



BKOST - Toán cao cấp & Vật lý đại cương

[Giải tích 1] Tính chất cơ bản của hàm số
Mã đề thi: M0XXIURE

I. Tổng quan lý thuyết

1. Hàm số chẵn lẻ

Hàm chẵn: Một hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu

$$\begin{cases} x \in TXD \Rightarrow -x \in TXD \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$$

Đặc điểm: Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục tung Oy

Ví dụ:

- Hàm số $f(x) = x^2$ là hàm chẵn vì $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x) = \cos(x)$ cũng là hàm chẵn vì $\cos(-x) = \cos(x) \forall x \in \mathbb{R}$

Hàm lẻ: Một hàm số $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu

$$\begin{cases} x \in TXD \Rightarrow -x \in TXD \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Đặc điểm: Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua gốc toạ độ $O(0; 0)$

Ví dụ:

- Hàm số $f(x) = x^3$ là hàm lẻ vì $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x) = \sin(x)$ cũng là hàm lẻ vì $\sin(-x) = -\sin(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Hàm số tuần hoàn

Định nghĩa: Một hàm số $f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại số thực $T > 0$ sao cho

$$f(x) = f(x + T), \forall x \in TXD$$

Trong đó, giá trị $T > 0$ nhỏ nhất thỏa mãn được gọi là chu kỳ của hàm số $f(x)$.

Ví dụ: Chu kì các hàm số lượng giác cơ bản

$$y = \sin(x) \text{ với chu kỳ } T = 2\pi$$

$$y = \cos(x) \text{ với chu kỳ } T = 2\pi$$

$y = \tan(x)$ với chu kỳ $T = \pi$

$y = \cot(x)$ với chu kỳ $T = \pi$

3. Hàm hợp

Định nghĩa: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$. Hàm hợp của hai hàm số đã cho được định nghĩa

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$$

4. Hàm hyperbolic

Định nghĩa: các hàm hyperbolic

- Hàm sinh(x) : $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

- Hàm cosh(x) : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

- Hàm tanh(x) : $\tanh(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$

- Hàm coth(x) : $\coth(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \forall x \in \mathbb{R}$

Mối liên hệ giữa các hàm:

$$(\sinh x)' = \cosh x; (\cosh x)' = \sinh x$$

5. Hàm ngược. Hàm lượng giác ngược

a. Hàm ngược: Cho f là một đơn ánh với miền xác định A và miền giá trị B . Khi đó hàm ngược f^{-1} có miền xác định B và miền giá trị A được định nghĩa:

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Cách tìm hàm ngược:

Bước 1: Viết $y = f(x)$

Bước 2: Tìm $x = g(y)$

Bước 3: Kết luận: $f^{-1}(x) = g(x)$

Chú ý: Nếu hàm số đơn điệu trên $(a; b)$ thì là đơn ánh trên $(a; b)$

b. Các hàm lượng giác ngược

Hàm $y = \arcsin x (\Leftrightarrow x = \sin y)$

- Tập xác định: $D = [-1, 1]$

- Tập giá trị: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

- Đạo hàm: $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Hàm $y = \arccos x (\Leftrightarrow x = \cos y)$

- Tập xác định: $D = [-1, 1]$

- Tập giá trị: $[0, \pi]$

- Đạo hàm: $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Hàm $y = \arctan x (\Leftrightarrow x = \tan y)$

- Tập xác định: $D = R$

- Tập giá trị: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- Đạo hàm: $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$

Hàm $y = \operatorname{arccot} x (\Leftrightarrow x = \cot y)$

- Tập xác định: $D = R$

- Tập giá trị: $(0, \pi)$

- Đạo hàm: $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot} x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot} x = \pi$

6. Bài toán tìm tập xác định, tập giá trị

Tập xác định: tập hợp tất cả các số thực sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

Tập giá trị: tập hợp T gồm tất cả các giá trị $y = f(x)$ tương ứng với x thuộc tập xác định

II. Bài tập

Phần 1: Bài tập có video chữa chi tiết

Câu 1 [ID:8542]. Cho hàm số $f(x) = x^3 + \cos x$. Hàm số $f(x)$ có là hàm số lẻ không? Vì sao?

Câu 2 [ID:8543]. Hàm số $y = \arctan x$ có tuần hoàn không? Tại sao?

Câu 3 [ID:8544]. Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ với các giá trị được cho trong bảng sau:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	5	8	4	6	3	2	1	7	9
$g(x)$	9	2	5	4	3	1	7	8	6

Tính $g \circ f^{-1}(5)$

Câu 4 [ID:8545]. Tìm hàm ngược của hàm số: $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$, $x \in \mathbb{R}$

Câu 5 [ID:8547]. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{6 \operatorname{arccot} x - 5\pi}$

Câu 6 [ID:8548]. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số $y = \sin(\arccos x)$

Câu 7 [ID:8549]. Tính giới hạn dãy $x_n = \frac{\sin^2 n - \cos^3 n}{n}$

Câu 8 [ID:677]. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

$$f(x) = \sin(x^2).$$

Câu 9 [ID:668]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = a^x + a^{-x}$ ($a > 0$)

Câu 10 [ID:669]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \ln \left(x + \sqrt{1 - x^2} \right)$

Câu 11 [ID:670]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$

Câu 12 [ID:671]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \tan(\sin x)$

Câu 13 [ID:673]. Cho hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng

a) nếu $f(x)$ là một hàm số lẻ thì $f'(x)$ là một hàm số chẵn.

b) nếu $f(x)$ là một hàm số chẵn thì $f'(x)$ là một hàm số lẻ.

Câu 14 [ID:1438]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + |x|}$

Câu 15 [ID:1440]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \arcsin x + \operatorname{arctg} x$

Câu 16 [ID:8552]. Chứng minh rằng bất cứ hàm số $f(x)$ nào xác định trong một khoảng đối xứng $(-a, a)$ với $a > 0$ cũng đều biểu diễn được duy nhất dưới dạng tổng của một hàm số chẵn và một hàm số lẻ.

Câu 17 [ID:676]. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

$$f(x) = \sin^2 x,$$

Câu 18 [ID:675]. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

$$f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x,$$

Câu 19 [ID:674]. Xét tính tuần hoàn và chu kì của hàm số sau (nếu có)

$$f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x,$$

Câu 20 [ID:678]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \cos x + \cos x\sqrt{2}$,

Câu 21 [ID:681]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \cos x^2$

Câu 22 [ID:682]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \sin \sqrt{x}$

Câu 23 [ID:683]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \cos \sqrt{x}$

Câu 24 [ID:684]. Cho $f(x), g(x)$ là hàm số xác định trên \mathbb{R} và tuần hoàn với chu kì lần lượt là $T_1 > 0, T_2 > 0$. Biết tỉ số $\frac{T_1}{T_2}$ là một số hữu tỉ. Chứng minh rằng $f(x) + g(x)$ và $f(x)g(x)$ cũng là hàm số tuần hoàn

Câu 25 [ID:1430]. Tìm $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$ của hàm số :

$$f(x) = x^2 \quad g(x) = 2^x$$

Câu 26 [ID:1431]. Tìm $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$ của hàm số :

$$f(x) = \sin(x) \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

Câu 27 [ID:1433]. Tìm $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$ của hàm số : $f(x) = x^5$
 $g(x) = x + 5$

Câu 28 [ID:686]. Cho $f(x) = ax + b, f(0) = -2, f(3) = -5$. Tìm $f(x)$

Câu 29 [ID:687]. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f(-2) = 0, f(0) = 1, f(1) = 5$. Tìm $f(x)$

Câu 30 [ID:685]. Tìm $f(x)$ biết

a) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$

b) $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Câu 31 [ID:688]. Cho $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$, $a > 0$. Chứng minh rằng :
 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

Câu 32 [ID:689]. Giả sử $f(x) + f(y) = f(z)$. Xác định z nếu:

a) $f(x) = ax$, $a \neq 0$,

b) $f(x) = \arctan x$,

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

Câu 33 [ID:1434]. Cho $f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, tìm $f_n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ (n lần).

Câu 34 [ID:2643]. Chứng minh $\sinh(-x) = -\sinh x$

Câu 35 [ID:2644]. Chứng minh $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$

Câu 36 [ID:2645]. Chứng minh $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Câu 37 [ID:2646]. Chứng minh $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Câu 38 [ID:2647]. Chứng minh $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Câu 39 [ID:2648]. Chứng minh $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Câu 40 [ID:1424]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Câu 41 [ID:1425]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$

Câu 42 [ID:1426]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

Câu 43 [ID:1427]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Câu 44 [ID:1428]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = 1 + \frac{2}{\sqrt{\arctg x}}$

Câu 45 [ID:1429]. Tìm hàm ngược của hàm số $y = \frac{\arcsin x - 1}{\arcsin x + 1}$

Câu 46 [ID:661]. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \lg(1 - 2 \cos x)$

Câu 47 [ID:662]. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$

Câu 48 [ID:1405]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm:
 $f(\operatorname{tg} x)$

Câu 49 [ID:1406]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm:
 $f(\arcsin x)$

Câu 50 [ID:1408]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm: $f(e^x)$

Câu 51 [ID:1409]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm:
 $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Câu 52 [ID:1412]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \operatorname{tg}\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$

Câu 53 [ID:1413]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{2 - \cos 3x}$

Câu 54 [ID:1414]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Câu 55 [ID:1415]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{2}{x^2 - 1}$

Câu 56 [ID:1417]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{x}{x^2 + 1}$

Câu 57 [ID:1418]. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1 - |x|}{1 + |x|}$

Phần 2: Bài tập tự luyện: Hàm số chẵn lẻ

Câu 58 [ID:1439]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \ln \frac{x+1}{1-x}$

Câu 59 [ID:1435]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$

Câu 60 [ID:672]. Xét tính chẵn lẻ của hàm số $y = \sin(\tan x)$

Phần 3: Bài tập tự luyện: Hàm số tuần hoàn

Câu 61 [ID:679]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \sin x + \sin x\sqrt{2}$,

Câu 62 [ID:680]. Chứng minh hàm số sau không tuần hoàn $y = \sin x^2$,

Phần 4: Bài tập tự luyện: Hàm hợp

Câu 63 [ID:1432]. Tìm $f(f(x)), g(g(x)), f(g(x)), g(f(x))$ của hàm số :

$$f(x) = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

Câu 64 [ID:1419]. Tìm $f(x)$ biết $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Câu 65 [ID:1420]. Tìm $f(x)$ biết $f\left(\frac{x}{1+x}\right) = x^2$

Câu 66 [ID:1421]. Tìm $f(x)$ biết $f(\arcsin x) = \frac{\pi}{2} + x$

Phần 5: Bài tập tự luyện: Hàm hyperbolic

Câu 67 [ID:2648]. Chứng minh $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

Phần 6: Bài tập tự luyện: Hàm ngược. Hàm lượng giác ngược

Câu 68 [ID:2655]. Tìm hàm ngược của các hàm số $y = 2 \arcsin x$

Câu 69 [ID:2657]. Tìm hàm ngược của các hàm số $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Phần 7: Bài toán tìm tập xác định, tập giá trị

Câu 70 [ID:2640]. Tìm tập xác định của các hàm số $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

Câu 71 [ID:2650]. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \operatorname{arccot}(\sin x)$

Câu 72 [ID:2652]. Tìm miền giá trị của hàm số $y = \arctan(e^x)$

Câu 73 [ID:1383]. Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt[4]{\lg(\tan x)}$

Câu 74 [ID:1384]. Tìm tập xác định của hàm số $\frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

Câu 75 [ID:1385]. Tìm tập xác định của hàm số $\ln \cos x$

Câu 76 [ID:1386]. Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt{\cos x^2}$

Câu 77 [ID:1387]. Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$

Câu 78 [ID:1388]. Tìm tập xác định của hàm số $\arcsin \frac{2x}{1+x}$

Câu 79 [ID:1390]. Tìm tập xác định của hàm số $\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{x-2}$

Câu 80 [ID:1391]. Tìm tập xác định của hàm số $\ln \left(\sin \frac{\pi}{x} \right)$

Câu 81 [ID:1392]. Tìm tập xác định của hàm số $\arcsin \frac{x+1}{x-1}$

Câu 82 [ID:1393]. Tìm tập xác định của hàm số $\ln(1 - \cos 2x)$

Câu 83 [ID:1394]. Tìm tập xác định của hàm số $\arccos \frac{x^2 - 4x}{x + 4}$

Câu 84 [ID:1395]. Tìm tập xác định của hàm số $\arccos \frac{2x}{1+x^2}$

Câu 85 [ID:1396]. Tìm tập xác định của hàm số $\arccos(2 \sin x)$

Câu 86 [ID:1397]. Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt{\frac{x-2}{x+2}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

Câu 87 [ID:1398]. Tìm tập xác định của hàm số $\sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$

Câu 88 [ID:1399]. Tìm tập xác định của hàm số $\cotg \pi x + \arccos(2^x)$

Câu 89 [ID:1400]. Tìm tập xác định của hàm số $\ln \sin(x-3) + \sqrt{16-x^2}$

Câu 90 [ID:1401]. Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln \sqrt{x-4 - \sqrt{6-x}}$

Câu 91 [ID:1402]. Tìm tập xác định của hàm số $\frac{1}{x} + 2 \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

Câu 92 [ID:1403]. Tìm tập xác định của hàm số $y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \ln(4-x)$

Câu 93 [ID:1404]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm:
 $f(3x^2)$

Câu 94 [ID:1407]. Cho $f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Tìm miền xác định của hàm:
 $f(\ln x)$