BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÔNG Á

ThS.PHẠM THỊ NGỌC MINH

GIÁO TRÌNH
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Đà Nẵng, 2013

CHƯƠNG.1. SAI SỐ

1.1. NHẬP MÔN PHƯƠNG PHÁP TÍNH

1.1.1. *Giới thiệu môn phương pháp tính*

Phương pháp tính là bộ môn toán học có nhiệm vụ giải đến kết quả bằng số cho các bài toán, nó cung cấp các phương pháp giải cho những bài toán trong thực tế mà không có lời giải chính xác. Môn học này là cầu nối giữa toán học lý thuyết và các ứng dụng của nó trong thực tế.

Trong thời đại tin học hiện nay thì việc áp dụng các phương pháp tính càng trở nên phổ biến nhằm tăng tốc độ tính toán.

1.1.2. *Nhiệm vụ môn học*

- Tìm ra các phương pháp giải cho các bài toán gồm: phương pháp (PP) đúng và phương pháp gần đúng.

+ Phương pháp: chỉ ra kết quả dưới dạng một biểu thức giải tích cụ thể.

+ Phương pháp gần đúng: thường cho kết quả sau một quá trình tính lặp theo một quy luật nào đó, nó được áp dụng trong trường hợp bài toán không có lời giải đúng hoặc nếu có thì quá phức tạp.

- Xác định tính chất nghiệm

- Giải các bài toán về cực trị

- Xấp xỉ hàm: khi khảo sát, tính toán trên một hàm f(x) khá phức tạp, ta có thể thay hàm f(x) bởi hàm g(x) đơn giản hơn sao cho g(x) ≈ f(x). Việc lựa chọn g(x) được gọi là phép xấp xỉ hàm.

- Đánh giá sai số: khi giải bài toán bằng phương pháp gần đúng thì sai số xuất hiện do sự sai lệch giữa giá trị nhận được với nghiệm thực của bài toán. Vì vậy ta phải đánh giá sai số để từ đó chọn ra được phương pháp tối ưu nhất.

1.1.3. *Trình tự giải bài toán trong phương pháp tính*

- Khảo sát, phân tích bài toán

- Lựa chọn phương pháp dựa vào các tiêu chí sau:

+ Khối lượng tính toán ít

+ Đơn giản khi xây dựng thuật toán

+ Sai số bé

+ Khả thi

- Xây dựng thuật toán: sử dụng ngôn ngữ giả hoặc sơ đồ khối (càng mịn càng tốt).

- Viết chương trình: sử dụng ngôn ngữ lập trình (C, C++, Pascal, Matlab,…)

- Thực hiện chương trình, thử nghiệm, sửa đổi và hoàn chỉnh.

1.2. SAI SỐ

1.2.1. *Khái niệm*

Giả sử x là số gần đúng của x* (x* : số đúng), khi đó $\Delta = |x - x^*|$ gọi là sai số thực sự của x.

Vì không xác định được Δ nên ta xét đến 2 loại sai số sau:

- Sai số tuyệt đối : Giả sử ∃Δx > 0 đủ bé sao cho $|x - x^*| \le \Delta x$. Khi đó Δx gọi là sai số tuyệt đối.

- Sai số tương đối : $\delta x = \dfrac{\Delta x}{|x|}$.

1.2.2. *Các loại sai số*

Dựa vào nguyên nhân gây sai số, ta có các loại sau:

- Sai số giả thiết: xuất hiện do việc giả thiết bài toán đạt được một số điều kiện lý tưởng nhằm làm giảm độ phức tạp của bài toán.

- Sai số do số liệu ban đầu: xuất hiện do việc đo đạc và cung cấp giá trị đầu vào không chính xác.

- Sai số phương pháp : xuất hiện do việc giải bài toán bằng phương pháp gần đúng.

- Sai số tính toán : xuất hiện do làm tròn số trong quá trình tính toán, quá trình tính càng nhiều thì sai số tích luỹ càng lớn.

1.2.3. *Sai số tính toán*

Giả sử dùng n số gần đúng $x_i = (i = \overline{1,n})$ để tính đại lượng y, với $y = f(x_i) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Trong đó :

- f là hàm khả vi liên tục theo các đối số x_i.

Khi đó sai số của y được xác định theo công thức sau :

- Sai số tuyệt đối : $$\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

- Sai số tương đối : $$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

- Trường hợp f có dạng tổng : $y = f(x_i) = \pm x_1 \pm x_2 \pm ... \pm x_n$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| = 1 \quad \forall \text{i suy ra } \Delta y = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$$

- Trường hợp f có dạng tích : $y = f(x_i) = x_1 * x_2 * ... * x_n$

$$\ln f = \ln(x_1 x_2 ... x_n) = (\ln x_1 + \ln x_2 + ... + \ln x_n)$$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\right| = \frac{1}{|x_i|} \quad \forall \text{i suy ra } \delta y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta x_i}{|x_i|} = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i \, .$$

Vậy $\delta y = \sum_{i=1}^{n} \delta x_i$

- Trường hợp dạng thương: $y = f(x) = \dfrac{x_1}{x_2}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{1}{x_2} \; ; \; \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{-x_1}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{1}{|x_2|}.\Delta x_1 + \frac{|-x_1|}{|x_2^2|}.\Delta x_2 = \frac{|x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2}{x_2^2}$$

$$\Rightarrow \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} = \delta x_1 + \delta x_2$$

- Trường hợp dạng lũy thừa : $y = f(x) = x^{\alpha} (\alpha > 0)$

$\ln y = \ln f = \alpha \ln x$

$$\left|\frac{\partial \ln f}{\partial x}\right| = \frac{\alpha}{|x|}$$

Suy ra $\delta y = \alpha \dfrac{\Delta x}{|x|} = \alpha \delta x$

Ví dụ 1.1:

Cho a ≈ 10,25 ; b ≈ 0,324 ; c ≈ 12,13

Tính sai số của :

$$y_1 = \frac{a^3}{b\sqrt{c}} \; ; \qquad y_2 = a^3 - b\sqrt{c}$$

<u>Giải :</u>

$$\delta y_1 = \delta(a^3) + \delta(b\sqrt{c}) = 3\delta a + \delta b + \frac{1}{2}\delta c$$

$$= 3\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}$$

$$\Delta y_2 = \Delta(a^3) + \Delta(b\sqrt{c}) = \left|a^3\right|\delta(a^3) + \left|b\sqrt{c}\right|\delta(b\sqrt{c})$$

$$\Delta y_2 = 3\left|a^3\right|\frac{\Delta a}{|a|} + b\sqrt{c}\left(\frac{\Delta b}{|b|} + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{|c|}\right)$$

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

1. Nêu khái niệm sai số tuyệt đối.
2. Nêu khái niệm sai số tương đối.
3. Dựa vào nguyên nhân gây sai số, trình bày các loại sai số.
4. Trình bày sai số tuyệt đối khi f là hàm có dạng tổng.
5. Trình bày sai số tương đối khi f là hàm có dạng tích.
6. Cho a ≈ 10.25, b ≈ 0.324, c ≈ 12.13. Tính sai số của $y = \dfrac{a^2}{b\sqrt{c}}$.
7. Cho a ≈ 10.25, b ≈ 0.324, c ≈ 12.13. Tính sai số của $y = a^4 - b\sqrt{c}$.
8. Tính thể tích khối cầu có đường kính d = 3.7cm và π = 3.14 ± 0.0016.
9. Một hình trụ có bán kính R = 2m, chiều cao h = 3m. Hỏi ΔR và Δh bằng bao nhiêu để thể tích V có độ chính xác là $\Delta V = 0.1m^3$?
10. Một hình cầu có bán kính đáy R = 5.87cm. Tính thể tích hình cầu với độ chính xác là $0.01cm^3$?
11. Xác định sai số tuyệt đối của các số gần đúng sau nếu biết sai số tương đối của chúng:

    a = 35,72; $\delta_a = 1\%$
    b = 0,896; $\delta_b = 10\%$
    c = 231,44; $\delta_c = 1\%$
12. Khi đo một số góc, ta nhận được kết quả sau:

    a = 45^0; b = $75^0$20’44”

Hãy xác định sai số tương đối của các số gần đúng đó, nếu sai số tuyệt đối của phép đo là 1”.

13. Xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tuyệt đối của chúng:

    a = 0,1132; $\Delta_a = 0{,}1.10^{-3}$
    b = 2,325; $\Delta_b = 0{,}1.10^{-1}$
    c = 293,481; $\Delta_c = 0{,}1$
14. Hãy xác định số các chữ số đáng tin trong các số gần đúng sau khi biết sai số tương đối của chúng là:

    a = 0,2218; $\delta_a = 0{,}2.10^{-1}$
    b = 0,02425; $\delta_b = 0{,}5.10^{-2}$
    c = 0,000135; $\delta_c = 0{,}15$
15. Quy tròn các số gần đúng dưới đây với 3 chữ số có nghĩa đáng tin và xác định sai số tuyệt đối, sai số tương đối của chúng:

    a) 1,255
    b) -392,85

c) 0,1545
d) 625,55

16. Đường kính của một đường tròn được đo chính xác tới 1mm là d = 0,842m. Tìm diện tích hình tròn đó.
17. Tìm giá trị hàm $u = xy^2z^3$ nếu:
    x = 37,1 và $\Delta_x = 0,3$
    y = 9,87 và $\Delta_y = 0,11$
18. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số xấp xỉ sau đây, cho biết sai số tương đối của nó:
    b = 12627; $\delta_b = 0,2\%$
19. Tính sai số tuyệt đối giới hạn và sai số tương đối giới hạn của thể tích hình cầu:
    $$V = \frac{1}{6}\pi d^3$$
    nếu cho đường kính d = 3,5 ± 0,03cm và π = 3,14 ± 0,0016.

CHƯƠNG.2. GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH

2.1. GIỚI THIỆU

Để tìm nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 cần tiến hành qua 2 bước:

- Tách nghiệm: xét tính chất nghiệm của phương trình, phương trình có nghiệm hay không, có bao nhiêu nghiệm, các khoảng chứa nghiệm nếu có. Đối với bước này, ta có thể dùng phương pháp đồ thị, kết hợp với các định lý mà toán học hỗ trợ.

- Chính xác hoá nghiệm: thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm để hội tụ được đến giá trị nghiệm gần đúng với độ chính xác cho phép. Trong bước này ta có thể áp dụng một trong các phương pháp:

+ Phương pháp chia đôi

+ Phương pháp lặp

+ Phương pháp tiếp tuyến

+ Phương pháp dây cung

2.2. TÁCH NGHIỆM

*** Phương pháp đồ thị:**

Trường hợp hàm f(x) đơn giản

- Vẽ đồ thị f(x)

- Nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm của f(x) với trục x, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

Trường hợp f(x) phức tạp

- Biến đổi tương đương f(x)=0 <=> g(x) = h(x)

- Vẽ đồ thị của g(x), h(x)

- Hoành độ giao điểm của g(x) và h(x) là nghiệm phương trình, từ đó suy ra số nghiệm, khoảng nghiệm.

**** Định lý 1:***

Giả sử f(x) liên tục trên (a,b) và có f(a)*f(b) < 0. Khi đó trên (a,b) tồn tại một số lẻ nghiệm thực $x \in (a,b)$ của phương trình f(x) = 0. Nghiệm là duy nhất nếu f'(x) tồn tại và không đổi dấu trên (a,b).

Ví dụ 2.1:

Tách nghiệm cho phương trình : $x^3 - x + 5 = 0$

<u>Giải :</u>

$f(x) = x^3 - x + 5 = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1$, $f'(x) = 0 <=> x = \pm 1/\sqrt{3}$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ} > 0$	$\searrow$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình có 1 nghiệm $x < -1/\sqrt{3}$

f(-1)*f(-2) < 0, vậy phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (-2, -1)$.

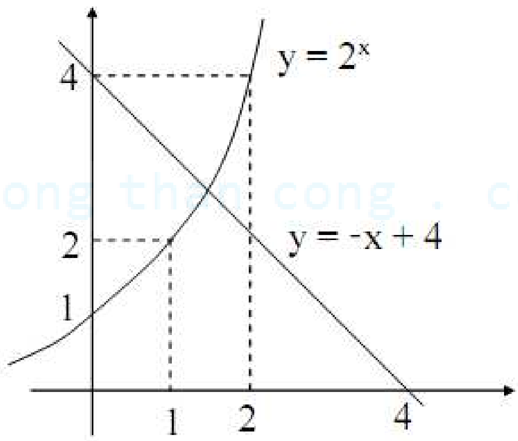
Ví dụ 2.2:

Tách nghiệm cho phương trình : $2^x + x - 4 = 0$

<u>Giải :</u>

$2^x + x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -x + 4$

Áp dụng phương pháp đồ thị :



Từ đồ thị suy ra phương trình trên có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$.

**** Định lý 2:***

Giả sử α là nghiệm đúng và x là nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0, cùng nằm trong khoảng nghiệm [a, b] và f'(x) ≥ m ≥ 0 khi a ≤ x ≤ b. Khi đó $|x - \alpha| \le \dfrac{|f(x)|}{m}$.

Ví dụ 2.3:

Cho nghiệm gần đúng của phương trình $x^4 - x - 1 = 0$ là 1,22. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối là bao nhiêu ?

<u>Giải :</u>

$f(x) = f(1,22) = 1,22^4 - 1,22 - 1 = -0,0047 < 0$

$f(1,23) = 0,588 > 0$

$\Rightarrow$ nghiệm phương trình $x \in (1,22; 1,23)$

f'(x) = $4x^3 - 1 \geq 4*1{,}22^3 - 1 = 6{,}264 = m \ \forall x \in (1{,}22; 1{,}23)$

Theo định lý 2 : $\Delta x = 0{,}0047/6{,}264 = 0{,}0008$ (vì $|x - \alpha| \leq 0{,}008$).

2.3. TÁCH NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Xét phương trình đại số : $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$ (1)

**** Định lý 3:***

Cho phương trình (1) có $m_1 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{1,n}$

$$m_2 = \max\{|a_i|\} \quad i = \overline{0,n-1}$$

Khi đó mọi nghiệm x của phương trình đều thỏa mãn :

$$x_1 = \frac{|a_n|}{m_2 + |a_n|} \leq |x| \leq 1 + \frac{m_1}{|a_0|} = x_2$$

**** Định lý 4:***

Cho phương trình (1) có $a_0 > 0$, a_m là hệ số âm đầu tiên. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình đều $\leq N = 1 + \sqrt[m]{a/a_0}$, với $a = \max\{|a_i|\} \ i = \overline{0,n}$ sao cho $a_i < 0$.

Ví dụ 2.4:

Cho phương trình : $5x^5 - 8x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$

Tìm cận trên nghiệm dương của phương trình trên.

Giải :

Ta có $a_2 = -8$ là hệ số âm đầu tiên, nên m = 2, $a = \max(8,1) = 8$

Vậy cận trên nghiệm dương : $N = 1 + \sqrt{8/5}$

**** Định lý 5:***

Cho phương trình (1), xét các đa thức :

$$\varphi_1(x) = x^n f(1/x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$$
$$\varphi_2(x) = f(-x) = (-1)^n(a_0x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - ... + (-1)^n a_n)$$
$$\varphi_3(x) = x^n f(-1/x) = (-1)^n(a_0x^n - a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} - ... + (-1)^n a_0)$$

Giả sử N_0, N_1, N_2, N_3 là cận trên các nghiệm dương của đa thức f(x), $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$. Khi đó mọi nghiệm dương của phương trình (1) đều nằm trong khoảng **$[1/N_1, N_0]$** và mọi nghiệm âm nằm trong khoảng **$[-N_2, -1/N_3]$**

Ví dụ 2.5:

Xét phương trình :

$3x^2 + 2x - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad N_0 = 1 + \sqrt{5/3}$ (định lý 4)

$\varphi_1(x) = 3 + 2x - 5x^2$ → N_1 không tồn tại ($a_0 < 0$)

$\varphi_2(x) = 3x^2 - 2x - 5$ → $N_2 = 1 + 5/3$(định lý 4)

$\varphi_3(x) = 3 - 2x - 5x^2$ → N_3 không tồn tại ($a_0 < 0$)

Vậy : mọi nghiệm dương $x < 1 + \sqrt{5/3}$

mọi nghiệm âm $x > -(1 + 5/3) = -8/3$

2.4. CHÍNH XÁC HÓA NGHIỆM

2.4.1. *Phương pháp chia đôi*

a. Ý tưởng

Cho phương trình f(x) = 0, f(x) liên tục và trái dấu tại 2 đầu [a,b]. Giả sử f(a) < 0, f(b) > 0 (nếu ngược lại thì xét –f(x)=0). Theo định lý 1, trên [a,b] phương trình có ít nhất 1 nghiệm μ.

Cách tìm nghiệm μ:

Đặt $[a_0, b_0] = [a, b]$ và lập các khoảng lồng nhau $[a_i,b_i]$ (i=1, 2, 3, …)

$$[a_i, b_i] = \begin{cases} [a_i, (a_{i-1} + b_{i-1})/2] & \text{nếu } f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) > 0 \\ [(a_{i-1} + b_{i-1})/2, b_i] & f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) < 0 \end{cases}$$

Như vậy:

- Hoặc nhận được nghiệm đúng ở một bước nào đó:

$\mu = (a_{i-1} + b_{i-1})/2$ nếu $f((a_{i-1} + b_{i-1})/2) = 0$

- Hoặc nhận được 2 dãy $\{a_n\}$ và $\{b_n\}$, trong đó:

$\{a_n\}$: là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên

$\{b_n\}$: là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới

Nên $\exists \lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim\limits_{n\to\alpha} b_n = \mu$ là nghiệm phương trình.

Ví dụ 2.6:

Tìm nghiệm phương trình: $2^x + x - 4 = 0$ bằng phương pháp chia đôi

Giải:

- Tách nghiệm: phương trình có 1 nghiệm $x \in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm: áp dụng phương pháp chia đôi (f(1) < 0)

Bảng kết quả:

a_n	b_n	$f\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right)$
1	2	+
1	1.5	-

1.25	1.5	-
1.375	1.5	+
1.375	1.438	+
1.375	1.406	+
1.375	1.391	-
1.383	1.391	+
1.383	1.387	-
1.385	1.387	-
1.386	1.387	

$\lim\limits_{n\to\alpha} a_n = \lim\limits_{n\to 11} b_n = 1.386$

Kết luận: Nghiệm của phương trình: x ≈ 1.386

b. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x) (hàm đa thức, hàm siêu việt)

- Nhập a, b sao cho f(a)<0 và f(b)>0

- Lặp

c = (a+b)/2

nếu f(c) > 0 → b = c

ngược lại a = c

trong khi $\left(\left|f(c)\right| > \varepsilon\right) / * \left|a-b\right| > \varepsilon$ và f(c) != 0 */

- Xuất nghiệm: c.

2.4.2. ***Phương pháp lặp***

a. Ý tưởng

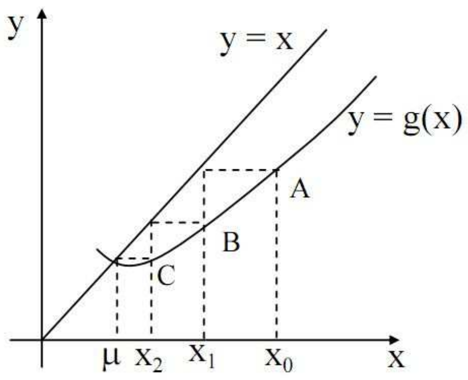
Biến đổi tương đương: f(x) = 0 <=> x = g(x)

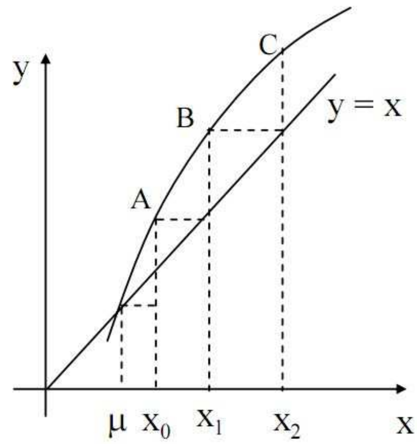
Chọn giá trị ban đầu $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a,b), tính $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$, …, $x_k = g(x_{k-1})$.

Như vậy ta nhận được dãy $\{x_n\}$, nếu dãy này hội tụ thì tồn tại giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \eta$ (là nghiệm phương trình).

b. Ý nghĩa hình học

Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị y=x và y=g(x) là nghiệm phương trình





Hình a ***Hình b***

Trường hợp hình a: hội tụ đến nghiệm μ

Trường hợp hình b: không hội tụ đến nghiệm μ (phân ly nghiệm)

Sau đây ta xét định lý về điều kiện hội tụ đến nghiệm sau một quá trình lặp

Định lý (điều kiện đủ)

Giả sử hàm g(x) xác định, khả vi trên khoảng nghiệm [a,b] và mọi giá trị g(x) đều thuộc [a,b]. Khi đó nếu $\exists q > 0$ sao cho $|g'(x)| \le q < 1$ $\forall x \in (a,b)$ thì:

+ Quá trình lặp hội tụ đến nghiệm không phụ thuộc vào $x_0 \in [a,b]$

+ Giới hạn $\lim_{n\to\infty} x_n = \eta$ là nghiệm duy nhất trên (a,b).

Lưu ý:

- Định lý đúng nếu hàm g(x) xác định và khả vi trong $(-\infty,+\infty)$, trong khi đó điều kiện định lý thoả mãn.

- Trong trường hợp tổng quát, để nhận được xấp xỉ x_n với độ chính xác ε cho trước, ta tiến hành phép lặp cho đến khi 2 xấp xỉ liên tiếp thoả mãn:

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{1-q}{q}\varepsilon$$

Ví dụ 2.7:

Tìm nghiệm: $x^3 - x - 1 = 0$ bằng phương pháp lặp.

<u>Giải:</u>

- Tách nghiệm: phương trình có một nghiệm $\in (1,2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = x^3 - 1;\ x = \frac{x+1}{x^2};\ x = \sqrt[3]{x+1}$$

Chọn $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$g'(x) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{(x+1)^2}} < 1 \quad \forall x \in (1,2)$$

=> áp dụng phương pháp lặp (chọn $x_0 = 1$)

x	$g(x) = \sqrt[3]{x+1}$
1	1.260
1.260	1.312
1.312	1.322
1.322	1.324
1.324	1.325
1.325	1.325

$|x_4 - x_5| < \varepsilon = 10^{-3}$

Nghiệm phương trình $x \approx 1.325$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm g(x)
- Nhập x
- Lặp: y = x

  x = g(x)

  trong khi |x - y| > ε
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

2.4.3. *Phương pháp tiếp tuyến*

a. Ý tưởng

Chọn $x_0 \in$ khoảng nghiệm (a, b).

Tiếp tuyến tại A_0 $(x_0, f(x_0))$ cắt trục x tại điểm có hoành độ x_1,

Tiếp tuyến tại A_1 $(x_1, f(x_1))$ cắt trục x tại điểm có hoành độ x_2, …,

Tiếp tuyến tại A_k $(x_k, f(x_k))$ cắt trục x tại điểm có hoành độ x_k, …

Cứ tiếp tục quá trình trên ta có thể tiến dần đến nghiệm μ của phương trình.

**** Xây dựng công thức lặp:***

Phương trình tiếp tuyến tại A_k $(x_k, f(x_k))$

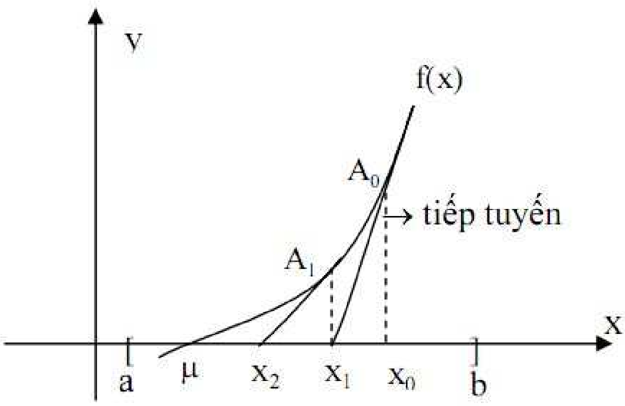
$y - f(x_k) = f'(x_k)*(x - x_k)$

Tiếp tuyến cắt trục x tại điểm có toạ độ $(x_{k+1}, 0)$

Do vậy: $0 – f(x_k) = f'(x_k)*(x_{k+1} - x_k)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

b. Ý nghĩa hình học



Định lý (điều kiện hội tụ theo Furier - điều kiện đủ)

Giả sử [a,b] là khoảng nghiệm của phương trình f(x) = 0. Đạo hàm f'(x), f''(x) liên tục, không đổi dấu, không tiêu diệt trên [a,b]. Khi đó ta chọn xấp xỉ nghiệm ban đầu $x_0 \in [a,b]$ sao cho $f(x_0)*f''(x_0) > 0$ thì quá trình lặp sẽ hội tụ đến nghiệm.

Ví dụ 2.8:

Giải phương trình: $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến

Giải:

- Tách nghiệm:

$f(x) = x^3 + x - 5$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0\ \forall x$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty;\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Phương trình trên có 1 nghiệm duy nhất.

$f(1)*f(2) = (-3)*5 < 0$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x \in (1, 2)$

- Chính xác hoá nghiệm:

$f''(x) = 6x > 0\ \forall x \in (1, 2)$

$f'(x) > 0\ \forall x$

Thoả mãn điều kiện hội tụ Furier, áp dụng phương pháp tiếp tuyến.

Chọn với $x_0 = 2$ (vì f(2). f''(2) > 0)

x	f(x)/f'(x)
2	0.385

1.615	0.094
1.521	0.005
1.516	0.000
1.516	

Vậy nghiệm x ≈ 1.516

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x), fdh(x)
- Nhập x
- Lặp y= x

  x = y – f(y)/fdh(y)

  trong khi |x - y| > ε
- Xuất nghiệm: x (hoặc y)

2.4.4. *Phương pháp dây cung*

a. Ý tưởng

Giả sử [a, b] là khoảng nghiệm phương trình f(x) = 0. Gọi A, B là 2 điểm trên đồ thị f(x) có hoành độ tương ứng là a, b. Phương trình đường thẳng qua 2 điểm A(a,f(a)), B(b, f(b)) có dạng:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}$$

Dây cung AB cắt trục x tại điểm có toạ độ (x_1, 0)

Do đó:

$$\frac{0 - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

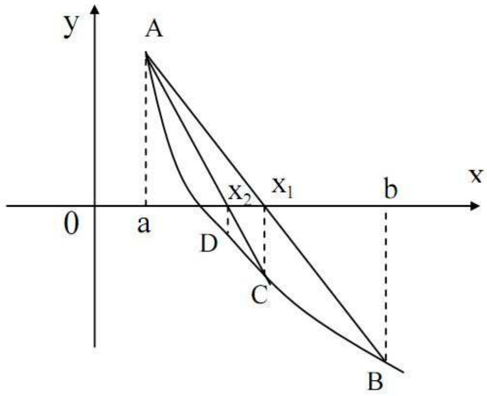
$$x_1 = a - \frac{(b - a) f(a)}{f(b) - f(a)}$$

Nếu f(a)*f(x_1) < 0, thay b = x_1 ta có khoảng nghiệm mới là (a, x_1)

Nếu f(b)*f(x_1) < 0, thay a = x_1 ta có khoảng nghiệm mới là (x_1, b)

Tiếp tục áp dụng phương pháp dây cung vào khoảng nghiệm mới ta được giá trị x_2. Lại tiếp tục như thế ta nhận được các giá trị x_3, x_4, … càng tiến gần với giá trị nghiệm phương trình.

b. Ý nghĩa hình học



Ví dụ 2.9:

Giải phương trình $x^3 + x - 5 = 0$ bằng phương pháp dây cung.

Giải:

- Tách nghiệm: Phương trình có 1 nghiệm $x \in (1, 2)$
- Chính xác hoá nghiệm:

$f(1) = - 3 < 0; f(2) = 5 > 0$

Bảng kết quả:

a	b	x	f(x)
1	2	1.333	-0.447
1.333		1.379	-0.020
1.379		1.385	-0.003
1.385		1.386	-0.000
1.386		1.386	

Vậy nghiệm phương trình: $x \approx 1.386$

c. Thuật toán

- Khai báo hàm f(x)
- Nhập a, b
- Tính x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))
- Nếu f(x)*f(a) < 0.

Lặp   b = x

x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))

trong khi |x - b| > ε

Ngược lại

Lặp   a = x

$x = a – (b - a)f(a) / (f(b) - f(a))$

trong khi $|x - a| > \varepsilon$

- Xuất nghiệm: x

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 2

1. Trình bày các bước tìm nghiệm gần đúng của phương trình.
2. Trình bày cách tách nghiệm bằng phương pháp đồ thị.
3. Trình bày cách tách nghiệm cho phương trình đại số.
4. Có bao nhiêu phương pháp chính xác hóa nghiệm? Liệt kê các phương pháp đó?
5. Trình bày ý tưởng của phương pháp chia đôi để chính xác hóa nghiệm.
6. Trình bày thuật toán phương pháp chia đôi để chính xác hóa nghiệm.
7. Trình bày ý tưởng phương pháp lặp để chính xác hóa nghiệm.
8. Trình bày thuật toán phương pháp lặp để chính xác hóa nghiệm.
9. Trình bày ý tưởng phương pháp tiếp tuyến để chính xác hóa nghiệm.
10. Trình bày thuật toán phương pháp tiếp tuyến để chính xác hóa nghiệm.
11. Trình bày ý tưởng phương pháp dây cung để chính xác hóa nghiệm.
12. Trình bày thuật toán phương pháp dây cung để chính xác hóa nghiệm.
13. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $x^3 – x + 5 = 0$

    b. $x^3 – x – 1 = 0$

    c. $\sin x – x + 1/4 = 0$

    d. $x^4 – 4x – 1= 0$

    bằng phương pháp chia đôi với sai số không quá 10^{-3}
14. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $x^3 – x + 5 = 0$

    b. $x^4 – 4x – 1 = 0$

    bằng phương pháp dây cung với sai số không quá 10^{-2}
15. Tìm nghiệm gần đúng các phương trình:

    a. $e^x – 10x + 7 = 0$

    b. $x^3 + x – 5 = 0$

    bằng phương pháp tiếp tuyến với sai số không quá 10^{-3}
16. Dùng phương pháp lặp tìm nghiệm dương cho phương trình $x^3 – x – 1000 = 0$ với sai số không quá 10^{-3}
17. Tìm nghiệm dương cho phương trình: $x^3 + x^2 –2x – 2 = 0$.
18. Tìm nghiệm âm cho phương trình: $x^4 - 3x^2 + 75x – 1000 = 0$.
19. Dùng các phương pháp có thể để tìm nghiệm gần đúng cho phương trình sau: $\cos 2x + x – 5 = 0$
20. Viết chương trình tìm nghiệm cho có dạng tổng quát:

    $$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

    a. Áp dụng phương pháp chia đôi

b. Áp dụng phương pháp dây cung

21. Viết chương trình tìm nghiệm cho phương trình $e^x - 10x + 7 = 0$ bằng phương pháp tiếp tuyến.
22. Viết chương trình xác định giá trị x_1, x_2 theo định lý 3.
23. Viết chương trình tìm cận trên của nghiệm dương phương trình đại số theo định lý 4.

CHƯƠNG.3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

3.1. GIỚI THIỆU

Cho hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases}$$

Hệ phương trình trên có thể được cho bởi ma trận:

$$A_{nn+1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \ldots & \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Vấn đề: Tìm vectơ nghiệm $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

*** Phương pháp:**

- Phương pháp đúng (Krame, Gauss, khai căn): Đặc điểm của các phương pháp này là sau một số hữu hạn các bước tính, ta nhận được nghiệm đúng nếu trong quá trình tính toán không làm tròn số.

- Phương pháp gần đúng (Gauss Siedel, giảm dư): Thông thường ta cho ẩn số một giá trị ban đầu, từ giá trị này tính giá trị nghiệm gần đúng tốt hơn theo một qui tắc nào đó. Quá trình này được lặp lại nhiều lần và với một số điều kiện nhất định, ta nhận được nghiệm gần đúng.

3.2. PHƯƠNG PHÁP KRAME

- Khai báo hàm **Dt** tính định thức ma trận vuông cấp n

- Nhập n, a_{ij} $\left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n+1}\right)$

- d = Dt (A)

- Xét:

+ d = 0

+ d ≠ 0 {$d_i = Dt(A_i)$; $x_i = d_i/d$}

3.3. PHƯƠNG PHÁP GAUSS

3.3.1. *Nội dung phương pháp*

- Biến đổi Ma trận A về ma trận tam giác trên

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_{2n+1} \\ \dots & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & a_{nn+1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_{1n+1} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_{2n+1} \\ \dots & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} & a'_{nn+1} \end{bmatrix}$$

Cách biến đổi A → A': Thực hiện n-1 lần biến đổi

Lần biến đổi i (làm cho $a_{ji} = 0$; j = i + 1 → n) bằng cách:

dòng j = dòng j + dòng i * m ($m = -a_{ji} / a_{ij}$)

- Tìm nghiệm theo quá trình ngược: $x_n \to n_{n-1} \to \dots \to x_1$.

Ví dụ 3.1:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 11x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & 11 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

Nhân hàng 1 với -3 và nhân hàng 2 với 2 rồi cộng với nhau, nhân hàng 1 với -2 rồi cộng với hàng 3 của ma trận A ta được:

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 & -16 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Nhân hàng 2 với 3 và nhân hàng 3 với 10 rồi cộng với nhau ta được:

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 & -16 \\ 0 & 0 & -29 & -58 \end{bmatrix}$$

$x_3 = 2$; $x_2 = -1$; $x_1 = 1$.

3.3.2. *Thuật toán*

- Nhập n, a_{ij} ($i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n+1}$) (nhập trực tiếp hoặc từ file)

- Biến đổi A → A' (ma trận tam giác trên)

+ Lặp i = 1→ n -1

Tìm j sao cho $a_{ji} \neq 0$.

+ Xét $a_{ij} = 0$ →

Hoán đổi dòng i và j cho nhau.

+ Lặp j = i + 1→ n

m = $-a_{ij}/a_{ii}$

+ Lặp k = i → n+1; $a_{jk} = a_{ik} * m$.

- Tìm nghiệm

$$x_i = \left(a_{in+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j\right) / a_{ii} \qquad (i = n \to 1)$$

Lặp i = n → 1

s = 0

Lặp j = i + 1 → n; S = S + $a_{ij} * x_j$.

$x_i = (a_{in+1} - s)/a_{ii}$

- Xuất x_i (i = 1→ n).

3.4. PHƯƠNG PHÁP LẶP GAUSS - SIEDEL (TỰ SỬA SAI)

3.4.1. *Nội dung phương pháp*

Biến đổi hệ phương trình về dạng: $\vec{x} = B\vec{x} + \vec{g}$

trong đó:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$$
$$\vec{g} = (g_1, g_2, ..., g_n)$$
$$B = \{b_{ij}\}_n$$

Cách biến đổi:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \left(a_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j\right) / a_{11} (j \neq 1) \\ ... \\ x_n = \left(a_{nn+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j\right) / a_{nn} (j \neq n) \end{cases}$$

Tổng quát:

$$x_i = \left(a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) / a_{ii} (j \neq i) \ (*)$$

Cho hệ phương trình xấp xỉ nghiệm ban đầu: $\overrightarrow{x_0} = \left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0 \right)$

Thay $\overrightarrow{x_0}$ vào (*) để tính: $\overrightarrow{x_1} = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1 \right)$

$$x_i^1 = \left(a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^0 \right) / a_{ii} (j \neq i)$$

Tương tự, tính $\overrightarrow{x_2}$, $\overrightarrow{x_3}$ …

Tổng quát: $x_i^{k+1} = \left(a_{in+1} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^k \right) / a_{ii} (j \neq i)$

Quá trình lặp sẽ dừng khi thoả mãn tiêu chuẩn hội tụ tuyệt đối:

$$\left| x_i^{k+i} - x_i^k \right| < \varepsilon \quad (\forall i = \overline{1,n})$$

Khi đó $x_k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k \right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Điều kiện hội tụ:

Hệ phương trình có ma trận lặp B thoả mãn:

$$r_1 = \max_i \sum_{j=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1$$

hoặc

$$r_2 = \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| b_{ij} \right| < 1$$

hoặc

$$r_3 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1} b_{ij}^2 < 1$$

thì quá trình sẽ hội tụ đến nghiệm.

Ví dụ 3.2:

Giải hệ phương trình $\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 10 & 2 & 10 \\ 1 & 1 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = -0,2x_2 - 0,1x_3 + 1 \\ x_2 = -0,1x_1 - 0,2x_3 + 1,2 \\ x_3 = -0,1x_1 - 0,1x_2 + 0,8 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,1 \\ -0,1 & 0 & -0,2 \\ -0,1 & -0,1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{g} = (1;1,2;0,8)$$

Do $r_1 = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{3} |b_{ij}| = 0,3 < 1$ thỏa mãn điều kiện hội tụ nên áp dụng phương pháp Gauss - Siedel:

Chọn $\overrightarrow{x_0} = (0;0;0)$ thay vào có $\overrightarrow{x_1} = (1;1,2;0,8)$

Tương tự tính $\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{x_3}$...

Bảng kết quả:

x_1	x_2	x_3
1	1.2	0.8
0.68	0.94	0.58
0.754	1.016	0.638
0.733	0.997	0.623
0.738	1.002	0.627
0.737	1.001	0.626
0.737	1.001	0.626

Nghiệm hệ phương trình là $\overrightarrow{x_0} = (0,737;1,001;0,626)$

vì $|x_i^7 - x_i^6| < 10^{-3} \quad (\forall i = \overline{1,3})$

3.4.2. *Thuật toán*

- Nhập n, a_{ij} (i = 1 → n, j = 1 → n+1)
- Nhập x_i = (i = 1 → n)
- Lặp


```
        t=0
lap     i = 1 → n
{S = 0
lap     j = 1 → n do
        if (j ≠ i)      S = S + a_ij * x_j
        y_i = (a_in+1 - S ) / a_ii
        if (| x1[i] - x0[i] | > = ε)     t = 1
```

$x_i = y_i$}

trong khi (t)

- Xuất x_i ($i = 1 \rightarrow n$)

3.5. PHƯƠNG PHÁP GIẢM DƯ

3.5.1. *Nội dung phương pháp*

Biến đổi hệ phương trình về dạng:

$$\begin{cases} a_{1n+1} - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n = 0 \\ a_{2n+1} - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - \ldots - a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn+1} - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Chia dòng i cho $a_{ii} \neq 0$

$$\begin{cases} b_{1n+1} - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 \ldots - x_1 = 0 \\ b_{2n+1} - b_{21}x_1 - b_{23}x_3 - \ldots - x_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{nn+1} - b_{n1}x_1 - b_{n2}x_2 - \ldots - x_n = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Cho vectơ nghiệm ban đầu $\overrightarrow{x_0} = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$

Vì $\overrightarrow{x_0}$ không phải là nghiệm nên:

$$\begin{cases} b_{1n+1} - b_{12}x_2^0 - b_{13}x_3^0 \ldots - x_1^0 = R_1^0 \\ b_{2n+1} - b_{21}x_1^0 - b_{23}x_3^0 - \ldots - x_2^0 = R_2^0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{nn+1} - b_{n1}x_1^0 - b_{n2}x_2^0 - \ldots - x_n^0 = R_n^0 \end{cases}$$

$R_1^0, R_2^0, \ldots, R_n^0$ là các số dư do sự sai khác giữa $\overrightarrow{x_0}$ với nghiệm thực của hệ phương trình.

Tìm $R_s^0 = \max\left\{\left|R_1^0\right|, \left|R_2^0\right|, \ldots, \left|R_n^0\right|\right\}$ và làm triệt tiêu phần tử đó bằng cách cho x_s một số gia $\delta x_s = R_s^0$ nghĩa là $x_s^1 = x_s^0 + R_s^0$.

Tính lại các số dư:

$$R_s^1 = 0$$

$$R_i^1 = R_i^0 - b_{is} * \delta x_s = R_i^0 - b_{is} * R_s^0 \qquad (i = 1 \rightarrow n)$$

Cứ tiếp tục quá trình lặp trên cho đến khi: $\left|R_i^k\right| < \varepsilon\left(\forall i = \overline{1,n}\right)$ thì $X_k = \left(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\right)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Ví dụ 3.3:

Giải hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 10 & -2 & -2 & 6 \\ -2 & 10 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -10 & 8 \end{bmatrix}$$

Biến đổi về hệ phương trình tương đương

$$\begin{cases} 0,6 + 0,2x_2 + 0,2x_3 - x_1 = 0 \\ 0,3 + 0,2x_1 + 0,2x_3 - x_2 = 0 \\ 0,8 + 0,1x_1 + 0,1x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Cho $\overrightarrow{x_0} = (0,0,0) \to \overrightarrow{R_0} = (0,6;0,7;0,8)$

$$R_3^0 = \max\left\{\left|R_i^0\right|\right\} \qquad \forall i = \overline{1,3}$$

$$x_3^1 = x_3^0 + R_3^0 = 0,8$$

$$R_2^1 = R_2^0 + b_{23}.R_3^0 = 0,7 + 0,1.0,8 = 0.78$$

$$R_1^1 = R_1^0 + b_{13}.R_3^0 = 0,6 + 0,2.0,8 = 0,76$$

$$\overrightarrow{R_1} = (0,76;0,78;0)$$

Tương tự ta có bảng kết quả:

x_1	x_2	x_3	R_1	R_2	R_3
0	0	0	0.6	0.7	0.8
		0.8	0.76	0.78	0
	0.78		0.92	0	0.08
0.92			0	0.18	0.17
	0.96		0.04	0	0.19
		0.99	0.07	0.02	0
0.99			0	0.03	0.01
	0.99		0.01	0	0.01
		1	0.01	0	0
1			0	0.01	0
	1		0	0	0

Vậy nghiệm của hệ phương trình là x = (1; 1; 1)

3.5.2. *Thuật toán*

- Nhập n, a_{ij}, x_i

- Biến đổi hệ phương trình (1) về dạng (2)

```
for (i=1, i<= n, i++)
    { for (j=1, j<=n+1; j ++)
          if (i! = j)      a[i,j] = a [i,j]/a[i,i]
      a[i,i] = 1
    }
```

- Tính r[i] ban đầu (i = 1→ n)

```
for i = 1→ n do
    { r[i] =a [i, n+1]
      for j = 1→ n do r[i] = r [i] - a[i,j] * x [j] }
```

- Lap

```
t = 0 /* cho thoat*/
/* Tìm r_s = max {|r[i]|} (i = 1→ n) & tính lại x_s*/
  max = |r[1]|; k =1
  for i = 2 → n do
       if (max < |r[i]| )   { max = |r[i]; k= i }
  x [k] = x [k] + r[k]
/* Tính lại R[i] kiểm tra khả năng lặp tiếp theo */
  d = r[k]
  for i =1→ n
       { r[i] = r[i] - a[i, k] * d
         if (|r[i]| >=ε) thi t =1 /* cho lap*/
```

trong khi (t)

- Xuất nghiệm: x[i] (i = 1→n)

Lưu ý:

- Phương pháp chỉ thực hiện được khi $a_{ii} \neq 0$, nếu không phải đổi dòng.

- Quá trình hội tụ không phụ thuộc vào x_0 mà chỉ phụ thuộc vào bản chất của hệ phương trình.

- Mọi hệ phương trình có giá trị riêng $\lambda \geq 1$ đều hội tụ đến nghiệm một cách nhanh chóng.

- Nếu các phần tử a_{ii} càng lớn hơn các phần tử trên dòng bao nhiêu thì quá trình hội tụ càng nhanh.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 3

1. Trình bày thuật toán phương pháp Krame giải hệ.
2. Trình bày nội dung phương pháp Gauss giải hệ.
3. Trình bày thuật toán phương pháp Gauss giải hệ.
4. Trình bày nội dung phương pháp Gauss - Siedel giải hệ.
5. Trình bày thuật toán phương pháp Gauss - Siedel giải hệ.
6. Trình bày nội dung phương pháp giảm dư giải hệ.
7. Trình bày thuật toán phương pháp giảm dư giải hệ.
8. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} 1,2x - 0,8y = 1,0 \\ -1,5x - 0,25y = -1,0 \end{cases}$$
9. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -1 \\ 3x + 4y + 5z = 2 \end{cases}$$
10. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$$
11. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = 5 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases}$$
12. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} 3y - 4z = -6 \\ x + 4y + 5z = 19 \\ x + 4y + 2z = 13 \end{cases}$$
13. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$
14. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:
$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ -2x + y - z = -1 \\ 5x - 3y + z = 2 \end{cases}$$
15. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:

$$\begin{cases} 3x+4y-z+t=-3 \\ 2y-z=-1 \\ 5x-6y+2t=9 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

16. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:

$$\begin{cases} 3y-4z=-6 \\ x+4y+5z=19 \\ x+4y+2z=13 \end{cases}$$

17. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss Jordan:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 \\ 3x-y+2z=7 \\ 5x+3y+4z=2 \end{cases}$$

18. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss (các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân):

$$\begin{cases} 2,1x_1-4,5x_2-2,0x_3=19,07 \\ 3,0x_1+2,5x_2+4,3x_3=3,21 \\ -6,0x_1+3,5x_2+2,5x_3=-18,25 \end{cases}$$

19. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss (các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân):

$$\begin{cases} 3,2x_1-1,5x_2+0,5x_3=1,8 \\ 8x_1+12,5x_2-5,0x_3=15,5 \\ 1,0x_1+4,1x_2-1,,5x_3=4,16 \end{cases}$$

20. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss (các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân):

$$\begin{cases} 8,64x_1+1,71x_2+5,42x_3=10,21 \\ -6,39x_1+4,25x_2+1,84x_3=3,41 \\ 4,21x_1+7,92x_2-3,41x_3=12,29 \end{cases}$$

21. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss (các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân):

$$\begin{cases} 5,5x_1+7,1x_2+6,2x_3=23 \\ 7,1x_1+10,5x_2+8,2x_3=32 \\ 6,2x_1+8,2x_2+10,5x_3=33 \end{cases}$$

22. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss (các phép tính lấy đến 5 số lẻ thập phân):

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 1,4x_2 + 1,3x_3 + 1,2x_4 = 5,8 \\ 1,4x_1 + 1,6x_2 + 1,2x_3 + 1,3x_4 = 5,9 \\ 1,3x_1 + 1,2x_2 + 1,7x_3 + 1,4x_4 = 6,06 \\ 1,2x_1 + 1,3x_2 + 1,4x_3 + 1,5x_4 = 5,81 \end{cases}$$

23. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gauss – Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}$$

24. Có 3 loại thực phẩm:
   - Loại 1 chứa 1 đơn vị vitamin A, 2 đơn vị vitamin B, 3 đơn vị vitamin C
   - Loại 2 chứa 2 đơn vị vitamin A, 0 đơn vị vitamin B, 3 đơn vị vitamin C
   - Loại 3 chứa 3 đơn vị vitamin A, 1 đơn vị vitamin B, 2 đơn vị vitamin C.

   Người ta muốn chọn một khẩu phần cung cấp "11 đơn vị vitamin A, 9 đơn vị vitamin B, 20 đơn vị vitamin C".

   a. Tìm tất cả số lượng thực phẩm của mỗi loại có thể có đảm bảo đầy đủ nhu cầu về vitamin như trên.

   b. Nếu giá đơn vị của các loại thực phẩm lần lượt là 600 đồng, 550 đồng, 500 đồng thì có khẩu phần nào trị giá 1000 đồng?

25. Một xí nghiệp điện tử sản xuất 2 loại Board cho máy in. Cả 2 loại đều được xử lý trong 2 phân xưởng A và B. Thời giancần thiết cho mỗi loại trong mỗi phân xưởng cho bởi bảng sau (đơn vị: phút)

	Loại 1	Loại 2
Phân xưởng A	4	3
Phân xưởng B	1	2

   Có 3 công nhân trong phân xưởng A và chỉ có 1 công nhân ở trong phân xưởng B. Tìm sản lượng của mỗi loại trong 1 giờ.

26. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 0,0001x_1 + x_2 = 0,999 \\ x_1 - 5x_2 = 0,002 \end{cases}$

   a) Giải bằng cách cộng hai phương trình.

   b) Giải hệ bằng Gauss. Có điều gì bất thường không?

CHƯƠNG.4. NỘI SUY VÀ PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

4.1. GIỚI THIỆU

Trong toán học ta thường gặp các bài toán liên quan đến khảo sát và tính giá trị các hàm y = f(x) nào đó. Tuy nhiên trong thực tế có trường hợp ta không xác định được biểu thức của hàm f(x) mà chỉ nhận được các giá trị rời rạc: $y_0, y_1, ..., y_n$ tại các điểm tương ứng $x_0, x_1, ..., x_n$.

Vấn đề đặt ra là làm sao để xác định giá trị của hàm tại các điểm còn lại.

Ta phải xây dựng hàm φ(x) sao cho:

$\varphi(x_i) = y_i = f(x_i)$ với $i = \overline{0,n}$

$\varphi(x) \approx f(x)$ $\forall x$ thuộc [a, b] và $x \neq x_i$

- Bài toán xây dựng hàm φ(x) gọi là bài toán nội suy.
- Hàm φ(x) gọi là hàm nội suy của f(x) trên [a, b].
- Các điểm x_i ($i = \overline{0,n}$) gọi là các mốc nội suy.

Hàm nội suy cũng được áp dụng trong trường hợp đã xác định được biểu thức của f(x) nhưng nó quá phức tạp trong việc khảo sát, tính toán. Khi đó ta tìm hàm nội suy xấp xỉ với nó để đơn giản phân tích và khảo sát hơn. Trong trường hợp đó ta chọn n+1 điểm bất kỳ làm mốc nội suy và tính giá trị tại các điểm đó, từ đó xây dựng được hàm nội suy (bằng công thức Lagrange, công thức Newton,…).

Trường hợp tổng quát: hàm nội suy φ(x) không chỉ thoả mãn giá trị hàm tại mốc nội suy mà còn thoả mãn giá trị đạo hàm các cấp tại mốc đó.

$\varphi'(x_0) = f'(x_0)$; $\varphi'(x_1) = f'(x_1)$; … …

$\varphi''(x_0) = f''(x_0)$; $\varphi''(x_1) = f''(x_1)$; … …

Nghĩa là ta tìm hàm nội suy của f(x) thỏa mãn những giá trị sau:

x_i	x_0	x_1	…	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_0	y_1	…	y_n
$y'_i = f(x_i)$	y'_0	y'_1	…	y'_n
$y''_i = f(x_i)$	y''_0	y''_1	…	y''_n
…	…	…	…	…

4.2. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

Giả sử f(x) nhận giá trị y_i tại các điểm tương ứng x_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$, khi đó đa thức nội suy Lagrange của f(x) là đa thức bậc n và được xác định theo công thức sau:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i\, p_n^i(x)$$

$$p_n^i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}=\frac{TS(x)}{MS} \qquad (*)$$

(*) là đa thức bậc n đối với *x* và thỏa mãn:

$$p_n^i(x)=\begin{cases}1 & khi \quad j=1\\ 0 & khi \quad j\neq i\end{cases}$$

Đặt $W(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$

Suy ra: $TS(x)=\dfrac{W(x)}{x-x_i}$; MS = $W'(x_i)$

$$L_n(x)=W(x)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{(x-x_i)W'(x_i)}$$

4.2.1. *Nội suy bậc nhất (nội suy tuyến tính)*

Khi n = 1 ta có bảng số liệu như sau:

x	x_0	x_1
y = f(x)	y_0	y_1

Đa thức nội suy bậc nhất có dạng: $L_1(x) = y_0.p_0(x) + y_1.p_1(x)$

Trong đó: $$p_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$$

$$p_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

Suy ra:

$$L_1(x)=y_0.\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1.\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=Ax+B$$

4.2.2. *Nội suy bậc hai*

Khi n = 2 ta có bảng số liệu như sau:

x	x_0	x_1	x_2
y = f(x)	y_0	y_1	y_2

Đa thức nội suy bậc hai có dạng: $L_2(x) = y_0.p_0(x) + y_1.p_1(x) + y_2.p_2(x)$

Trong đó: $$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

Suy ra:

$$L_2(x) = Ax^2 + Bx + C$$

với A, B, C là hằng số.

4.2.3. ***Nội suy bậc ba***

Khi n = 3 ta có bảng số liệu như sau:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y = f(x)	y_0	y_1	y_2	y_3

Đa thức nội suy bậc ba có dạng:

$$L_3(x) = y_0.p_0(x) + y_1.p_1(x) + y_2.p_2(x) + y_3.p_3(x)$$

Trong đó: $$p_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$p_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Suy ra:

$$L_3(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

với A, B, C, D là hằng số.

Ví dụ 4.1:

Cho hàm f(x) thoả mãn:

x_i	0	1	2	4
$f(x_i)$	2	3	-1	0

Tìm hàm nội suy của f(x), tính f(5)

Giải:

Vì n = 3 nên đa thức nội suy bậc ba có dạng:

$$L_3(x) = y_0.p_0(x) + y_1.p_1(x) + y_2.p_2(x) + y_3.p_3(x)$$

Trong đó: $$p_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = \frac{x^3 - 7x^2 + 14x - 8}{-6}$$

$$p_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)} = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{3}$$

$$p_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)} = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{-4}$$

$$p_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{24}$$

Suy ra:

$$L_3(x) = y_0.p_0(x) + y_1.p_1(x) + y_2.p_2(x) + y_3.p_3(x)$$
$$= 2.p_0(x) + 3.p_1(x) - 1.p_2(x) + 0.p_3(x)$$

Thay vào ta được một đa thức bậc 3.

Từ đó, thay x = 5 vào ta có được giá trị hàm f(5).

4.3. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE VỚI CÁC MỐI CÁCH ĐỀU

Giả sử hàm f(x) nhận giá trị y_i tại các điểm tương ứng x_i ($i = 0 \rightarrow n$) cách đều một khoảng h.

Đặt

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

khi đó:

$x - x_0 = h.t$ $\qquad$ $x_i - x_0 = h.i$

$x - x_1 = h.(t - 1)$ $\qquad$ $x_i - x_1 = h.(i - 1)$

…

$x - x_{i-1} = h.(t - i + 1)$ $\quad\quad x_i - x_{i-1} = h$

$x - x_{i+1} = h.(t - i - 1)$ $\quad\quad x_i - x_{i+1} = -h$

…

$x - x_n = h.(t - n)$ $\quad\quad x_i - x_n = -h.(n - i)$

$$p_n(x_0+ht)=\frac{t(t-1)...(t-i+1)(t-i-1)...(t-n)}{i(i-1)...1(-1)^{n-i}.1.2...(n-i)}$$

$$=\frac{t(t-1)...(t-n)}{(t-i).i!.(n-i)!.(-1)^{n-i}}$$

$$L_n(x_0+ht)=t(t-1)...(t-n)\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i(-1)^{n-i}}{(t-i)i!(n-i)!}$$

$$L_n(x_0+ht)=\frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i(-1)^{n-i}.C_n^i}{(t-i)}$$

với C_n^i là tổ hợp n của i phần tử.

Ví dụ 4.2:

Tìm hàm nội suy của f(x) thoả mãn:

x_i	0	2	4
$f(x_i)$	5	-2	1

Giải:

$$L_2(2t)=\frac{t(t-1)(t-2)}{2!}\left[\frac{5C_2^0}{t-0}-\frac{-2C_2^1}{t-1}+\frac{1C_2^2}{t-2}\right]$$

$$=\frac{t(t-1)(t-2)}{2}\left[\frac{5}{t}+\frac{4}{t-1}+\frac{1}{t-2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[5(t^2-1)(t-2)+4t(t-2)+t(t-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[10t^2-24t+10\right]=5t^2-12t+5$$

Vậy hàm nội suy của f(x) là:

$$L_2(x)=\frac{5}{4}x^2-6x+5$$

4.4. NỘI SUY NEWTON

4.4.1. *Sai phân*

Cho hàm f(x) và h là hằng số, khi đó:

$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x)$:được gọi là sai phân cấp 1 đối với bước h.

$\Delta^2 f(x) = -[-f(x)]$:sai phân cấp 2

Tổng quát:

$\Delta^k f(x) = \Delta[\Delta^{k-1} f(x)]$:sai phân cấp k

Cách lập bảng sai phân:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	...	$\Delta^n f(x_i)$
x_0	y_0					
x_1	y_1	$\Delta f(x_0)$				
x_2	y_2	$\Delta f(x_1)$	$\Delta^2 f(x_0)$			
x_3	y_3	$\Delta f(x_2)$	$\Delta^2 f(x_1)$	$\Delta^3 f(x_0)$		
...	...	...	...	...	...	
x_n	y_n	$\Delta f(x_n)$	...	...	...	$\Delta^n f(x_0)$

4.4.2. *Công thức nội suy Newton*

Giả sử hàm f(x) nhận giá trị yi tại các mốc xi cách đều một khoảng h. Khi đó hàm nội suy Newton là một đa thức bậc n được xác định như sau:

$$L_n(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \qquad (*)$$

Trong đó:

$$\varphi_0(x) = 1;$$

$$\varphi_1(x) = \frac{x - x_0}{h}; \varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!};$$

$$\varphi_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{h^n n!};$$

Lớp các hàm $\varphi_i(x)$ có tính chất sau:

$$-\varphi_i(x_0) = 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$-\Delta\varphi_k(x) = \varphi_{k-1}(x)$$

* Xác định các hệ số $C_i (i = \overline{0,n})$

Sai phân cấp 1 của $L_n(x)$:

(1)
$$\begin{aligned} \Delta L_n(x) &= C_0\Delta\varphi_0(x) + C_1\Delta\varphi_1(x) + C_2\Delta\varphi_2(x) + \ldots + C_n\Delta\varphi_n(x) \\ &= C_1\varphi_0(x) + C_2\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Sai phân cấp 2 của $L_n(x)$:

(2) $$\begin{aligned}\Delta^2 L_n(x) &= C_1\Delta\varphi_0(x) + C_2\Delta\varphi_1(x) + \ldots + C_n\Delta\varphi_{n-1}(x)\\ &= C_2\varphi_0(x) + C_3\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_{n-2}(x)\end{aligned}$$

... ...

Sai phân cấp n của $L_n(x)$:

(n) $\Delta^n L_n(x) = C_n\Delta\varphi_0(x) = C_n$

Thay $x=x_0$ vào (*), (1), (2), ..., (n) ta được:

$$C_0 = L_n(x_0);\quad C_1 = \Delta L_n(x_0);\quad C_2 = \Delta^2 L_n(x_0);\quad \ldots;\quad C_n = \Delta^n L_n(x_0)$$

Vì $L_n(x) \approx f(x)$ nên:

$L_n(x_0) \approx f(x_0)$; $\Delta L_n(x_0) \approx \Delta f(x_0)$;

$\Delta^2 L_n(x_0) \approx \Delta^2 f(x_0)$; ...; $\Delta^n L_n(x_0) \approx \Delta^n f(x_0)$

Vậy:

$$\begin{aligned}L_n(x) \approx\; & f(x_0) + \Delta f(x_0)\frac{x-x_0}{h} + \Delta^2 f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2 2!}\\ & + \ldots + \Delta^n f(x_0)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{h^n n!}\end{aligned}$$

Ví dụ 4.3:

Xây dựng hàm nội suy thỏa mãn:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	2	4	5	7	8

Giải: Lập bảng sai phân:

x_i	$f(x_i)$	$\Delta f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$	$\Delta^3 f(x_i)$	$\Delta^4 f(x_i)$
1	2				
2	4	2			
3	5	1	-1		
4	7	2	1	2	
5	8	1	-1	-2	-4

Hàm nội suy Newton:

$$L_n(x) = 2 + 2\frac{x-x_0}{1} - \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} + 2.\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!} - 4\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{4!}$$

4.5. NỘI SUY TỔNG QUÁT

Xây dựng hàm nội suy của f(x) thỏa mãn giá trị hàm và giá trị đạo hàm các cấp theo bảng giá trị sau:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$y_i=f(x_i)$	y_0	y_1	...	y_n
$y'_i=f'(x_i)$	y'_0	y'_1	...	y'_n
$y''_i=f''(x_i)$	y''_0	y''_1	...	y''_n
...	...	...	...	...
$y^k_i=f^k(x_i)$	$y_0^{(k)}$	$y_1^{(k)}$	...	$y_n^{(k)}$

Giả sử hàm nội suy cần tìm là đa thức bậc m: $H_m(x)$

$m = n + \sum_{i=1}^{k} S_i$ (S_i: Số giả thiết được cho ở đạo hàm cấp i)

$H_m(x) = L_n(x) + W(x)H_p(x)$

(Vì $H_m(x_i)=L_n(x_i)+W(x_i)H_p(x_i)=y_i$)

Với $W(x) = (x-x_0).(x-x_1).(x-x_n)$

$p = m - (n+1)$

Đạo hàm cấp 1:

$H'_m(x) = L'_n(x) + W(x)H'_p(x) + W'(x)H_p(x)$

Xét tại các điểm x_i:

$$H'_m(x_i) = L'_n(x_i) + \underbrace{2W(x_i)}_{0}H'_p(x_i) + W'(x_i)H_p(x_i) = y_i$$

$\Rightarrow H_p(x_i)$

Đạo hàm cấp 2:

$H''_m(x) = L''_n(x) + 2W'(x)H''_p(x) + W''(x)H_p(x) + W(x)H''_p(x)$

Xét tại các điểm x_i:

$$H''_m(x_i) = L''_n(x_i) + 2W'(x_i)H'_p(x_i) + W''(x_i)H_p(x_i) + \underbrace{W(x_i)H''_p(x_i)}_{0}$$

$= y''_i$

$\Rightarrow H'_p(x_i)$

Tương tự: Đạo hàm đến cấp k suy ra $H_p^{(k-1)}(x_i)$

Ta xác định hàm $H_p(x)$ thỏa mãn:

x_i	x_0	x_1	...	x_n
$H_p(x_i)$	h_0	h_1	...	h_n
$H'_p(x_i)$	h'_0	h'_1	...	h'_n
...	...	...	...	...
$H_p^{(k-1)}(x_i)$	$h_0^{(k-1)}$	$h_1^{(k-1)}$	...	$h_n^{(k-1)}$

Về bản chất, bài toán tìm hàm $H_p(x)$ hoàn toàn giống bài toán tìm hàm $H_m(x)$. Tuy nhiên ở đây bậc của nó giảm đi (n+1) và giả thiết về đạo hàm giảm đi một cấp.

Tiếp tục giải tương tự như trên, cuối cùng đưa về bài toán tìm hàm nội suy Lagrange (không còn đạo hàm). Sau đó thay ngược kết quả ta được hàm nội suy Hecmit cần tìm $H_m(x)$.

Ví dụ 4.4: Tìm hàm nội suy của hàm f(x) thoả mãn:

x_i	0	1	3
$f(x_i)$	4	2	0
$f'(x_i)$	5	-3	

Giải:

Hàm nội suy cần tìm là đa thức $H_4(x)$.

$H_4(x) = L_2(x) + W(x)H_1(x)$

$W(x) = (x-0).(x-1).(x-3) = x^3 - 4x^2 + 3x$

$$L_2(x) = \frac{4(x-1)(x-3)}{3} + 2\frac{x(x-3)}{-2} = \frac{1}{3}\left(x^2 - 7x + 12\right)$$

$$H'_4(x) = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3} + \left(3x^2 - 8x + 3\right)H_1(x) + W(x)H'_1(x)$$

$$H'_4(0) = -\frac{7}{3} + 3H_1(0) = 5 \Rightarrow H_1(0) = \frac{22}{9}$$

$$H'_4(1) = -\frac{5}{3}x - 2H_1(1) = -3 \Rightarrow H_1(1) = \frac{2}{3}$$

Tìm hàm $H_1(x)$ thỏa mãn

x_i	0	1
$H_1(x_i)$	22/9	2/3

$$H_1(x) = \frac{22}{9}.\frac{(x-1)}{(0-1)} + \frac{2}{3}.\frac{(x-1)}{(1-0)} = \frac{-16x+22}{9} \Rightarrow H_1(1) = \frac{2}{3}$$

Vậy

$$H_4(x) = \frac{x^2-7x+12}{3} + \frac{x(x-1)(x-3)(-16x+22)}{9}$$

4.6. PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

Giả sử có 2 đại lượng (vật lý, hoá học, …) x và y có liên hệ phụ thuộc nhau theo một trong các dạng đã biết sau:

- y = f(ax + b)
- y = a + bx + cx^2
- y = a + bcosx + csinx

$\Big\}$ Tuyến tính

- y = $a.e^{bx}$
- y = $a.x^{\mathbf{b}}$

$\Big\}$ Phi tuyến tính

nhưng chưa xác định được giá trị của các tham số a, b, c. Để xác định được các tham số này, ta tìm cách tính một số cặp giá trị tương ứng (x_i, y_i), i=1, 2, …,n bằng thực nghiệm, sau đó áp dụng phương pháp bình phương bé nhất.

*** Trường hợp: y = ax + b**

Gọi ε_i sai số tại các điểm x_i

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i$$

Khi đó tổng bình phương các sai số: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

Mục đích của phương pháp này là xác định a, b sao cho S là bé nhất. Như vậy a, b là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Ta có:

$$S = \sum \left(y_i^2 + a^2 + b^2 x_i^2 - 2ay_i - 2bx_i y_i + 2abx_i \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} \left(2a - 2y_i + 2bx_i \right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} \left(2bx_i^2 - 2x_i y_i + 2ax_i \right)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: a, b.

*** Trường hợp y = a + bx + cx^2**

Gọi ε_i là sai số tại các điểm x_i.

$$\varepsilon_i = y_i - a - bx_i - cx_i^2$$

Khi đó tổng bình phương các sai số: $S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$

Các hệ số a, b xác định sao cho S là bé nhất. Như vậy a, b, c là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} na + b\sum_{i=1}^{n} x_i + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được a, b, c.

*** Trường hợp: y = ae^{bx}.**

Lấy Logarit cơ số e hai vế: lny = lna +bx

Đặt Y = lny; A = lna; B = b; X = x.

Ta đưa về dạng: Y = A + BX

Giải hệ phương trình ta được A, B => a = e^A, b = B

*** Trường hợp y = ax^b.**

Lấy Logarit cơ số 10 hai vế: logy = loga + blogx

Đặt Y = logy; A = loga; B = b; X = logx

Ta đưa về dạng: Y = A + BX

Giải hệ phương trình ta được A, B => $a = 10^A$, b = B.

Ví dụ 4.5: Cho biết các cặp giá trị của x và y theo bảng sau:

x_i	0,65	0,75	0,85	0,95	1,15
y_i	0,96	1,06	1,17	1,29	1,58

Lập công thức thực nghiệm của y dạng ae^{bx}.

<u>Giải</u>

Ta có: $y = ae^{bx}$

Lấy Logarit cơ số e hai vế: lny = lna + bx

Đặt Y = lny; A = lna; B = b; X = x.

Ta đưa về dạng: Y = A + BX

$X_i = x_i$	0,65	0,75	0,85	0,95	1,15
$Y_i = \ln y_i$	-0,04	0,06	0,18	0,25	0,46

ΣX_i	ΣX_i^2	$\Sigma X_i Y_i$	ΣY_i
4,35	3,93	0,92	0,89

Phương pháp bình phương bé nhất: A, B là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} nA + B\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ A\sum_{i=1}^{n} X_i + B\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5A + 4.35B = 0.89 \\ 4.35A + 3.93B = 0.92 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được: A = -0.69, B = 1.

Suy ra: $a = e^A = 1/2$, b = B =1.

Vậy $f(x) = 1/2\ e^x$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 4

1. Nêu công thức nội suy Lagrange.
2. Nêu công thức nội suy Lagrange với các mối cách đều.
3. Nêu công thức nội suy Newton.
4. Nêu công thức nội suy tổng quát.
5. Trình bày phương pháp bình phương bé nhất với trường hợp f là hàm tuyến tính bậc nhất f(x) = ax + b.
6. Trình bày phương pháp bình phương bé nhất với trường hợp f là hàm tuyến tính bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.
7. Trình bày phương pháp bình phương bé nhất với trường hợp f là hàm phi tuyến tính dạng $f(x) = ae^{bx}$.
8. Trình bày phương pháp bình phương bé nhất với trường hợp f là hàm phi tuyến tính dạng $f(x) = ax^b$.
9. Cho bảng giá trị hàm

x	1,50	1,54	1,56	1,60	1,63	1,70
y	3,873	3,924	3,950	4,000	4,037	4,123

Sử dụng công thức nội suy Lagrăng tìm giá trị hàm tại các điểm:
a) 1,52.
b) 1,55.
c) 1,58.
d) 1,61.

10. Cho bảng giá trị hàm

x	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
y	0,5652	0,6375	0,7147	0,7973	0,8861	0,9817	1,0848	1,1964	1,3172	1,4482	1,5906

Sử dụng công thức nội suy Newton xác định giá trị hàm tại các điểm:
a) 1,0113.
b) 1,0428.
c) 1,9592.
d) 1,9728.

11. Cho giá trị của hai đại lượng x, y trong bảng sau:

i	1	2	3	4	5
x_i	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y_i	-0,80	-0.97	-0,98	1,07	3,66

Tìm xấp xỉ hàm dưới dạng bậc 2: $y = ax^2 + bx + c$.

12. Cho bảng giá trị hàm

x	19	22	25	28	32	35
y	0,66	0,367	0,223	0,14	0,084	0,06

Tìm hàm xấp xỉ bằng phương pháp bình phương bé nhất sau đó đánh giá sai số của hàm xấp xỉ nếu:

13. Quan hệ giữa y và x là tuyến tính: $y = ax + b$;
14. Quan hệ giữa y và x là tam thức bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$;
15. Quan hệ giữa y và x là hàm mũ: $y = ae^{bx}$.
16. Cho bảng số liệu:

x	2	3	4
y	16	26,5	211,5

Hãy lập đa thức nội suy Lagrăng tương ứng.

17. Hai đại lượng x và y phụ thuộc theo quy luật $y = ax + b$. Hãy xác định a, b bằng phương pháp bình phương bé nhất, biết:

x	-1	0	1	3
y	0,5	1	1,5	2,5

18. Cho hàm số f(x) thỏa mãn:

x	0	2	4
y	5	-2	1

Xây dựng hàm nội suy Newton.

19. Cho hàm số f(x) thỏa mãn:

x	-1	0	1	2
y	3	1	-2	4

Xây dựng hàm nội suy Newton.

20. Cho hàm số f(x) thỏa mãn:

x	1	2	3	4
y	17	27,5	76	210,5

Xây dựng hàm nội suy Newton.

21. Cho hàm số f(x) thỏa mãn:

x	1	2	3	4	5
y	3	2	7	-1	0

Xây dựng hàm nội suy Lagrăng của f(x), tính f(3,5).

22. Cho hàm số f(x) thỏa mãn:

x	1	2	3	4	7
y	17,0	27,5	76	210,5	1970

Xây dựng hàm nội suy Lagrăng của f(x), tính f(5).

CHƯƠNG.5. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

5.1. TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM

Người ta thường dùng một số phương pháp để tính gần đúng đạo hàm của hàm f(x) tại x trong đó phương pháp áp dụng đa thức nội suy thường được dùng nhất.

Giả sử người ta phải tính xấp xỉ đạo hàm của hàm số f(x) trên đoạn (a,b). Trước hết người ta thay hàm f(x) bằng đa thức nội suy P(x), sau đó lấy đạo hàm P'(x) và coi là xấp xỉ của đạo hàm f'(x).

Ví dụ 5.1: Giả sử ta xác định được đa thức nội suy là:

$P_3(x) = 8x^3 - 29x + 5$

Khi đó, đạo hàm $P_3'(x) = 24x^2 - 29$ được xem là xấp xỉ của f'(x).

5.2. TÍNH GẦN ĐÚNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Xét hàm số f(x) liên tục trên [a,b], nếu xác định được nguyên hàm F(x) ta có công thức tính tích phân:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nhưng trong đa số các trường hợp ta không xác định được nguyên hàm hoặc không xác định được biểu thức của f(x) mà chỉ nhận được các giá trị của nó tại những điểm rời rạc. Trong trường hợp như vậy ta có thể sử dụng các công thức gần đúng sau để tính tích phân:

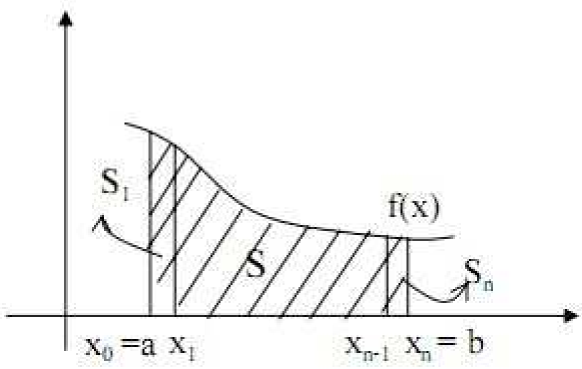
- Công thức hình thang.
- Công thức Parabol.
- Công thức Newton - Cotet.

5.2.1. *Công thức hình thang*

Chia [a, b] thành n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/n theo các điểm chia: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_n = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0=a}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = S$$

S là diện tích giới hạn bởi đường cong f(x), x = a, x = b, và trục x.



Xét trên $[x_0, x_1]$, ta xem đường cong f(x) là đường thẳng:

$$S_1 \approx S_{h.thang} = \frac{1}{2}h\left(y_0 + y_1\right)$$

Tương tự:

$$S_2 \approx \frac{1}{2}h\left(y_1 + y_2\right)$$

…

$$S_n \approx \frac{1}{2}h\left(y_{n-1} + y_n\right)$$

Vậy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}h\left(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{n-1} + y_n\right)$$

5.2.2. ***Công thức Parabol***

Chia [a, b] thành 2n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/2n theo các điểm chia: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_{2n} = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$$

Xét trên $[x_0, x_2]$ xem đường cong f(x) là Parabol (nội suy bậc 2 của 3 điểm x_0, x_1, x_2):

$$f(x) \approx L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)dx$$

Thay $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h$ vào ta có:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Tương tự:

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Vậy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + ... + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

Ví dụ 5.2:

Tính tích phân sau theo 3 cách:

$$I = \int_1^5 \frac{dx}{1+x^2}$$

<u>Giải:</u>

Cách 1: $I = \int_1^5 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^5 = \arctan 5 - \frac{\pi}{4} \approx 0.588$

Cách 2: Chia [1,5] thành 4 đoạn thẳng bằng nhau (h = 1) với các điểm chia:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1/2	1/5	1/10	1/17	1/26

Theo công thức hình thang:

I ≈ (1/2 + 2/5 +2/10 + 2/17 +1/26)/2 ≈ 0.628

Cách 3: Công thức Parabol:

I ≈ (1/2 + 4/5 +2/10 + 4/17 +1/26)/3 ≈ 0.591

5.2.3. *Công thức Newton-Cotet*

Chia [a, b] thành n đoạn bằng nhau với khoảng cách h = (b - a)/n theo các điểm chia: $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, ..., $x_n = b$.

Đặt x = a + (b - a)t => dx = (b - a) dt

x_i	a	a + h	a + 2h	…	b
y_i	0	1/n	2/n	…	1

Khi đó:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)t)dt = (b-a)\int_0^1 \phi(t)dt$$

với Φ(t) = f(a + (b - a)t)

Xem Φ(t) là hàm nội suy Lagrange của n + 1 điểm: t_0, t_1, ..., t_n.

$$\phi(t) \approx L_n(t) = y_0 \frac{\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)...(t-1)}{\left(-\frac{1}{n}\right)\left(-\frac{2}{n}\right)...(-1)} + y_1 \frac{(t-0)\left(t-\frac{2}{n}\right)...(t-1)}{\left(\frac{1}{n}-0\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)...\left(\frac{1}{n}-1\right)} + ...$$

$$+ y_n \frac{(t-0)\left(t-\frac{1}{n}\right)...\left(t-\frac{n-1}{n}\right)}{(1-0)\left(1-\frac{1}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}$$

Khi đó: $\int_0^1 \phi(t)dt \approx \int_0^1 L_n(t)dt$

Đặt

$$P_n^i = \int_0^1 \frac{(t-0)\left(t-\frac{1}{n}\right)...\left(t-\frac{i-1}{n}\right)\left(t-\frac{i+1}{n}\right)...(t-1)}{\left(\frac{i}{n}-0\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{n}\right)...\left(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n}\right)\left(\frac{i}{n}-\frac{i+1}{n}\right)...\left(\frac{i}{n}-1\right)} dt$$

Vậy; $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} y_i p_n^i$

Xét n = 1 (h = b - a)

$$P_1^0 = \int_0^1 \frac{t-1}{0-1} dt = -\frac{1}{2}$$

$$P_1^1 = \int_0^1 \frac{t-0}{1-0} dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_1}{2}\right) = \frac{h}{2}(y_0 - y_1)$$ (Công thức hình thang)

Giá trị P_n^i được tra trong bảng sau:

n	P_n^i					
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	9/71	16/45	2/15	16/45	9/70	
5	19/288	25/95	25/144	25/144	25/95	19/288
…	…	…	…	…	…	…

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 5

1. Nêu công thức tính gần đúng đạo hàm trong trường hợp bài toán mốc cách đều.
2. Trình bày công thức hình thang tính gần đúng tích phân xác định.
3. Trình bày công thức Parabol tính gần đúng tích phân xác định.
4. Trình bày công thức Newton-Cotet tính gần đúng tích phân xác định.
5. Tính giá trị đạo hàm cấp 1, cấp 2, nếu giá trị của hàm được cho trong bảng sau:

x_i	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
$y_i = f(x_i)$	0,4000	1,4848	2,6813	3,9975	5,3456	6,2465

6. Tính gần đúng y'(50) của hàm số y = logx dựa vào bảng giá trị đã cho sau:

x_i	50	55	60
$y_i = \log(x_i)$	1,6990	1,7404	1,7782

7. Cho hàm f(x) bởi bảng sau:

x_i	50	55	60	65
$y_i = \log(x_i)$	1,6990	1,7404	1,7782	1,8129

Áp dụng đa thức nội suy tính gần đúng đạo hàm của hàm f(x) tại x = 50 và sso sánh với kết quả tính trực tiếp.

8. Cho hàm f(x) bởi bảng sau:

x_i	0,98	1,00	1,02
$y_i = f(x_i)$	0,7739332	0,7651977	0,7563321

Tính gần đúng đạo hàm của hàm f(x) tại x = 1.

9. Tính giá trị đạo hàm cấp 1 và cấp 2, nếu giá trị của hàm được cho trong bảng sau:

x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$y_i = f(x_i)$	1,266	1,326	1,393	1,469	1,553	1,647

10. Cho hàm y = f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	12,3	11,1	7,2	4,1	6,3	8,8	9,2	10,8	13,1

Tính tích phân: $I = \int_0^8 f(x)dx$ theo công thức hình thang.

11. Trong kĩ thuật ta thường gặp tích phân xác suất: $\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Hãy tính φ(1) theo công thức hình thang nếu chia khoảng tích phân thành 10 phần bằng nhau. Cho bảng giá trị hàm dưới dấu tích phân y = $e^{-\frac{t^2}{2}}$.

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	0,9950	0,9802	0,9560	0,9231	0,8822	0,8353	0,7827	0,7261	0,6670	0,6065

12.

Cho tích phân $$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Bằng cách phân hoạch đoạn [0, 1] thành 4 đoạn bằng nhau, tính gần đúng tích phân trên theo công thức hình thang.

13. Cho tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

a) Bằng cách phân hoạch [0, 1] thành 6 đoạn bằng nhau. Tính gần đúng tích phân đã cho bằng công thức hình thang và công thức Simpson. Đánh giá sai số?

b) Tính gần đúng tích phân trên bằng công thức hình thang với sai số không quá 3.10^{-4}.

14. Cho hàm f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y	1,0000	0,9801	0,9211	0,8253	0,6967

Tính tích phân của hàm sau theo công thức hình thang.

$$I = \int_0^{0,8} f(x)dx$$

15. Cho hàm f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
y	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Tính tích phân của hàm sau theo công thức hình thang.

$$I = \int_0^4 f(x)dx$$

16. Cho hàm f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1,000	0,990	0,962	0,917	0,862	0,800	0,735	0,671	0,609	0,555	0,500

Tính tích phân của hàm sau theo công thức hình thang.

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

17. Cho hàm f(x) dưới dạng bảng sau:

x	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y	1	1/1,1	1/1,2	1/1,3	1/1,4	1/1,5	1/1,6	1/1,7	1/1,8	1/1,9	1/2

Tính tích phân của hàm sau theo công thức hình thang.

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

18. Cho tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

Hãy phân hoạch đoạn [0, 1] thành 10 đoạn bằng nhau rồi tính gần đúng tích phân đã cho bằng công thức hình thang.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ralston A, *A first course in numberical analysis.* McGraw – Hill, NewYork, 2001, 576 pages.

[2] Đỗ Thị Tuyết Hoa, *Giáo trình môn Phương pháp tính*, Đại học Đà Nẵng, 2007, 68 trang.

[3] Phan Văn Hạp, Hoàng Đức Nguyên, Lê Đình Thịnh, *Phương pháp tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1996.

[4] Phan Văn Hạp, Hoàng Đức Nguyên, Lê Đình Thịnh, *Phương pháp tính (phần bài tập)*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1996, 204 trang.

[5] Tạ Văn Đĩnh, *Phương pháp tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2009, 118 trang.

[6] Đặng Quốc Lương, *Phương pháp tính trong kỹ thuật*, NXB Xây Dựng, 2001, 133 trang.

[7] Dương Thủy Vỹ, *Giáo trình Phương pháp tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2007, 180 trang.

[8] Trần Văn Chính, *Phương pháp tính với C++*, NXB Đại học Quốc gia TPHCM, 2008.

[9] Nguyễn Hoài Sơn, *Phương pháp tính ứng dụng trong tính toán Kỹ thuật*, NXB Đại học Quốc gia TPHCM, 2008, 260 trang.

[10] Nguyễn Trọng Khiêm, *Bài giảng Phương pháp tính*, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 2009.

MỤC LỤC

Trang

PHÒNG KHOA HỌC	**GV biên soạn**
Nguyễn Viết Tuấn	**Phạm Thị Ngọc Minh**