

# BỘ TÀI LIỆU

## GIẢI TÍCH 3

Tóm tắt lý thuyết  
Bài tập tự luyện  
Đề thi giữa kỳ, cuối kỳ

## **MỤC LỤC**

### **PHẦN 1: TỔNG QUAN LÝ THUYẾT VÀ BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

Chương 1: Chuỗi.....	3
Chương 2: Phương trình vi phân .....	27
Chương 3: Phương pháp toán tử laplcae.....	41

### **PHẦN 2: ĐỀ THI THỬ GIỮA KỲ (FORMAT MỚI)**

Đề 1: .....	50
Đề 2: .....	54

### **PHẦN 3: TỔNG HỢP ĐỀ THI CUỐI KỲ CÁC NĂM**

Tổng hợp đề thi cuối kỳ các năm .....	58
---------------------------------------	----



## TỔNG QUAN LÝ THUYẾT

### 1. Đại cương về chuỗi

Xét dãy số  $\{a_n\}$ , chuỗi số là tổng S của tất cả các số hạng của dãy, tiến ra  $+\infty$ .

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

- Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  tồn tại và hữu hạn  $\rightarrow$  chuỗi hội tụ
- Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow \infty \Rightarrow$  chuỗi phân kỳ

VD1:  $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + \dots + 1 \rightarrow \infty \Rightarrow$  phân kỳ

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Ta có:  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \rightarrow$  Hội tụ

**Tính chất cần nhớ:**  $S = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \rightarrow S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

$$\rightarrow S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & |q| < 1 \\ \infty, & |q| > 1. \text{ Hội tụ khi } |q| < 1 \\ \infty & \end{cases}$$

**Điều kiện cần để chuỗi hội tụ:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ HT} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$\rightarrow$  Khi chuỗi HT thì số hạng tổng quát phải có  $\lim = 0$

$\rightarrow$  Khi SHTQ có  $\lim \neq 0 \Rightarrow$  chuỗi phân kỳ

**Tính chất chuỗi Hội tụ:**

TC1: Nếu  $S_a = \sum a_n, \sum b_n = S_b$  cùng HT

$\Rightarrow \sum (a_n + b_n) \text{ HT} \text{ và } \sum (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) \text{ HT}$

TC2: HT + PK  $\rightarrow$  PK; PK + PK  $\rightarrow$  không suy ra được gì



VD2: Ta có: 
$$\begin{cases} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ phan ky} \\ b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n} \text{ phan ky} \end{cases}$$

Mà  $\sum (a_n + b_n) \rightarrow 0$  hội tụ

## 2. Chuỗi số dương

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  là chuỗi số dương nếu  $a_n > 0 \forall n$

Các tiêu chuẩn hội tụ:

### a) Tiêu chuẩn so sánh:

Xét  $0 < a_n \leq b_n$

Nếu:

$$+ \sum b_n \text{ HT} \rightarrow \sum a_n \text{ HT}$$

$$+ \sum a_n \text{ PK} \rightarrow \sum b_n \text{ PK}$$

Tỷ lệ  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow k \neq 0; +\infty; -\infty$  thì  $\sum a_n, \sum b_n$  cùng tính chất

### b) Tiêu chuẩn tích phân:

Nếu  $f : [0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  : 
$$\begin{cases} f(n) = a_n \\ f \text{ giảm, } \lim f = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  và  $\int_1^{+\infty} f(x)dx$  có cùng TC

### c) Tiêu chuẩn D'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$



### d) Tiêu chuẩn Cauchy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

Nếu:

$+\lambda < 1$  : HT

$+\lambda > 1$  : PK

$+\lambda = 1$  : không kết luận gì

### Ghi chú:

$n! \rightarrow$  D'Alembert

$[f(x)]^n \rightarrow$  Cauchy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln n)^\alpha}{n^\beta} = 0 (\alpha, \beta > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^{\beta n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P(n)} = 1 (P(n) \text{ là đa thức})$

## 3. Chuỗi số có dấu bất kỳ

### Chuỗi đan dính:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \dots + (-1)^n \cdot u_n$$

### Định lý Leibnitz:

Chuỗi đan dính có:

$$\begin{cases} a_n > 0 \\ \{a_n\} \text{ giảm về } 0 \end{cases} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \text{ HT}$$

$$\text{VD3: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ có } \begin{cases} a_n = \frac{1}{n} > 0 \forall n \geq 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{chuỗi HT}$$



## Chuỗi có dấu bất kỳ

+ **Hội tụ tuyệt đối:**  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  hội tụ  $\rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  HT

+ **Bán hội tụ:**  $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ hội tụ} \\ \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{ phan ky} \end{cases}$

## Tiêu chuẩn Cauchy - D'Alembert mở rộng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

$$\rightarrow +\lambda < 1 : |a_n| \text{ HT} \rightarrow a_n \text{ HT}$$

$$+\lambda < 1 : |a_n| \text{ PK và } a_n \text{ PK}$$

$$+\lambda = 1 : \text{không có kết luận}$$

## Tiêu chuẩn Dirichlet:

Cho  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$  nếu:  $\begin{cases} \{b_n\} \text{ giảm ve 0} \\ \sum_{n=1}^k a_n \text{ bi chan deu: } \exists M > 0, \forall k : \left| \sum_{n=1}^k a_n \right| < M \end{cases} \rightarrow \sum a_n \cdot b_n \text{ hội tụ}$

## 4. Chuỗi hàm

**Định nghĩa:** Là chuỗi có dạng  $\sum_{n=1} U_n(x)$

Xét  $x_0 \in D$  sao cho  $\sum_{n=1} u_n(x_0)$  là chuỗi số hội tụ

$\rightarrow$  chuỗi hàm  $\sum u_n(x)$  HT tại  $x_0$  và tương tự với chuỗi hàm PK tại  $x_0$ .

**Chuỗi hội tụ đều:** Chuỗi hàm  $\sum_{n=1} u_n(x)$  HTĐ về  $S(x)$  trên tập  $X$  nếu  $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon)$  sao cho  $\forall n > n_0$ .

$$|\text{Sn}(x) - S(x)| < \varepsilon$$

### Tiêu chuẩn Weierstrass, Dirichlet.

- Tiêu chuẩn Weierstrass:

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_n(x)| (x \in X, n > N) < a_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xrightarrow{HT} A < \infty \end{array} \right. \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{x \in X} \text{HTTD}$$

- Tiêu chuẩn Dirichlet:

$$\left\{ \begin{array}{l} |v_n(x)| < |v_{n+1}(x)|; \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = 0 \\ \left| \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \right| < A \\ u_n(x) = w_n(x) \cdot v_n(x) \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \xrightarrow{x \in X} \text{HTTD}$$

## 5. Chuỗi lũy thừa

Là chuỗi có dạng:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot X^n$

1) Định lý Abel: Nếu chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$  HT tại  $x_0$   
 $\Rightarrow$  chuỗi hội tụ tuyệt đối trong  $(-|x_0|; |x_0|)$

Bán kính hội tụ R:

- Chuỗi  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$  hội tụ trong  $(-R, R)$  và phân kỳ ngoài  $[-R; R]$ .
- $(-R; R)$  là khoảng hội tụ  $\rightarrow$  cần xét tính hội tụ biên  $x = \pm R \rightarrow$  miền hội tụ của chuỗi

Tính bán kính hội tụ R: Nếu  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{|a_n|}, \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}$  thì  $R = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}; \alpha \neq 0; \infty \\ 0; \alpha = \infty \\ \infty; \alpha = 0 \end{cases}$

2) Tính chất:



Định lý: Cho chuỗi lũy thừa  $\sum a_n \cdot x^n$ , BKHT = R

a) Chuỗi HTĐ trên mọi  $[a, b] \subset (-R, R)$

→ có thể không HTĐ trực tiếp trên  $(-R, R)$

b)  $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n$  liên tục trên  $(-R, R)$

c) Khả vi:  $\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

d) Khả tích:  $\int_a^b \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot x^n \right) dx = \sum_{n=1}^b \int_a^b a_n \cdot x^n dx$

VD: Tính  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1}$ ,  $|x| < 1$

$$S(x) = 2n + 1$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2} \\ \Rightarrow S(x) &= \int_a^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \end{aligned}$$

$$S(0) = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

Vậy  $S(x) = \arctan x$ .

### 3) Khai triển thành chuỗi Taylor:

Định lý: Cho  $f : (x_0 - R; x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi vô hạn lần

Nếu  $\exists M > 0$  sao cho  $\forall n, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R) \left( f^{(n)}(x) < M \right)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Các Khai triển chuỗi thường gấp: (Khai triển taylor tại điểm  $x = 0$ , khai triển Maclaurin)

$$+ e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad R = \infty$$

$$+ \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad R = \infty$$



$$+\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} \quad R = \infty$$

$$+\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad R = 1$$

$$+\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n \quad R = 1$$

$$+\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{n+1}}{n+1} \quad R = 1$$

## CHUỖI FOURIER

### 1. Định nghĩa:

Chuỗi lượng giác  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx)$  (1)

Định lý: Nếu  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$  HT thì (1) HTTD và HTĐ

CM:  $0 \leq |a_n \cdot \cos nx + b_n \cdot \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$

Mà  $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$  HT theo TC Weierstrass.

Khi (1) HTĐ trên  $R$  thì hàm tổng  $f(x)$  liên tục, tuần hoàn:  $f(x + 2\pi) = f(x) \forall x$

Bố đề:

a)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

b)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

c)  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0 \forall m, n \in \mathbb{N}$

Giả sử (1) HTĐ trên  $R$  và có tổng  $f(x)$

(1):  $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) dx$

- Lấy tích phân 2 vế (1) trên  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right)$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

- Nhân 2 vế (1) với  $\cos mx$ , lấy TP 2 vế trên  $[-\pi, \pi]$ :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \cos mx dx \right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

**Định nghĩa:** Cho  $f(x)$  tuần hoàn  $T = 2\pi$  và liên tục từng khúc, bị chặn thì chuỗi lượng giác với các hệ số  $a_0, a_n, b_n$  tính như trên là chuỗi Fourier của  $f(x)$ .

**Định lý Dirichlet:** Cho  $f(x)$  tuần hoàn  $T = 2\pi$ , liên tục từng khúc và bị chặn. Khi đó chuỗi Fourier của  $f(x)$  HT và có tổng  $S(x)$  thỏa mãn:  $S(x) = \frac{1}{2}(f(c+0) + f(c-0))$ .

Khi  $S(x) = f(x)$  thì ta nói  $f(x)$  được KT thành chuỗi Fourier.

**Tính chẵn lẻ của  $f(x)$**

TH1:  $f$  là hàm chẵn:  $b_n = 0, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$

TH2:  $f$  là hàm lẻ:  $a_n = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### 1. Chuỗi số dương

#### 1.1 Tiêu chuẩn so sánh

[ ID: 5210 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 + 2 \sin 2023n)\sqrt{n+1}}{2n+5}$

[ ID: 5203 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{n+1}}{3n+2}$

[ ID: 5186 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{e^n}$

[ ID: 5177 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$ .

[ ID: 5168 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ .

[ ID: 5166 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + e^{-2n})$ .

[ ID: 5147 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n^2 + 3n + 3}{4n^2 - n + 2}$

[ ID: 5146 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt{n^2 + 5} - \sqrt{n^2 - 1}}{4n - 3}$

[ ID: 5136 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n}}$

[ ID: 5087 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 \sin n}{e^n}$

[ ID: 5116 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{e^3} - 1 \right)$

[ ID: 5106 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( (3n+2)^{\frac{1}{(2n^3+1)}} - 1 \right)$

[ ID: 5086 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2 + 1} \right)$

[ ID: 5076 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt[3]{n}}$

[ ID: 4905 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + \sqrt{n}}{n^2 + 1}$ .



[ ID: 5049 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \sin(n).$

[ ID: 5046 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2} - 1),$

[ ID: 5037 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n^2 + 1}}{n + 1}$

[ ID: 5029 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n + 63}{\sqrt{n^5 + n}}.$

[ ID: 5026 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6n - 5}{9n + 1}$

[ ID: 5016 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2 + 1}{n^4 + 2n^2 + 2}$

[ ID: 5009 ] Tính tổng của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$

[ ID: 5007 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{(n + 1)^2}$

[ ID: 5006 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n + (-1)^n}$

[ ID: 4986 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3}{n^2(\sqrt{n} + 1)}$

[ ID: 4983 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^3 + 3n^2 + 1}.$

[ ID: 4976 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left( 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$

[ ID: 4956 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3}{2^n + 1}$

[ ID: 4948 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-n} n^2 \cos(n)}{\ln^2(n)}$

[ ID: 4945 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}$

[ ID: 4936 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan\left(\frac{n}{2n^2+3}\right)}{\sqrt{n+3}}$

[ ID: 4925 ] Xét sự hội tụ, phân kí của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{3n^2 + 1}$

[ ID: 4711 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \sin \frac{1}{n} \right)$



[ ID: 4710 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

[ ID: 4709 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\ln n}$

[ ID: 4708 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{e} - 1)$

[ ID: 4707 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

[ ID: 4706 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$

[ ID: 4705 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{4n+5}$

[ ID: 4916 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

[ ID: 4915 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n^3 - 1}$

[ ID: 4914 ] Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 + 2n + 3) (0,5)^n$ .

[ ID: 4719 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$

## 1.2 Tiêu chuẩn D'Alembert

[ ID: 5165 ] Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ D'Alembert cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ .

[ ID: 5155 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$

[ ID: 5145 ] Tính tổng  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)n!}$

[ ID: 5066 ] Check the convergence/divergence of the following series.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n!}$

[ ID: 5048 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n(3n+1)}{n!}$

[ ID: 5027 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)!} \tan \frac{1}{7^n}$



[ ID: 4965 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n}{(2^n + 1)^2}$

[ ID: 4947 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022^n}{(n+2)!}$

[ ID: 4926 ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2022^n}{(3n+1)!}$

[ ID: 4716 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$

[ ID: 4715 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+1)!}{n^2 8^n}$

### 1.3 Tiêu chuẩn Cauchy

[ ID: 5195 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{3^n}{5^n}$

[ ID: 5185 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+3}{n+4} \right)^{n^2}$

[ ID: 5096 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{n+2}{n} \right)^{n^2}$

[ ID: 5068 ] Check the convergence/divergence of the following series.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{n+2}{n-2} \right)^{n(n+3)}$

[ ID: 5056 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+3}{n} \right)^n$

[ ID: 5036 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$

[ ID: 5028 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{n+3}{n-1} \right)^{n(n+8)}$  ;

[ ID: 4997 ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$ .

[ ID: 4977 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$

[ ID: 4966 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+3}{2n+4} \right)^{n^2}$

[ ID: 4955 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{2n+3}{3n+4} \right)^n$

[ ID: 4935 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{3-2n}{3n+4} \right)^n$



[ ID: 4714 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$

[ ID: 4713 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

[ ID: 4712 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$

[ ID: 4718 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$

[ ID: 4717 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số dương sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3}$

## 1.4 Tiêu chuẩn tích phân

[ ID: 5127 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

[ ID: 5038 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + 2 \ln n}{(2n^2 + 1) \ln^3 n}$

[ ID: 4937 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2(\ln n)}$

## Chuỗi số với số hạng có dấu bất kỳ

[ ID: 5204 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln(2n)}{\sqrt{3n}}$

[ ID: 5196 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$

[ ID: 5176 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ .

[ ID: 5156 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n + (-1)^n \cdot n}{n\sqrt{n}}$

[ ID: 5144 ] Cho 2 chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ tuyệt đối. Chứng minh chuỗi số hội tụ  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$  tuyệt đối

[ ID: 5047 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(\pi n)}{\pi n},$



[ ID: 5044 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-nx^2} + \cos(nx)}{2^n + x^2}$  trên  $\mathbb{R}$ .

[ ID: 4732 ] Cho chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ, liệu có thể suy ra chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$  cũng hội tụ? Vẫn câu hỏi này, nếu thêm giả thiết chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  hội tụ tuyệt đối.

[ ID: 4731 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$

[ ID: 4730 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$

[ ID: 4729 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$

[ ID: 4728 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

[ ID: 4727 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$

[ ID: 4726 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+100}$

[ ID: 4725 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

[ ID: 4724 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos \frac{\pi n^2}{n+1}$

[ ID: 4723 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left( \pi \sqrt{n^2+1} \right)$

[ ID: 4722 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$

[ ID: 4721 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

[ ID: 4720 ] Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$

## Chuỗi đơn dẫu và định lý Leibniz

[ ID: 5211 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n-1}}{2n+3}$

[ ID: 5187 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n} (x+2)^n$ .



[ ID: 5175 ] Phát biểu điều kiện cần để chuỗi số hội tụ. Áp dụng điều kiện cần để xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ .

[ ID: 5167 ] Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ .

[ ID: 5129 ] Tính tổng của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{3n+4}}{n}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .

[ ID: 5126 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

[ ID: 5117 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + \cos n}{n^3}$

[ ID: 5107 ] Xét sự hội tụ của chuỗi số sau  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + (-1)^n}$

\*\*[ ID: 5097 ]\*\* Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2 - 1}$

[ ID: 5057 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n+1}}$

[ ID: 5017 ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{n+1}{n^2}$

[ ID: 4996 ] Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$ .

[ ID: 4987 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+3) \ln n}$

[ ID: 4967 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+4 \sin n}$

[ ID: 4957 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{n^2+2}$

[ ID: 4946 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln^3(n)}$

[ ID: 4917 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(\frac{1+n}{n}\right)$

[ ID: 4906 ] Xét sự hội tụ, phân kì của chuỗi số :  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ .



## Chuỗi hàm

[ ID: 5197 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{nx}}{3n+2}$

[ ID: 5205 ] tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n-1}{n+5} \right)^n \left( \frac{2x-1}{x+2} \right)^{2n}$

[ ID: 5104 ] Xét sự hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ , của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + 2n - 1}$ .

[ ID: 5077 ] Tìm tập hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5} (x+1)^{3n}$

[ ID: 5023 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + x^4 + 1}$  trên  $\mathbb{R}$

[ ID: 5015 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} xe^{-n^2x}$  trên  $[0, \infty)$ .

[ ID: 5004 ] Xét hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$  của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{(n+1)^4} + x^4}$

[ ID: 4999 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2-x^2}$ .

[ ID: 4995 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$  trên  $\mathbb{R}$ .

[ ID: 4970 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x}$

[ ID: 5058 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin((n^2+1)x)}{\sqrt{n^3+1}}$

[ ID: 4959 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{nx+\frac{1}{n}}$

[ ID: 4958 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$

[ ID: 4938 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^{2n}}{\sqrt{n^2+4}}$

[ ID: 4933 ] Xét sự hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$  của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[3]{4\tan^2 t + 1}} dt \right) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

[ ID: 4928 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x^2+3x-3}$

[ ID: 4919 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln^n \left( |x| + \frac{n+1}{n} \right)$



[ ID: 4748 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left( \frac{2x+1}{x+2} \right)^n, x \in [-1; 1]$

[ ID: 4747 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(x^2+1)^n}, x \in \mathbb{R}$

[ ID: 4908 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{2^n}$ .

[ ID: 4744 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$

[ ID: 4743 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$

[ ID: 4742 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x(x+n)}{n} \right)^n$

[ ID: 4741 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$

[ ID: 4740 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( x^n + \frac{1}{2^n x^n} \right)$

[ ID: 4739 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( x + \frac{1}{n} \right)^n$

[ ID: 4738 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x + (-1)^n}{n}$

[ ID: 4735 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$

[ ID: 4734 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{e^{nx}}$

[ ID: 4733 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^n}$

## Chuỗi lũy thừa

[ ID: 5212 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{n! 4^n} (x^2 - 6x + 2)^n$

[ ID: 5178 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1} (x-2)^{3n}$ .

[ ID: 5157 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^{2n} x^n$



[ ID: 5148 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 1}{\sqrt[3]{3n+1}}(x-1)^n$

[ ID: 5128 ] Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$

[ ID: 5118 ] Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}$

[ ID: 5088 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$

[ ID: 5069 ] Find the convergent domain of the series of function  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}(x-3)^n$ .

[ ID: 5067 ] Check the convergence/divergence of the following series.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3n^2 - 1}$

[ ID: 5050 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} x^n$ .

[ ID: 5039 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{9^n (n^3 + 1)}$

[ ID: 5030 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-7)^n}{n 5^n}$ .

[ ID: 5018 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1} \cdot 2^n}$

[ ID: 5008 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2-x)^n}{n}$ .

[ ID: 4988 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n} (x-3)^n$ .

[ ID: 4978 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2 - 2} \left(\frac{2x-1}{x}\right)^{2n}$ .

[ ID: 4969 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{8^n (n^2 + 1)}$

[ ID: 4927 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+3} \frac{2^n}{n^2 - 1} (x-3)^{2n}$

[ ID: 4918 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$

[ ID: 4755 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n) x^n$

[ ID: 4754 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^n$



[ ID: 4753 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$

[ ID: 4752 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

[ ID: 4751 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n+1}{2n+3} \right)^n x^n$

[ ID: 4750 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^n$

[ ID: 4749 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)x^n}{n^2 + 1}$

[ ID: 5137 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1-2x}{1+x} \right)^n$

[ ID: 5108 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n+3}{4n-2} \right)^{2n} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^n$

[ ID: 4909 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2 + 2^n}$ .

[ ID: 4737 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{x^{2n} + 1}$

[ ID: 4736 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n + 1}$

[ ID: 4745 ] Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm số trên tập đã cho:  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n, |x| < q < 1$

[ ID: 4757 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!} \tan^n x$

[ ID: 4756 ] Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x+1)^n$

## Khai triển maclaurin

[ ID: 5213 ] Khai triển hàm số  $f(x) = \ln(x+2)$  thành chuỗi lũy thừa của  $\frac{3-x}{x+3}$ .

[ ID: 5206 ] Khai triển hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$  thành chuỗi Taylor trong lân cận của điểm  $x_0 = 2$ .

[ ID: 5158 ] Khai triển hàm số  $f(x) = \ln \left( \frac{3+x}{\sqrt{1-x}} \right)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 5081 ] Khai triển hàm  $y = \ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  thành chuỗi Maclaurin.



[ ID: 5074 ] Represent the function  $f(x) = \frac{1}{x^6 - x^3 + 1}$  as a Maclaurin series.

[ ID: 5060 ] Khai triển hàm  $f(x) = \ln(1 - 2x)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 5054 ] Khai triển hàm số  $f(x) = (x + 1) \cos(3x)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 5040 ] Khai triển hàm số  $f(x) = \frac{2x}{3x^2 - 4x + 1}$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 5032 ] Khai triển hàm số  $f(x) = x^2 \ln(5 + x)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 5019 ] Khai triển  $f(x) = \frac{3}{x+4}$  thành chuỗi lũy thừa của  $x + 2$

[ ID: 5014 ] Khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa  $\frac{1}{1+x+x^{2+x^3}}$

[ ID: 5003 ] Khai triển hàm  $(y - x)dx + (x + y)dy = 0$  thành chuỗi lũy thừa của  $x - 3$ .

[ ID: 4992 ] Khai triển hàm  $f(x) = \ln \frac{1+3x}{1-x}$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 4979 ] Khai triển  $f(x) = \frac{x}{x+4}$  thành chuỗi Taylor tại  $x = 1$ .

[ ID: 4960 ] Khai triển hàm số  $f(x) = x \cos(x^2)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 4939 ] Khai triển hàm số  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$  thành chuỗi lũy thừa của  $x - 1$

[ ID: 4932 ] Khai triển hàm  $f(x) = \int_0^{x-1} e^{t^3} dt$  thành chuỗi lũy thừa của  $x - 1$ .

[ ID: 4770 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm  $x_0$  tương ứng):  $y = \sqrt{x}, x_0 = 4$

[ ID: 4769 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm  $x_0$  tương ứng):  $y = \sin \frac{\pi x}{3}, x_0 = 1$

[ ID: 4768 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Taylor (trong lân cận điểm  $x_0$  tương ứng):  $y = \frac{1}{2x+3}, x_0 = 4$

[ ID: 4767 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = \arcsin x$

[ ID: 4766 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = \ln(1 + x - 2x^2)$

[ ID: 4765 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$

[ ID: 4764 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

[ ID: 4763 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = x \sin^2 x$

[ ID: 4762 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Maclaurin  $y = \frac{2x+4}{x^2 - 3x + 2}$



[ ID: 4920 ] Khai triển hàm số  $f(x) = x^3 \ln(1 + x^2)$  thành chuỗi Maclaurin.

[ ID: 4910 ] Triển khai hàm số  $f(x) = 2 \sin 2x \cos x$  thành chuỗi Maclaurin.

## Chuỗi Fourier

[ ID: 5202 ] a) Cho hàm số  $f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ ,  $f(x)$  là hàm chẵn và  $f(x) = x(\pi + x)$  trong  $[-\pi, 0]$ . Khai triển  $f(x)$  thành chuỗi Fourier.b) Tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

[ ID: 5070 ] Expand the function given by  $f(x) = \begin{cases} <br> -2 \text{ if } 0 \leq x \\ lt; \pi & \text{as a Fourier} \\ <br> 2 \text{ if } -\pi \leq x \\ lt; 0 < br > \end{cases}$

series of the period  $2\pi$ .

[ ID: 5153 ] Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số  $f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 4$  và  $f(x) = \begin{cases} 2 + x & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ 2 - x & \text{khi } 0 < x < 2 \end{cases}$

[ ID: 5138 ] Cho hàm số  $f(x) = -x$  khi  $-2 < x \leq 2$  và tuần hoàn chu kỳ . Khai triển  $f(x)$  thành chuỗi Fourier

[ ID: 5102 ] Khai triển hàm  $y = x$ ,  $-2 \leq x \leq 2$ , tuần hoàn với chu kỳ  $T = 4$ , thành chuỗi Fourier.

[ ID: 5064 ] Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số:  $f(x) = \begin{cases} e^{|x|}, & \text{amp; khi } amp; 0 \\ lt; x | & lt; \pi \\ 2, & \text{amp; khi } amp; x = 0 \end{cases}$ ,

tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$

[ ID: 5005 ] Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  :  $f(x) = x - 2\pi$ ,  $\pi < x < 3\pi$

[ ID: 4993 ] Khai triển hàm số  $f(x) = 3 + |x|$  thành chuỗi Fourier trên khoảng  $(-\pi, \pi)$ .



[ ID: 4984 ] Khai triển thành chuỗi Fourier hàm  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$  chu kì  $2\pi$ .

[ ID: 4974 ] Tìm chuỗi Fourier của hàm số  $f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ  $T = 2\pi$ :

$$f(x) = \begin{cases} <br> -2 \text{ khi } -\pi \leq x \\ lt; 0 \\ <br> 2 \text{ khi } 0 \leq x \\ lt; \pi < br > \end{cases}$$

Chuỗi này hội tụ về hàm số nào?

[ ID: 4954 ] Khai triển hàm  $y = \sin(x)$  trong khoảng  $(0, \pi)$  thành chuỗi chỉ chứa  $\cos(nx)$ .

[ ID: 4943 ] Khai triển hàm số  $f(x) = 1 + x, 0 < x < \pi$  thành chuỗi Fourier chỉ chứa hàm số Cosine.

[ ID: 4776 ] Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier  $f(x) = 10 - x, x \in (5; 15)$

$$[ ID: 4775 ] \text{Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier } f(x) = \begin{cases} ax & \text{nếu } -\pi < x < 0 \\ bx & \text{nếu } 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$[ ID: 4774 ] \text{Khai triển hàm số sau thành chuỗi Fourier } f(x) = \begin{cases} A & \text{nếu } 0 < x < l \\ 0 & \text{nếu } l < x < 2l \end{cases}$$

[ ID: 4773 ] Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = 2$  xác định như sau  $f(x) = |x|$  trong khoảng  $(-1, 1)$  thành chuỗi Fourier.

[ ID: 4772 ] Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = 2\pi$  sau thành chuỗi Fourier  $y = |x|, x \in [-\pi; \pi]$

[ ID: 4771 ] Khai triển hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = 2\pi$  sau thành chuỗi Fourier  $y = x, x \in (-\pi; \pi)$



## Tính tổng

[ ID: 5194 ] Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}$ .

[ ID: 5109 ] Tính tổng:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, (-1 < x < 1)$

[ ID: 5085 ] Tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

[ ID: 5065 ] Tính tổng:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^{n-1}}$ .

[ ID: 5055 ] Tính tổng của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -1\}$

[ ID: 5045 ] Tính tổng chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n(2n+1)}$ .

[ ID: 5031 ] Tính tổng của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+3}{7^n}$ .

[ ID: 5025 ] Chứng minh rằng:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n x^{n+1}}{n} = x \ln(1+2x), |x| < \frac{1}{2}$ . Áp dụng kết

quả tính tổng  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{n \cdot 2^n}$

[ ID: 4994 ] Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2^n}$ .

[ ID: 4985 ] Tính tổng  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{5^n}$ .

[ ID: 4975 ] Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)4^n}$

[ ID: 4964 ] Tính tổng của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$

[ ID: 4944 ] Tính tổng của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{8^n}$

[ ID: 4934 ] Tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-nx^2}}{2^n}, x \in \mathbb{R}$ .

[ ID: 4761 ] Tính tổng của chuỗi sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}, x \in (-1; 1)$

[ ID: 4760 ] Tính tổng của chuỗi sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}, x \in (-1; 1)$



[ ID: 4759 ] Tính tổng của chuỗi sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)3^n}$

[ ID: 4924 ] Tính tổng của chuỗi số:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

[ ID: 4758 ] Tính tổng của chuỗi sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x \in (-1; 1)$

[ ID: 5119 ] Tính tổng của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^{2n}.n!} x \in \mathbb{R}$



## Chương 2: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

### TỔNG QUAN LÝ THUYẾT

#### Phương trình vi phân cấp 1

##### 1. Phương trình khuyết:

1.1. Khuyết  $y : F(x, y') = 0$

Từ phương trình rút ra  $y' = f(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)$   
 $\Rightarrow dy = f(x)dx \Leftrightarrow \int dy = \int f(x)dx \Leftrightarrow y = \int f(x)dx$

Tóm lại:  $y' = f(x) \Leftrightarrow y = \int f(x)dx$

1.2. Khuyết  $x$  : tương tự với khuyết  $y$

#### 2. Phương trình phân ly biến số

Là phương trình có thể đưa về dạng:  $f(y)dy = g(x)dx \Leftrightarrow \int f(y)dy = \int g(x)dx$

Hay  $y' = f(y) \cdot g(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(y) \cdot g(x) \Rightarrow \frac{dy}{f(y)} = g(x)dx$

#### 3. Tuyến tính cấp 1:

Phương trình có dạng:  $y' + p(x).y = q(x)$

Công thức nghiệm:  $x_0 \Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx} \left[ C + \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx \right]$

#### 4. Phương trình đẳng cấp:

- Đưa về dạng  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right), x' = g\left(\frac{x}{y}\right)$

Đặt  $u = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow y = u(x).x \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = f(u) \Leftrightarrow \frac{du}{dx} \cdot x = f(u) - u \Rightarrow \frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$

Hệ quả của phương trình đẳng cấp:  $y' = ay^2 + \frac{b}{x^2}$



Đặt  $t = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -t^2 \cdot \frac{dy}{dt}$   
 $\Rightarrow$  PT trở thành:  $-t^2 \cdot \frac{dy}{dt} = ay^2 + bt^2$  ( Phương trình đẳng cấp đối với y và t )

## 5. Phương trình Bernoulli:

**Phương trình có dạng:**  $y' + P(x)y = y^\alpha \cdot Q(x)$

$\Rightarrow$  chia cả 2 vế do  $y^\alpha$  rồi đặt  $y^{1-\alpha} = u$

- Nếu  $\alpha > 0 \Rightarrow y = 0$  là 1 nghiệm
- Nếu  $\alpha < 0 \Rightarrow y = 0$  không là nghiệm  
 $\Rightarrow u' = \frac{du}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha} \cdot y' \Rightarrow y^{-\alpha} \cdot y' = \frac{u'}{1-\alpha}$  phương trình trở thành:  $\frac{u'}{1-\alpha} + P(x) \cdot u = Q(x)$

## 6. Phương trình vi phân toàn phần:

**Phương trình có dạng:**  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

Trong đó:  $P'_y = Q'_x$

Khi đó hàm  $u(x, y)$  được tìm sẽ có dạng:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

Do đó, tích phân tổng quát của phương trình là

$$\int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t) dt = C \text{ hoặc } \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = C.$$

**Phương pháp thừa số tích phân:**

Nếu  $P'_y \neq Q'_x$  ta phải nhân thêm  $u$  để nó trở thành PTVP toàn phần

$$uPdx + uQdy = 0$$

Các trường hợp:

- Nếu  $\frac{Q'_x - P'_y}{Q} = h(x) \Rightarrow u(x) = e^{-\int h(x) dx}$
- Nếu  $\frac{Q'_x - P'_y}{P} = g(y) = u = e^{-\int g(y) dy}$



## Phương trình vi phân cấp 2

### 1. Phương trình khuyết

**1.1. Phương trình khuyết**  $y, y' \Rightarrow F'(x, y'') = 0$

Đặt  $u = y' \Rightarrow u' = y''$

**1.2. Phương trình khuyết**  $y \Rightarrow F'(x, y', y'') = 0$

Đặt  $u = y', u' = y''$

$\Rightarrow$  phương trình trở thành PTVP cấp 1 đối với  $x$  và  $u$

**1.3. Phương trình khuyết**  $x \Rightarrow F'(y, y', y'') = 0$

Đặt  $u = y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y'' = u \cdot \frac{du}{dy}$

$\Rightarrow$  phương trình phân ly biến số

### 2. Phương trình vi phân tuyến tính cấp 2:

Dựa về dạng tổng quát:  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

**2.1. PTVP tuyến tính cấp 2 thuần nhất:**  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  (2.1)

Nếu tìm được 1 nghiệm cụ thể của (2.1) có  $y_1$  thì tìm được nghiệm:  $y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} dx$

$\Rightarrow$  nghiệm tổng quát của (2.1) có dạng:  $y = C_1y_1 + C_2y_2$

$\Rightarrow$  có thể nhầm các nghiệm  $y_1 : y_1 = \alpha, y_1 = e^{\alpha x}, y_1 = x^\alpha, \dots$

**2.2. PTVP tuyến tính không thuần nhất:**  $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$  ( $f(x) \neq 0$ )

**Bước 1:** Tìm nghiệm TQ của PT thuần nhất tương ứng với (1):  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

(2)

$\Rightarrow$  tìm được nghiệm TQ của (2) là:  $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$

**Bước 2:** Dựa vào dạng của (1) để giải các TH

TH 1: Nếu (2) là PTVP hệ số hằng số có thể dựa vào  $f(x)$  để xác định

- TH 1-1: Nếu  $f(x)$  có dạng:  $f(x) = e^{h_1 x} \cdot M(x) [h_2 \sin(h_4 x) + h_3 \cos(h_4 x)]$   
 $\Rightarrow$  tìm 1 nghiệm dạng cho trước

- TH 1-2: Nếu  $f(x)$  bất kỳ phải dùng biến thiên hằng số Lagrange

TH 2: Nếu (2) không là PTVP hệ số hằng  $\Rightarrow$  biến thiên hằng số

- Phương pháp biến thiên hằng số:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (1)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

→ Nếu có nghiệm TQ của (2) là:  $\bar{y} = C_1y_1 + C_2y_2$  ( $C_1, C_2$  : hàm biến  $x$ )

⇒ Lúc này nghiệm TQ của (1) là:  $y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$

→ Tìm  $C_1$  và  $C_2$  dựa vào nghiệm hệ:: 
$$\begin{cases} C'_1y_1 + C'_2y_2 = 0 \Rightarrow C'_1, C'_2 \\ C'_1y'_1 + C'_2y'_2 = f(x) \Rightarrow \text{Lay tích phan } C'_1, C'_2 \end{cases}$$

**Xét trường hợp riêng  $f(x)$  có dạng đặc biệt**

**Bước 1:** PT thuần nhất:  $y'' + py + qy = 0 \quad (3); (p, q : \text{const})$

- PT đặc trưng:  $h^2 + ph + q = 0 \quad (4)$

TH 1: Nếu (4) có 2 nghiệm  $h_1, h_2$  phân biệt

⇒ nghiệm TQ của (3) ⇒  $\bar{y} = C_1e^{h_1x} + C_2e^{h_2x}$

TH 2: Nếu (4) có 2 nghiệm kép  $h_{1,2}$

⇒ nghiệm TQ của (3) ⇒  $\bar{y} = (C_1x + C_2)e^{h_{1,2}x}$

TH 3: Nếu (4) có 2 nghiệm phức  $h = \alpha + \beta i$

⇒ nghiệm TQ của (3) ⇒  $\bar{y} = e^{dx} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$

**Bước 2:** Nếu  $f(x)$  có dạng đặc biệt là 1 trong các dạng dưới đây thì ta đi tìm 1 nghiệm riêng là  $y^*$ .

Sau đó ta sẽ có nghiệm TQ của phương trình không thuần nhất sẽ là:  $y = \bar{y} + y^*$ .



Về phái là $f(x)$	So sánh nghiệm của PT đặc trưng	Tìm nghiệm riêng dưới dạng
$f(x) = e^{hx} p_n(x)$ trong đó $h$ là const thực	Nếu $h$ không là nghiệm của PT đặc trưng	$y^* = e^{hx} R_n(x)$ $R$ : đa thức bậc $n$ biến $x$ .
	Nếu $h$ là nghiệm đơn của PT đặc trưng	$y^* = x \cdot e^{hx} R_n(x)$
	Nếu $h$ là nghiệm kép của PT đặc trưng	$y^* = x^2 \cdot e^{hx} R_n(x)$
$f(x) = e^{\alpha x} [P_n \cos(\beta(x)) + Q_m(x) \sin(\beta(x))]$	Nếu $\alpha \pm \beta i$ không là nghiệm của PT đặc trưng	$y^* = e^{\alpha x} [G_r(x) \cos(\beta(x)) + Q_r(x) \sin(\beta(x))]$ $H, Q$ là đa thức bậc $r$ biến $x$ .
	Nếu $\alpha \pm \beta i$ là nghiệm của PT đặc trưng	$y^* = x e^{\alpha x} [G_r(x) \cos(\beta(x)) + Q_r(x) \sin(\beta(x))]$

## Phương trình Euler

Có dạng:  $x^2 y'' + pxy' + qy = 0$

Phép đặt:  $|x| = e^t$

$$\Rightarrow xy' = \frac{dy}{dt}; x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \Rightarrow \text{PTTT: } \frac{d^2y}{dt^2} - (p-1)\frac{dy}{dt} + qy = 0$$

## Phương trình Chebysew

Có dạng:  $(1-x^2) y'' + x^2 y - xy' = 0$

Đặt:  $t = \arccos x \Rightarrow x = \cos t$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$



$$\begin{aligned}
 y'' &= \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \\
 \Rightarrow \text{PTTT: } &\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} + 4y = 0 \\
 \Rightarrow &\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0
 \end{aligned}$$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### 2.1: Phương trình vi phân cấp 1

#### a. Phương trình vi phân cơ bản (Khuyết)

[ID:4780] Giải phương trình vi phân (phương trình khuyết)  $y^2 + (y')^2 = 4$

[ID:4779] Giải phương trình vi phân (phương trình khuyết)  $x = (y')^2 - y' + 2$

[ID:4778] Giải phương trình vi phân (phương trình khuyết)  $y' + y = 1$

[ID:4777] Giải phương trình vi phân (phương trình khuyết)  $y' = \frac{1}{2} (y^2 - 1), y(0) = 2$

[ID:4911] Giải phương trình vi phân :  $y' = 2xy^2$ .

#### b. Phương trình vi phân phân ly biến số

[ID:4784] Giải phương trình vi phân (phương trình phân li)  $1 + x + xy'y = 0$

[ID:4783] Giải phương trình vi phân (phương trình phân li)  $y' + e^{y+x} = 0$

[ID:4782] Giải phương trình vi phân (phương trình phân li)  $2y(x^2 + 4) dy = (y^2 + 1) dx$

[ID:4781] Giải phương trình vi phân (phương trình phân li)  $y' = x^2y$

[ID:4980] Giải phương trình vi phân  $\sqrt{x+1}dy + y \ln^2 y dx = 0$ .

[ID:4973] Giải phương trình vi phân  $(1 + 3x^2 \sin y) dx - x \cot y dy = 0$ .

[ID:5001] Giải phương trình vi phân  $y' = \frac{-x + 2y}{x}, y(1) = 2$ .

[ID:5000] Giải phương trình vi phân  $y' + \frac{y}{x} = x^3$ .

[ID:5002] Giải phương trình vi phân  $(1 - ye^{-x}) dx + e^{-x} dy = 0$

[ID:5051] Giải phương trình vi phân :  $xy' + (x - 1)^2 = 0$

[ID:5034] Giải phương trình vi phân :  $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x$

[ID:5011] Giải phương trình vi phân:  $y' = \frac{x\sqrt{y^2 + 1}}{x^2 + 1}$

[ID:5042] Giải phương trình vi phân :  $y'\sqrt{1-x^2} + e^{3y} = 0$

[ID:5061] Giải phương trình vi phân :  $y' - 3y = y^3 e^x$ .

[ID:5099] Giải phương trình vi phân sau:  $\frac{y}{x} dx + (y^4 + \ln x) dy = 0$ .

[ID:5179] Giải phương trình vi phân  $(xy^2 + 4x) dx + (2y + x^2y) dy = 0$

[ID:5091] Giải phương trình vi phân sau:  $y' - \frac{(2x-1)y}{x^2} = 1, (x > 0)$ .

[ID:5090] Giải phương trình vi phân sau:  $y' = \sqrt{3y + 1}, y(0) = 1$ .



### c. Phương trình thuần nhất

- [ID:4788] Giải phương trình vi phân (phương trình thuần nhất)  $(x + 2y)dx - xdy = 0$
- [ID:4787] Giải phương trình vi phân (phương trình thuần nhất)  $2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1$
- [ID:4786] Giải phương trình vi phân (phương trình thuần nhất)  $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$
- [ID:4785] Giải phương trình vi phân (phương trình thuần nhất)  $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1$
- [ID:4990] Giải phương trình vi phân :  $(3x^2y - 2\sin y) dx + (x^3 - 2x\cos y) dy = 0$
- [ID:5020] Giải phương trình vi phân:  $xy' = y + xe^{\frac{y}{x}}$  thỏa mãn  $y(1) = -1$

### d. Phương trình vi phân tuyến tính

- [ID:4792] Giải phương trình vi phân (phương trình tuyến tính)  $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0$
- [ID:4791] Giải phương trình vi phân (phương trình tuyến tính)  $y' = x - y$
- [ID:4790] Giải phương trình vi phân (phương trình tuyến tính)  $xy' + y = \sqrt{x}$
- [ID:4789] Giải phương trình vi phân (phương trình tuyến tính)  $y' - \frac{4}{x}y = 4x^7$
- [ID:4912] Giải phương trình vi phân :  $y' + y \cos x = \sin 2x.$
- [ID:5189] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + y' = 8xe^x.$
- [ID:4971] Giải phương trình vi phân  $y' - y = e^{3x}; y(0) = e$
- [ID:4963] Giải phương trình vi phân :  $xy' + y = 2y \ln(xy), y(1) = e$
- [ID:4962] Giải phương trình vi phân :  $y' = 2y + xe^x$
- [ID:4981] Giải phương trình vi phân  $(xy' - 1) \ln x = 2y.$
- [ID:5012] Giải phương trình vi phân:  $y' + y = x + 1$
- [ID:5021] Giải phương trình vi phân:  $y' + xy = x$
- [ID:5110] Giải phương trình vi phân sau:  $y' - \frac{1}{x}y = \ln^3 x$

### e. Phương trình Bernoulli [ID:4796]

Giải phương trình vi phân (phương trình bernouli)  $ydx + (x + x^2y^2) dy = 0$

- [ID:4795] Giải phương trình vi phân (phương trình bernouli)  $xy' + y = -xy^2$
- [ID:4794] Giải phương trình vi phân (phương trình bernouli)  $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}$
- [ID:4793] Giải phương trình vi phân (phương trình bernouli)  $y' + \frac{y}{x} = x^2y^4, y(1) = 2$
- [ID:4922] Giải phương trình vi phân :  $y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2}e^{\frac{2y}{x}}$
- [ID:4972] Giải phương trình vi phân  $y' = \frac{1}{2} \left( \frac{y}{x} - \frac{x}{y} \right)$
- [ID:5198] Giải phương trình vi phân sau:  $y' = \frac{y}{x} \left[ \ln^2 \left( \frac{y}{x} \right) + 1 \right]$  với điều kiện  $y(1) = e.$
- [ID:5041] Giải phương trình vi phân :  $y' - \frac{y}{x} = 3x^3 + \ln^2 x, y(1) = 3$



## f. Phương trình vi phân toàn phần

[ID:4800] Giải phương trình vi phân (phương trình vi phân toàn phần)  $(x^2y^2 - x) dy = y dx$

[ID:4799] Giải phương trình vi phân (phương trình vi phân toàn phần)  $e^y dx = (xe^y - 2y) dy$

[ID:4798] Giải phương trình vi phân (phương trình vi phân toàn phần)  $(2xy + 3)dy = -y^2dx$

[ID:4797] Giải phương trình vi phân (phương trình vi phân toàn phần)  $(x^2 + y) dx = (2y - x)dy$

[ID:4921] Giải phương trình vi phân :  $2y \ln x dx = x dy, y(1) = e$

[ID:4961] Giải phương trình vi phân :  $2y^2 x dx = (x^2 + 3) dy, y(1) = 1$

[ID:4913] Giải phương trình vi phân :  $e^y dx + (9y + 4xe^y) dy = 0, y(1) = 0.$

[ID:4982] Giải phương trình vi phân  $(y^3 + x^3(1 + \ln y)) dy + 3x^2(1 + y \ln y) dx = 0$  [ID:5012]

Giải phương trình vi phân:  $y' + y = x + 1$

[ID:5013] Giải phương trình vi phân:  $\sin y(\cos x - x \sin x) dx + x \cos x \cos y dy = 0$

[ID:5033] Giải phương trình vi phân :  $xy dx + (1 + x) dy = 0$

[ID:5024] Giải phương trình vi phân  $\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x - y} = 0$

[ID:5022] Giải phương trình vi phân:  $e^{3y} dx + (3xe^{3y} + y) dy = 0$

[ID:5035] Giải phương trình vi phân :  $(4xy^2 + y) dx + (4x^2y + x) dy = 0.$

[ID:5043] Giải phương trình vi phân :  $2xdx + (x^2 + 3y + 3) dy = 0$

[ID:5053] Giải phương trình vi phân :  $(y - x)dx + (y^3 + x) dy = 0, y(0) = 0.$

[ID:5072] Solve the following differential equations:  $(y + e^x \cos x) dx + (x + e^x \sin x) dy = 0$

[ID:5063] Giải phương trình vi phân :  $(4x^3 - 2y) dx + (-2x + 3y) dy = 0$

[ID:5111] Giải phương trình vi phân sau:  $(ye^{xy} + \sin y) dx + (xe^{xy} + x \cos y) dy = 0$

[ID:5122] Giải phương trình vi phân sau:  $xdy + (3y - 6x^5y^3) dx = 0, y(1) = 2$

[ID:5121] Giải phương trình vi phân sau:  $(y + 5x^6) dx = xdy \cdot y(1) = 2$

[ID:5131] Giải phương trình vi phân sau:  $dy + (y - x)dx = 0$

[ID:4930] Giải phương trình vi phân  $\frac{x}{\sin y} dx - \frac{x^2 \cos y}{2 \sin^2 y} dy = 0$

[ID:4929] Giải phương trình vi phân  $x\sqrt{y^2 + 4} dx - \sqrt{x^2 + 1} dy = 0.$

### Các phương trình cần đổi biến và/hoặc nhận dạng:

[ID:4808] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$xy' = y + x^3 \sin x, y(\pi) = 0$

[ID:4807] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:



$$y = xy' + y' - y' \ln(y')$$

[ID:4806] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$(2xy^2 - 3y^3) dx = (3xy^2 - y) dy$$

[ID:4805] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$3xy^2y' - y^3 = x, y(1) = 3$$

[ID:4804] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$(x^2 + 1)y' + xy = 1$$

[ID:4803] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$y' = \frac{x+y-2}{x-y+4}$$

[ID:4802] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$y' = 1 + x + y + xy$$

[ID:4801] Sử dụng đổi biến và / hoặc nhận dạng để giải phương trình vi phân sau:

$$y' = (x+y)^2$$

[ID:5071] Solve the following differential equations:  $(x-y)y' = 2y$

[ID:4941] Giải phương trình vi phân :  $(2y + e^x \cos y) dx + (2x - e^x \sin y) dy = 0$

[ID:4940] Giải phương trình vi phân :  $y' + \frac{y}{x} = x^3y^4; y(1) = 1$

[ID:4931] Giải phương trình vi phân  $y' = y^2 + \frac{2}{x^2}$

[ID:4923] Giải phương trình vi phân :  $y' = y^2 + \frac{1}{4x^2}, y(1) = 0$

[ID:5190] Giải phương trình vi phân sau:  $x^2y' = 2\sqrt{y} \sin x - 4xy.$

[ID:5188] Giải phương trình vi phân sau:  $yy' = 4e^x \sqrt{y^2 + 1}, y(0) = 2.$

[ID:4953] Tìm  $y_0$  để nghiệm phương trình vi phân  $y' - y = \sin(x), y(0) = y_0$  bị chặn trên  $(0, +\infty)$ .

[ID:4952] Giải phương trình vi phân:  $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{y^2}{1+x^2}, y(0) = 2.$

[ID:4951] Giải phương trình vi phân:  $y' - \frac{2y}{x} = 3x$

[ID:4950] Giải phương trình vi phân:  $y' = y^2 + 9$

[ID:4942] Giải phương trình vi phân :  $2y^2 + x^2y' = 2xyy'$

[ID:5010] Giải phương trình vi phân:  $x = (y')^2 + \frac{1}{y'}$

[ID:4991] Giải phương trình vi phân :  $y' + \frac{4y}{x} = 3x^4y^2, y(1) = 1$

[ID:4989] Giải phương trình vi phân :  $y' = \frac{3xy}{\sqrt{x^2 + 9}}$

[ID:5052] Giải phương trình vi phân :  $xyy' = x^2 + y^2$

[ID:5073] Solve the following differential equations:  $y' = \frac{x^2}{y(1-x^3)}$

[ID:5062] Giải phương trình vi phân :  $xy^2y' = x^3 - 2y^3$



[ID:5170] Giải phương trình vi phân  $x'(y) = e^y y \sqrt{x^2 + 1}$ .

[ID:5169] Giải phương trình vi phân  $(e^{2y} - x) y' = 1$ .

[ID:5160] Giải phương trình vi phân sau:  $y' + 2y = y^2 e^x, y(0) = -1$

[ID:5159] Giải phương trình vi phân sau:  $(4x - y)dx + (x + y)dy = 0$

[ID:5150] Giải phương trình vi phân sau:  $[-y^3 \sin(xy)] dx + [2y \cos xy - xy^2 \sin xy] dy = 0$

[ID:5149] Giải phương trình vi phân sau:  $(\sin 3x)y' - 3y \cos 3x = \sin^2 3x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

[ID:5139] Giải phương trình vi phân sau:  $xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y$

[ID:5132] Giải phương trình vi phân sau:  $y' = \frac{x^2 + y}{2y - x}, y(0) = 1$

## Phần II: Phương trình vi phân cấp 2

### a. Phương trình khuyết

[ID:4812] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình khuyết)

$$\begin{cases} (1+x)y'' + x(y')^2 = y' \\ y(0) = 1, y'(0) = 2 \end{cases}$$

[ID:4811] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình khuyết)  $2yy'' = (y')^2 + 1$

[ID:4810] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình khuyết)  $\begin{cases} (1-x^2)y'' - xy' = 2, \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$

[ID:4809] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình khuyết)  $xy'' + 2y' = 12x^2$

[ID:5080] Giải phương trình vi phân sau:  $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

### b. Phương trình vi phân cấp 2 thuần nhất

[ID:4825] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với về phái có dạng đặc biệt)  $y'' + 4y = e^{3x} + x \sin 2x$

[ID:4824] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với về phái có dạng đặc biệt)  $y'' - 3y' + 2y = e^x + \sin x$

[ID:4823] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với về phái có dạng đặc biệt)  $y'' + 2y' + 10y = x^2 e^{-x} \cos 3x$

[ID:4822] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với về phái có dạng đặc biệt)  $y'' - y' - 2y = x e^x \cos x$

[ID:5123] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + 2y' + 5y = 260e^x \sin x$

[ID:4821] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với về phái có dạng đặc biệt)  $y'' + 3y' - 4y = 200 \sin^2 x$



[ID:4820] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' + y' - 2y = x + \sin 2x$

[ID:4819] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' + 2y' + 2y = 8 \cos x - \sin x$

[ID:4818] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' + y = 2 \cos x \cos 2x$

[ID:4817] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' - 2y' + y = (12x + 4)e^x$

[ID:4816] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' - y = 4(x + 1)e^x$

[ID:4815] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' - 4y' + 3y = (15x + 37)e^{-2x}$

[ID:4814] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' - 2y' + y = 0$

[ID:4813] Giải phương trình vi phân cấp 2 sau (Phương trình tuyến tính hệ số hằng với vế phải có dạng đặc biệt)  $y'' - 3y' + 2y = 0$

[ID:5214] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + 2y' + y = 2(x + 1)e^x + \frac{e^{-x}}{2x}$ ,

[ID:5092] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$ .

[ID:5207] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \cos x$

[ID:5200] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ .

[ID:5199] Giải phương trình vi phân sau:  $2y'' - 5y' + 2y = 6e^{2x}$ .

[ID:5180] Giải phương trình vi phân  $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin(x)$ .

[ID:5093] Giải phương trình vi phân sau:  $x^2 y'' - xy' - 3y = 10 \sin(\ln x)$ , ( $x > 0$ )

[ID:5100] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 3y' + 2y = x + \cos x$ .

[ID:5152] Giải phương trình vi phân sau:  $x^2 y'' + xy' - 4y = x \ln x$

[ID:5161] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 6y' + 8y = 4xe^{2x}$

[ID:5141] Giải phương trình vi phân sau:  $xy'' - y' = x^2 e^x$

[ID:5140] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + y = 2 \sin^2 x$

[ID:5134] Giải phương trình vi phân sau:  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2x^2 \ln x$

[ID:5133] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 2y' - 3y = e^x (2 - 4x^2)$

### c. Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

[ID:4828] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng giải bằng phương pháp biến thiên hằng số:  $y'' - y = \frac{e^x}{e^x + 1}$



[ID:5079] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 6y' + 9y = 1 + e^{2x}$

[ID:4827] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng giải bằng phương pháp biến thiên hằng số:  $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}$

[ID:4826] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính hệ số hằng giải bằng phương pháp biến thiên hằng số:  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

[ID:5112] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' - 5y' + 6y = e^x$

[ID:5151] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

[ID:5124] Giải phương trình vi phân sau:  $y'' + 3y' + 2y = \frac{2e^x}{1+e^{2x}}$

c. Phương trình thuần nhất có hệ số không đổi

[ID:4832] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số hàm số:  $\frac{y''}{(y')^3} + \frac{2}{y'} - x + y = e^y \cos y$  (Gợi ý: coi  $x = x(y)$ )

[ID:4831] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số hàm số:  $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{2}{x}$

[ID:4830] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số hàm số:  $y'' - \frac{2xy'}{x^2+1} + \frac{2y}{x^2+1} = 0$  biết nó có một nghiệm riêng  $y_1 = x$

[ID:5162] Giải phương trình vi phân sau:  $xy'' - (4x+1)y' + (3x+1)y = 0$  có 1 nghiệm riêng  $y_1 = e^{ax}, a \in \mathbb{R}$

[ID:4829] Giải phương trình vi phân cấp 2 tuyến tính có hệ số hàm số:  $(2x-x^2)y'' + 2(x-1)y' - 2y = -2$  biết nó có hai nghiệm riêng  $y_1 = 1, y_2 = x$

[ID:5084] Giải phương trình vi phân  $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$

d. Phương trình Euler

[ID:4838] Giải phương trình vi phân sau bằng phương pháp khai triển chuỗi và phương pháp pt euler  $y'' - 2xy' + y = 0$

e. Hệ phương trình vi phân

[ID:4836] Giải hệ phương trình vi phân sau  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + \frac{1}{\cos t} \end{cases}$

[ID:4835] Giải hệ phương trình vi phân sau  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{y}{x-y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{x}{x-y} \end{cases}$

[ID:4834] Giải hệ phương trình vi phân sau  $\begin{cases} \frac{dy}{dz} = y + 5z \\ \frac{dx}{dz} = -y - 3z \end{cases}$

[ID:4833] Giải hệ phương trình vi phân sau  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dx}{dz} = 4y + 5z \end{cases}$



- [ID:5181] Giải hệ phương trình vi phân  $\begin{cases} x'(t) = x - 3y \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$
- [ID:5171] Giải hệ phương trình vi phân  $\begin{cases} x'(t) = y - 5 \cos t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$ .

f. **Ứng dụng chuỗi để giải ptvp**

- [ID:4837] Giải phương trình vi phân sau bằng phương pháp khai triển chuỗi  $y'' + y = 0$



## CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

### TỔNG QUAN LÝ THUYẾT

**Định nghĩa:** Biến đổi Laplace của hàm số  $f(t)$  là:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Phân rã phân thức:  $\frac{1}{(s-a)^n} \cdot \frac{P(s)}{(s^2 + qs + q)^m}$  ( $s^2 + qs + q$  : có nghiệm  $P(s)$  bậc tử hơn bậc mẫu)

$$= \frac{A}{s-a} + \frac{B}{(s-a)^2} + \dots + \frac{C}{(s-a)^{n-1}} + \frac{D}{(s-a)^m} + \frac{Fs+F}{s^2+qs+q} + \frac{Gs+H}{(s^2+qs+q)^2} + \dots + \frac{Ts+R}{(s^2+qs+q)^m}$$

Bảng cơ bản:

$f(t)$	$F(s)$	$s$
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
$t^a (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$s > 0$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$s > 0$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$s >  k $
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$s >  k $
$u(t-a) (a > 0)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$s > 0$



Một số tính chất của hàm Gamma trong công thức  $t^a$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{n}$$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(a+t) = a \cdot \Gamma(a)$$

Các dạng công thức để áp dụng vào bài:

- Nếu trong bài có  $e^{at}$

$$\Rightarrow L\{e^{at}f(t)\}(s) = L\{f(t)\}(s-a)$$

$$\text{Laplace ngược: } L^{-1}\{F(s-a)\}(t) = a^{at}L^{-1}\{F(s)\}(t)$$

- Nếu trong bài có  $t^n$

$$\Rightarrow L\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n}(L\{f(t)\}(s))$$

$$\Rightarrow \text{Biến đổi Laplace ngược: } L^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{-1}{t} \cdot L^{-1}\{F'(s)\}(t)$$

- Dạng bài có  $\frac{f(t)}{t}$

$$\Rightarrow L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} L\{f(t)\}(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\{F(s)\}(t) = t \cdot L^{-1}\left\{\int_s^{+\infty} F(\tau)d\tau\right\}(t)$$

- Dạng bài có tích phân

$$\Rightarrow L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s} \cdot L\{f(t)\}(s)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}(t) = \int_0^t L^{-1}\{F(s)\}\tau d\tau$$

- Dạng bài tích chập (\* là ký hiệu tích chập)

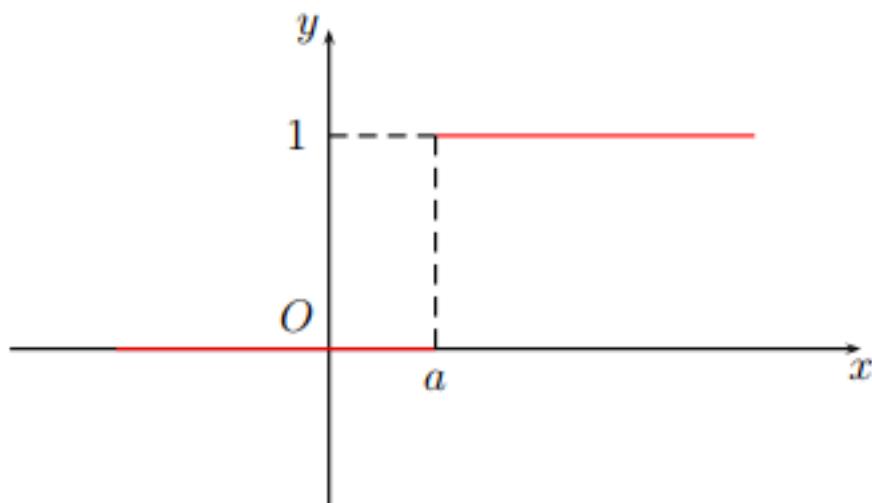
$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \cdot \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f^*g)(t)$$

$$\text{Trong đó: } (f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau, t \geq 0$$

- Hàm Heavise (hàm bậc thang)

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } t < a \\ 1, & \text{nếu } t \geq a \end{cases}$$



Đồ thị của hàm số Heavise

Phép tịnh tiến trên trục  $t$ . Nếu  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$  tồn tại với  $s > c$  thì

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$$

Hàm bậc thang đơn vị tại  $t = a$

Hay là:  $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a), s > c + a.$



## Bảng tổng hợp các công thức phép biến đổi Laplace và Laplace ngược

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$	$F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
$e^{at}f(t)$	$F(s - a)$	$F(s - a)$	$e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
$u(t - a)f(t)$	$e^{-as}F(s)$	$e^{-as}F(s)$	$u(t - a)f(t)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$	$F(s)$	$-\frac{1}{t} \mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$
$(f * g)t$	$F(s)G(s)$	$F(s)G(s)$	$(f * g)(t)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\tau)d\tau$	$F(s)$	$t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\tau)d\tau\right\}(t)$
$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$	$\frac{F(s)}{s}$	$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0)s^{n-2}f'(0) \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$		
	$\dots$		

### Giải bài toán giá trị ban đầu cần áp dụng:

**Dạng 1:** Hệ số hằng

$$L\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n L\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0)s^{n-2}f'(0) \dots - s^0 f^{(n-1)}(0)$$

**Dạng 2:** Không phải hệ hằng

$$L\{t^x f(t)\}(s) = (-1)^x \cdot \frac{d^2}{ds^x} [L\{f(t)\}(s)]$$

$$L\{tf(t)\}(s) = -\frac{d}{ds} [L\{f(t)\}(s)]$$



## BÀI TẬP TỰ LUYỆN

### Chương 3: phương pháp toán tử laplace

#### 1 Định nghĩa về phép biến đổi laplace

[ID 5182] Áp dụng định nghĩa, hãy tính biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = t + 2$ .

[ID 5172] Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = e^{2t}$ .

[ID 4842] Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \sin^2 t$

[ID 4841] Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \sinh kt$

[ID 4840] Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = e^{3t+1}$

[ID 4839] Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = t$

#### 2 Phép biến đổi laplace ngược

[ID 4878] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^3 - 1}$

[ID 4877] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^3 - 5s^2}$

[ID 4876] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{5 - 2s}{s^2 + 7s + 10}$

[ID 4875] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 4}$

[ID 4874] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{3s + 5}{s^2 - 6s + 25}$

[ID 4873] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 4}$

[ID 4872] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{3}{2s - 4}$

[ID 4871] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s(s + 1)(s + 2)}$

[ID 4870] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}$

[ID 4869] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}$

[ID 4868] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}$

[ID 4867] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^2 - 3s}$



[ID 4855] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{10s - 3}{25 - s^2}$

[ID 4854] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{5 - 3s}{s^2 + 9}$

[ID 4853] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{3}{s - 4}$

[ID 4852] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^{\frac{5}{2}}}$

[ID 4851] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{3}{s^4}$

### 3 Phép biến đổi của bài toán với giá trị ban đầu

[ID 5103] Dùng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân  $x^{(4)} - x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0 = x''(0) = x'''(0)$

[ID 5143] Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân  $y^{(4)} - y = 0$  biết rằng  $y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0; y^{(3)}(0) = 0$

[ID 5201] a) Tìm biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$ . b) Sử dụng phép biến đổi Laplace, giải bài toán

$$\begin{cases} x''' + 3x'' + 7x' + 5x = 8e^{-t} \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}$$

[ID 5193] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x''' - 2x'' + 16x = 0, x(0) = x'(0) = 0, x''(0) = 20.$

[ID 5094] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x^{(3)} - 2x'' + 16x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 0; x''(0) = 20.$

[ID 5083] Dùng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân  $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0$   $x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 1.$

[ID 5192] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x'' + 16x = \sin(4t), x(0) = x'(0) = 0.$

[ID 5135] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x'' + 2x' + 5x = \begin{cases} 20 \cos t; & 0 \leq t < 2\pi \\ 0; & t \geq 2\pi \end{cases}, x(0) = x'(0) = 0$

[ID 5125] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x^{(4)} +$



$$6x'' + 9x = 0; x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 1, x^{(3)}(0) = 2$$

[ID 5115] Áp dụng toán tử Laplace, giải phương trình vi phân sau:  $x''' - 9x'' + 26x' - 24x = e^t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$

[ID:5208] Giải phương trình vi phân sau:  $tx''(t) - (2t+1)x'(t) - 2x(t) = 2e^{2t}, \quad x(0) = -\frac{1}{2}$ .

## 4 Phép tịnh tiến của biến đổi Laplace

[ID 5120] Tìm biến đổi Laplace  $L \{ e^{-t}(\sin 3t + 2 \cos 3t) \} (s)$

[ID 4885] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = (t - e^{2t})^2$

[ID 4884] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = te^{2t} \sin 3t$

[ID 4883] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = t^2 \sin kt$

[ID 4882] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = t \cos^2 t$

[ID 4866] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = e^t \sin \left( t + \frac{\pi}{4} \right)$

[ID 4865] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = e^{-2t} \sin 3t$

[ID 4864] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = t^4 e^{\pi t}$

## 5 Tích phân của phép biến đổi Laplace

[ID 4890] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t}$

[ID 4889] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \frac{\cosh t - 1}{t}$

[ID 4888] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \frac{\sinh t}{t}$

[ID 4887] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \frac{e^{2t} - 1}{t}$

[ID 4886] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

[ID 5142] Tìm biến đổi Laplace ngược  $L^{-1} \left\{ \frac{-7s + 13}{(s-1)^2(s+2)} \right\} (t)$

[ID 5130] Tìm biến đổi Laplace ngược  $L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 - 6s + 13} \right\} (t)$

[ID 4896] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \frac{e^{-3s}}{s}$



[ID 4881] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{s^2 + 3}{(s^2 + 2s + 2)^2}$

[ID 4880] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{s^2 - 2s}{s^4 + 5s^2 + 4}$

[ID 4879] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số sau:  $F(s) = \frac{1}{s^4 - 16}$

## 6 Bài toán với giá trị ban đầu sử dụng hàm heaviside

[ID:5215] Giải phương trình vi phân sau:  $\begin{cases} x'' + 2x' + 5x = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$

$$\text{ở đó } f(t) = \begin{cases} \sin 2t & \text{nếu } 0 \leq t < 4\pi \\ 0 & \text{nếu } t \geq 4\pi. \end{cases}$$

[ID 5183] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân

$$x'' - 4x = f(t), x(0) = x'(0) = 0; f(t) = \begin{cases} 0 & \text{neu } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t) & \text{neu } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

[ID 5173] Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace  $x'' + x = f(t), x(0) =$

$$x'(0) = 0; f(t) = \begin{cases} \sin 2t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & , t \geq 2\pi \end{cases}.$$

$$[ID 5154] \text{ Cho hàm số } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq x < \pi \\ \cos t & \text{khi } t \geq \pi \end{cases}$$

a. Tìm phép biến đổi Laplace của hàm số  $f(t)$

$$\text{b. Sử dụng phép biến đổi Laplace giải bài toán } \begin{cases} y'' + y' = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

[ID 5095] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:  $x'' + x =$

$$t[1 - u(t - 2)], x(0) = x'(0) = 0$$



## 7 Đạo hàm, tích phân và tích của các phép biến đổi

[ID 4850 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \sinh^2(3t)$

[ID 4849 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = 2 \sin 3t \cos 5t$

[ID 4848 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3}\right)$

[ID 4847 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = (t+1)^3$

[ID 4846 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \cos^2(2t)$

[ID 5191 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm  $f(t) = \int_0^t e^{t-s} \cos(s) ds$ .

[ID 4845 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = 1 + \cosh(5t)$

[ID 4844 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = t - 2e^{3t}$

[ID 4843 ] Tìm biến đổi Laplace của hàm số sau:  $f(t) = \sqrt{t} + 3t$

[ID 4895 ] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \ln \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)$

[ID 4894 ] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{(s+2)(s-3)}$

[ID 4893 ] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \ln \frac{s-2}{s+2}$

[ID 4892 ] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \ln \frac{s^2 + 1}{s^2 + 4}$

[ID 5114 ] Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số  $F(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

[ID 4891 ] Tìm phép biến đổi Laplace ngược của hàm sau  $F(s) = \arctan \frac{1}{s}$



## ĐỀ ÔN TẬP GIỮA KỲ GIẢI TÍCH 3 – ĐỀ 1

**Phần 1:** Các câu hỏi có một đáp án đúng.

- Câu 1:[ID:5611]** Tính tổng chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{2^n} - \frac{4}{6^n} \right)$ .
- A.  $\frac{1}{3}$ .      C.  $\frac{-4}{5}$ .      B.  $\frac{6}{5}$ .      D.  $\frac{11}{5}$ .

- Câu 2:[ID:5612]** Tìm miền hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} (3x^2)^n$
- A.  $(-1, 1)$ .      C.  $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .      B.  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .      D.  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .

**Câu 3:[ID:5613]** Chuỗi số nào sau đây là chuỗi phân kì?

- A.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{n^n}$
- B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n} \cos n}{\sqrt[3]{n}}$ .
- C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos(n\pi) \frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n^2}$ .
- D.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \cos(n\pi) \frac{2n+1}{2n+3} \right)^{n^2}$ ;

**Câu 4:[ID:5614]** Cho  $f(x)$  là hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  với chu kì  $2\pi$  và chuỗi Fourier của  $f$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Mệnh đề nào sau đây sai?

- A.  $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x dx$ .
- B.  $b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(x) dx$ .
- C.  $a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(x) dx$ .
- D.  $a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(2x) dx$ .

**Câu 5:[ID:5615]** Sử dụng khai triển Maclaurin tính tích phân  $\int_0^1 \frac{e^{x^5} - 1}{x^2} dx$ .

- A.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(5n-1)}$ .      C.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!(5n-1)}$ .      B.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n)!(5n-1)}$ .      D.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5n)!(5n-1)}$ .



**Câu 6:[ID:5616]** Tính dạng vi phân của phương trình vi phân sau  $xy' + y \sin y = 2$ .

- A.  $xdy - (y \sin y - 2)dx = 0$ .      C.  $xdx + (y \sin y - 2)dy = 0$ .
- B.  $xdy + (y \sin y - 2)dx = 0$ .      D.  $xdx - (y \sin y - 2)dy = 0$ .

**Câu 7:[ID:5617]** Nghiệm tổng quát của phương trình  $y' - \tan xy = \frac{x^2}{\cos x}$  có dạng?

- A.  $y = \frac{x^2 + C}{2 \cos x}, C \in \mathbb{R}$       C.  $y = \frac{x^3 + C}{3 \cos x}, C \in \mathbb{R}$
- B.  $y = -\frac{x^2 + C}{2 \cos x}, C \in \mathbb{R}$       D.  $y = -\frac{x^3 + C}{3 \cos x}, C \in \mathbb{R}$

**Câu 8:[ID:5618]** Nghiệm tổng quát của  $y' + \frac{y}{x} = -y^2$ . có dạng

- A.  $1 = (\ln|x| + C)xy, C \in \mathbb{R}$       C.  $1 = \frac{y}{x}(\ln|x| + C), C \in \mathbb{R}$
- B.  $1 = xy \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$       D.  $1 = \frac{y}{x} \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$



## Phần 2: Các câu hỏi có nhiều đáp án đúng

Câu 9:[ID:5619] Chuỗi số nào sau đây là chuỗi bán hội tụ?

- |   |   |   |
|---|---|---|
| A. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n^3 + 1}.$           | D. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n+1}.$                         | B. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3 + 1}}.$                 |
| E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{1}{n} \cos n}{n^2 + 1}.$ | C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan \frac{1}{n}.$ | F. $\sum_{n=1}^{\infty} \sinh \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} \right).$ |

Câu 10:[ID:5620] Mệnh đề nào dưới đây là tương đương với mệnh đề chuỗi hàm

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  hội tụ đều về  $S(x)$  trên tập  $X$  ?

- |  |
|--|
| A. $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 > 0$ sao cho $\forall n > n_0$ thì $\forall x \in X, \left  \sum_{i=1}^n u_i(x) - S(x) \right  < \varepsilon$ |
| B. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho $\forall n > n_0$ thì $\forall x \in X, \left  \sum_{i=1}^n u_i(x) - S(x) \right  < \varepsilon$ |
| C. $\forall \varepsilon > 0, \forall n_0 > 0$ sao cho $\exists n > n_0$ thì $\forall x \in X, \left  \sum_{i=1}^n u_i(x) - S(x) \right  < \varepsilon$ |
| D. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho $\forall m > n > n_0$ thì $\forall x \in X, \left  \sum_{i=m}^n u_i(x) \right  < \varepsilon$    |
| E. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho $\exists m > n > n_0$ thì $\forall x \in X, \left  \sum_{i=m}^n u_i(x) \right  < \varepsilon$    |
| F. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 > 0$ sao cho $\forall m > n > n_0$ thì $\exists x \in X, \left  \sum_{i=m}^n u_i(x) \right  < \varepsilon$    |

Câu 11.[ID:5621] Hàm nào sau đây là nghiệm của phương trình vi phân  $(y')^3 = y$

- |   |   |   |
|---|---|---|
| A. $y = \left(\frac{2}{3}x\right)^{\frac{3}{2}}.$ | B. $y = x^3.$                                       | C. $y = 0.$   |
| D. $y = 1.$                                       | E. $\begin{cases} y = t^3 \\ x = 3t^2 \end{cases}.$ | F. $\begin{cases} y = t^3 \\ x = \frac{3}{2}t^2 + 1 \end{cases}.$ |



**Câu 12.[ID:5622]** Phương trình nào có thể biến đổi về thành phương trình vi phân cấp một tuyến tính?

- A.  $y' + y = \sin x$
- B.  $\frac{x}{y} = y' \sin x$
- C.  $(y')^2 - 2xy = e^x$
- D.  $2x^2ydx + e^xdy = 0$
- E.  $2x^2ydy + e^xdx = 0$
- F.  $ydx + (x + y^2) dy = 0$

### Phần 3: Các câu hỏi tự luận

**Câu 13:[ID:5623]** Khai triển hàm số  $f(x) = x^2 \ln(5 + x)$  thành chuỗi Maclaurin.

**Câu 14:[ID:5624]** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân sau:  $\frac{1}{x} \frac{dy}{dx} = ye^{x^2} + 2\sqrt{y}e^{x^2}$

**Câu 15:[ID:5625]** Khai triển thành chuỗi Fourier của hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ :  $f(x) = x - 2\pi$ ,  $\pi < x < 3\pi$ .



## ĐỀ ÔN TẬP GIỮA KỲ GIẢI TÍCH 3 – ĐỀ 2

**Phần 1:** Các câu hỏi có một đáp án đúng.

- Câu 1:[ID:5626]** Tính tổng chuỗi  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ .
- A.  $\frac{1}{4}$ .      C.  $\frac{1}{24}$ .      B.  $\frac{1}{12}$ .      D.  $\frac{1}{6}$ .

- Câu 2:[ID:5627]** Biết chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2) + n^\alpha}{n^3}$  phân kì. Mệnh đề nào sau đây đúng về giá trị của  $\alpha$ ?

- A.  $\alpha \leq 2$ .      C.  $\alpha^2 \geq 2$ .      B.  $\alpha \geq 2$ .      D.  $\alpha \neq 2$

- Câu 3:[ID:5628]** Với giá trị nào của  $\alpha$  thì chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)(\ln n)^\alpha}{n^{2+\alpha}}$  hội tụ tuyệt đối?

- A.  $\alpha = -3$ .      C.  $\alpha = -1$ .      B.  $\alpha = -2$ .      D.  $\alpha = 0$ .

- Câu 4:[ID:5629]** Tính khai triển thành chuỗi Maclaurin và bán kính hội tụ  $R$  của hàm

$$x^2 \sin(x^3).$$

- A.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+5}}{(2n+1)!}, R = 1$ .      C.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{6n+5}}{(2n+1)!}, R = \infty$ .  
 B.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}, R = 1$ .      D.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+1)!}, R = \infty$ .

- Câu 5:[ID:5630]** Tính hệ số  $b_3$  trong khai triển chuỗi Fourier của hàm  $f$  tuần hoàn

chu kì  $2\pi$ ,  $f(x) = x + 1, \pi < x < \pi$ .

- A.  $\frac{2\pi}{3}$ .      C.  $\frac{2}{3\pi}$ .      B.  $\frac{2}{3}$ .      D. 0.

- Câu 6:[ID:5631]** Tìm thừa số tích phân  $I = I(y)$  của phương trình

$$(2xy^2 + y \cos x) dx + (3yx^2 + 2 \sin x) dy = 0.$$



- A.  $I(y) = -y$       C.  $I(y) = \ln y$       B.  $I(y) = y$       D.  $I(y) = -\ln y$

**Câu 7:[ID:5632]** Cho phương trình  $xy' - y = y \cdot (\ln y - \ln x)$ ,  $y(1) = e$ . Tích phân riêng của phương trình trên là:

- A.  $x = \ln \frac{y}{2}$       B.  $y = \ln \frac{x}{2}$       C.  $x = \ln \frac{y}{x}$       D.  $x = \ln \frac{y}{x}$

**Câu 8:[ID:5633]** Cho phương trình vi phân:

$$\left( \frac{\sin y}{y} - 2e^{-2x} \sin 2x \right) dx + \frac{\cos y + 2e^{-2x} \cos 2x}{y} dy = 0.$$

Tìm một giá trị  $\alpha$  để hàm số  $g = y \cdot e^{\alpha x}$  trở thành thừa số tích phân của phương trình trên.

- A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

## Phần 2: Các câu hỏi có nhiều đáp án đúng

**Câu 9:[ID:5634]** Chuỗi số nào sau đây là chuỗi đan dẫu hội tụ?

- |  |  |  |
|--|--|--|
| A. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right).$                             | D. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \left( \frac{1}{n^2} \right).$ | B. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right).$ |
| E. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}} \sin \left( \frac{\pi}{2} + n\pi \right).$ | C. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{\cos n}{n^n} \right).$ | F. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n  \sin(n) .$                               |

**Câu 10:[ID:5635]** Xét chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  với bán kính hội tụ  $R$  và miền hội tụ

D. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  và  $\rho \neq 0$  thì  $D = \left( -\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho} \right)$ .

- B. Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  và  $\rho \neq 0$  thì  $R = \frac{1}{\rho}$ .

- C. Miền hội tụ  $D$  của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  luôn khác rỗng.

- D. Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$  thì  $D = \emptyset$ .



E. Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$  thì  $D = \{0\}$ .

F. Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$  và  $\rho \neq 0$  thì  $D$  chứa khoảng  $\left(-\frac{1}{\rho}, \frac{1}{\rho}\right)$ .

Câu 11:[ID:5636] Khai triển hàm số  $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \leq x < 0 \\ 2x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$  tuân hoán với chu kỳ  $2\pi$  thành chuỗi Fourier  $S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(nx) + b_n \cdot \sin(nx))$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A.  $f(x)$  là hàm số lẻ

B. Hết số  $a_0 = \frac{3\pi}{2}$

C. Hết số  $b_6 = \frac{-1}{6}$

D. Tại điểm  $x = \pi$ , chuỗi hội tụ về giá trị  $\frac{1}{2}$

E. Hết số  $a_2 = 0$

F. Tại điểm  $x = -\pi$ , chuỗi hội tụ về giá trị 0

Câu 12:[ID:5637] Nghiệm của phương trình  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{3x^2}, x \neq 0$ , là:

A.  $\arctan\left(\frac{3y}{x}\right) - \frac{\ln|x|}{3} = C$ .

B.  $\arctan\left(\frac{y}{3x}\right) + \frac{\ln|x|}{3} = C$ .

C.  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\ln|x|}{3} = C$ .

D.  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\ln|x|}{3} = C$ .

E.  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\ln|3x|}{3} = C + 3$ .

F.  $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\ln|3x|}{3} = C + 3$ .



### Phần 3: Các câu hỏi tự luận

**Câu 13:[ID:5638]** Khai triển  $f(x) = \frac{x}{x+4}$  thành chuỗi Taylor tại  $x = 1$ .

**Câu 14:[ID:5639]** Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân sau:  $3e^x \tan dx + (2 - e^x)(1 + \tan^2 y) dy = 0$

**Câu 15:[ID:5640]** Viết khai triển của hàm  $y = \sin x$  trong khoảng  $(0, \pi)$  thành chuỗi Fourier của hàm cosin.



## ĐỀ 3 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 2023.2

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5918]** Đánh giá sự hội tụ tuyệt đối, bán hội hay phân kỳ của các chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)^n (4n^2 + n)}{(8n + 5)!}$$

**Câu 2.[ID:5919]** Đánh giá sự hội tụ tuyệt đối, bán hội hay phân kỳ của các chuỗi số:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt[4]{(\ln n)^3}}$$

**Câu 3.[ID:5920]** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-2)^n (n^3 + 4n)}{(n^4 + 1)} \left( \frac{x+2}{2x-1} \right)^n.$$

**Câu 4.[ID:5921]**

a) Giải bài toán Cauchy (bài toán giá trị ban đầu):

$$xy' + (2x - 5)y = 6xe^{-2x}; x > 0; y(1) = 0.$$

b) Giải phương trình  $(y - 8 \cos 2x) dx + \left( 3x - \frac{8 \sin 2x}{y} \right) dy = 0$  bằng cách tìm một thừa số tích phân.

**Câu 5.[ID:5922]** Giải phương trình  $(4-x)^2 y'' - 4(4-x)y' + 2y = 0; x > 4$ , biết một nghiệm là  $y_1 = \frac{1}{x-4}$ .

**Câu 6.[ID:5923]** Giải phương trình  $y'' + 4y = 4 \cos 2x$ .

**Câu 7.[ID:5924]**

a) Tìm biến đổi Laplace của hàm

$$f(t) = te^{-3t} (t^5 + 5 \sin 2t), t \geq 0.$$

b) Giải bài toán Cauchy sau đây bằng biến đổi Laplace:

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } 0 \leq t < 2, \\ (t-2)e^t & \text{nếu } t \geq 2, \end{cases}$$

với  $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ .

**Câu 8.[ID:5925]** Tính tổng:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! + 6n + 3}{(4n+2) 5^n n!}.$$



## ĐỀ 2 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 2023.2

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5926] Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{3^n + n}$

Câu 2.[ID:5927] Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau.  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{7}}} \right)$

Câu 3.[ID:5928] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{99-3n}{n+2} \right)^n x^n$ .

Câu 4.[ID:5929] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' = 4y^2 + 4y + 1, y(0) = 0$

Câu 5.[ID:5930] Giải các phương trình vi phân sau:  $x^2y' + 4xy = 8y^3, y(1) = 1$

Câu 6.[ID:5931] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - y' - 2y = (27x^8 + 72x^7 - 3)e^{2x}$

Câu 7.[ID:5932] Khai triển hàm số  $f(x) = \sin(3x), 0 < x < \pi$ , thành chuỗi Fourier chỉ chứa các hàm cos.

Câu 8.[ID:5933] Tìm biến đổi Laplace  $L \left\{ (e^{-t} + 1)^2 \cos(2t) \right\}$ .

Câu 9.[ID:5934] Sử dụng biến đổi Laplace giải phương trình:

$x^{(3)} - x''(t) + 8x'(t) + 60x(t) = 0, x(0) = 4, x'(0) = 20, x''(0) = 41$ .

Câu 10.[ID:5935] Tìm điều kiện cần và đủ của  $a$  để hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} y' = ay + 4z, \\ z' = 2y + (a+2)z \end{cases}$$

thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} z(x) = 0$$

với điều kiện ban đầu  $y(0) = y_0, z(0) = z_0$  bất kỳ.



## ĐỀ 2 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 2023.2

**Mã HP: MI1134. Nhóm ngành CTTT. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5936] Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{6^n - 2^n}{5^n + 3^n}$

Câu 2.[ID:5937] Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n} + 2}$

Câu 3.[ID:5938] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} (x-1)^n$ .

Câu 4.[ID:5939] Giải các phương trình vi phân sau:  $x(e^y + 1) dx + (x^2 + 1) e^y dy = 0$

Câu 5.[ID:5940] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' - \frac{6}{x}y = 2x^2$  với điều kiện đầu  $y(1) = 1$

Câu 6.[ID:5941] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 4y' + 3y = e^{3x}$

Câu 7.[ID:5942] Tính  $L^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 2}{s^3 - 4s^2 + 8s} \right\} (t)$ .

Câu 8.[ID:5943] Cho hàm số  $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{nếu } 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{nếu } t \geq 2. \end{cases}$

a) Tính  $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ .

b) Sử dụng biến đổi Laplace, giải phương trình vi phân:

$$x'' + 4x = f(t)$$

với điều kiện đầu  $x(0) = x'(0) = 0$ .

Câu 9.[ID:5944] Tính tổng  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$  với  $|x| < 1$ .



## ĐỀ 5 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20213

**Mã HP: MI1133. Nhóm ngành 3. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5195]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{3^n}{5^n}$

**Câu 2.[ID:5196]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right)$ .

**Câu 3.[ID:5197]** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{nx}}{3n+2}.$$

**Câu 4.[ID:5198]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y' = \frac{y}{x} \left[ \ln^2 \left( \frac{y}{x} \right) + 1 \right]$  với điều kiện  $y(1) = e$ .

**Câu 5.[ID:5199]** Giải các phương trình vi phân sau:  $2y'' - 5y' + 2y = 6e^{2x}$ .

**Câu 6.[ID:5200]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}$ .

**Câu 4.[ID:5201]**

a) Tìm biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = \frac{\sin 2t}{t}$ .

b) Sử dụng phép biến đổi Laplace, giải bài toán

$$\begin{cases} x''' + 3x'' + 7x' + 5x = 8e^{-t} \\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0 \end{cases}.$$

**Câu 5.[ID:5202]**

a) Cho hàm số  $f(x)$  tuần hoàn với chu kì  $T = 2\pi$ ,  $f(x)$  là hàm chẵn và  $f(x) = x(\pi + x)$  trong  $[-\pi, 0]$ . Khai triển  $f(x)$  thành chuỗi Fourier.

b) Tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .



## ĐỀ 4 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20213

**Mã HP: MI1132. Nhóm ngành 2. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5185] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^{n^2}$

Câu 2. [ID:5186] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin n}{e^n}$

Câu 3.[ID:5187] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}(x+2)^n$ .

Câu 4.[ID:5188] Giải các phương trình vi phân sau:  $yy' = 4e^x \sqrt{y^2 + 1}$ ,  $y(0) = 2$ .

Câu 5.[ID:5189] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + y' = 8xe^x$ .

Câu 6.[ID:5190] Giải các phương trình vi phân sau:  $x^2y' = 2\sqrt{y} \sin x - 4xy$ .

Câu 7.[ID:5191] Tìm biến đổi Laplace của hàm  $f(t) = \int_0^t e^{t-s} \cos(s)ds$ .

Câu 8.[ID:5192] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân sau:  
 $x'' + 16x = \sin(4t)$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ .

Câu 9.[ID:5193] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân sau:  
 $x''' - 2x'' + 16x = 0$ ,  $x(0) = x'(0) = 0$ ,  $x''(0) = 20$ .

Câu 10.[ID:5194] Tính tổng của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n3^n}$ .



## ĐỀ 4 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20213

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5175]** Phát biểu điều kiện cần để chuỗi sổ hội tụ. Áp dụng điều kiện cần để xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{4}{n}\right)^n$ .

**Câu 2.[ID:5176]** Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ .

**Câu 3.[ID:5177]** Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2 + 1}$ .

**Câu 4.[ID:5178]** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1} (x-2)^{3n}$ .

**Câu 5.[ID:5179]** Giải phương trình vi phân

$$(xy^2 + 4x) dx + (2y + x^2y) dy = 0$$

**Câu 6.[ID:5180]** Giải phương trình vi phân  $y'' - 2y' + 2y = 5 \sin(x)$ .

**Câu 7.[ID:5181]** Giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'(t) = x - 3y \\ y'(t) = -x - y \end{cases}$$

**Câu 8.[ID:5182]** Áp dụng định nghĩa, hãy tính biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = t+2$ .

**Câu 9.[ID:5183]** Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân

$$x''' - 4x = f(t), x(0) = x'(0) = 0; f(t) = \begin{cases} 0 & \text{neu } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos(t) & \text{neu } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

**Câu 10.[ID:5184]** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để mọi nghiệm của phương trình  $y''(x) + 2my'(x) + 4y(x) = 0, m \in \mathbb{R}$ , đều tuần hoàn trên  $\mathbb{R}$ .



## ĐỀ 1 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20212

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5165] Phát biểu tiêu chuẩn hội tụ D'Alembert cho chuỗi số dương. Áp dụng tiêu chuẩn này, xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ .

Câu 2.[ID:5166] Xét sự hội tụ của chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + e^{-2n})$ .

Câu 3.[ID:5167] Xét sự hội tụ của chuỗi  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+3}}$ .

Câu 4.[ID:5168] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n}$ .

Câu 5.[ID:5169] Giải phương trình vi phân  $(e^{2y} - x)y' = 1$ .

Câu 6.[ID:5170] Giải phương trình vi phân  $x'(y) = e^y y \sqrt{x^2 + 1}$ .

Câu 7.[ID:5171] Giải hệ phương trình vi phân  $\begin{cases} x'(t) = y - 5 \cos t \\ y'(t) = 2x + y \end{cases}$ .

Câu 8.[ID:5172] Áp dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của hàm số  $f(t) = e^{2t}$ .

Câu 9.[ID:5173] Giải phương trình vi phân sử dụng biến đổi Laplace

$$x'' + x = f(t), x(0) = x'(0) = 0; f(t) = \begin{cases} \sin 2t, 0 \leq t < 2\pi \\ 0, t \geq 2\pi \end{cases}.$$

Câu 10.[ID:5174] Cho  $y(x)$  là một nghiệm của phương trình  $y'' + my' + y = 0, m \in \mathbb{R}$ .

Tìm điều kiện của tham số  $m$  để  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ .



## ĐỀ 1 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20201

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5155] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2^n}{n^2 + 3^n}$

Câu 2.[ID:5156] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n + (-1)^n \cdot n}{n\sqrt{n}}$

Câu 3.[ID:5157] Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} x^n$

Câu 4.[ID:5158] Khai triển hàm số  $f(x) = \ln\left(\frac{3+x}{\sqrt{1-x}}\right)$  thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5.[ID:5159] Giải các phương trình vi phân sau:  $(4x - y)dx + (x + y)dy = 0$

Câu 6.[ID:5160] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' + 2y = y^2 e^x, y(0) = -1$

Câu 7.[ID:5161] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 6y' + 8y = 4xe^{2x}$

Câu 8.[ID:5162] Giải các phương trình vi phân sau:  $xy'' - (4x + 1)y' + (3x + 1)y = 0$  có 1 nghiệm riêng  $y_1 = e^{ax}, a \in \mathbb{R}$

Câu 9.[ID:5163] Tính  $L^{-1} \left\{ \arctan \frac{2}{s} \right\} (t)$

Câu 10.[ID:5164] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:

$$x'' + 4x = \begin{cases} \sin t, 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \cos t, t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}; x(0) = x'(0) = 0$$



## ĐỀ 2 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20193

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5146]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \arcsin \frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2-1}}{4n-3}$

**Câu 2.[ID:5147]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n^2+3n+3}{4n^2-n+2}$

**Câu 3.[ID:5148]** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{\sqrt[3]{3n+1}(x-1)^n}$

**Câu 4.[ID:5149]** Giải các phương trình vi phân sau:  $(\sin 3x)y' - 3y \cos 3x = \sin^2 3x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

**Câu 5.[ID:5150]** Giải các phương trình vi phân sau:  $[-y^3 \sin(xy)] dx + [2y \cos xy - xy^2 \sin xy] dy = 0$

**Câu 6.[ID:5151]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}$

**Câu 7.[ID:5152]** Giải các phương trình vi phân sau:  $x^2y'' + xy' - 4y = x \ln x$

**Câu 8.[ID:5153]** Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số  $f(x)$  tuần hoàn với chu kỳ

$$T = 4 \text{ và } f(x) = \begin{cases} 2+x & \text{khi } -2 \leq x \leq 0 \\ 2-x & \text{khi } 0 < x < 2 \end{cases}$$

**Câu 9.[ID:5154]** Cho hàm số  $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi } 0 \leq t < \pi \\ \cos t & \text{khi } t \geq \pi \end{cases}$

a. Tìm phép biến đổi Laplace của hàm số  $f(t)$

b. Sử dụng phép biến đổi Laplace giải bài toán  $\begin{cases} y'' + y' = f(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$



## ĐỀ 6 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20192

**Mã HP: MI1132. Nhóm ngành 2. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5136]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n}}$

**Câu 2.[ID:5137]** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1-2x}{1+x} \right)^n$

**Câu 3.[ID:5138]** Cho hàm số  $f(x) = -x$  khi  $-2 < x \leq 2$  và tuần hoàn chu kỳ . Khai triển  $f(x)$  thành chuỗi Fourier

**Câu 4.[ID:5139]** Giải các phương trình vi phân sau:  $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$

**Câu 5.[ID:5140]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + y = 2\sin^2 x$

**Câu 6.[ID:5141]** Giải các phương trình vi phân sau:  $xy'' - y' = x^2 e^x$

**Câu 7.[ID:5142]** Tìm biến đổi Laplace ngược  $L^{-1} \left\{ \frac{-7s+13}{(s-1)^2(s+2)} \right\} (t)$

**Câu 8.[ID:5143]** Sử dụng phương pháp toán tử Laplace giải phương trình vi phân  $y^{(4)} - y = 0$  biết rằng

$$y(0) = 0; y'(0) = 1; y''(0) = 0; y^{(3)}(0) = 0$$

**Câu 9.[ID:5144]** Cho 2 chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$  hội tụ tuyệt đối. Chứng minh chuỗi số

hội tụ  $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$  tuyệt đối

**Câu 10.[ID:5145]** Tính tổng  $S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{(n+2)n!}$



## ĐỀ 3 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20192

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5126] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

Câu 2.[ID:5127] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Câu 3.[ID:5128] Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} x^n$

Câu 4.[ID:5129] Tính tổng của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{3n+4}}{n}, x \in (-1; 1)$ .

Câu 5.[ID:5130] Tìm biến đổi Laplace ngược  $L^{-1} \left\{ \frac{s+1}{s^2 - 6s + 13} \right\} (t)$

Câu 6.[ID:5131] Giải các phương trình vi phân sau:  $dy + (y - x)dx = 0$

Câu 7.[ID:5132] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' = \frac{x^2 + y}{2y - x}, y(0) = 1$

Câu 8.[ID:5133] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 2y' - 3y = e^x (2 - 4x^2)$

Câu 9.[ID:5134] Giải các phương trình vi phân sau:  $x^2 y'' - 4xy' + 6y = 2x^2 \ln x$

Câu 10.[ID:5135] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:

$$x'' + 2x' + 5x = \begin{cases} 20 \cos t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & , t \geq 2\pi \end{cases}, x(0) = x'(0) = 0$$



## ĐỀ 2 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20192

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5116] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sqrt[n]{e^3} - 1 \right)$

Câu 2.[ID:5117] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + \cos n}{n^3}$

Câu 3.[ID:5118] Tìm bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}$

Câu 4.[ID:5119] Tính tổng của chuỗi lũy thừa  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{3^{2n} \cdot n!}, x \in \mathbb{R}$

Câu 5.[ID:5120] Tìm biến đổi Laplace  $L \{ e^{-t} (\sin 3t + 2 \cos 3t) \} (s)$

Câu 6.[ID:5121] Giải các phương trình vi phân sau:  $(y + 5x^6) dx = xdy \cdot y(1) = 2$

Câu 7.[ID:5122] Giải các phương trình vi phân sau:  $x dy + (3y - 6x^5 y^3) dx = 0, y(1) = 2$

Câu 8.[ID:5123] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + 2y' + 5y = 260e^x \sin x$

Câu 9.[ID:5124] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' + 3y' + 2y = \frac{2e^x}{1 + e^{2x}}$

Câu 10.[ID:5125] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân sau:

$$x^{(4)} + 6x'' + 9x = 0; x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 1, x^{(3)}(0) = 2$$



## ĐỀ 1 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20191

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5106]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( (3n+2)^{\frac{1}{(2n^3+1)}} - 1 \right)$

**Câu 2.[ID:5107]** Xét sự hội tụ của chuỗi số sau  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n + (-1)^n}$

**Câu 3.[ID:5108]** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{4n+3}{4n-2} \right)^{2n} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^n$

**Câu 4.[ID:5109]** Tính tổng:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}, (-1 < x < 1)$

**Câu 5 [ID:5110]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y' - \frac{1}{x}y = \ln^3 x$

**Câu 6 [ID:5111]** Giải các phương trình vi phân sau:  $(ye^{xy} + \sin y) dx + (xe^{xy} + x \cos y) dy = 0$

**Câu 7 [ID:5112]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 5y' + 6y = e^x$  (1)

**Câu 8.[ID:5113]** Tìm tất cả các đường cong mà giao điểm của tiếp tuyến bất kỳ của nó với trực hoành cách đều tiếp điểm và gốc tọa độ.

**Câu 9.[ID:5114]** Tìm biến đổi Laplace ngược của hàm số

$$F(s) = \frac{6s^2 + 22s + 18}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

**Câu 10.[ID:5115]** Áp dụng toán tử Laplace, giải phương trình vi phân sau:

$$x''' - 9x'' + 26x' - 24x = e^t, x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$$



## ĐỀ 5 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20182

**Mã HP: MI1132. Nhóm ngành 2. Thời gian: 90 phút**

**Câu 1.[ID:5096]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}$

**Câu 2.[ID:5097]** Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^2 - 1}$

**Câu 3.[ID:5098]** Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)^3}{3n+1} x^{2n}$

**Câu 4.[ID:5099]** Giải các phương trình vi phân sau:  $\frac{y}{x} dx + (y^4 + \ln x) dy = 0.$

**Câu 5.[ID:5100]** Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 3y' + 2y = x + \cos x.$

**Câu 6.[ID:5101]** Tính  $L\{t^2 \cos(3t)\}(s).$

**Câu 7.[ID:5102]** Khai triển hàm  $y = x, -2 \leq x \leq 2$ , tuần hoàn với chu kỳ  $T = 4$ , thành chuỗi Fourier.

**Câu 8.[ID:5103]** Dùng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$x^{(4)} - x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0 = x''(0) = x'''(0).$$

**Câu 9.[ID:5104]** Xét sự hội tụ đều trên  $\mathbb{R}$ , của chuỗi hàm  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2 + 2n - 1}.$

**Câu 10.[ID:5105]** Giải phương trình vi phân

$$yy'' - (y')^2 - 2xy^2 = 0; y(0) = e, y'(0) = 1$$



## ĐỀ 1 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20182

**Mã HP: MI1131. Nhóm ngành 1. Thời gian: 90 phút**

Câu 1.[ID:5086] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2 + 1} \right)$

Câu 2.[ID:5087] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số sau:  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^3 \sin n}{e^n}$

Câu 3.[ID:5088] Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm số  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n \ln n}$

Câu 4.[ID:5089] Khai triển hàm số  $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$  thành chuỗi Maclaurin.

Câu 5.[ID:5090] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' = \sqrt{3y+1}, y(0) = 1$ .

Câu 6.[ID:5091] Giải các phương trình vi phân sau:  $y' - \frac{(2x-1)y}{x^2} = 1, (x > 0)$ .

Câu 7.[ID:5092] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$ .

Câu 8.[ID:5093] Giải các phương trình vi phân sau:  $x^2 y'' - xy' - 3y = 10 \sin(\ln x), (x > 0)$

Câu 9.[ID:5094] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân sau:  
 $x^{(3)} - 2x'' + 16x = 0, x(0) = 0, x'(0) = 0; x''(0) = 20$ .

Câu 10.[ID:5095] Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải các phương trình vi phân sau:  $x'' + x = t[1 - u(t-2)], x(0) = x'(0) = 0$



## ĐỀ 8 | ĐỀ THI CUỐI KỲ MÔN GIẢI TÍCH 3 - Học kì 20192

Mã HP: MI1133. Nhóm ngành 3. Thời gian: 90 phút

Câu 1.[ID:5076] Xét sự hội tụ, phân kì của các chuỗi số  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\sqrt[3]{n}}$

Câu 2.[ID:5077] Tìm tập hội tụ của chuỗi hàm số:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5}(x+1)^{3n}$

Câu 3.[ID:5078] Giải các phương trình vi phân sau:  $xy' + y = x \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Câu 4.[ID:5079] Giải các phương trình vi phân sau:  $y'' - 6y' + 9y = 1 + e^{2x}$

Câu 5.[ID:5080] Giải các phương trình vi phân sau:  $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$

Câu 6.[ID:5081] Khai triển hàm  $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  thành chuỗi Maclaurin.

Câu 7.[ID:5082] Tính  $L\{t \sinh(kt)\}(s)$

Câu 8.[ID:5083] Dùng biến đổi Laplace giải phương trình vi phân  $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0$   
 $x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = 1.$

Câu 9.[ID:5084] Giải phương trình vi phân  $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$

Câu 10.[ID:5085] Tính tổng  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$