

Chương 5: Biểu diễn tín hiệu & hệ thống trong miền tần số rời rạc

Trần Văn Hưng

Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)

Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

5.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N

5.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

Nội dung

5.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N

5.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc

DFT (Discrete Fourier Transform)

Biến đổi Fourier rời rạc của các dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ có chu kỳ N

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

đặt: $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

$$W_N^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$W_N^{-kn} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{kn}$$

$$\text{DFT}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$\tilde{x}(n) \xrightarrow{\text{DFT}} \tilde{X}(k)$$

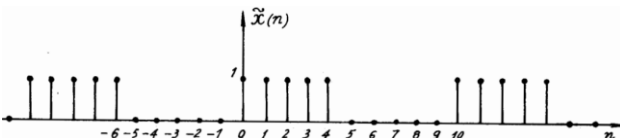
Ví dụ Cho dãy tuần hoàn $\tilde{x}(n)$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & 5 \leq n \leq 9 \end{cases} \quad \text{Với chu kỳ } N = 10$$

Hãy tìm $\tilde{X}(k)$.

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Giải:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$$


$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^4 \tilde{x}(n) W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^4 e^{-j \frac{2\pi}{10} kn} = \frac{1 - e^{-j \frac{2\pi}{10} k 5}}{1 - e^{-j \frac{2\pi}{10} k}} = \frac{2j \sin \frac{\pi k}{2} e^{-j \frac{\pi}{2} k}}{2j \sin \frac{\pi k}{10} e^{-j \frac{\pi}{10} k}}$$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j \pi k \frac{4}{10}} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k} = 5 e^{-j \frac{4\pi}{10} k} \frac{\sin \frac{\pi}{2} k / \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k / \frac{\pi}{10} k}$$

đặt: $\tilde{A}(k) = 5 \frac{\sin \frac{\pi}{2} k / \frac{\pi}{2} k}{\sin \frac{\pi}{10} k / \frac{\pi}{10} k}$

$$\tilde{X}(k) = e^{-j \frac{4\pi}{10} k} \tilde{A}(k) = |\tilde{X}(k)| e^{j \arg[\tilde{x}(k)]} = |\tilde{X}(k)| e^{j \varphi(k)}$$

$$\varphi(k) \equiv \arg[\tilde{X}(k)]$$

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Ví dụ Cho dãy tuần hoàn có chu kỳ $N = 4$ như sau:

$$\tilde{x}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2 & n = 1 \\ 4 & n = 2 \\ 3 & n = 3 \end{cases} \quad \text{Hãy tìm } \tilde{X}(k)$$

Giải:

$$N = 4 \text{ nên ta có: } e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} = e^{-j \frac{\pi}{2} nk} = (-j)^{nk}$$

$$\tilde{X}(0) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} n \cdot 0} = 1 + 2 + 4 + 3 = 10$$

$$\tilde{X}(1) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} n \cdot 1} = 1(-j)^0 + 2(-j)^1 + 4(-j)^2 + 3(-j)^3 = -3 + j$$

$$\tilde{X}(2) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} n \cdot 2} = 1(-j)^0 + 2(-j)^2 + 4(-j)^4 + 3(-j)^6 = 0$$

$$\tilde{X}(3) = \sum_{n=0}^3 \tilde{x}(n) e^{-j \frac{2\pi}{4} n \cdot 3} = 1(-j)^0 + 2(-j)^3 + 4(-j)^6 + 3(-j)^9 = -3 - j$$

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Biểu diễn $\tilde{X}(k)$ dưới dạng modun và argument ta có:

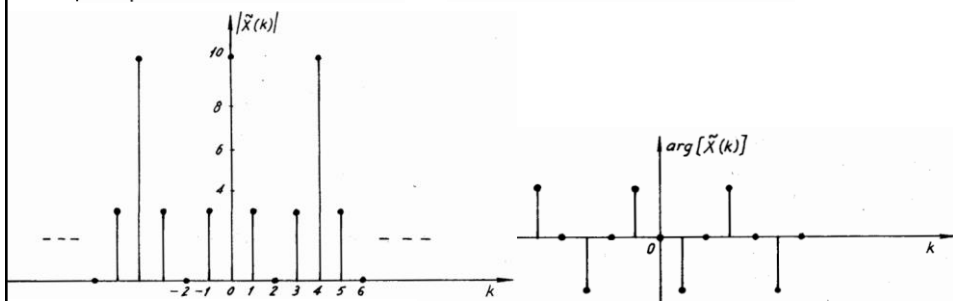
$$\tilde{X}(k) = |\tilde{X}(k)|e^{j\arg[\tilde{X}(k)]}$$

$$|\tilde{X}(0)| = 10 \quad \arg[\tilde{X}(0)] = 0$$

$$|\tilde{X}(1)| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \arg[\tilde{X}(1)] = \arctg\left(\frac{1}{-3}\right) = -\arctg\frac{1}{3}$$

$$|\tilde{X}(2)| = 0 \quad \arg[\tilde{X}(2)] = 0$$

$$|\tilde{X}(3)| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} \quad \arg[\tilde{X}(3)] = \arctg\left(\frac{-1}{-3}\right) = \arctg\frac{1}{3}$$



5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Định nghĩa biến đổi Fourier rời rạc ngược

IDFT (Inverse Discrete Fourier Transform)

Biến đổi Fourier rời rạc ngược được định nghĩa

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad IDFT[\tilde{X}(k)] = \tilde{x}(n)$$

$$\text{hoặc: } \tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-kn} \quad \tilde{X}(k) \xrightarrow{IDFT} \tilde{x}(n)$$

TÍNH CHẤT

Tính tuyến tính $\tilde{x}_3(n) = a\tilde{x}_1(n) + b\tilde{x}_2(n)$
 $DFT[\tilde{x}_3(n)] = \tilde{X}_3(k) = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$

Tính chất trễ $DFT[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$
 $DFT[\tilde{x}(n - n_0)] = W_N^{-kn_0} \tilde{X}(k)$

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

Tích chập tuần hoàn

tích chập tuyến tính:

$$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

Tích chập tuần hoàn của hai dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)$ và $\tilde{x}_2(n)$ có chu kỳ N là một dãy $\tilde{x}_3(n)$ tuần hoàn có chu kỳ N

$$\tilde{x}_3(n) = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$

$$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \left(\tilde{*} \right)_N \tilde{x}_2(n)$$

$$\tilde{X}_3(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$$

5.1 DFT với dãy tuần hoàn chu kỳ N

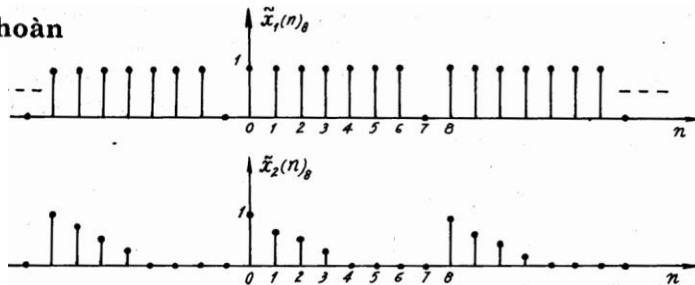
Tích chập tuần hoàn

Ví dụ

$\tilde{x}_1(n)_8$ và $\tilde{x}_2(n)_8$

$N = 8$

$\tilde{x}_3(n) = \tilde{x}_1(n) \left(\tilde{*} \right)_8 \tilde{x}_2(n)$



Sau khi tính toán ta thu được kết quả sau:

$$\tilde{x}_3(0) = 1,75 \quad \tilde{x}_3(1) = 2 \quad \tilde{x}_3(2) = 2,25 \quad \tilde{x}_3(3) = 2,5$$

$$\tilde{x}_3(4) = 2,5 \quad \tilde{x}_3(5) = 2,5 \quad \tilde{x}_3(6) = 2,5 \quad \tilde{x}_3(7) = 1,5$$

Nội dung

5.1 DFT đối với dãy tuần hoàn chu kỳ N

5.2 DFT đối với dãy có chiều dài N

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Cặp biến đổi Fourier rời rạc (*DFT*) đối với các dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn N được định nghĩa

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_n^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases} \quad \begin{array}{l} DFT [x(n)] = X(k) \\ x(n) \xrightarrow{DFT} X(k) \end{array}$$

$$x(n) = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_n^{-kn} & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases} \quad \begin{array}{l} IDFT [X(k)] = x(n) \\ X(k) \xrightarrow{IDFT} x(n) \end{array}$$

$$X(k) = |X(k)|e^{j\varphi(k)} \quad |X(k)| : \text{Gọi là phổ rời rạc biên độ.}$$

$$\varphi(k) = \arg [X(k)] \quad \varphi(k) : \text{Gọi là phổ rời rạc pha.}$$

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Ví dụ

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn $x(n)$ sau đây

$$x(n) = \delta(n)$$

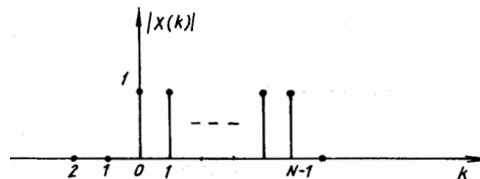
Giải

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) W_N^{kn} = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$|X(k)| = \begin{cases} 1 & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$\varphi(k) = 0 \quad \forall k$$



5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Ví dụ

Hãy tìm DFT của dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x(n) = \begin{cases} a^n & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Giải :

$$X(k) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn} & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & k \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} (a W_N^k)^n = \frac{1 - (a W_N^k)^N}{1 - a W_N^k} \quad X(k) = |X(k)| e^{j\varphi(k)}$$

$$\text{mà: } W_N^{kn} = 1 \quad \forall k$$

$$\text{Vậy: } X(k) = \frac{1 - a^N}{1 - a W_N^k}$$

$$\begin{aligned} |X(k)| &= \frac{1 - a^N}{\sqrt{\left(1 - a \cos \frac{2\pi}{N} k\right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{2\pi}{N} k}} \\ &= \frac{1 - a^N}{\sqrt{1 - 2a \cos \frac{2\pi}{N} k + a^2}} \end{aligned}$$

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

CÁC TÍNH CHẤT

Tính tuyến tính

$$x_3(n) = ax_1(n) + bx_2(n) \quad \longrightarrow \quad X_3(k) = aX_1(k) + bX_2(k)$$

$$L[x_1(n)] = N_1$$

$$L[x_2(n)] = N_2$$

$$L[x_3(n)] = N_3 = \max(N_1, N_2)$$

Trễ vòng

trễ tuyến tính

trễ tuần hoàn có chu kỳ N

Ví dụ Cho dãy $x(n)$ sau;

$$x(n) = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

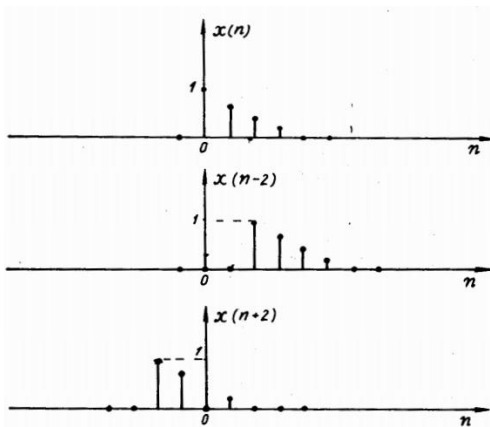
Hãy tìm trễ tuyến tính $x(n-2)$ và $x(n+2)$

Ví dụ Cho dãy tuần hoàn chu kỳ $N=4$ $\tilde{x}(n)_4$

$$\tilde{x}(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm $\tilde{x}(n-2)_4$ và $\tilde{x}(n+2)_4$ sau đó lấy ra một chu kỳ của hai dãy này.

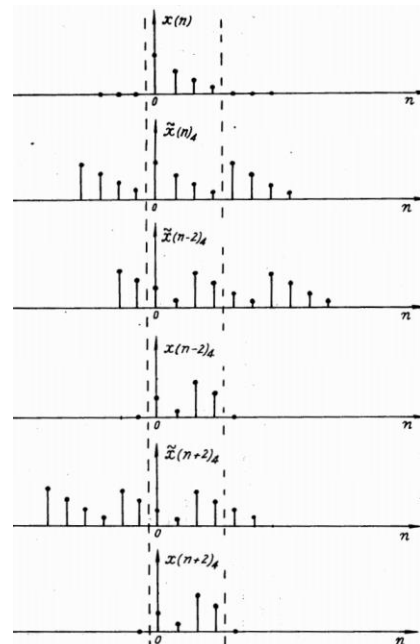
5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N



$x(n - n_0)$: Trễ tuyến tính

$\tilde{x}(n - n_0)_N$: Trễ tuần hoàn chu kỳ N

$x(n - n_0)_N$: Trễ vòng với chiều dài N.



5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

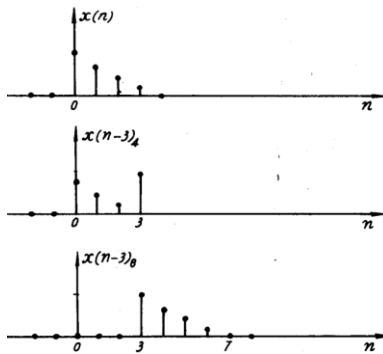
Ví dụ Cho hai dãy có chiều dài hữu hạn như sau:

$$x_1(n)_4 = x_2(n)_8 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

- Hãy vẽ $x_1(n-3)_4$ và $x_2(n-3)_8$.

- Hãy tìm $DFT[x_1(n-3)_4]$ và $DFT[x_2(n-3)_8]$.

Giải :



$$X_1(k)_4 = DFT[x_1(n)_4]$$

$$X_1(0)_4 = \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{0n} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{2}$$

$$X_1(1)_4 = \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{1n} = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

$$X_1(2)_4 = \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{2n} = \frac{1}{2}$$

$$X_1(3)_4 = \sum_{n=0}^3 x_1(n)_4 W_4^{3n} = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Áp dụng tính chất trễ ta có:

$$\begin{aligned} DFT[x_1(n-3)_4] &= W_4^{3k} X_1(k)_4 = X'_1(k)_4 = e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} X_1(k)_4 \\ &= (-j)^{3k} X_1(k)_4 = (j)^k X_1(k)_4 \end{aligned}$$

$$X'_1(0)_4 = 2\frac{1}{2}$$

$$X'_1(1)_4 = j\left(\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$X'_1(2)_4 = j^2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$X'_1(3)_4 = j^3\left(\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Để tìm $DFT[x_2(n-3)_8]$ trước tiên ta tìm $DFT[x_2(n)_8]$ sau đó áp dụng tính chất trễ:

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Tích chập vòng

Tích chập vòng của hai dãy không tuần hoàn $x_1(n)_N$ và $x_2(n)_N$

$$x_3(n)_N = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)_N \cdot x_2(n-m)_N$$

$$= x_1(n)_N (\tilde{*})_N x_2(n)_N$$

$(*)_N$ là tích chập vòng chiều dài N.

$$X_3(k)_N = X_1(k)_N \cdot X_2(k)_N$$

$$X_1(k)_N = DFT[x_1(n)_N]$$

$$X_2(k)_N = DFT[x_2(n)_N]$$

$$X_3(k)_N = DFT[x_3(n)_N]$$

Ví dụ Cho hai dãy không tuần hoàn có chiều dài hữu hạn $N = 4$

$$x_1(n)_4 = \delta(n-1)$$

$$x_2(n)_4 = \begin{cases} 1 - \frac{n}{4} & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tính tích chập vòng chiều dài $N = 4$ của hai dãy này

Giải:

$$x_3(n)_4 = x_1(n)_4 (*)_4 x_2(n)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(n-m)_4$$

5.2 DFT với dãy không tuần hoàn chiều dài N

Tích chập vòng

$$x_3(0)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(0-m)_4$$

$$x_3(1)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(1-m)_4$$

$$x_3(2)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(2-m)_4$$

$$x_3(3)_4 = \sum_{m=0}^3 x_1(m)_4 x_2(3-m)_4$$

