bước 2: Đổi cận từ  $V \rightarrow V_{uvw}$

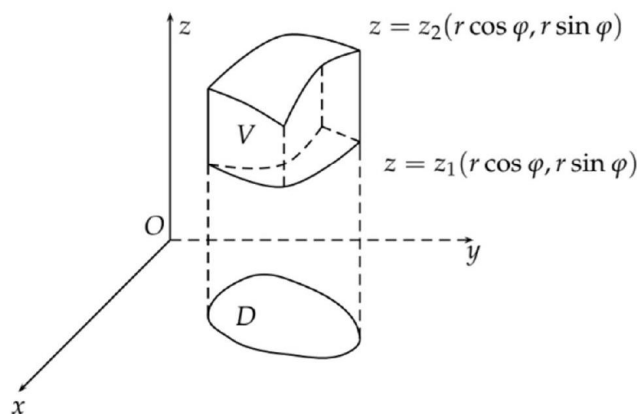
Bước 3: Tính định thức Jacobi:  $J = r$

Bước 4: Áp dụng công thức đổi biến số

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{r\varphi z}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz$$

Nếu miền  $V : \begin{cases} (x, y) \in D \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$ , trong đó  $D : \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \\ r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi) \end{cases}$  thì:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr \int_{z_1(r \cos \varphi, r \sin \varphi)}^{z_2(r \cos \varphi, r \sin \varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) dz$$

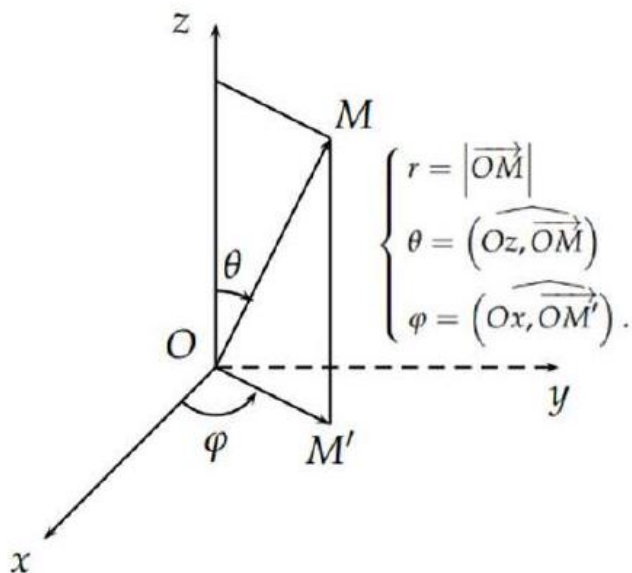


**c) Trong tọa độ trụ suy rộng:**

Tương tự nếu miền  $D$  có dạng như phần tích phân kép

**d) Trong tọa độ cầu:**

Tọa độ cầu:  $M(r, \theta, \varphi)$



Áp dụng khi  $V$  có dạng hình cầu, chỏm cầu ...

Bước 1: Đổi biến số  $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$

Bước 2: Đổi cận từ  $V \rightarrow V_{r\theta\varphi}$

Bước 3: Tính định thức Jacobi:  $J = -r^2 \sin \theta$

Bước 4: Áp dụng công thức đổi biến số

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V_{r\theta\varphi}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Đặc biệt, nếu miền  $V_{r\theta\varphi}$  :

$$\begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, (\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi) \\ \theta_1(\varphi) \leq \theta \leq \theta_2(\varphi) \\ r_1(\theta, \varphi) \leq r \leq r_2(\theta, \varphi) \end{cases} \quad \text{thì}$$

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)} \sin \theta d\theta \int_{r_1(\theta, \varphi)}^{r_2(\theta, \varphi)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 dr.$$

### e) Trong tọa độ cầu suy rộng

Nếu  $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = ar \sin \theta \cos \varphi \\ y = br \sin \theta \sin \varphi, J = -abcr^2 \sin \theta \\ z = cr \cos \theta \end{cases}$$

Nếu  $V : (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$  thì thực hiện phép đổi biến

$$\begin{cases} x = a + r \sin \theta \cos \varphi \\ y = b + r \sin \theta \sin \varphi, J = -r^2 \sin \theta \\ z = c + r \cos \theta \end{cases}$$

## III. Các ứng dụng của tích phân bội

### 1. Ứng dụng của tích phân kép

- Tính thể tích vật thể:

Vật thể hình trụ, mặt xung quanh là mặt trụ có đường sinh song song với trục  $Oz$ , đáy là miền  $D$  trong mặt phẳng  $Oxy$ , phía trên giới hạn bởi mặt cong  $z = f(x, y), f(x, y) \geq 0$  và liên tục trên  $D$  thì  $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ .

Vật thể là khối trụ, giới hạn bởi các đường sinh song song với trục  $Oz$ , hai mặt  $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y)$ . Chiếu các mặt này lên mặt phẳng  $Oxy$  ta được miền  $D$ ,  $z_1(x, y), z_2(x, y)$  là các hàm liên tục, có đạo hàm riêng liên tục trên  $D$ . Khi đó:

$$V = \iint_D |z_1(x, y) - z_2(x, y)| dx dy$$

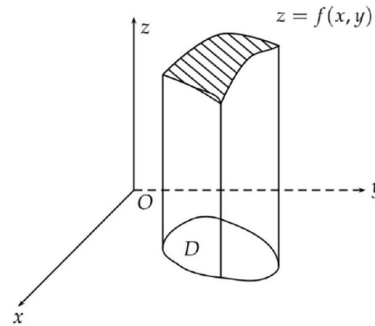
- Tính diện tích hình phẳng

$$S = \iint_D dx dy$$

- Tính diện tích mặt cong

Mặt  $z = f(x, y)$  giới hạn bởi một đường cong kín, hình chiếu của mặt cong lên mặt phẳng  $Oxy$  là  $D$ . Giả thiết  $f(x, y)$  là hàm số liên tục, có các đạo hàm riêng liên tục trên  $D$ . Khi đó:

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, p = f'_x, q = f'_y$$



## 2. Ứng dụng của tích phân bội ba

- Tính thể tích vật thể

$$V = \iiint_V dx dy dz$$

## IV. Các ví dụ minh họa

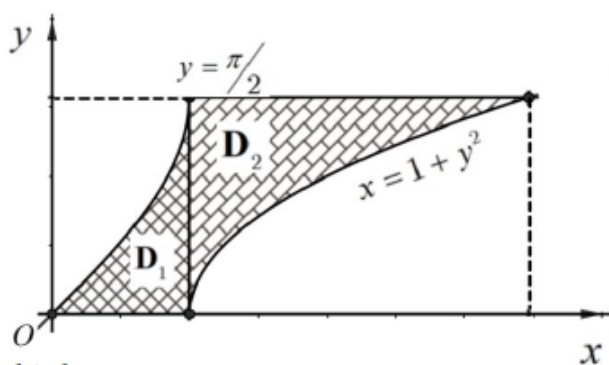
**VD1:** Thay đổi thứ tự lấy tích phân của tích phân kép sau:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx$$

**Giải**

$$\int_0^{\pi/2} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx$$

Từ biểu thức tích phân



Miền D được biểu diễn và chia thành 2 phần như hình vẽ:

$$D_1 \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \arcsin x \end{cases}; D_2 \begin{cases} 1 \leq x \leq 1 + \pi^2/4 \\ \sqrt{x-1} \leq y \leq \pi/2 \end{cases}$$

Đổi thứ tự tích phân:  $I = \int_0^1 dx \int_0^{\arcsin x} f(x, y) dy + \int_1^{1+\frac{\pi^2}{4}} dx \int_{\sqrt{x-1}}^{\frac{\pi}{2}} f(x, y) dy$

**VD2:** Tính tích phân kép sau

$$\iint_D \frac{y}{1+xy} dx dy, D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$$

**Giải**

Ta thực hiện lấy miền và tính tích phân

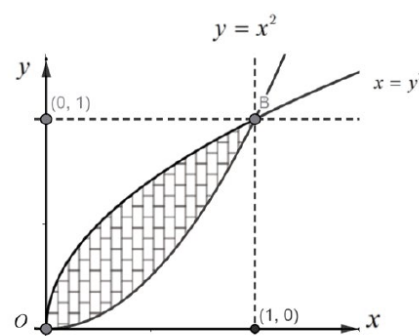
$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_0^1 \frac{y}{1+xy} dx dy \\ &= \int_0^2 [\ln(1+xy)]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^2 \ln(1+y) dy, \\ &= [y \ln(1+y)]_0^2 - \int_0^2 \frac{y}{1+y} dy \\ &= [y \ln(1+y)]_0^2 - \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy \\ &= (2 \ln(3)) - \int_0^2 1 dy + \int_0^2 \frac{1}{1+y} dy \\ &= 2 \ln(3) - 2 + \ln(3) = 3 \ln(3) - 2. \end{aligned}$$

**VD3:** Tính tích phân kép sau

$$\iiint_D x^2(y-x) dx dy, \text{ miền } D \text{ giới hạn bởi các đường cong } y = x^2; x = y^2$$

$$\text{Miền } D \text{ tương đương } D \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2(y-x) dy = \int_0^1 dx \left( x^2 \left( \frac{y^2}{2} - xy \right) \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left( \frac{x^3}{2} - x^{7/2} - \frac{x^6}{2} + x^5 \right) dx = \frac{1}{504} \end{aligned}$$



**VD4:** Tính tích phân lặp sau bằng các đổi thứ tự lấy tích phân

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{xe^{3y}}{1-y} dy$$

**Giải**

Từ biểu thức tính tích phân:

$$D \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x^2 \end{cases}$$

Đổi thứ tự tính tích phân, miền **D** tương đương: **D'**  $\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{1-y} \end{cases}$

$$I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} \frac{xe^{3y}}{1-y} dx = \int_0^1 dy \left( \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^{3y}}{1-y} \right) \Big|_0^{\sqrt{1-y}} = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} e^{3y} \right) dy = \frac{e^3 - 1}{6}$$

**VD5:** Tính tích phân sau

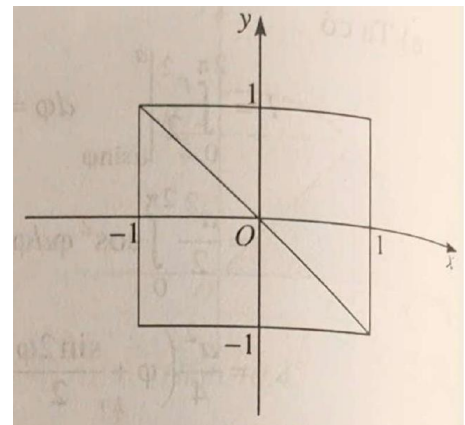
$$\iint_D |x+y| dx dy, \text{ ở đó miền } D \text{ là hình vuông: } |x| \leq 1, |y| \leq 1.$$

**Giải**

Câu này chúng ta lợi dụng tính chất của miền đối xứng.

Do miền **D** hình chữ nhật và hàm dưới dấu tích phân đối xứng qua đường  $x + y = 0$ , nên có:

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 (x+y) dy = 2 \int_{-1}^1 \frac{(x+y)^2}{2} \Big|_{y=-x}^1 dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{(x+1)^2}{2} dx = 2 \cdot \frac{(x+1)^3}{6} \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



**VD6:** Tính tích phân sau

$$I = \iint_D |x + y| dx dy, \text{ trong đó } D = \{(x, y) | |x| \leq 1 \text{ và } |y| \leq 1\}.$$

**Giải**

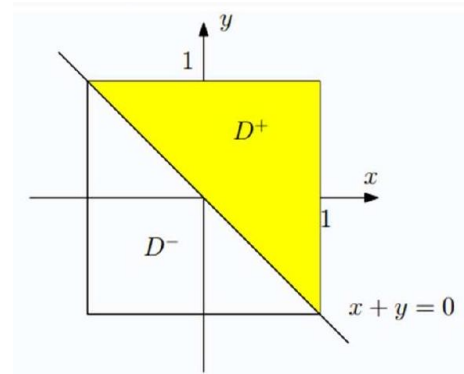
Phương pháp giải các bài toán tích phân kép có chứa dấu trị tuyệt đối

Chia miền  $D = D^+ \cup D^-$ , với  $D^+ = D \cap \{(x, y) : f(x, y) \geq 0\}$  và  $D^- = D \cap \{(x, y) : f(x, y) \leq 0\}$ .

Áp dụng công thức cộng tính,  $\iint_D |f(x, y)| dx dy = \iint_{D^+} f(x, y) dx dy - \iint_{D^-} f(x, y) dx dy$ .

Áp dụng ta có:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D^+} (x + y) dx dy - \iint_{D^-} (x + y) dx dy \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{-x}^1 (x + y) dy - \int_{-1}^1 dy \int_{-1}^{-y} (x + y) dx \\ &= \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$



**VD7:** Tính tích phân sau bằng phương pháp đổi biến số

$$I = \iint_D (4x^2 - 2y^2) dx dy, \text{ trong đó } D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x. \end{cases}$$

**Giải**

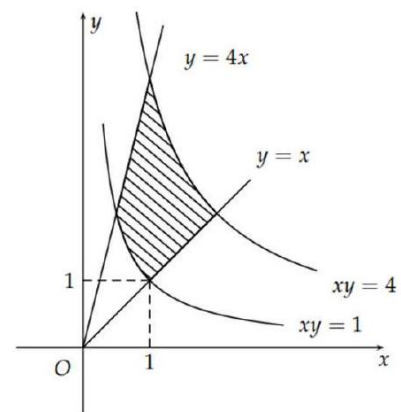
Bước 1: Đặt  $\begin{cases} u = xy \\ v = \frac{y}{x} \end{cases}$

Bước 2: Ta có :

$$D : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 4 \\ x \leq y \leq 4x \end{cases} \rightarrow D_{uv} : \begin{cases} 1 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 4 \end{cases}$$

Bước 3:  $J^{-1} = \begin{vmatrix} y & x \\ -y & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x} = 2v.$

Bước 4: Tính tích phân



$$I = \int_1^4 du \int_1^4 \left(4\frac{u}{v} - 2uv\right) \cdot \frac{1}{2v} dv = \int_1^4 du \int_1^4 \left(\frac{2u}{v^2} - u\right) dv = \int_1^4 -\frac{3}{2}u du = -\frac{45}{4}$$

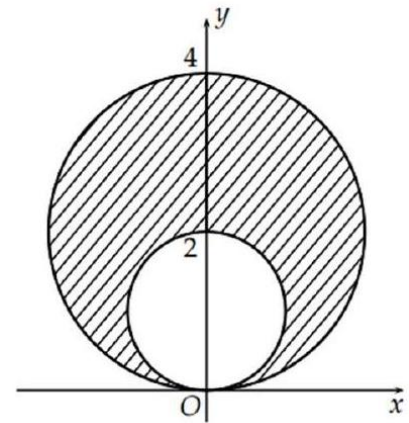
**VD8:** Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_V z dx dy dz, \text{ trong đó miền } V \text{ xác định bởi: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

**Giải**

$$\begin{cases} x = r \cos \phi, \\ y = r \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi, \\ 2 \sin \phi \leq r \leq 4 \sin \phi \end{cases}$$

$$I = \int_0^\pi \int_{2 \sin \phi}^{4 \sin \phi} r \cos \phi (r \sin \phi)^2 dr d\phi = 0.$$



**VD9:** Tính tích phân bội ba sau

$$\iiint_V z dx dy dz, \text{ trong đó miền } V \text{ xác định bởi: } \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

**Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{\sqrt{5-x^2-y^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_x^{2x} (5 - x^2 - y^2) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left( 5x - x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_x^{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 5x - \frac{10}{3}x^3 \right) dx = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

**VD10:** Tích tích phân bội ba sau bằng phương pháp đổi biến

$$\iiint_V (3xy^2 - 4xyz) \, dx dy dz, \text{ trong đó miền } V \text{ xác định bởi: } \begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq xy \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = y, \\ v = xy, \\ w = z \end{cases} \implies \begin{cases} 1 \leq u \leq 2, \\ 0 \leq v \leq 2, \\ 0 \leq w \leq 2. \end{cases}$$

$$\text{Ta tính Jacobian: } J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ y & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -y = -u \implies |J| = \frac{1}{u}.$$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\text{miền}} (3uv - 4vw) \frac{1}{u} \, dw \, dv \, du \\ &= \int_{u=1}^2 \int_{v=0}^2 \int_{w=0}^2 (3uv - 4vw) \frac{1}{u} \, dw \, dv \, du \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \left[ \int_0^2 (3uv - 4vw) \frac{1}{u} \, dw \right] dv \, du \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \left[ \int_0^2 \left( 3v - 4\frac{vw}{u} \right) dw \right] dv \, du \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \left[ 3v \int_0^2 dw - 4\frac{v}{u} \int_0^2 w \, dw \right] dv \, du \\ &= \int_1^2 \int_0^2 \left( 3v \cdot 2 - 4\frac{v}{u} \cdot \frac{2^2}{2} \right) dv \, du = \int_1^2 \int_0^2 \left( 6v - \frac{8v}{u} \right) dv \, du. \\ \int_0^2 \left( 6v - \frac{8v}{u} \right) dv &= \left[ 3v^2 - \frac{4v^2}{u} \right]_{v=0}^{v=2} = 3 \cdot 4 - \frac{4 \cdot 4}{u} = 12 - \frac{16}{u}. \\ I &= \int_1^2 \left( 12 - \frac{16}{u} \right) du = \left[ 12u - 16 \ln u \right]_1^2 = (24 - 16 \ln 2) - (12 - 16 \ln 1) = 12 - 16 \ln 2. \end{aligned}$$

**VD11:** Tích tích phân bội ba sau bằng cách sử dụng tọa độ trụ và cầu

$$\iiint_V (x^2 + y^2) \, dx dy dz$$

Với  $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$

**Giải**

Tọa độ cầu.

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq 1. \end{cases}$$

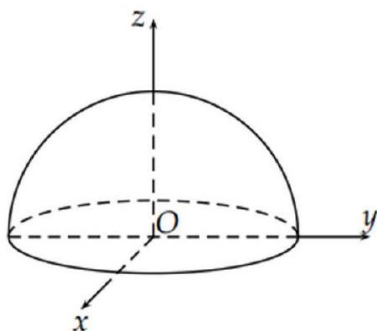
$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \sin^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr$$

$$= \frac{4\pi}{15}$$

Tọa độ trụ

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq r \leq 1, \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}. \end{cases}$$



**VD12:** Ứng dụng tích phân bội, hãy tính diện tích miền  $D : \begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y \end{cases}$

**Giải**

Ta có:  $S = \iint_D dx dy.$

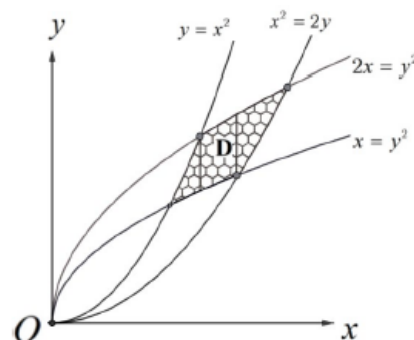
Đặt  $\begin{cases} v = y^2, \\ u = \frac{x}{y} \end{cases} \Rightarrow D_{uv}: 1 \leq v \leq 2, 1 \leq$

$u \leq 2.$

$J^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow |J| = \frac{1}{3}.$

Do đó,

$S = \iint_D dx dy = \int_{v=1}^2 \int_{u=1}^2 \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} [(2-1)(2-1)] = \frac{1}{3}.$



**VD13:** Ứng dụng tích phân bội, hãy tính thể tích miền giới hạn bởi các mặt:

$$\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$$

**Giải**

Giao tuyến của 2 mặt cong:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

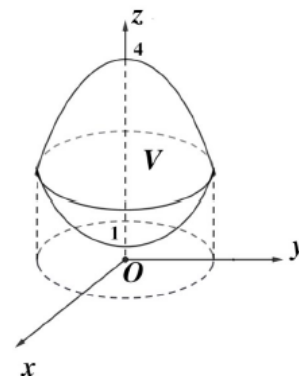
Hình chiếu của  $V \rightarrow Oxy$  là  $D: x^2 + y^2 \leq 2$

$V = \iint_D |f(x, y) - g(x, y)| dx dy = \iint_D \left( 4 - x^2 - y^2 - \frac{2 + x^2 + y^2}{2} \right) dx dy$

$= \iint_D \left( 3 - \frac{3x^2}{2} - \frac{3y^2}{2} \right) dx dy$

Đặt  $\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{2} \end{cases}$  với  $|J| = r$

$V = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r \left( 3 - \frac{3}{2}r^2 \right) dr = \dots = 3\pi$



## Bài tập tự luyện

### Tích phân kép

[ ID: 6028 ] Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau  $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$

[ ID: 6029 ] Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau  $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

[ ID: 6030 ] Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau  $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y) dy$

[ ID: 6031 ] Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\sin y}^{1+y^2} f(x, y) dx$

[ ID: 6032 ] Thay đổi thứ tự lấy tích phân của các tích phân sau  $\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}}^2 dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$

[ ID: 6033 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{\mathcal{D}} \frac{y}{1+xy} dx dy$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$

[ ID: 6034 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{\mathcal{D}} x^2(y-x) dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  là miền giới hạn bởi các đường cong  $y = x^2$  và  $x = y^2$

[ ID: 6035 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi các đường  $x = y^2, x = -1, y = 0$  và  $y = 1$

[ ID: 6036 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{\mathcal{D}} (x+y) dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, \sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 1$

[ ID: 6037 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{\mathcal{D}} |x+y| dx dy$ ,  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$

[ ID: 6038 ] Tính tích phân bội sau  $\iint_{|x|+|y| \leq 1} (|x| + |y|) dx dy$

[ ID: 6039 ] Tính tích phân bội sau  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} \frac{xe^{3y}}{1-y} dy$

[ ID: 6040 ] Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D}$  là miền xác định như sau  $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$

[ ID: 6041 ] Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D}$  là miền xác định như sau  $x^2 + y^2 \geq 4x, x^2 + y^2 \leq 8x, y \geq x, y \leq \sqrt{3}x$

[ ID: 6042 ] Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D}$  là miền xác định như sau  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0, (a, b > 0)$

[ ID: 6043 ] Tìm cận lấy tích phân trong tọa độ cực của  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D}$  là miền xác định như sau  $x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y$

[ ID: 6044 ] Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau  $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \ln(1 + x^2 + y^2) dy, (R > 0)$

[ ID: 6045 ] Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} xy dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  là nửa mặt tròn:  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0$

[ ID: 6046 ] Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} (\sin y + 3x) dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  là mặt tròn:  $(x - 2)^2 + y^2 \leq 1$

[ ID: 6047 ] Dùng phép đổi biến trong tọa độ cực, hãy tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} |x + y| dx dy$ , với  $\mathcal{D}$  là mặt tròn:  $x^2 + y^2 \leq 1$

[ ID: 6048 ] Chuyển tích phân sau theo hai biến  $u$  và  $v$  : a)  $\int_0^1 dx \int_{-x}^x f(x, y) dy$ , nếu đặt  $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$  b) áp dụng tính với  $f(x, y) = (2 - x - y)^2$

[ ID: 6049 ] Tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} \frac{2xy + 1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leq 1$

[ ID: 6050 ] Tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^2}$ , trong đó  $\mathcal{D} : \begin{cases} y \leq x^2 + y^2 \leq 2y \\ x \leq y \leq \sqrt{3}x \end{cases}$

[ ID: 6051 ] Tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D} : \begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 12 \\ x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{3}y \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

[ ID: 6052 ] Tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} |9x^2 - 4y^2| dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D} : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1$

[ ID: 6053 ] Tính các tích phân sau  $\iint_{\mathcal{D}} (3x + 2xy) dx dy$ , trong đó  $\mathcal{D} : \begin{cases} 1 \leq xy \leq 9 \\ y \leq x \leq 4y \end{cases}$

[ ID: 6755 ] Tính tích phân  $\iint_D e^{x^2+y^2} dx dy$ , với  $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0$ .

[ ID: 6771 ] Sử dụng phép đổi biến  $x = u^2 - v^2$  và  $y = uv$  với  $u, v \geq 0$  để tính tích phân  $\iint_D \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 4y^2}} dx dy$ , trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi bốn parabol  $y^2 = x + 1, y^2 = 2x + 4, y^2 = 1 - x, y^2 = 9 - 3x$  và  $y \geq 0$ .

[ ID: 6785 ] Tính tích phân  $\iint_D xy dx dy$ , với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x, x = 1$  và  $y = 0$ .

[ ID: 6786 ] Tính tích phân  $\iint_D (x + y) dx dy$ , với  $D = \{(x, y) \mid (x - 4)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ .

[ ID: 6803 ] Tính tích phân kép  $\iint_{\mathbf{D}} (2x^2 + y^2) dx dy$ , với  $\mathbf{D}$  là miền xác định bởi  $x^2 + xy + y^2 \leq 1$

[ ID: 6813 ] Tính tích phân kép  $\iint_{\mathbf{D}} (y^2 - x^4) dx dy$ , với  $\mathbf{D}$  là miền xác định bởi  $2|x| + |x^2 + y| \leq 1$

[ ID: 6815 ] Tính  $\iint_D (x - 2y) dx dy$ , với  $D$  giới hạn bởi  $x = 0, y = 0, x - y = 1$ .

[ ID: 6839 ] Tính tích phân kép  $\iint_D (y^2 - x^2) dx dy$ , trong đó  $D$  là miền  $0 \leq 2y \leq x^2 + y^2 \leq 2x$ .

[ ID: 6845 ] Tính  $\iint_D (x^4 - y^4) dx dy$ ,  $D$  giới hạn bởi  $x = \sqrt{1 - y^2}$  và  $x = 0$ .

[ ID: 6865 ] Tính tích phân  $\iint_D |x + y| dx dy$ , ở đó  $D : x^2 + y^2 \leq 1$ .

[ ID: 6534 ] Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_0^1 dy \int_{2y}^{\sqrt{5-y^2}} f(x, y) dx$ .

[ ID: 6535 ] Tính các tích phân kép sau.  $\iint_D (3x + 2y) dx dy$ , với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $x = y^2$  và  $x = 4$ .

[ ID: 6536 ] Tính các tích phân kép sau.  $\iint_D (2x + y)^{2022} (2x - y)^{2023} dx dy$  với  $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ .

[ ID: 6544 ] Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$ .

[ ID: 6545 ] Tính  $\iint_D (xy + x^2) dx dy$ , với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $x + y = 1$ ,  $x + y = -1$ ,  $x - 2y = 1$  và  $x - 2y = -1$ .

[ ID: 6554 ] Tính tích phân  $\iint_D (2x + y) dx dy$ , với miền  $D$  được giới hạn bởi  $y = x^2$ ,  $y = x$ .

[ ID: 6555 ] Tính tích phân kép  $\iint_D (x^2 + 7xy) dx dy$ , với miền  $D$  được xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 2x$ .

[ ID: 6564 ] Tính tích phân  $\iint_D (x^2 + 3y^2) dx dy$ , với  $D$  là miền giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $y = x$ .

[ ID: 6565 ] Tính  $\iint_D \cos(x^2 + y^2) dx dy$ ,  $D$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 4$ ,  $x \geq 0$ .

[ ID: 6575 ] Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{6-x^2}} f(x, y) dy$ .

[ ID: 6576 ] Tính  $\iint_D (|x|(1 + \tan y) - |y|) dx dy$ ,  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

[ ID: 6583 ] Tính  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , với  $D$  là miền phía trên parabol  $y = x^2$  và phía trong đường tròn  $x^2 + y^2 = 2$ .

[ ID: 6592 ] Tính tích phân kép :  $\iint_D (x + 2y) dx dy$  với  $D$  là miền giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = 2x$

[ ID: 6593 ] Tính tích phân kép :  $\iint_D (2x + 3y) dx dy$  với  $D$  là miền tam giác với các đỉnh  $O(0; 0)$ ;  $A(2; 2)$ ;  $B(4; 2)$

[ ID: 6594 ] Tính tích phân kép  $\iint_D (x + 3y^3) dx dy$  với  $D$  xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 4x$

[ ID: 6595 ] Tính tích phân kép  $\iint_D e^{x^2 + 4y^2} dx dy$  với  $D$  xác định bởi  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$

[ ID: 6604 ] Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$ .

[ ID: 6612 ] Tính tích phân kép  $\iint_D (x - 4y) dx dy$ , trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi parabol  $y = x^2 - 1$  và trục  $Ox$ .

[ ID: 6613 ] Tính tích phân lặp

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x-1}}^1 \frac{1 - \cos \pi y}{y^2} dy$$

[ ID: 6622 ] Tính các tích phân kép sau  $\iint_D x dx dy$ ,  $D$  là miền giới hạn bởi  $y = x^2$  và  $y = x + 2$ .

[ ID: 6623 ]  $\iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , với  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x\}$

[ ID: 6626 ] Tính  $\iint_D (3x + 2xy) dx dy$ , với  $D : 1 \leq xy \leq 9, y \leq x \leq 4y$ .

[ ID: 6632 ] Tính tích phân kép sau:  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , trong đó  $D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x + y \geq 0$ .

[ ID: 6633 ] Tính tích phân kép sau:  $\iint_D |\cos(x+y)| dx dy$ , trong đó  $D = \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

[ ID: 6642 ] Đổi thứ tự lấy tích phân  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$ .

[ ID: 6643 ] Tính  $\iint_D 4y dx dy$  với  $D$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 1$

[ ID: 6652 ] Tính tích phân kép sau  $\iint_D (2x^2 + 3y^2) dx dy$ ,  $D$  là miền giới hạn bởi  $y = x, y = 1$  và  $x = 0$ .

[ ID: 6653 ] Tính tích phân kép sau  $\iint_D (x^2 + xy - y^2) dx dy$ , với  $D$  là miền giới hạn bởi  $y = -2x + 1, y = -2x + 3, y = x - 2$  và  $y = x$ .

[ ID: 6654 ] Tính tích phân sau

$$\int_0^8 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4 + 1} dy$$

[ ID: 6728 ] Tính  $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy$

[ ID: 6729 ] Tính  $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 + xy^2) dy$

[ ID: 6730 ] Chứng minh rằng  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} e^{\frac{y}{x+y}} dy = \frac{e-1}{2}$

[ ID: 7425 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy$

[ ID: 7426 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_1^3 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx$

[ ID: 7427 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy$

[ ID: 7428 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$

[ ID: 7429 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^x f(x, y) dy + \int_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y) dy$

[ ID: 7430 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^3 dx \int_{(x-1)^2-1}^x f(x, y) dy$

[ ID: 7431 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$

- [ ID: 7432 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_{\frac{a}{2}}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy$
- [ ID: 7433 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y) dy$
- [ ID: 7434 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$
- [ ID: 7435 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$
- [ ID: 7436 ] Đổi thứ tự tính tích phân  $\int_0^1 dx \int_0^{x^{\frac{2}{3}}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy$
- [ ID: 7437 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$
- [ ID: 7438 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y) dx$
- [ ID: 7439 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_{-3}^3 dy \int_{y^2-4}^{y^2-5} (x+2y) dx$
- [ ID: 7440 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2 dy}{1+y^2}$
- [ ID: 7441 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr$
- [ ID: 7442 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x^2 dy}{y^2}$
- [ ID: 7443 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy$
- [ ID: 7444 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{3 \cos \varphi} r^2 \sin^2 \varphi dr$
- [ ID: 7445 ] Tính tích phân lặp sau:  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr$
- [ ID: 7446 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}$ , ở đó  $D: x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 3$
- [ ID: 7447 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D x^2(y-x) dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $y = x^2$  và  $x = y^2$ .
- [ ID: 7448 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \ln(x+y) dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 1, y = 1, y = 1+x$ .
- [ ID: 7449 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D |x+y| dx dy$ , ở đó miền  $D$  là hình vuông:  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ .
- [ ID: 7450 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , ở đó miền  $D$  là ellipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , còn  $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{y^2}{b^2} dy$

[ ID: 7451 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{4 - (x^2 + y^2)^2}} dx dy, D : \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$

[ ID: 7452 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}} dx dy$ , ở đó miền  $D : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ .

[ ID: 7453 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\pi} dx dy$ , ở đó miền  $D : \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

[ ID: 7454 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$ , ở đó miền  $D$  là ellipse:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

[ ID: 7455 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D y dx dy$ , ở đó miền  $D : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}, y \geq 0$ .

[ ID: 7456 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$ , ở đó  $D$  xác định bởi:  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), x \geq 0$ .

[ ID: 7457 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sin \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , ở đó miền  $D$  được cho như sau:  $\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$ .

[ ID: 7458 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D dx dy$ , ở đó miền  $D$  được giới hạn bởi đường:  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}$ .

[ ID: 7459 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi đường tròn:  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = 4a^2, a > 0$

[ ID: 7460 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi đường hoa hồng bốn cánh:  $r = a \sin 2\varphi, a > 0$

[ ID: 7461 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D (x + y)^3 (x - y)^2 dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường:  $x + y = 1, x - y = 1, x + y = 3, x - y = -1$ .

[ ID: 6559 ] Tính tích phân  $\int_0^1 dx \int_0^{\arccos x} e^{\sin y} dy$ .

## Tích phân bội ba

[ ID: 6054 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V z dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

[ ID: 6055 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V (3xy^2 - 4xyz) dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  xác định bởi:

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq xy \leq 2 \\ 0 \leq z \leq 2 \end{cases}$$

[ ID: 6056 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V xye^{yz^2} dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  xác định bởi:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x^2 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

[ ID: 6057 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  xác định bởi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 - z^2 \leq 0 \end{cases}$$

[ ID: 6058 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi mặt trụ:  $x^2 + y^2 = 2x$  và mặt phẳng:  $y = 0, z = 0, z = a, (y \geq 0, a > 0)$

[ ID: 6059 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là nửa của hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0, (a > 0)$

[ ID: 6060 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V z\sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là nửa của khối elipsoid  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0, (a, b > 0)$

[ ID: 6061 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V y dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi mặt nón:  $y = \sqrt{x^2 + z^2}$  và mặt phẳng  $y = h, (h > 0)$

[ ID: 6062 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V \frac{x^2}{a^2} dx dy dz$ , trong đó  $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, (a, b, c > 0)$

[ ID: 6063 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , trong đó  $V : \begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq z^2 \end{cases}$

[ ID: 6064 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = z^2, z = -1$

[ ID: 6065 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{[x^2 + y^2 + (z - 2)^2]^2}$ , trong đó  $V :$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ |z| \leq 1 \end{cases}$$

[ ID: 6066 ] Tính tích phân bội ba sau  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z$

[ ID: 6756 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (x^2 + y^2 + 2xyz^3) dx dy dz$ , với  $V : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq z^2$ .

[ ID: 6769 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2, z = 1$  và  $x^2 + y^2 = 4$ .

[ ID: 6779 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$ , trong đó  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2, z = 1$  và  $x^2 + y^2 = 4$ .

[ ID: 6787 ] Tính tích phân  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , với  $V$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ .

[ ID: 6795 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  với  $V$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$

[ ID: 6796 ] Tính  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{2x + z^2 + 1}}$  với  $V$  là miền xác định bởi  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq x, 0 \leq y \leq z$

[ ID: 6805 ] Tính  $\iiint_V (z + 1) dx dy dz$ , với  $V$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z$

[ ID: 6806 ] Tính  $\iiint_V \frac{z dx dy dz}{x^2 + y^2 + 2}$ , với  $V$  là miền xác định bởi  $\sqrt{x^2 + y^2 - 1} \leq z \leq 1$

[ ID: 6816 ] Tính  $\iiint_V \frac{z^3 dx dy dz}{1 + x^2 + y^2}$ , trong đó  $V$  xác định bởi  $x \geq 0, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ .

[ ID: 6831 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V x \sqrt{y^2 + z^2} dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  cho bởi  $y^2 + z^2 \leq x^2 + 1, 0 \leq x \leq \sqrt{3}$ .

[ ID: 6841 ] Tính tích phân  $\iiint_V z dx dy dz$  trên miền  $V$  giới hạn bởi mặt  $(x + 2y)^2 + 4z^2 = 1$  trong góc phần tám thứ nhất và các mặt phẳng tọa độ.

[ ID: 6846 ] Tính  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ , trong đó  $V$  là khối cầu  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .

[ ID: 6847 ] Tính  $\iiint_V \frac{z^3 dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$ , trong đó  $V$  xác định bởi  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ 1 \leq z \leq \sqrt{5} \end{cases}$ .

[ ID: 6867 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V xz dx dy dz$ , ở đó  $V$  là miền thỏa mãn  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z \leq -2$ .

[ ID: 6538 ] Tính các tích phân bội ba sau.  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  với  $V$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4, y \geq 0, z \geq 0$ .

[ ID: 6539 ] Tính các tích phân bội ba sau.  $\iiint_V (x^2 + z^2) dx dy dz$ , với khối  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z^2 + x^2 = 3y, y = 3$ .

[ ID: 6548 ] Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , với  $V$  là miền giới hạn bởi mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y$ .

[ ID: 6550 ] Tính  $\iiint_V (x + y)^4 (x - y)^3 z dx dy dz$ , với  $V : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2$ .

[ ID: 6557 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V [(x + y)^2 + (x - z)^3] dx dy dz$ , với khối  $V$  được xác định bởi  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ .

[ ID: 6558 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V z dx dy dz$ , với khối  $V$  được giới hạn bởi  $z^2 = 9(x^2 + y^2), z = 9$ .

[ ID: 6567 ] Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ , với  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = x^2 + y^2$  và  $z = 1$ .

[ ID: 6568 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , với  $V$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$ .

[ ID: 6570 ] Tính  $\iiint_V \frac{(y - 1)^3}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz$ , với  $V$  xác định bởi:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0$ .

[ ID: 6578 ] Tính  $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$ ,  $V$  là miền xác định bởi  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ .

[ ID: 6584 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{6y - x^2 - y^2 - z^2} dx dy dz$ , trong đó  $V : x^2 + y^2 + z^2 \leq 6y$ .

[ ID: 6596 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (4x^2 + y^2 + z^2 + 2xy) dx dy dz$ , với  $V$  là miền xác định bởi  $4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0$ .

[ ID: 6608 ] Tính  $\iiint_V z dx dy dz$  với  $V$  là miền xác định bởi  $x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 9, z \geq 0$ .

[ ID: 6609 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V x^2 e^z dx dy dz$ , trong đó  $V : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq xy + 1$ .

[ ID: 6615 ] Tính tích phân bội ba sau:  $\iiint_V (3x^2 + 2y) dx dy dz$ , trong đó miền  $V$  được xác định bởi  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq x^2$ .

[ ID: 6616 ] Tính tích phân bội ba sau:  $\iiint_V (x - y + 2z) dx dy dz$ , trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x - y = 0, x - y = 2, x + y = 0, x + y = 1, z = 0, z = 1$ .

[ ID: 6645 ] Tính  $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$  Với  $V$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \sqrt{3(x^2 + y^2)} \leq z$ .

[ ID: 6646 ] Tính  $\iiint_V z dx dy dz$  xác định bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6, x^2 + y^2 \leq z$

[ ID: 6656 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (4x^2y - 3xyz) dx dy dz$  trong đó  $V$  là miền xác định bởi  $1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq 2, 0 \leq z \leq 2$ .

[ ID: 6657 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$  trong đó  $V$  là miền giới hạn bởi các mặt  $x = y^2 + 4z^2, x = 4$ .

[ ID: 7482 ] Tính tích phân  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$ , ở đó miền  $V$  là hình cầu:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

[ ID: 7481 ] Tính tích phân  $\iiint_V z dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  giới hạn bởi các mặt sau:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  và  $z = 0$

[ ID: 7480 ] Tính tích phân  $\iiint_V (x + y + z)^2 dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  giới hạn bởi các mặt sau:  $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 = 3, z \geq 0$

[ ID: 7479 ] Tính tích phân  $\iiint_V dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  giới hạn bởi các mặt:  $x^2 + y^2 + z^2 = 2R, x^2 + y^2 = z^2$ , miền chứa  $(0, 0, R)$

[ ID: 7478 ] Tính tích phân  $\iiint_V (xy + yz + zx) dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq m^2$

[ ID: 7477 ] Tính tích phân  $\iiint_V x^2 y^2 z^2 dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  được xác định bởi:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$

[ ID: 7476 ] Tính tích phân  $\iiint_V z^2 dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

[ ID: 7475 ] Tính tích phân  $\iiint_V \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 2)^2}}$ , ở đó  $V$  là hình trụ  $x^2 + y^2 \leq 1, -1 \leq z \leq 1$

[ ID: 7474 ] Tính tích phân  $\iiint_V y dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  được xác định bởi các mặt:  $y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = h (h > 0)$

[ ID: 7473 ] Tính tích phân  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , miền  $V$  xác định như sau:  $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{3a^2} \leq 1$

[ ID: 7472 ] Tính tích phân  $\iiint_V |xyz| dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  
 $x^2 + y^2 \leq 2z, 0 \leq z \leq a$

[ ID: 7471 ] Tính tích phân  $\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2}} (x^2 + y^2) dz$  bằng cách chuyển qua tọa độ cầu

[ ID: 7470 ] Tính tích phân  $\int_0^{2r} dx \int_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz$  bằng cách chuyển qua tọa độ trụ

[ ID: 7469 ] Tính tích phân  $\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^a z \sqrt{x^2 + y^2} dz$  bằng cách chuyển qua tọa độ trụ

[ ID: 7468 ] Tính tích phân  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz$

[ ID: 7467 ] Tính tích phân  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$ ;

[ ID: 7466 ] Tính tích phân  $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}$ ;

[ ID: 7465 ] Tính tích phân  $\int_0^a dx \int_{2\sqrt{x}}^{\sqrt{a^2}} dy \int_0^2 z dz$ ;

[ ID: 7464 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

[ ID: 7463 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V (1 - x - y - z) dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  $x + y + z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

[ ID: 7462 ] Tính tích phân bội ba  $\iiint_V z dx dy dz$ , ở đó miền  $V$  xác định như sau:  
 $0 \leq x \leq \frac{1}{4}, x \leq y \leq 2x, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

[ ID: 7461 ] Tính tích phân sau:  $\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường:  $x + y = 1, x - y = 1, x + y = 3, x - y = -1$ .

## Ứng dụng tích phân

[ ID: 6067 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đường  $\begin{cases} y^2 = x, y^2 = 2x \\ x^2 = y, x^2 = 2y \end{cases}$

[ ID: 6068 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi  $\begin{cases} y = 0, y^2 = 4ax \\ x + y = 3a, y \leq 0, (a > 0) \end{cases}$ .

[ ID: 6069 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  xác định bởi  $\begin{cases} 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4x \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$

[ ID: 6070 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  xác định bởi  $r \geq 1, r \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \varphi$

[ ID: 6071 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đường  $(a > 0) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$

[ ID: 6072 ] Tính diện tích của miền  $\mathcal{D}$  giới hạn bởi đường  $(a > 0) r = a(1 + \cos \varphi)$

[ ID: 6073 ] Chứng minh rằng diện tích của miền  $\mathcal{D}$  xác định bởi  $x^2 + (\alpha x - y)^2 \leq 4$  không đổi  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

[ ID: 6074 ] Tính thể tích của miền xác định bởi  $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x + 2y \leq 2 \\ y \geq 0, 0 \leq z \leq 2 - x - y \end{cases}$

[ ID: 6075 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi mặt  $\begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2z = 2 + x^2 + y^2 \end{cases}$

[ ID: 6076 ] Tính thể tích của miền xác định bởi  $|x - y| + |x + 3y| + |x + y + z| \leq 1$ .

[ ID: 6077 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi mặt  $z = 1 + x^2 + y^2$ , mặt trụ  $x^2 + 4y^2 = 4$  và mặt phẳng Oxy.

[ ID: 6078 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi mặt:  $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}, (a > 0)$ .

[ ID: 6079 ] Tính diện tích phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$  nằm bên trong mặt trụ  $x^2 + y^2 - 2ay = 0, (a > 0)$ .

[ ID: 6759 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi các mặt  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x^2 + y^2 - 2$ .

[ ID: 6765 ] Tính diện tích của phần mặt phẳng  $z = 1 + 2x + y$  trên miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = y^3$  và  $y = x^3$ .

[ ID: 6788 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt  $z = 0, z = 1 + x^2 + y^2$  và mặt  $4x^2 + y^2 = 4$ .

[ ID: 6797 ] Tính thể tích của miền xác định bởi  $1 \leq z \leq \sqrt{5 - x^2 - 4y^2}$

[ ID: 6807 ] Tính diện tích phần mặt paraboloid  $z = 4x - x^2 - y^2$  nằm phía trên mặt phẳng  $Oxy$

[ ID: 6830 ] Tính diện tích của miền phẳng  $D$  được cho bởi  $(x^2 + y^2)^2 \leq 2x^2y, x \geq 0$ .

[ ID: 6866 ] Tính diện tích của phần mặt paraboloid  $x = y^2 + z^2$  thỏa mãn  $x \leq 1$ .

[ ID: 6537 ] Tính thể tích của vật thể  $V$  giới hạn bởi các mặt  $z = 12 - x^2 - 2y^2$  và  $z = 2x^2 + y^2$ .

[ ID: 6546 ] Tính diện tích của phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = 2y$ .

[ ID: 6547 ] Tính thể tích của miền xác định bởi  $x \geq y^2 + z^2$  và  $x^2 + 2y^2 + 2z^2 \leq 3$ .

[ ID: 6556 ] Tính thể tích của vật thể  $V$  được xác định bởi  $-3 \leq x - 2y \leq 0, -4 \leq x + y \leq 0, -3 \leq y + 3z \leq 0$ .

[ ID: 6577 ] Tính diện tích của miền xác định bởi  $2x \leq x^2 + y^2 \leq 4$  và  $0 \leq y \leq x$ .

[ ID: 6585 ] Tính diện tích miền giới hạn bởi hai đường cong  $y = x^2$  và  $y^2 = x$ .

[ ID: 6586 ] Tính thể tích miền có biên là các mặt cong  $x = y^2 + z^2$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  nằm trong phần không gian có  $x$  không âm.

[ ID: 6597 ] Tính thể tích vật thể  $V$  xác định bởi  $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 6 - x^2 - y^2$

[ ID: 6605 ] Tính diện tích phần mặt  $z = x^2 + y^2 + 1$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = 4$

[ ID: 6606 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi các mặt cong  $y = x^2, x = y^2, z = y^2$  và mặt  $Oxy$ .

[ ID: 6614 ] Tính diện tích phần hình tròn  $x^2 + y^2 = 2y$  nằm ngoài đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$ .

[ ID: 6635 ] Tính thể tích của miền giới hạn bởi hai parabol  $x = 1 + y^2 + z^2$  và  $x = 2(y^2 + z^2)$ .

[ ID: 6644 ] Tính thể tích miền  $V$  giới hạn bởi mặt  $Oxy$  và mặt  $z = x^2 + y^2 - 4$

[ ID: 6655 ] Tính thể tích của vật thể  $V$  giới hạn bởi các mặt:

$$z = x^2 + 3y^2 \text{ và } z = 4 - 3x^2 - y^2.$$

[ ID: 7483 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $x = 4y - y^2, x + y = 6$

[ ID: 7484 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y^2 = x^3, y^2 = 8(6 - x)^3$

[ ID: 7485 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = 2^x, y = -\frac{x}{2}, y = 4$

[ ID: 7486 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = x, x = 2y, x + y = a, x + 3y = a, a > 0$

[ ID: 7487 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = 0, y^2 = 4ax, x + y = 3a, y \leq 0$

[ ID: 7488 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(y - x)^2 + x^2 = 1$

[ ID: 7489 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = \alpha x, y^2 = \beta x, (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$

[ ID: 7490 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y^2 = ax, y^2 = bx, xy = \alpha, xy = \beta, (0 < a < b, 0 < \alpha < \beta)$

[ ID: 7491 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100$   
j)  $r = a \cos \varphi, r = b \cos \varphi, (0 < a < b)$

[ ID: 7492 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $r = a \sin 2\varphi$  1 l)  $r = a(1 + \cos \varphi), r = a \cos \varphi, a > 0$

[ ID: 7493 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $r \cos \varphi = 1, r = 2$  (miền không chứa gốc cực)

[ ID: 7494 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $y = 0$  và một nhịp của đường cycloid:  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ .

[ ID: 7495 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$

[ ID: 7496 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$

[ ID: 7497 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $x^3 + y^3 = 2xy, x \geq 0, y \geq 0$

[ ID: 7498 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(x + y)^3 = xy, x \geq 0, y \geq 0$

[ ID: 7499 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $(x + y)^5 = x^2 y^2, x \geq 0, y \geq 0$

[ ID: 7500 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{c^2}$

[ ID: 7501 ] Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi  $\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{25}$ .

[ ID: 7502 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = x^2 + y^2, z = x + y$

[ ID: 7503 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2$

[ ID: 7504 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = 4 - y^2, z = y^2 + 2, x = -1, x = 2$

[ ID: 7505 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = \ln(x + 2), z = \ln(6 - x), x = 0, x + y = 2, x - y = 2$

[ ID: 7506 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = x^2 + y^2, z = (x^2 + 2y^2), y = x, y = 2x, x = 1$

[ ID: 7507 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x$

[ ID: 7508 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x + y + z = a, 3x + y = a, \frac{3}{2}x + y = a, y = 0, z = 0$

[ ID: 7509 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, y = \frac{b}{a}x, y = 0, z = 0$

[ ID: 7510 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 2ax, z = \alpha x, z = \beta x (\alpha > \beta)$

[ ID: 7511 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x - 1)^2 + y^2 = z, 2x + z = 2$

[ ID: 7512 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 3z$

[ ID: 7513 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = x^2 + y^2, z^2 = xy$

[ ID: 7514 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\iint_D (x - y) dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $y = 2 - x^2, y = 2x - 1$ .

[ ID: 7515 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\iint_D (x^2 + y) dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi  $y^2 = x$  và  $y = x^2$ .

[ ID: 7516 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$ , ở đó miền  $D$  giới hạn bởi các đường  $x = 1, y = 0, y = x$

[ ID: 7517 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\iint_D \cos(x + y) dx dy, D : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ .

[ ID: 7518 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\iint_D \sqrt{|y - x^2|} dx dy, D : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ .

[ ID: 7519 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $4y^2 = x(2 - z), z = 0, x + z = 2$

[ ID: 7520 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = \cos x \cos y, x = 0, y = 0, z = 0, x + y = \frac{\pi}{2}$

[ ID: 7521 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$

[ ID: 7522 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = \frac{xy}{a}, x^2 + y^2 = ax, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0)$

[ ID: 7523 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = x, z = x^2 + y^2, x + y = 0, x - y = 0, z = 0$

[ ID: 7524 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 2y, z = x + 2y, z = 0$

[ ID: 7525 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z^2 = xy, (x^2 + y^2)^2 = 2xy (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$

[ ID: 7526 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0$

[ ID: 7527 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, (x \geq 0, y \geq 0), z = 0$

[ ID: 7528 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + z^2 = a^2$  k)  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0)$ .

[ ID: 7529 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt phẳng  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ , chắn giữa các mặt phẳng toạ độ

[ ID: 7530 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$  nằm trong mặt trụ:  $x^2 + y^2 = 1$

[ ID: 7531 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} (a > 0, b > 0)$  nằm

trong mặt trụ  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[ ID: 7532 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  nằm trong hình trụ:  $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \left(x^2 - y^2\right) (a > 0)$

[ ID: 7533 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$  nằm trong mặt trụ  $z^2 = 2py$

[ ID: 7534 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt nón  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$  nằm trong mặt trụ:  $x^2 + y^2 = R^2$

[ ID: 7535 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $y^2 + z^2 = x^2$ , chắn bởi mặt trụ  $x^2 - y^2 = a^2$  và các mặt phẳng:  $y = b, y = -b$ .

[ ID: 7536 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt trụ  $x^2 + y^2 = ax$  chắn trong mặt cầu:  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

[ ID: 7537 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  nằm trong mặt trụ:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

[ ID: 7538 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt paraboloid  $y^2 + z^2 = 2ax$  chắn giữa mặt  $z = a$  và mặt nón  $z^2 = x^2 + y^2$

[ ID: 7539 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt nón  $x^2 - y^2 = z^2$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = 2ax$

[ ID: 7540 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $z = xy$  chắn bởi mặt trụ  $x^2 + y^2 = R^2$

[ ID: 7541 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $(x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = a^2 - z^2$  ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) nằm trong góc phần tám thứ nhất

[ ID: 7542 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt đỉnh ốc  $z = c \cdot \arctan \frac{y}{x}$  nằm trong góc phần tám thứ nhất và nằm giữa các mặt trụ:  $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = b^2$

[ ID: 7543 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $x^2 + y^2 = 2ax$  nằm giữa các mặt:  $z = 0$  và  $x^2 + y^2 = z^2$

[ ID: 7544 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  ở phía ngoài các mặt:  $x^2 + y^2 = \pm R y$

[ ID: 7545 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  ở phía trong mặt  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

[ ID: 7546 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $z = \sqrt{x^2 - y^2}$  ở phía trong mặt  $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$

[ ID: 7547 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt giới hạn bởi các mặt:  $x^2 + z^2 =$

$$R^2, y^2 + z^2 = R^2$$

[ ID: 7548 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt cầu giới hạn bởi hai kinh tuyến và hai vĩ tuyến

[ ID: 7549 ] Tính diện tích các mặt tạo bởi Phần mặt  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$  bị chặn bởi các mặt  $x^2+y^2=1, x^2+y^2=4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ .

[ ID: 7550 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z, x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$

[ ID: 7551 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 = 2ax, z = 0, x^2 + y^2 = 2az$

[ ID: 7552 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z^2 = x^2 + y^2$  (phần không chứa trục  $Oz$ )

[ ID: 7553 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 2, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 (z \geq 0)$

[ ID: 7554 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

[ ID: 7555 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$

[ ID: 7556 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $z = 0, z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1$

[ ID: 7557 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3x$

[ ID: 7558 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$

[ ID: 7559 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2(x^2 + y^2)^2$

[ ID: 7560 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}$

[ ID: 7561 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$

[ ID: 7562 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ .

[ ID: 7563 ] Tính thể tích vật thể giới hạn bởi  $(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 +$

$$(a_3x + b_3y + c_3z)^2 = R^2 \text{ với } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

## Chương 3. Tích phân phụ thuộc tham số

### I. Tích phân xác định phụ thuộc tham số

#### 1. Định nghĩa

Cho  $f(x, y)$  là một hàm hai biến số xác định trên hình chữ nhật  $[a, b] \times [c, d]$ . Giả sử với mỗi  $y \in [c, d]$ , hàm số  $z = f(x, y)$  khả tích theo  $x$  trên  $[a, b]$ . Khi đó tích phân

$$\int_a^b f(x, y) dx$$

xác định hàm phụ thuộc vào tham số  $y$ , ta có thể viết

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

như một hàm số theo biến  $y$ .

Tích phân trên gọi là tích phân phụ thuộc tham số,  $y$  là tham số.

#### 2. Tính chất

##### - Tính liên tục:

Nếu  $f$  là hàm liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ , thì  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  là hàm số liên tục trên  $[c, d]$ .

Tức:  $\lim_{y \rightarrow y_0} I(y) = I(y_0)$

##### - Tính khả vi: (Quy tắc Leibniz)

Giả sử  $f(x, y)$  là hàm số liên tục và có đạo hàm riêng  $f'_y(x, y)$  liên tục trên một miền của mặt phẳng  $Oxy$  chứa hình chữ nhật  $[a, b] \times [c, d]$ . Khi đó với  $c \leq y \leq d$ , ta có

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Hay ta cũng có thể viết

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx?$$

Phương pháp tính tích phân bằng đạo hàm qua dấu tích phân

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ .

**B1.** Tính  $I'(y)$  bằng cách  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)dx$ .

**B2.** Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục lại  $I(y)$  bằng cách  $I(y) = \int I'(y)dy + C$ .

**B3.** Cho một giá trị đặc biệt của  $y$  để xác định  $C$ .

**Chú ý:** cần kiểm tra  $I(y)$  thỏa mãn tính khả vi trước

**- Tính khả tích: (Định lý Fubini)**

Nếu  $f$  là hàm số liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ , thì

$$\int_c^d I(y)dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)dx \right) dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

Phương pháp tính tích phân bằng đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^b f(x, y)dx$ .

**B1.** Biểu diễn  $f(x, y) = \int_c^d F(x, y)dy$ .

**B2.** Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b \left( \int_c^d F(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^b F(x, y)dx \right) dy$$

### 3. Tích phân với cận biến đổi

Xét tích phân phụ thuộc tham số

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y)dx,$$

ở đây  $a(y)$  và  $b(y)$  là các hàm số của biến  $y$ , xác định trên  $[c, d]$ .

**- Tính liên tục**

Giả sử  $f(x, y)$  là hàm số liên tục trên  $[a, b] \times [c, d]$ ; các hàm số  $a(y), b(y)$  liên tục trên  $[c, d]$  và nhận giá trị trên  $[a, b]$ . Khi đó hàm số  $I(y)$  liên tục trên đoạn  $[c, d]$ .

**- Tính khả vi**

Giả sử  $f(x, y)$  thỏa mãn các điều kiện phát biểu trong quy tắc Leibniz. Ngoài ra, giả sử  $a(y)$  và  $b(y)$  là các hàm số khả vi liên tục trên  $[c, d]$ . Khi đó, với  $c \leq y \leq d$ , ta có

$$\frac{d}{dy} \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx = f(b(y), y)b'(y) - f(a(y), y)a'(y) + \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x, y) dx.$$

## II. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

### 1. Định nghĩa

Xét tích phân suy rộng

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

phụ thuộc vào tham số  $y$ . Theo định nghĩa,

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x, y) dx \quad (2)$$

Tích phân suy rộng (1) được gọi là hội tụ nếu giới hạn ở (2) tồn tại (hữu hạn). Ngược lại, ta nói tích phân là phân kỳ.

### 2. Tích phân suy rộng hội tụ đều

Tích phân suy rộng  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  được gọi là hội tụ đều trên khoảng  $U \subset \mathbb{R}$ , nếu nó là tích phân hội tụ với mỗi  $y \in U$  và với  $\varepsilon > 0$  cho trước, tồn tại số  $B$  sao cho

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{với mọi } b > B, y \in U$$

trong đó  $B$  không phụ thuộc vào  $y$ .

#### - Tiêu chuẩn Weierstrass

Cho  $f(x, y)$  là hàm số liên tục theo  $x$  trên  $[a, +\infty)$ , với mỗi  $y \in [c, d]$ . Giả sử  $g(x)$  là hàm số liên tục trên  $[a, +\infty)$ . Khi đó, nếu  $|f(x, y)| \leq g(x)$  với mọi  $(x, y) \in [a, +\infty) \times [c, d]$  và tích phân  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  hội tụ, thì tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

Hội tụ tuyệt đối và hội tụ đều trên  $[c, d]$

### 3. Các tính chất

#### - Tính liên tục

Nếu  $f(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$  và tích phân

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

hội tụ đều trên  $[c, d]$ , thì hàm số  $I(y)$  liên tục trên  $[c, d]$ .

#### - Tính khả vi

Giả sử  $f(x, y)$  là hàm số liên tục theo  $x$  đối với mỗi  $y$  cố định thuộc  $[c, d]$  và  $f'_y(x, y)$  liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$ . Khi đó, nếu các tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

hội tụ, trong đó tích phân thứ hai hội tụ đều trên  $[c, d]$ , thì  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  là hàm số khả vi liên tục, với  $y \in [c, d]$ , và

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

Phương pháp tính tích phân bằng đạo hàm qua dấu tích phân

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ .

**B1.** Tính  $I'(y)$  bằng cách  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ .

**B2.** Dùng công thức Newton-Leibniz để khôi phục  $I(y)$  bằng cách  $I(y) = \int I'(y) dy + C$ .

**B3.** Cho một giá trị đặc biệt của  $y$  để xác định  $C$ .

**Chú ý:** cần kiểm tra  $I(y)$  thỏa mãn tính khả vi trước

#### - Tính khả tích:

Giả sử  $f(x, y)$  là hàm số liên tục trên  $[a, +\infty) \times [c, d]$  và tích phân

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

hội tụ đều tới  $I(y)$  trên  $[c, d]$ . Khi đó

$$\int_c^d I(y) dy = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Phương pháp tính tích phân bằng đổi thứ tự lấy tích phân

Giả sử cần tính  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ .

**B1.** Biểu diễn  $f(x, y) = \int_c^d F(x, y) dy$ .

**B2.** Sử dụng tính chất đổi thứ tự lấy tích phân:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \left( \int_c^d F(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left( \int_a^{+\infty} F(x, y) dx \right) dy$$

### III. Tích phân Euler

#### 1. Hàm Gamma

- Định nghĩa

Hàm Gamma được định nghĩa bởi

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \quad \text{với } a > 0.$$

Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số này hội tụ đều trên  $[a_0, +\infty)$ , với  $a_0 > 0$ . Đó là tích phân hội tụ, với  $a > 0$ .

- Các tính chất

$$+\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$$

$$+\Gamma(1) = 1, \Gamma(n) = (n-1)!, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi} \quad \text{với } n \in \mathbb{N}$$

$$+\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln^k x) \cdot e^{-x} dx.$$

$$+\Gamma(p) \cdot \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \forall 0 < p < 1.$$

#### 2. Hàm beta

- Ba dạng của hàm beta

**Dạng 1:**  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$

**Dạng 2:**  $B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx.$

**Dạng lượng giác:**  $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} t \cos^{2q-1} t dt.$

- Các tính chất

$$+ B(1, 1) = 1, \quad B(p, q) = B(q, p).$$

$$+ \begin{cases} B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q), & \text{nếu } p > 1 \\ B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1), & \text{nếu } q > 1 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}, \forall m, n \in \mathbb{N} \\ B(p, n) = \frac{(n-1)!}{(p+n-1)(p+n-2) \dots (p+1)p} B(p, 1) \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$+ B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

## IV. Các ví dụ minh họa

**VD1:** Xét tính liên tục của  $I(y)$  và tính  $\lim_{y \rightarrow 1} I(y)$

$$I(y) = \int_0^1 \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2} dx$$

**Giải**

Ta có:  $f(x, y) = \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$  liên tục trên  $[0, 1] \times [c, d]$  với mọi đoạn  $[c, d]$  nên  $I(y) = \int_0^1 \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2} dx$  liên tục trên  $[c, d]$  với mọi đoạn  $[c, d]$  tức là liên tục trên  $\mathbb{R}$ . Khi đó ta có

$$\lim_{y \rightarrow 0} I(y) = I(0) = \int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{32}$$

**VD2:** Cho hàm số  $f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + y^2 \cos^2 x) dx$ . Tính  $f'(1)$ .

**Giải**

Xét hàm  $g(x, y) = \ln(\sin^2 x + y^2 \cos^2 x)$  liên tục trên  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .

Ta có:  $g'_y(x, y) = \frac{2y \cos^2 x}{\sin^2 x + y^2 \cos^2 x}$  liên tục trên  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ .

$\Rightarrow f(y)$  là hàm khả vi  $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g'_y(x, 1) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx \\ &= \left( x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**VD3:** Tính tích phân sau bằng hai cách (với  $a, b > 0$ )

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

**Giải**

**Cách 1:** Dùng đạo hàm qua dấu tích phân

$$\text{Đặt } I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, b > 0.$$

Xét hàm số  $f(x, b) = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$ . Vì  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0$  với mọi  $b > 0$

$\Rightarrow f(x, b)$  liên tục trên  $[0, 1] \times [c, d]$  với  $c, d > 0$

$\Rightarrow I(b)$  khả vi trên  $[c, d]$

Ta có:  $I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{b+1}$

$\Rightarrow I(b) = \int I'(b) db = \int \frac{db}{b+1} = \ln(b+1) + C$  (do  $b+1 > 0$ )

Chọn  $b = a$  suy ra  $I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = 0 = \ln(a+1) + C \Rightarrow C = -\ln(a+1)$

Vậy  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$

**Cách 2:** Đổi thứ tự lấy tích phân

Ta có:  $\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \Rightarrow \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left( \int_a^b x^y dy \right) dx$

Do  $x^y$  liên tục trên  $[0, 1] \times [a, b]$  nên đổi thứ tự tính tích phân ta được

$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_a^b \left( \int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$

Vậy  $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \ln \left( \frac{b+1}{a+1} \right)$

**VD4:** Tìm giới hạn  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2} dx$ .

**Giải**

Đặt  $I(y) = \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2} dx$ .

Ta có:  $f(x, y) = \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2}$  liên tục trên  $[-1, 1] \times [-1, 1]$

$a(y) = \sin y, b(y) = \cos y$  liên tục trên  $[-1, 1]$ .

Suy ra, hàm  $I(y)$  liên tục trên  $[-1, 1]$  và do đó liên tục tại  $y = 0$ . Do đó:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{\sin y}^{\cos y} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2+y^2} dx = \lim_{y \rightarrow 0} I(y) = I(0) = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}$$

**VD5:** Xét sự hội tụ đều của tích phân suy rộng  $I(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2} dx$ .

**Giải** Xét  $f(x, y) = \frac{\cos(xy)}{1+x^2+y^2}$  liên tục trên  $\mathbb{R}^2$ . Ta có:

$$|f(x, y)| = \frac{|\cos(xy)|}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1}{1+x^2} = g(x)$$

mà  $\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$  hội tụ nên  $I(y)$  hội tụ đều (Theo tiêu chuẩn Weierstrass)

**VD6:** Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} t^{10} e^{-t^2} dt$

**Giải**

Đặt  $x = t^2 \Rightarrow t = x^{\frac{1}{2}}, dt = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ . Suy ra

$$\int_0^{+\infty} t^{10} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} x^5 e^{-x} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^{\frac{9}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{11}{2}\right) = \frac{9!!}{2^6} \sqrt{\pi} = \frac{945}{64} \sqrt{\pi}$$

**VD7:** Tính tích phân sau:  $\int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t dt$

**Giải**

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 t \cos^7 t dt = \frac{1}{2} B(3, 4) = \frac{1}{2} \frac{2!3!}{6!} = \frac{1}{120}$$

## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

[ ID: 6080 ] Xét tính liên tục của hàm số  $I(y) = \int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$ .

[ ID: 6081 ] Tìm  $\lim_{y \rightarrow 1} \int_0^y \frac{\arctan x}{x^2 + y^2} dx$ .

[ ID: 6082 ] Khảo sát sự liên tục của tích phân  $I(y) = \int_0^1 \frac{yf(x)}{x^2 + y^2} dx$  với  $f(x)$  là hàm số dương, liên tục trên đoạn  $[0, 1]$ .

[ ID: 6083 ] Cho hàm số  $f(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin^2 x + y^2 \cos^2 x) dx$ . Tính  $f'(1)$ .

[ ID: 6084 ] Chứng minh rằng tích phân phụ thuộc tham số  $I(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x+y)}{1+x^2} dx$  là một hàm số liên tục, khả vi đối với biến  $y$ . Tính  $I'(y)$  rồi suy ra biểu thức của  $I(y)$ .

[ ID: 6085 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$

[ ID: 6086 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx$

[ ID: 6087 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin(bx) - \sin(cx)}{x} dx$

[ ID: 6088 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n dx$

[ ID: 6089 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + y)^{n+1}}$

[ ID: 6090 ] Tính tích phân sau, (với  $a, b, \alpha, \beta$  là số dương,  $n$  là số nguyên dương):  
 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + y \sin^2 x) dx$ , với  $y > -1$

[ ID: 6091 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x dx$

[ ID: 6092 ] Tính tích phân sau:  $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)^4}{x^2} dx$

[ ID: 6093 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} x^{10} e^{-x^2} dx$

[ ID: 6094 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$

[ ID: 6095 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} dx$

[ ID: 6096 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(1+x^n)^2} dx, (2 < n \in \mathbb{N})$

- [ ID: 6097 ] Tính tích phân sau:  $\int_{-\infty}^0 e^{2x} \sqrt[3]{1 - e^{3x}} dx$
- [ ID: 6098 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1 - x^n}} dx, (2 \leq n \in \mathbb{N})$
- [ ID: 6099 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^a x^{2n} \sqrt{a^2 - x^2} dx, (a > 0, n \in \mathbb{N})$
- [ ID: 6789 ] Tính tích phân  $\int_0^{+\infty} x^{30} e^{-x^2} dx$ .
- [ ID: 6817 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} x^5 e^{-x^4} dx$ .
- [ ID: 6818 ] Tính tích phân sau:  $\int_0^{+\infty} \frac{2^{-x} - 3^{-x}}{x} dx$ .
- [ ID: 6835 ] Tính tích phân  $\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(1 + x^4)^4}$ .
- [ ID: 6848 ] Tính  $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^7 x \cos^5 x} dx$ .
- [ ID: 6540 ] Cho hàm số  $I(y) = \int_0^{\frac{y}{2}} \arctan \frac{x}{y} dx$ . Tính  $I'(2)$ .
- [ ID: 6549 ] Cho  $I(y) = \int_0^1 \sqrt{x^3 y^2 + 2x^2 + x^4} dx$ . Xét tính liên tục của  $I(y)$  và từ đó tìm  $\lim_{y \rightarrow 0} I(y)$ .
- [ ID: 6560 ] Cho hàm số  $I(y) = \int_{2y}^1 \cos(2x^2 + 4xy + y^2) dx$ . Tính  $I'(0)$ .
- [ ID: 6569 ] Cho hàm số  $I(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^4 + x^2 + y^4} dx$ . Xét tính liên tục của  $I(y)$ . Từ đó tìm  $\lim_{y \rightarrow 0} I(y)$ .
- [ ID: 6579 ] Xét hàm số  $I(y) = \int_0^1 \frac{\arctan(xy)}{x\sqrt{1-x^2}} dx$  (1đ) Chứng minh  $I(y)$  khả vi trên  $\mathbb{R}$  và tính  $I'(1)$ . b) (1đ) Tính  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ .
- [ ID: 6588 ] Tính  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 (x + 3y) \sqrt{x^2 + y^2 + 1} dx$ .
- [ ID: 6598 ] Xác định giới hạn  $\lim_{y \rightarrow 2} \left( \int_1^{2y} \frac{(x+2) \cdot e^{xy}}{x+y} dx \right)$
- [ ID: 6603 ] Tìm giới hạn  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\pi/2} \sin(x^2 y + 2x + y^2) dx$
- [ ID: 6618 ] Chứng minh rằng hàm số sau khả vi trên  $\mathbb{R}$ :  $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1 - \cos(xy)}{x} dx$ .
- [ ID: 6628 ] Tính tích phân  $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^3} - e^{-bx^3}}{x} dx$  với  $a, b > 0$ .
- [ ID: 6638 ] Chứng minh rằng hàm số  $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{\sin(xy)}{x} dx$  khả vi trên  $\mathbb{R}$

[ ID: 6648 ] Cho hàm số  $I(y) = \int_y^1 \sin(x^2 + xy + y^2) dx$ . Tính  $I'(0)$ .

[ ID: 7650 ] Tính tích phân sau  $I_n(\alpha) = \int_0^1 x^\alpha \ln^n x dx$ ,  $n$  là số nguyên dương.

[ ID: 7651 ] Tính tích phân sau  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + y \sin^2 x) dx$ , với  $y > 1$

[ ID: 7652 ] Tính  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{1+y} \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$ .

[ ID: 7653 ] Tính tích phân sau  $I(y) = \int_0^1 \arctan \frac{x}{y} dx$

[ ID: 7654 ] Tính tích phân sau  $J(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx$

[ ID: 7655 ] Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, & 0 < x, y \leq 1, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Chứng minh rằng

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = -\frac{\pi}{4}$$

[ ID: 7656 ] Tính  $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$  ( $y > 0$ )

[ ID: 7657 ] Chứng minh rằng  $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos yx = \frac{a}{y^2 + a^2}$  với  $a > 0$  và với mọi  $y$ .

[ ID: 7658 ] Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\cos yx}{x^2 + 1}$  là hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ .

[ ID: 7659 ] Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-yx} dx$  ( $y > 0$ ) hội tụ đều trên  $[y_0, +\infty)$  với mọi  $y_0 > 0$ .

[ ID: 7660 ] Chứng minh rằng  $I(y) = \int_0^{+\infty} e^{-yx} \cos \alpha x$  hội tụ đều trên khoảng  $[a, b]$  với mọi  $0 < a < b$  và  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

[ ID: 7661 ] Tính  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(yx) dx$

[ ID: 7662 ] Chứng minh rằng  $\int_0^{+\infty} \left( e^{-\frac{a}{x^2}} - e^{-\frac{b}{x^2}} \right) dx = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$ , ( $a, b > 0$ ).

[ ID: 7663 ] Chứng minh rằng  $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{b}}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$ , ( $a, b > 0$ ).

[ ID: 7664 ] Chứng minh rằng  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{1 + x^2} = \pi \ln(1 + \alpha)$ ,  $\alpha \geq 0$ .

[ ID: 7665 ] Chứng minh rằng  $\int_0^{\infty} \frac{\sin^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$ .

[ ID: 7666 ] Tính  $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}} dx$ ,

[ ID: 7667 ] Xét tính khả vi và tính đạo hàm  $I(x) = \int_{\sin y}^{\cos y} e^{yx^2} dx$

[ ID: 7668 ] Chứng minh  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{a^2 + t^2} dt$  hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$

[ ID: 7669 ] Xét tính hội tụ đều của  $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^t dt$ ,  $a > 0, t \in [0, a]$

## Chương 4. Tích phân đường

### I. Tích phân đường loại một

#### 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f(x, y)$  xác định trên miền chứa đường cong  $C$ . Tích phân đường loại một của hàm  $f$  dọc theo cung  $C$  là

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

nếu giới hạn đó tồn tại và không phụ thuộc vào cách chia cung  $C$  và cách chọn điểm  $P_i^*(x_i^*, y_i^*)$  trên cung nhỏ thứ  $i$ . Khi đó ta nói hàm  $f$  khả tích trên cung  $C$ .

#### 2. Tính chất

- Nếu  $f(x, y) \equiv 1$  thì tích phân đường  $\int_C ds$  cho ta độ dài của đường cong  $C$ .

Mở rộng: Cho một sợi dây dọc theo cung  $C$  có khối lượng riêng tại  $M(x, y)$  là  $\rho(x, y)$  thì khối lượng của sợi dây đó là  $\int_C \rho(x, y) ds$  nếu tích phân đó tồn tại

- Tính khả tích: Nếu  $f$  là hàm số liên tục trên cung trơn  $C$ , thì hàm  $f$  khả tích trên cung  $C$ .
- Tích phân đường loại một có các tính chất tương tự như tích phân xác định. Ngoài ra, tích phân đường loại một không phụ thuộc vào chiều của đường cong.

#### 3. Cách tính tích phân đường loại một

Nếu  $C$  có phương trình tham số  $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ , thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Đặc biệt:

- Nếu  $C$  cho bởi phương trình  $y = y(x), a \leq x \leq b$  thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

- Nếu  $C$  cho bởi phương trình  $x = x(y), c \leq y \leq d$  thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2(y)} dy$$

- Nếu  $C$  cho bởi phương trình trong toạ độ cực  $r = r(\varphi), \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  thì

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r'^2(\varphi) + r^2(\varphi)} d\varphi$$

**Chú ý:** nếu  $C$  là đường cong trơn từng khúc (  $C$  là hợp của hữu hạn các đường cong trơn  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ), thì tích phân đường của  $f$  dọc theo đường cong  $C$  là

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds$$

#### 4. Tích phân đường loại một trong không gian

Cho  $C$  là đường cong trơn, có phương trình tham số

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$$

hay viết dưới dạng hàm vectơ  $\vec{r}(t) = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}$ . Nếu hàm ba biến số  $f$  liên tục trên miền chứa đường cong  $C$ , thì ta định nghĩa tích phân đường của  $f$  dọc theo  $C$  là

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*, z_i^*) \Delta s_i$$

Tích phân đường loại một được tính theo công thức

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

## II. Tích phân đường loại hai

### 1. Định nghĩa

Cho trường vectơ  $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ . Giả sử các hàm  $P, Q$  và  $R$  xác định và liên tục trên đường cong trơn  $C$ , với  $C$  cho bởi hàm vectơ  $\vec{r}(t), a \leq t \leq b$ . Tích phân đường của  $\vec{F}$  dọc theo  $C$  là

$$\int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Trong không gian  $R^2$  thì công thức tích phân đường loại hai

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

### 2. Tính chất

- Tích phân đường loại hai cho ta công của lực  $\vec{F}$  khi ta di chuyển chất điểm dọc theo đường cong  $C$
- Tính khả tích: Nếu  $P$  và  $Q$  là các hàm số liên tục trên cung trơn từng khúc  $C$ , thì tích phân đường  $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  tồn tại.

- Một số tính chất khác:

$$+, \int_C \alpha P(x, y)dx + \beta Q(x, y)dy = \alpha \int_C P(x, y)dx + \beta \int_C Q(x, y)dy.$$

$$+, \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{\widehat{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

$$+, \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{AM}} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{MB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \text{ với } M \text{ là một điểm nằm trên cung } \widehat{AB}, \text{ với } \vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

### 3. Cách tính tích phân đường loại hai

Nếu cung  $C$  được cho bởi phương trình  $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ , điểm đầu và điểm cuối tương ứng với  $t = t_1, t = t_2$  thì

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)] dt$$

### Đặc biệt

Nếu  $C$  được cho bởi phương trình  $y = y(x)$ , điểm đầu và điểm cuối ứng với  $x = a, x = b$  thì

$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) \cdot y'(x)] dx$$

Nếu  $C$  được cho bởi phương trình  $x = x(y)$ , điểm đầu và điểm cuối ứng với  $y = c, y = d$  thì

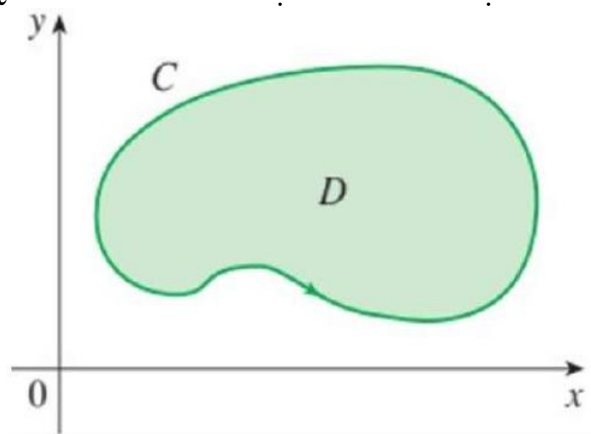
$$\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c^d [P(x(y), y) \cdot x'(y) + Q(x(y), y)] dy$$

## 4. Công thức Green

- Hướng dương của đường cong kín: Cho đường cong kín  $C$  không tự cắt, là biên của miền phẳng  $D$ . Ta định nghĩa hướng dương trên  $C$  là hướng sao cho một người đi dọc đường cong  $C$  theo hướng đó, sẽ thấy miền  $D$ , giới hạn bởi  $C$ , nằm về bên tay trái. Khi đó, với các hàm số  $P, Q$  xác định trên  $C$ , tích phân đường được ký hiệu là

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

- Công thức Green:** Cho  $C$  là đường cong kín, trơn từng khúc trên mặt phẳng, chiều ngược chiều kim đồng hồ và  $D$  là miền giới hạn bởi đường cong  $C$ . Nếu  $P$  và  $Q$  là các hàm liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên  $D$ , thì



$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

- Nếu  $C$  có hướng âm thì

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Trong trường hợp  $C$  không kín, ta có thể bổ sung thêm vào  $C$  để tạo thành đường cong kín để áp dụng công thức Green rồi trừ đi phần bổ sung

- Ứng dụng: Tính diện tích miền  $D$

$$S = \oint_C xdy = - \oint_C ydx = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx$$

## 5. Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

- Giả sử  $P$  và  $Q$  là các hàm số liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền đơn liên, liên thông  $D$ . Khi đó, bốn mệnh đề sau tương đương với nhau.

- (1)  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  trên  $D$ .
- (2)  $\oint_C Pdx + Qdy = 0$  với mọi đường cong kín  $C$  thuộc  $D$ .
- (3)  $\int_{AB} Pdx + Qdy$  không phụ thuộc vào đường đi từ  $A$  đến  $B$  trong miền  $D$ .
- (4) Biểu thức  $Pdx + Qdy$  là vi phân toàn phần của hàm  $f(x, y)$  nào đó, tức là  $df = Pdx + Qdy$ .

- Giá trị của tích phân đường phụ thuộc vào điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$ , không phụ thuộc vào đường đi nối hai điểm đó. Trong trường hợp đó, ta có thể chọn đường đi bất kỳ nối hai điểm đó để tính tích phân.
- Nếu tích phân đường  $\int Pdx + Qdy$  không phụ thuộc vào đường đi trên  $D$  thì tồn tại hàm số  $f(x, y)$  xác định trên  $D$  sao cho  $\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)$  trên  $D$ . Khi đó

$$\int_A^B Pdx + Qdy = \int_A^B df = f(B) - f(A)$$

với mọi đường cong  $AB$  trong  $D$ . Hàm số  $f(x, y)$  được cho bởi

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt + C_1 \\ &= \int_{y_0}^y Q(x_0, t) dt + \int_{x_0}^x P(t, y) dt + C_2 \end{aligned}$$

### III. Các ví dụ minh họa

**VD1:** Tính tích phân  $\int_C (x - y)ds$ ,  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$

**Giải**

Ta có  $x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 1$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi \Rightarrow \begin{cases} x' = -\sin t \\ y = \cos t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } I &= \int_C (x - y)ds = \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + \cos t - \sin t) dt = 2\pi \end{aligned}$$

**VD2:** Tính tích phân đường  $\int_C y \sin z ds$ , với  $C$  là một vòng của đường xoắn tròn ốc, có phương trình  $x = \cos t, y = \sin t, z = t$ , với  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Giải**

Ta có:

$$\int_C y \sin z ds = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \sqrt{2}\pi$$

**VD3:** Tính tích phân đường

$$I = \int_C (x^2 - 2xy) dx + (y^2 + 2x) dy$$

với  $C$  là cung parabol  $y^2 = 1 - x$  đi từ  $A(0; -1)$  đến  $B(0; 1)$ .

**Giải**

Ta có:  $x = 1 - y^2$ , suy ra tích phân

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 \left( \left[ (1 - y^2)^2 - 2(1 - y^2)y \right] (-2y) + y^2 + 2 - 2y^2 \right) dy \\ &= \int_{-1}^1 (-2y^5 - 4y^4 + 4y^3 + 3y^2 - 2y + 2) dy = \frac{22}{5} \end{aligned}$$

**VD4:** Tính  $\int_{ABCA} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3)dy$  o đó  $ABCA$  là đường gấp khúc đi qua các điểm  $A(0, 0), B(1, 1), C(0, 2)$ .

**Giải**

Ta có  $\begin{cases} \text{phương trình đường thẳng } AB : x = y \\ \text{phương trình đường thẳng } BC : x = 2 - y \text{ suy ra} \\ \text{phương trình đường thẳng } CA : x = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3)dy + \int_{BC} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3)dy + \int_{CA} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3)dy \\ &= \int_0^1 [2(y^2 + y^2) + y(4y + 3)] dy + \int_1^2 2[(2 - y)^2 + y^2] \cdot (-1) + (2 - y)(4y + 3)dy + 0 \\ &= 3 \end{aligned}$$

**VD5:** Tính tích phân đường

$$\oint_{x^2+y^2=2x} x^2 \left( y + \frac{x}{4} \right) dy - y^2 \left( x + \frac{y}{4} \right) dx$$

**Giải**

Ta có:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left( 2xy + \frac{3x^2}{4} \right) - \left( -2yx - \frac{3y^2}{4} \right) = \frac{3}{4}(x^2 + y^2) + 4xy$$

Áp dụng công thức Green theo chiều dương

$$I = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_D \left( \frac{3}{4}(x^2 + y^2) + 4xy \right) dx dy \text{ với } D : x^2 + y^2 \leq 2x$$

Do  $D$  đối xứng qua  $Ox$  và  $4xy$  là hàm lẻ đối với  $y \Rightarrow \iint_D 4xy dx dy = 0$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{4} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, |J| = r, D' \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2 \cos \varphi \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{4} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{3}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^3 dr = \frac{9}{8} \pi$$

**VD6:** Tính  $I = \int_C (y^3 + y^2 - e^y \sin x) dx + (3xy^2 + e^y \cos x) dy$ , với  $C$  là nửa đường tròn  $y = \sqrt{x - x^2}$ , đi từ  $O(0;0)$  đến  $A(1;0)$ .

**Giải**

Ta có:  $I = \int_C (y^3 - e^y \sin x) dx + (3xy^2 + e^y \cos x) dy + \int_C y^2 dx = I_1 + I_2$

- Xét  $I_1$  có:  $\frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2 - e^y \sin x$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y^2 - e^y \sin x \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow$  Tích phân không phụ thuộc vào đường đi

Chọn đường đi từ  $O$  đến  $A$  là đoạn thẳng  $OA$ , với phương trình  $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ .

Khi đó

$$I_1 = \int_0^1 (-\sin x) dx = [\cos x]_0^1 = \cos 1 - 1$$

- Xét  $I_2 = \int_C y^2 dx = \int_0^1 (x - x^2) dx = \frac{1}{6}$ .

Vậy  $I = I_1 + I_2 = \cos 1 - \frac{5}{6}$ .

## Bài tập tự luyện

[ ID: 6100 ] Tính tích phân đường loại 1 sau  $\int_C (3x - y)ds$ ,  $C$  là nửa đường tròn  $y = \sqrt{9 - x^2}$

[ ID: 6101 ] Tính tích phân đường loại 1 sau  $\int_C (x - y)ds$ ,  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 2x$

[ ID: 6102 ] Tính tích phân đường loại 1 sau  $\int_C y^2 ds$ ,  $C$  là đường có phương trình 
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0) \end{cases}$$

[ ID: 6103 ] Tính tích phân đường loại 1 sau  $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$ ,  $C$  là đường cong 
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t), \end{cases}$$

[ ID: 6104 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_{AB} (x^2 - 2xy) dx + (2xy - y^2) dy$ , trong đó  $AB$  là cung Parabol  $y = x^2$  từ  $A(1; 1)$  đến  $B(2; 4)$

[ ID: 6105 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_C (2x - y)dx + xdy$ , trong đó  $C$  là đường cong 
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$
 theo chiều tăng của  $t$ ,  $(0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$

[ ID: 6106 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_{ABCA} 2(x^2 + y^2) dx + x(4y + 3)dy$ , trong đó  $ABCA$  là đường gấp khúc đi qua  $A(0; 0)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(0; 2)$

[ ID: 6107 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , trong đó  $ABCD$  là đường gấp khúc đi qua  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $C(-1; 0)$ ,  $D(0; -1)$

[ ID: 6108 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$  bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh kết quả, với  $C$  là đường:  $x^2 + y^2 = R^2$

[ ID: 6109 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$  bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh kết quả, với  $C$  là đường:  $x^2 + y^2 = 2x$

[ ID: 6110 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_C (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$  bằng hai cách: tính trực tiếp, tính nhờ công thức Green rồi so sánh kết quả, với  $C$  là đường:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a, b > 0)$

[ ID: 6111 ] Tính tích phân đường loại 2  $\oint_{x^2+y^2=2x} x^2 \left(y + \frac{x}{4}\right) dy - y^2 \left(x + \frac{y}{4}\right) dx$

[ ID: 6112 ] Tính tích phân đường loại 2  $\oint_{OABO} e^x[(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$ , trong đó  $OABO$  là đường gấp khúc qua  $O(0;0), A(1;1), B(0;2)$

[ ID: 6113 ] Tính tích phân đường loại 2  $\oint_{x^2+y^2=2x} (xy + e^x \sin x + x + y) dx - (xy - e^{-y} + x - \sin y) dy$

[ ID: 6114 ] Tính tích phân đường loại 2  $\oint_C (xy^4 + x^2 + y \cos(xy)) dx + \left(\frac{x^3}{3} + xy^2 - x + x \cos(xy)\right) dy$ , trong đó  $C$  là đường cong  $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t, (a > 0) \end{cases}$

[ ID: 6115 ] Dùng tích phân đường loại 2 tính diện tích của miền giới hạn bởi một nhíp cycloid :  $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$  và trục  $Ox, (a > 0)$ .

[ ID: 6116 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3) dx + (6x^2y^2 - 5y^4) dy$

[ ID: 6117 ] Tính tích phân đường loại 2  $\int_{(1;\pi)}^{(2;2\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$

[ ID: 6118 ] Tính tích phân đường  $I = \int_L \left(3x^2y^2 + \frac{2}{4x^2+1}\right) dx + \left(3x^3y + \frac{2}{y^3+4}\right) dy$  trong đó  $L$  là đường cong  $y = \sqrt{1-x^4}$  đi từ  $A(1;0)$  đến  $B(-1;0)$ .

[ ID: 6119 ] Tìm hằng số  $\alpha$  để tích phân sau không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định  $\int_{AB} \frac{(1-y^2) dx + (1-x^2) dy}{(1+xy)^\alpha}$ .

[ ID: 6120 ] Tìm hằng số  $a, b$  để biểu thức :  $(y^2 + axy + y \sin(xy)) dx + (x^2 + bxy + x \sin(xy)) dy$  là vi phân toàn phần của một hàm số  $u(x, y)$  nào đó. Hãy tìm hàm số  $u(x, y)$  đó.

[ ID: 6121 ] Tìm hàm số  $h(x)$  để tích phân  $\int_{AB} h(x) [(1+xy)dx + (xy+x^2)dy]$  không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với  $h(x)$  vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ  $A(2;0)$  đến  $B(1;2)$ .

[ ID: 6122 ] Tìm hàm số  $h(xy)$  để tích phân  $\int_{AB} h(xy) [(y+x^3y^2)dx + (x+x^2y^3)dy]$  không phụ thuộc vào đường đi trong miền xác định. Với  $h(xy)$  vừa tìm được, hãy tính tích phân trên từ  $A(1;1)$  đến  $B(2;3)$ .

[ ID: 6761 ] Tính tích phân  $\int_C e^{x^2+5y} [2xydx + (1+5y)dy]$  trong đó  $C$  là đường cong  $y = x^3$  đi từ  $O(0,0)$  đến  $B(1,1)$ .

[ ID: 6770 ] Tính  $\oint_C (3y^2 + y \sin \sqrt[3]{x^5} \cos x) dx + (e^{y^2} + 2xy) dy$ , trong đó  $C$  là biên của miền giới hạn bởi  $y = |x|$ ,  $y = 1$ , định hướng dương.

[ ID: 6790 ] Tính  $\int_L 2(x^3 + y^5) dx + 5x(2y^4 - 1) dy$ , với  $L$  là đường gấp khúc ABCA nối các điểm  $A(0;0)$ ,  $B(1;1)$ ,  $C(0;2)$ .

[ ID: 6791 ] Tính  $\int_C (e^x \sin y + y^2) dx + (x^2 + 2xy + e^x \cos y) dy$ , với  $C$  là nửa đường tròn  $x = \sqrt{2y - y^2}$ , đi từ điểm  $O(0;0)$  đến điểm  $A(0;2)$ .

[ ID: 6799 ] Tính  $\int_C (2xe^x + y^2) dx + (x^4 + e^y) dy$ , với  $C$  là đường cong  $y = \sqrt[4]{1-x^2}$  đi từ điểm  $A(-1;0)$  đến điểm  $B(1;0)$ .

[ ID: 6809 ] Tính  $\oint_C (e^x + y^2) dx + x^2 e^y dy$ , với  $C$  là biên của miền giới hạn bởi các đường  $y = 1 - x^2$  và  $y = 0$  có chiều dương.

[ ID: 6819 ] Tính  $\int_{ABC} 2ydx - 3xdy$ , trong đó  $ABC$  là đường gấp khúc, với  $A(1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $C(-1;0)$ .

[ ID: 6823 ] Tính  $\int_L \frac{(10x^4 - 4y) dx + (7x^8 - 8y^7) dy}{\sqrt{4x^2 + y^2}}$ , trong đó  $L$  là đường  $y = 2\sqrt{1-x^2}$  đi từ  $A(1;0)$  đến  $B(-1;0)$ .

[ ID: 6827 ] Tính tích phân đường  $\int_C (y^2 + 1) ds$ , trong đó  $C$  là đường astroid  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  trong góc phần tư thứ nhất nối 2 điểm  $A(1;0)$  và  $B(0;1)$ .

[ ID: 6833 ] Cho  $\alpha > 0$ . Tính tích phân đường  $\oint_{C_\alpha} \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2}$ , trong đó  $C_\alpha$  là đường  $x^2 + \alpha y^2 = 1$ , hướng dương.

[ ID: 6840 ] Tính tích phân đường  $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ , trong đó  $C$  là đường tròn  $x^2 + y^2 = 1$  định hướng dương.

[ ID: 6843 ] Tính tích phân đường  $\oint_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz$  trong đó

$C$  là giao của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  với mặt nón  $x = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$ , với hướng cùng chiều kim đồng hồ khi nhìn từ gốc  $O$ .

[ ID: 6849 ] Tính  $\int_L y(3x - 2)dx + (x + 2y)dy$ , trong đó  $L$  là đoạn thẳng  $AB$  đi từ  $A(1; 0)$  đến  $B(0; 1)$ .

[ ID: 6869 ] Tính tích phân đường  $\int_C (x + y)ds$ , ở đó  $C$  là đường tròn có phương trình  $x^2 + y^2 = 2y$ .

[ ID: 6873 ] Chứng minh rằng nếu  $f(u)$  là một hàm số cùng với đạo hàm của nó liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $L$  là đường đi từ  $O(0; 0)$  đến  $A(a; b)$  thì  $\int_L f(x + y)(dx + dy) = \int_0^{a+b} f(u)du$ .

## Chương 5. Tích phân mặt

### I. Tích phân mặt loại một

#### 1. Định nghĩa

Cho hàm số  $f(x, y, z)$  xác định trên một mặt  $S$  đóng và bị chặn trong  $R^3$ . Tích phân mặt loại một trên mặt  $S$  là

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{dp \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i)$$

nếu giới hạn trên tồn tại (với  $dp = \max_{1 \leq i \leq n} d(S_i)$ ) và không phụ thuộc vào cách chia các miền con  $S_i$  và cách chọn điểm  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  trên mảnh  $S_i$ . Khi đó ta nói  $f$  khả tích trên  $S$

#### 2. Tính chất

Diện tích của mặt cong  $S = \iint_S 1 dS$ ;

Tích phân mặt loại một không phụ thuộc phía của  $S$ ;

Nếu  $S = S_1 \cup S_2$  và  $S_1, S_2$  không đâm lên nhau thì  $\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_{S_1} f(x, y, z) dS + \iint_{S_2} f(x, y, z) dS$ ;

Nếu  $S$  gồm 2 phần  $S_1$  và  $S_2$  đối xứng qua mp  $z = 0$  ( $Oxy$ ) thì

- $f$  chẵn theo  $z$ :  $\iint_S f(x, y, z) dS = 2 \iint_{S_1} f(x, y, z) dS$ ,
- $f$  lẻ theo  $z$ :  $\iint_S f(x, y, z) dS = 0$ .

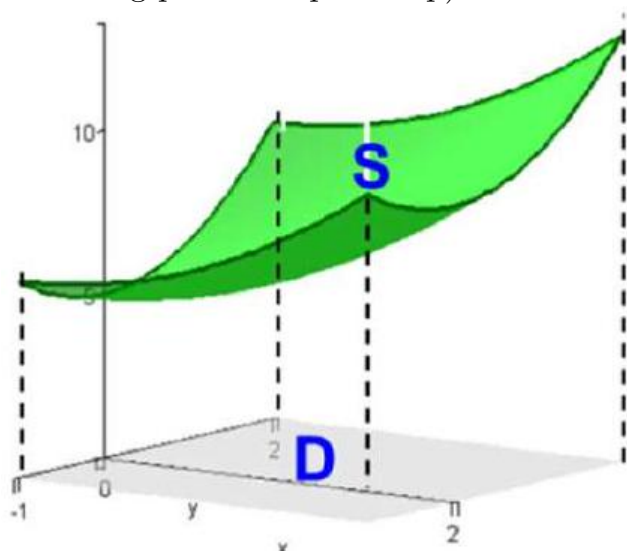
Với mảnh giấy mỏng, khối lượng riêng tại mỗi điểm  $M(x, y, z)$  là  $\rho(x, y, z)$  thì khối lượng của mặt mỏng sẽ được cho bởi  $\iint_S \rho(x, y, z) dS$ .

#### 3. Cách tính tích phân mặt loại một

**B 1** . Chọn cách viết phương trình mặt cong  $S$  (theo biến có số lần xuất hiện ít nhất trong phương trình mặt cong  $S$  và các mặt chắn), giả sử  $z = z(x, y)$

**B 2** . Tìm hình chiếu  $D$  của  $S$  lên mặt phẳng tương ứng, giả sử là  $Oxy$  (giống tính thể

tích trong phần tích phân kép)



**B3 .** Tính tích phân trên  $D$

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2} dx dy$$

## II. Tích phân mặt loại hai

### 1. Tính định hướng của mặt

Mặt định hướng: Cho  $(S)$  là mặt cong trơn, giới hạn bởi một đường cong trơn từng khúc  $C$ . Lấy điểm  $M \in (S)$  và dựng pháp tuyến  $\vec{n}$  của  $(S)$  tại  $M$ . Nếu xuất phát từ điểm  $M$  di chuyển theo một đường cong kín, quay về điểm xuất phát  $M$  mà pháp tuyến  $\vec{n}$  không đổi hướng, thì ta nói  $(S)$  định hướng được.

Các mặt xác định bởi  $z = f(x, y)$  là mặt định hướng được và có hai hướng:

- Hướng  $\vec{n}(z'_x, z'_y, -1)$  tạo với trục  $\vec{Oz}$  một góc  $\leq 90^\circ$ ,
- Hướng  $\vec{n}$  tạo với trục  $\vec{Oz}$  một góc  $\geq 90^\circ$ .

với  $\vec{n}(z'_x, z'_y, -1)$  hoặc  $\vec{n}(-z'_x, -z'_y, 1)$ , tương tự với mặt cho bởi  $f(x, y, z) = 0$  có  $\vec{n}(f'_x, f'_y, f'_z)$  + Các mặt kín như mặt cầu, ellipsoid,... là mặt định hướng được và có hai hướng:  $\vec{n}$  hướng ra ngoài và  $\vec{n}$  hướng vào trong.

Mặt Mobius không định hướng được

## 2. Tích phân mặt loại hai

- Tích phân mặt loại hai của các hàm  $P, Q, R$  trên  $S$

$$\iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] dS$$

với  $(\alpha, \beta, \gamma)$  là góc chỉ phương của pháp tuyến tại  $M$  của  $S$

- Ta cũng có thể viết tích phân mặt loại hai dưới dạng

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy$$

## 3. Tính chất

- Nếu  $S$  đổi hướng thì tích phân đổi dấu;
- Nếu  $P, Q, R$  liên tục trên mặt  $S$  định hướng, trơn thì tồn tại tích phân mặt loại hai;
- Mối liên hệ giữa tích phân mặt loại một và hai:

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

## 4. Cách tính tích phân mặt loại hai

### Cách 1: Tính thông qua tích phân mặt loại một

Cho mặt cong  $S$  trơn có một véc tơ pháp tuyến của  $S$  tại điểm  $P$  chính quy là  $\vec{N} = (A, B, C)$ . Nếu véc tơ này cùng phương cùng hướng với  $\vec{n}$ , tức là, hướng theo phía đã chọn của mặt thì

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta &= \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Tương tự với trường hợp ngược chiều ta chỉ cần thêm dấu âm

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \beta &= \frac{-B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Áp dụng liên hệ giữa tích phân mặt loại một và hai

$$\iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

**Cách 2: Tính thông qua tích phân kép**

$$\begin{aligned}I &= \iint_S P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy \\ &= \iint_S P(x, y, z) dydz + \iint_S Q(x, y, z) dzdx + \iint_S R(x, y, z) dxdy := I_1 + I_2 + I_3\end{aligned}$$

Tính  $I_3 = \iint_S R(x, y, z) dxdy$ . Ký hiệu  $\gamma$  là góc hợp bởi  $\vec{Oz}$  với  $\vec{n}$ .

Viết pt  $S$  dạng:  $z = z(x, y)$  (bắt buộc),

Tìm hình chiếu  $D_{xy}$  của  $S$  lên mpz = 0 ( $Oxy$ ) (bắt buộc),

- $\gamma < \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy$
- $\gamma > \frac{\pi}{2} \Rightarrow I_3 = - \iint_D R(x, y, z(x, y)) dxdy$
- $\gamma = \frac{\pi}{2} (S \parallel Oz \text{ hoặc } S \text{ chứa } Oz) \Rightarrow I_3 = 0.$

Tương tự ta tính cho  $I_1$  và  $I_2$ .

**Chú ý:**  $S$  gồm  $S_1$  và  $S_2$  đối xứng qua mặt phẳng  $z = 0$  :

- $R(x, y, z)$  chẵn theo biến  $z$  :  $I_3 = 0$ ,
- $R(x, y, z)$  lẻ theo biến  $z$  :  $I_3 = 2 \iint_{S_1} R(x, y, z) dxdy.$

Tương tự cho  $I_1$  (xét  $P$  và  $x = 0$ ),  $I_2$  (xét  $Q$  và  $y = 0$ ).

## 5. Định lý Ostrogradsky (O-G)

Cho  $\Omega$  là miền đóng và bị chặn trong  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  là phía ngoài mặt biên của  $\Omega$  ( $S$  là mặt cong kín, trơn từng mảnh).  $P, Q, R$  và các đạo hàm riêng liên tục trên  $\Omega$ . Khi đó,

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

Chú ý:

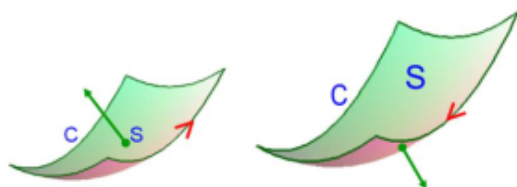
- Nếu ta lấy theo hướng pháp tuyến trong (mặt trong) thì

$$\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz$$

- Tương tự tích phân đường, ta cũng có thể bổ sung thêm các mặt cong vào  $S$  trong trường hợp  $S$  không kín để được mặt  $S'$ , tính toán rồi trừ đi phần thêm vào

## 6. Công thức Stokes

- Cho mặt định hướng  $S$  trơn từng mảnh, có biên là đường cong kín  $C$  trơn từng khúc không tự cắt.  $C$  gọi là định hướng dương theo  $S$  nếu khi đứng trên mặt  $S$  (pháp tuyến của mặt theo hướng từ chân đến đầu) và đi trên  $C$  theo hướng đó sẽ luôn thấy  $S$  ở bên trái.



- Công thức Stokes

Giả sử  $P, Q, R$  là các hàm số khả vi liên tục trong một miền chứa mặt  $S$ , biên  $C$  định hướng dương theo  $S$ . Khi đó,

$$\oint_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

### III. Các ví dụ minh họa

**VD1:** Tính tích phân mặt loại một  $I = \iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$ , trong đó

$$S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$$

**Giải**

Hình chiếu của  $S$  lên mặt phẳng  $Oxy$  là

$$D \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 3 \left( 1 - \frac{x}{2} \right) \end{cases}$$

Ta có:  $z = 4 \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) \Rightarrow dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I &= \iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS = I = \iint_D \left( 4 \left( 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \right) + 2x + \frac{4y}{3} \right) \frac{\sqrt{61}}{3} dxdy \\ &= \frac{4\sqrt{61}}{3} \int_0^2 dx \int_0^{3(1-\frac{x}{2})} dy = 4\sqrt{61} \end{aligned}$$

**VD2:** Cho  $S$  là phía ngoài của nửa mặt cầu  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ . Tính  $I = \iint_S z dxdy$ .

**Giải**

Ta có:  $I = \iint_S z dxdy$

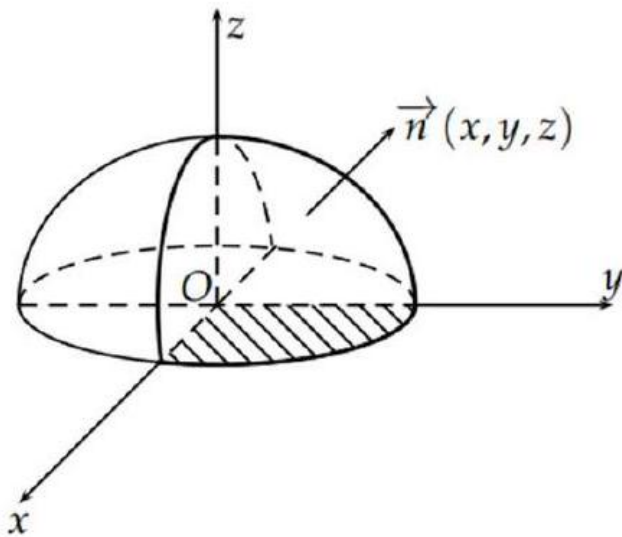
$$-z = z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

$$-\gamma \leq \frac{\pi}{2} \text{ (Do nửa cầu hướng ra ngoài)}$$

- Hình chiếu của  $S$  lên  $(Oxy)$  là  $D_{xy} : x^2 + y^2 \leq R^2$ .

Do đó

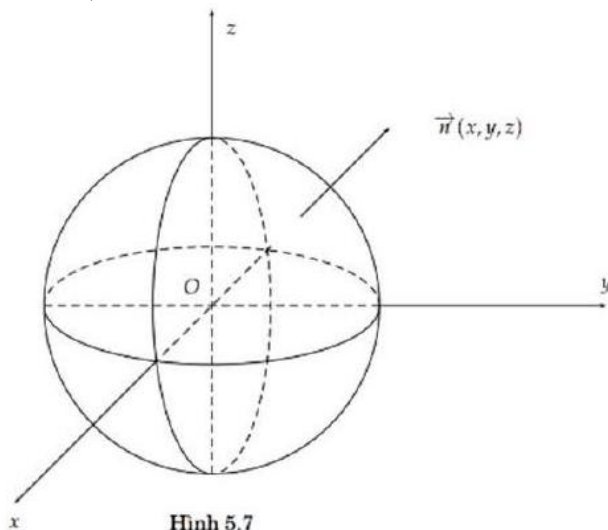
$$I = + \iint_{D_{xy}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \frac{2\pi}{3} R^3$$



**VD3:** Tính  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$  trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ .

**Giải**

Áp dụng công thức Ostrogradsky ta có  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdx dy$   
 $= \iiint_V 3dxdydz = 3V = 4\pi a^2$



Hình 5.7

**VD4:** Cho  $C$  là giao tuyến của trụ  $x^2 + y^2 = 1$  và trụ  $z = y^2$  lấy ngược chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương  $Oz$ . Tính:  $\int_C (x + y)dx + (2x^2 - z)dy + xy^2dz$ .

### Giải

$S$  là phía trên mặt trụ  $z = y^2$ .

Đặt  $P = x + y, Q = 2x^2 - z, R = xy^2$ . Theo CT Stokes

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_S (2xy + 1)dydz + (0 - y^2) dzdx + (4x - 1)dxdy \end{aligned}$$

Do  $S$  chứa  $Ox$  nên  $\iint_S (2xy + 1)dydz = 0$ .

Do  $S$  đối xứng qua mặt phẳng  $y = 0$  và  $f = y^2$  chẵn theo  $y$  nên  $\iint_S y^2 dzdx = 0$ .

$$\Rightarrow I = \iint_S (4x - 1)dxdy = \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (4x - 1)dxdy = -\pi.$$

## Bài tập tự luyện

[ ID: 6123 ] Tính tích phân mặt loại 1 sau đây  $\iint_S \left( z + 2x + \frac{4y}{3} \right) dS$ , trong đó  $S = \left\{ (x, y, z) : \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \right\}$

[ ID: 6124 ] Tính tích phân mặt loại 1 sau đây  $\iint_S (x^2 + y^2) dS$ , trong đó  $S = \{ (x, y, z) : z = x^2 + y^2; 0 \leq z \leq 1 \}$

[ ID: 6125 ] Tính tích phân mặt loại 1 sau đây  $\iint_S z dS$ , trong đó  $S = \{ (x, y, z) : y = x + z^2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1 \}$

[ ID: 6126 ] Tính tích phân mặt loại 1 sau đây  $\iint_S \frac{dS}{(1 + x + y + z)^2}$ , trong đó  $S$  là biên của tứ diện  $x + y + z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

[ ID: 6127 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S z(x^2 + y^2) dx dy$ , trong đó  $S$  là nửa mặt cầu:  $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ , hướng của  $S$  là phía ngoài mặt cầu

[ ID: 6128 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S y dz dx + z^2 dx dy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt ellipsoid  $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

[ ID: 6129 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S x^2 y^2 z dx dy$ , trong đó  $S$  là mặt trên của nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$

[ ID: 6130 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S (y + z) dx dy$ , trong đó  $S$  là phía trên của mặt  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  với  $z \geq 0$

[ ID: 6131 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

[ ID: 6132 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S y^2 z dx dy + x z dy dz + x^2 y dz dx$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của miền  $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

[ ID: 6133 ] Tính tích phân mặt loại 2 sau đây  $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$ , trong đó  $S$  là phía ngoài của miền  $\begin{cases} (z-1)^2 \geq x^2 + y^2 \\ a \leq z \leq 1 \end{cases}$

[ ID: 6134 ] Dùng công thức Stoke tính tích phân đường  $\int_C (x+y^2)dx + (y+z^2)dy + (z+x^2)dz$ , trong đó  $C$  là biên của tam giác với đỉnh  $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$ , hướng ngược chiều kim đồng hồ khi nhìn từ trên xuống.

[ ID: 6135 ] Gọi  $S$  là phần mặt cầu  $x^2+y^2+z^2=1$  nằm trong mặt trụ  $\begin{cases} x^2+x+z^2=0 \\ y \geq 0, \end{cases}$  hướng của  $S$  là phía ngoài của mặt cầu. Chứng minh rằng:  $\iint_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dzdx = 0$ .

[ ID: 6760 ] Tính tích phân  $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$ , với  $S: x^2+y^2+z^2=4, z \geq 0$ .

[ ID: 6762 ] Tính tích phân  $\iint_S (x^3+y^4z)dydz + y^3dzdx + z^3dxdy$ , trong đó  $S: 4x^2+y^2+z^2=4, x \geq 0$  hướng theo chiều dương của trục  $Ox$ .

[ ID: 6766 ] Tính  $\iint_S ydS$ , với  $S: x^2+y^2+z^2=1, y \geq 0$ .

[ ID: 6772 ] Tính  $\iint_S xdydz + ydzdx$ , với  $S$  là phần mặt cầu  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ , định hướng theo chiều âm của trục  $Oz$ .

[ ID: 6776 ] Tính  $\iint_S ydS$ , với  $S: x^2+y^2+z^2=1, y \geq 0$ .

[ ID: 6792 ] Tính tích phân mặt  $\iint_S x^3dydz + y^3dzdx + (x^2+y^2+z^3)dxdy$ , với  $S$  là phía ngoài mặt ellipsoid  $9x^2+y^2+z^2=9$ .

[ ID: 6800 ] Tính  $\iint_S dS$ , trong đó  $S$  là phần mặt  $z = \frac{2}{3}(x^{3/2}+y^{3/2})$  với  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

[ ID: 6801 ] Tính  $\iint_S y^2zdxdy$ , với  $S$  là phần mặt nón  $z^2=x^2+y^2$  nằm giữa hai mặt phẳng  $z=1, z=2$  hướng lên trên

[ ID: 6807 ] Tính diện tích phần mặt paraboloid  $z=4x-x^2-y^2$  nằm phía trên mặt phẳng  $Oxy$

[ ID: 6810 ] Tính  $I = \iint_S y^2zdS$ , với  $S$  là phần mặt nón  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  nằm giữa hai mặt phẳng  $z=1, z=2$

[ ID: 6811 ] Tính  $\iint_S xy^3 dydz + (x^2 + z^2) dxdy$ , với  $S$  là nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ , hướng ra phía ngoài mặt cầu

[ ID: 6820 ] Tính  $\iint_S (x - y + 2z)^3 (dydz + dzdx + dxdy)$ , trong đó  $S$  là mặt ellipsoid  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ , hướng ra ngoài.

[ ID: 6837 ] Tính tích phân  $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS$ , trong đó  $S$  là mặt  $2z = x^2 + y^2, 0 \leq x, y \leq 1$ .

[ ID: 6842 ] Tính tích phân mặt  $\iint_S ydzdx + z dxdy$ , trong đó  $S$  là phía dưới của mặt nón  $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1$ , khi nhìn từ chiều dương của trục  $Oz$ .

[ ID: 6852 ] Tính  $\iint_S (3x + 2y + z)^3 (dydz + dzdx + dxdy)$ , trong đó  $S$  là mặt  $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$  hướng ra ngoài

[ ID: 6866 ] Tính diện tích của phần mặt paraboloid  $x = y^2 + z^2$  thỏa mãn  $x \leq 1$ .

[ ID: 6871 ] Tính tích phân mặt  $\iint_S x^2 y dS$ , ở đó  $S$  là phần mặt nón  $y = \sqrt{x^2 + z^2}, 1 \leq y \leq 2$ .

## Chương 6. Lý thuyết trường

### I. Trường vô hướng

#### 1. Định nghĩa

- Trường vô hướng: ta nói trên miền  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  xác định một trường vô hướng nếu tại mỗi điểm  $M(x, y, z) \in \Omega$  cho tương ứng một giá trị  $u = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$ . Như vậy, trường vô hướng trên  $\Omega$  là một hàm số xác định trên  $\Omega$ .
- Mặt đẳng trị: cho trường vô hướng  $u(x, y, z)$  xác định trên  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  và hằng số  $c \in \mathbb{R}$ . Lúc đó

$$S = \{(x, y, z) \in \Omega : u(x, y, z) = c\}$$

được gọi là mặt đẳng trị (mặt mức) của trường vô hướng  $u$ .

**Nhận xét:**

- Miền  $\Omega$  bị phủ kín bởi các mặt mức
- Các mặt mức khác nhau không giao nhau

#### 2. Đạo hàm theo hướng

- Cho  $u = u(x, y, z)$  là một trường vô hướng xác định trên  $\Omega$  và  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ . Giả thiết  $\vec{l} = (a, b, c)$  là một vectơ đơn vị bất kì trong  $\mathbb{R}^3$ . Giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(M_0 + t\vec{l}) - u(M_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) - u(x_0, y_0, z_0)}{t}$$

được gọi là đạo hàm theo hướng  $\vec{l}$  tại  $M_0$  của trường vô hướng  $u$  và được kí hiệu là  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0)$

- Nếu  $\vec{l}$  không phải vectơ đơn vị thì xét  $\vec{v} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ , khi đó  $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial u}{\partial \vec{v}}$
- Đạo hàm theo hướng  $\vec{v}$  tại điểm  $M(x, y, z)$  của trường vô hướng  $u$  thể hiện tốc độ biến thiên của trường vô hướng  $u$  tại điểm  $M(x, y, z)$  theo hướng  $\vec{v}$

Chú ý:

$$\begin{aligned} + \frac{\partial u}{\partial i}(M_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + t, y_0, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \\ + \frac{\partial u}{\partial j}(M_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + t, z_0) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \\ + \frac{\partial u}{\partial k}(M_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0, z_0 + t) - u(x_0, y_0, z_0)}{t} = \frac{\partial u}{\partial z}(M_0). \end{aligned}$$

**Định lý:** nếu  $u$  khả vi tại  $M_0$  thì  $u$  có đạo hàm theo mọi hướng tại  $M_0$  và

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \cos \gamma,$$

ở đây  $(\alpha, \beta, \gamma)$  là góc chỉ phương của  $\vec{\ell}$ .

### 3. Gradient

**Định nghĩa:** Cho trường vô hướng  $u(x, y, z)$ . Lúc đó, gradient của  $u$  tại  $M$  là một vectơ, ký hiệu  $\overrightarrow{\text{grad}} u(M)$  và có dạng

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x}(M), \frac{\partial u}{\partial y}(M), \frac{\partial u}{\partial z}(M) \right).$$

**Định lý:** Nếu trường vô hướng  $u(x, y, z)$  khả vi tại  $M_0$  thì tại đó ta có

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(M_0) = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \cdot \vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} = \left| \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0) \right| \cos \left( \overrightarrow{\text{grad}} u(M_0), \vec{\ell} \right)$$

Trường vô hướng tăng nhanh nhất theo hướng vectơ gradient.

**Tính chất**

- $\overrightarrow{\text{grad}}(\alpha u + \beta v) = \alpha \overrightarrow{\text{grad}} u + \beta \overrightarrow{\text{grad}} v$  với mọi  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ;
- $\overrightarrow{\text{grad}}(uv) = u \overrightarrow{\text{grad}} v + v \overrightarrow{\text{grad}} u$
- $\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{v \overrightarrow{\text{grad}} u - u \overrightarrow{\text{grad}} v}{v^2}$  nếu  $v \neq 0$
- $\overrightarrow{\text{grad}} f(u) = f'(u) \overrightarrow{\text{grad}} u$ .

## II. Trường vector

### 1. Định nghĩa

**Trường vectơ:** cho  $V \subset \mathbb{R}^3$ , ta nói trong  $V$  xác định một trường vectơ nếu tại mỗi điểm  $M(x, y, z) \in V$  xác định một vectơ

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

**Đường dòng:** trong  $\mathbb{R}^3$  cho trường vectơ  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ .

- Đường cong  $C \subset \mathbb{R}^3$  gọi là đường dòng của trường vectơ  $\vec{F}$  nếu tại mỗi điểm  $M$  trên đường cong  $C$ , tiếp tuyến tại đó cùng phương với vectơ  $\vec{F}(M)$ .
- Phương trình đường dòng: cho trường vectơ

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

và đường dòng  $C$  có phương trình tham số là  $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ . Khi đó, tiếp tuyến tại mỗi điểm  $M(x, y, z)$  của  $C$  có vectơ chỉ phương là  $(x'(t), y'(t), z'(t))$ . Do tiếp tuyến này đồng phương với  $\vec{F}(M)$  nên

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{z'(t)}{R} \Leftrightarrow \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

(gọi là hệ phương trình vi phân của họ đường dòng của trường vectơ  $\vec{F}(M)$ ).

- Các đường dòng không cắt nhau, tức qua một điểm trong trường vector có duy nhất một đường dòng

### 2. Thông lượng

Cho trường vectơ

$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

và  $S$  là mặt cong định hướng trong  $\mathbb{R}^3$ . Khi đó, thông lượng của trường vectơ  $\vec{F}$  qua mặt  $S$  là

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_S P dydz + Q dzdx + R dxdy$$

trong đó  $\vec{n}$  là vectơ pháp tuyến đơn vị của mặt  $S$ .

### 3. Độ phân tán (div)

Cho trường vectơ  $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ . Khi đó, đại lượng vô hướng

$$\frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

được gọi là độ phân tán của trường  $\vec{F}$  tại  $M(x, y, z)$  và ký hiệu  $\text{div } \vec{F}(M)$ . Vậy

$$\text{div } \vec{F}(M) = \frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial Q}{\partial y}(M) + \frac{\partial R}{\partial z}(M)$$

**Tính chất:** cho  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  là các trường vectơ trên  $\mathbb{R}^3$ ,  $c_1, c_2$  là các hằng số

$$\text{div}(c_1 \vec{F}_1 + c_2 \vec{F}_2) = c_1 \text{div } \vec{F}_1 + c_2 \text{div } \vec{F}_2$$

$$\text{div}(u \vec{F}_1) = u \text{div } \vec{F}_1 + \vec{F}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad } u} \quad (u \text{ là một trường vô hướng trên } \mathbb{R}^3)$$

### 4. Trường ống. Điểm nguồn. Điểm rò

Trường vectơ  $\vec{F}$  được gọi là trường ống nếu

$$\text{div } \vec{F}(M) = 0, \forall M \in V$$

$M$  được gọi là điểm nguồn của trường  $\vec{F}$  nếu

$$\text{div } \vec{F}(M) > 0$$

$M$  được gọi là điểm rò của trường  $\vec{F}$  nếu

$$\text{div } \vec{F}(M) < 0$$

Nếu  $\vec{F}$  là một trường ống thì thông lượng đi vào bằng thông lượng đi ra

## 5. Hoàn lưu. Vector xoáy

**Hoàn lưu:** Cho  $C$  là một đường cong (có thể kín hoặc không kín) trong không gian.

Đại lượng

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

được gọi là hoàn lưu của  $\vec{F}$  dọc theo đường cong  $C$ .

**Véc tơ xoáy:** Véc tơ

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} := \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

được gọi là véc tơ xoáy (hay véc tơ rota) của trường vécto  $\vec{F}$ .

## 6. Trường thế. Hàm thế vị

Trường vécto  $\vec{F}$  được gọi là trường thế (trên  $\Omega$ ) nếu tồn tại trường vô hướng  $u$  sao cho  $\overrightarrow{\text{grad}} u = \vec{F}$  (trên  $\Omega$ ). Khi đó hàm  $u$  được gọi là hàm thế vị.

**Định lý:** Điều kiện cần và đủ để trường vécto  $\vec{F} = \vec{F}(M)$  là một trường thế (trên  $\Omega$ ) là  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(M) = 0$  với mọi  $M \in \Omega$ .

- Nếu  $\vec{F}$  là trường thế thì hàm thế vị  $u$  được tính theo công thức

$$u = \int_{x_0}^x F_x(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y F_y(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z F_z(x, y, t) dt + C$$

### III. Các ví dụ minh họa

**VD1:** Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{l}$  của hàm  $u = x^3 + 2y^3 + 3z^2 + 2xyz$  tại điểm  $A(2; 1; 1)$  với  $\vec{l} = \overline{AB}$ ,  $B(3; 2; 3)$

**Giải**

$$\text{Ta có: } \vec{l} = \overline{AB} = (1; 1; 2) \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \cos \gamma = \frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{6}} (3x^2 + 2yz) + \frac{1}{\sqrt{6}} (6y^2 + 2xz) + \frac{2}{\sqrt{6}} (6z + 2xy) \\ \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(A) &= \frac{22\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

**VD2:** Tính grad $u$ , với  $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$ , với  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Giải:**

$$\text{Ta có: } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \left(2r - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

Tương tự:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= y \left(2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = z \left(2 - \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right) \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}u} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}$$

**VD3:** Cho trường  $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$ . Trường  $\vec{F}$  đã cho có là trường thế? Tìm hàm thế vị nếu có

**Giải**

$$\text{Ta có } F_x = x + y, F_y = x + z, F_z = z + y \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = (0; 0; 0) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{F}$  là trường thế

Chọn  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

Hàm thế vị là

$$\begin{aligned}
 u &= \int_0^x F_x(t, 0, 0)dt + \int_0^y F_y(x, t, 0)dt + \int_0^z F_z(x, y, t)dt + C \\
 &= \int_0^x tdt + \int_0^y xdt + \int_0^z (t + y)dt + C = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{z^2}{2} + yz + C
 \end{aligned}$$

## Bài tập tự luyện

[ ID: 6136 ] Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{\ell}$  của hàm  $u = x^3 + 2y^3 + 3z^2 + 2xyz$  tại điểm  $A(2; 1; 1)$  với  $\vec{\ell} = \overrightarrow{AB}$ ,  $B(3; 2; 3)$ .

[ ID: 6137 ] Tính môđun của  $\overrightarrow{\text{grad}} u$ , với  $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  tại  $A(2; 1; 1)$ . Khi nào thì  $\overrightarrow{\text{grad}} u$  vuông góc với  $Oz$ , khi nào thì  $\overrightarrow{\text{grad}} u = 0$  ?

[ ID: 6138 ] Tính  $\overrightarrow{\text{grad}} u$ , với  $u = r^2 + \frac{1}{r} + \ln r$  trong đó  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

[ ID: 6139 ] Theo hướng nào thì sự biến thiên của hàm số  $u = x \sin z - y \cos z$  từ gốc  $O(0, 0, 0)$  là lớn nhất?

[ ID: 6140 ] Tính góc giữa hai vector  $\overrightarrow{\text{grad}} z$  của hàm số  $\begin{matrix} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = x - 3y + \sqrt{3xy} \end{matrix}$  tại  $(3; 4)$ .

[ ID: 6141 ] Trường này có phải là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

$$\vec{F} = 5(x^2 - 4xy)\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + \vec{k}$$

[ ID: 6142 ] Trường này có phải là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

$$\vec{F} = (yz - 3x^2)\vec{i} + xz\vec{j} + (xy + 2)\vec{k}$$

[ ID: 6143 ] Trường này có phải là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

$$\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (z + y)\vec{k}$$

[ ID: 6144 ] Trường này có phải là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).

$$\vec{F} = C \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, C \neq 0 \text{ là hằng số}$$

[ ID: 6145 ] Trường này có phải là trường thế? Tìm hàm thế vị (nếu có).  $\vec{F} =$

$$(\arctan z + 4xyz)\vec{i} + (2x^2z - 3y^2)\vec{j} + \left(\frac{x}{1+z^2} + 2x^2y\right)\vec{k}$$

[ ID: 6146 ] Cho  $\vec{F} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$ . Tính thông lượng của  $\vec{F}$  qua mặt cầu  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , hướng ra ngoài.

[ ID: 6147 ] Cho  $\vec{F} = x(y+z)\vec{i} + y(z+x)\vec{j} + z(x+y)\vec{k}$ ,  $L$  là giao tuyến của mặt trụ  $x^2 + y^2 + y = 0$  và nửa mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ . Chứng minh rằng lưu số của  $\vec{F}$  dọc theo  $L$  bằng 0.

[ ID: 6872 ] Cho trường vectơ  $\vec{F} = (xy^2 + z)\vec{i} + (x^2y + z)\vec{j}$ . Tính thông lượng của  $\vec{F}$  qua mặt paraboloid  $z = x^2 + y^2$  với  $z \leq 1$  hướng lên trên.

[ ID: 6763 ] Cho trường vectơ  $\vec{F} = x(y+z)\vec{i} + y(z+2mx)\vec{j} + z(x+y)\vec{k}$ ,  $m$  là tham số. Gọi  $L$  là giao của mặt  $x^2 + y^2 = 2y$  với mặt  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Tìm  $m$  để lưu số của  $\vec{F}$  dọc theo  $L$  (hướng ngược chiều kim đồng hồ từ phía dương của trục  $Oz$ ) bằng không.

[ ID: 6767 ] Tìm hướng mà tại điểm  $A(1, 1, 2)$  hàm số  $f(x, y, z) = x^2 + 2x^2y + yz$  giảm nhanh nhất. Từ đó, tính đạo hàm theo hướng này tại  $A$ .

[ ID: 6783 ] Cho  $C$  là giao tuyến của mặt cầu  $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$  và mặt phẳng  $x + y + z = 1$  lấy theo chiều kim đồng hồ nhìn từ phía dương của trục  $Oy$ . Tính lưu số của trường vector  $\vec{F} = (3y - y \sin x - z)\vec{i} + (\cos x + 2y - 6z)\vec{j} + (3y + 2x)\vec{k}$  dọc cung  $C$ .

[ ID: 6793 ] Tính thông lượng của trường vectơ  $\vec{F} = xz^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + y^2(z+1)\vec{k}$  qua nửa mặt cầu  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ , hướng ra ngoài.

[ ID: 6802 ] Chứng minh rằng trường vectơ  $\vec{F} = (e^x + y^2 + e^{2x} - 2xy^3)\vec{i} + (2ye^x - 3x^2y^2)\vec{j} + (2xe^{2x} + 5)\vec{k}$  là trường thế. Tìm hàm thế vị của  $\vec{F}$ .

[ ID: 6812 ] Tính đạo hàm theo hướng  $\vec{\ell} = (1; 2; -2)$  của hàm  $u(x, y, z) = e^x(y^2 + z) - 2xyz^3$  tại điểm  $A(0; 1; 2)$ .

[ ID: 6821 ] Chứng minh rằng trường vectơ  $\vec{F} = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$  là trường thế. Tìm hàm thế vị của  $\vec{F}$ .

[ ID: 6828 ] Chứng minh rằng trường vectơ  $\vec{F} = \left(\frac{y}{1+xy} - z \cos x\right)\vec{i} + \frac{x}{1+xy}\vec{j} - \sin x\vec{k}$  là trường thế và tìm hàm thế vị.

[ ID: 6832 ] Cho  $\vec{F} = (x^2 - y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + (x + y + z)\vec{k}$ . Tính thông lượng của  $\vec{F}$  qua mặt  $|x - y| + |x + 2y| + |x + y + z| = 1$ , hướng ra ngoài.

[ ID: 6836 ] Xác định những điểm không phải là điểm xoáy trong trường vectơ  $\vec{F} = (2xy - z^2)\vec{i} + (3x^2 + 2yz)\vec{j} - y^2\vec{k}$ .

[ **ID: 6850** ] Cho hàm số  $u = \ln(3x + 2y^2 - z^3)$  và hai điểm  $A(1; -1; 1), B(0; 1; 3)$ . Tính  $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}(A)$  theo hướng  $\overrightarrow{AB}$ .

[ **ID: 6851** ] Tính công  $W$  của lực  $\vec{F} = [8x^3 - 2y \ln(1 + x^2y^2)] \vec{i} + [5y^4 - 2x \ln(1 + x^2y^2)] \vec{j}$  làm dịch chuyển một chất điểm từ  $A(0; 1)$  đến  $B(1; 0)$ .

[ **ID: 6870** ] Chứng minh rằng vectơ

$\vec{F} = e^{x^2+y^2+z^2} \left[ (2x^2yz + yz) \vec{i} + (2xy^2z + xz) \vec{j} + (2xyz^2 + xy) \vec{k} \right]$  là một trường thế. Tìm hàm thế vị.