Chương 2: Biểu diễn hệ thống LTI trên miền thời gian

Trần Văn Hưng
Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)
Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

2.1 Hệ thống bất biến theo thời gian LTI

2.2 Phép chập

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTSP

2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

2.6 Tương quan tín hiệu và ứng dụng

Nội dung

2.1 Hệ thống bất biến theo thời gian LTI

2.2 Phép chập

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTSP

2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

2.6 Tương quan tín hiệu và ứng dụng

2.1 Hệ thống bất biến theo thời gian LTI

LTI: Linear Time-Invariant System

❖ Hệ thống rời rạc tuyến tính

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Hệ thống}} \longrightarrow y(n)$$

x(n): dãy vào, hay còn gọi là kích thích

y(n): dãy ra, là đáp ứng của hệ thống với kích thích đang khảo sát

<u>Đặc trưng của hệ thống:</u> toán tử T là nhiệm vụ biến dãy vào x(n) thành dãy ra y(n)

$$T[x(n)] = y(n)$$

$$x(n) \xrightarrow{T} y(n)$$

Đối với HTTT, toán tử T thỏa mãn nguyên lý xếp chồng

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n)$$

❖ Đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Ta có: $y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)]$$

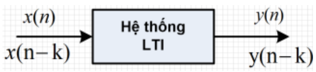
Đặt: $h_k(n) = T[\delta(n-k)]$

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n)}$$

$h_k(n)$ được gọi là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính

2.1 Hệ thống bất biến theo thời gian LTI

- **Hệ thống tuyến tính bất biến LTI (Linear and Invariant Time)**



y(n) là đáp ứng ra tương ứng với kích thích x(n)
y(n-k) là đáp ứng ra tương ứng với kích thích x(n-k)

Nếu biến số là thời gian, ta nói hệ thống bất biến theo thời gian
Ví dụ: y(n) = 2x(n) +3x(n-1) là hệ thống TTBB

- **Đáp ứng xung của HT TTBB**

Với hệ thống TTBB, ta có:

$$T[\delta(n)] = h(n)$$
$$T[\delta(n-k)] = h(n-k) = h_k(n)$$

$$\Rightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h_k(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Với hệ thống TTBB, ta có:

$h_k(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính
$h(n)$ là đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n)*h(n)$$

Tích chập này chỉ đúng với HT TTBB, vì chỉ được định nghĩa cho HT này

gọi là tích chập của $x(n)$ và $h(n)$ được ký hiệu bởi dấu *

Nội dung

2.1 Hệ thống bất biến theo thời gian LTI

2.2 Phép chập

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

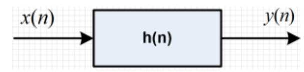
2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTSP

2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

2.6 Tương quan tín hiệu và ứng dụng

2.2 Phép chập

❖ PP tính: có 2 phương pháp



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = x(n)*h(n)$$

➢ PP Tính trực tiếp

VD: Cho HT TTBB có x(n) và h(n) như sau:

$$x(n) = a^n u(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$h(n) = u(n)$$

Hãy xác định đáp ứng ra y(n)

Giải:

$$y(n) = x(n)*h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a^k u(k)u(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Do n<0 thì x(n)=0 và h(n)=0 nên y(n)=0

$$y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}u(n)$$

$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$	$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \lvert a\rvert < 1$
$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$	$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$

2.2 Phép chập

❖ PP tính: có 2 phương pháp

➢ PP đồ thị: các bước cụ thể như sau

- **Bước 1**: Đổi biến n thành biến k, x(n) → x(k), h(n) → h(k). Cố định x(k) lại
- **Bước 2**: Quay h(k) đối xứng qua trục tung để thu được h(-k), tức h(0-k) ứng với n = 0
- **Bước 3**: Dịch chuyển h(-k) theo từng giá trị n, nếu n>0 dịch chuyển về bên phải, nếu n<0 dịch chuyển về phía trái ta thu được h(n-k).
- **Bước 4:** Thực hiện tính x(k).h(n-k) theo từng mẫu đối với tất cả các giá trị của k.
- **Bước 5**: Cộng các giá trị thu được ta có một giá trị của y(n), tổng hợp các kết quả ta có dãy y(n) cần tìm.

Chú ý: Khi tính toán có thể dùng đồ thị hoặc lập bảng

2.2 Phép chập

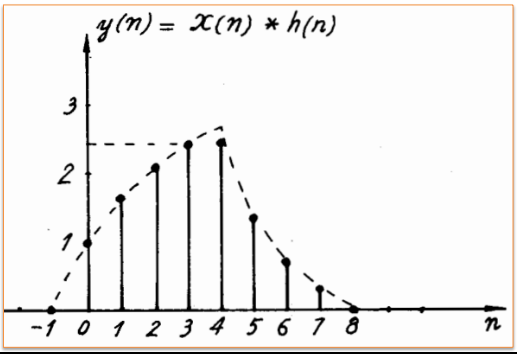
❖ Ví dụ PP đồ thị

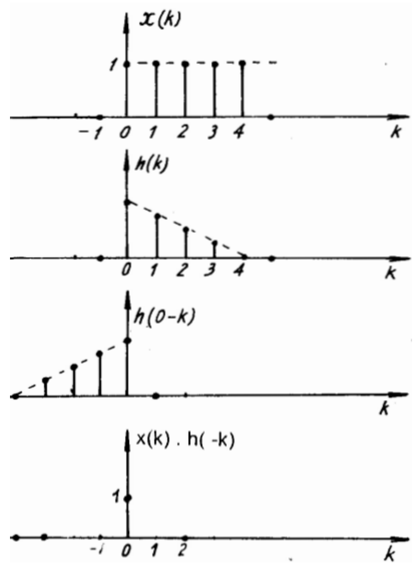
Cho HT TTBB có x(n) và h(n)

$$x(n) = rect_5(n)$$

$$h(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & \text{các giá trị còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng ra y(n)





y(0)=1 y(1)=1,75 y(2)=2,25
y(3)=2,5 y(4)=2,5 y(5)=1,5
y(6)=0,75 y(7)=0,25
Các giá trị khác của y(n) đều = 0

2.2 Phép chập

❖ Ví dụ PP đồ thị (lập bảng)

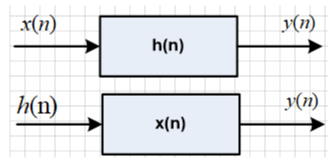
k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x(k)				1	1	1	1	1				
h(k)				1	0.75	0.5	0.25	0				
h(-k)	0.25	0.5	0.75	1								y(0)=1
h(1-k)		0.25	0.5	0.75	1							y(1)=1,75
h(2-k)			0.25	0.5	0.75	1						y(2)=2,25
h(3-k)				0.25	0.5	0.75	1					y(3)=2,5
h(4-k)					0.25	0.5	0.75	1				y(4)=2,5
h(5-k)						0.25	0.5	0.75	1			y(5)=1,5
h(6-k)							0.25	0.5	0.75	1		y(6)=0,75
h(7-k)								0.25	0.5	0.75	1	y(7)=0,25

2.2 Phép chập

❖ Tính chất

- **Giao hoán:**

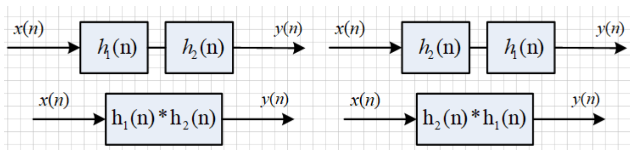
$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$



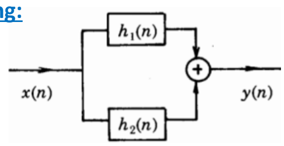
- **Kết hợp:**

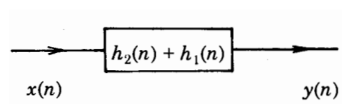
$$y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] = [x(n) * h_1(n)] * h_2(n)$$

Nối tiếp:



Song song:

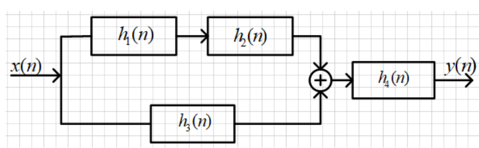




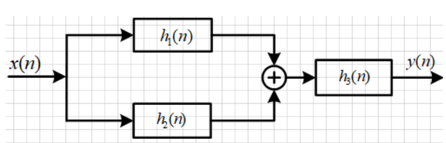
2.2 Phép chập

❖ Ví dụ:

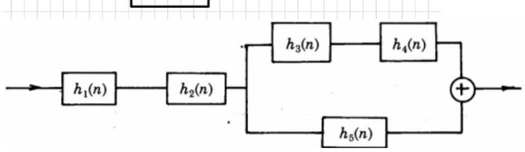
A)



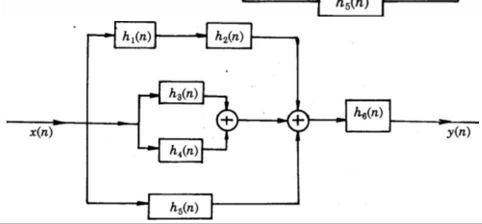
B)



C)



D)



Nội dung

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

- Hệ thống TTBB đặc trưng bởi đáp ứng xung h(n), do vậy các tính chất của hệ thống được đánh giá thông qua h(n)
- **Hệ thống TTBB & nhân quả:**
  - Hệ thống TTBB là nhân quả nếu h(n) thỏa mãn: **h(n)=0** $\forall n < 0$
- **Hệ thống TTBB & ổn định:**
  - Hệ thống TTBB là ổn định nếu h(n) thỏa mãn: $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

Ví dụ 01:

1) Xét tính nhân quả của 2 hệ thống sau:

$$y_1(n) = 2\,x(n-1) + x(n-2)$$
$$y_2(n) = 3\,x(n-1) + 2\,x(n-2) + x(n+2)$$

Đặt $x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$.

Ta có : $h_1(n) = 2\,\delta(n-1) + \delta(n-2)$

$h_2(n) = 3\,\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n+2)$

$h_1(n)$ là nhân quả.
$h_2(n)$ là không nhân quả.

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

➢ Ví dụ 02:

2) Xét tính nhân quả và tính ổn định của HT: $h(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$

Giải :

- Tính nhân quả :

$$h(n)=\begin{cases} a^n & n\geq 0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$ Hệ thống này là nhân quả.

- Tính ổn định :

$$S=\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|=\sum_{k=0}^{\infty}|a|^k$$

Nếu $|a|<1$ thì chuỗi này hội tụ về số hữu hạn :

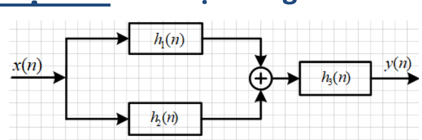
$$S=\frac{1}{1-|a|}$$

Nếu $|a|\geq 1$ thì chuỗi này phân kỳ.

Vậy hệ thống này ổn định nếu $|a|<1$ và hệ thống sẽ không ổn định nếu $|a|\geq 1$

2.3 Đánh giá hệ thống LTI qua đáp ứng xung

➢ Ví dụ 03: Cho hệ thống TTBB có sơ đồ



$h_1(n)=u(n)-u(n-3)+2\delta(n-2)$

$h_2(n)=\delta(n)+2rect_2(n-2)$

$h_3(n)=[1\ 3\ \ 1\ 0\ 2]$

a) Xác định đáp ứng xung h(n) của hệ thống

b) Xét tính ổn định và tính nhân quả của hệ thống

c) Cho kích thích vào có dạng x(n) = $\delta(n)-2\delta(n-2)$

Gợi ý: $h(n)=\left[h_1(n)+h_2(n)\right]*h_3(n)$

Nội dung

2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTST

❖ **Phương trình SPTT HSH**

- **PTSP tuyến tính:** về mặt toán học, kích thích x(n) và đáp ứng y(n) của hầu hết các hệ thống tuyến tính thỏa mãn PTSP:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$$

Ở đây N và M là các số nguyên dương. N gọi làbậc của phương trình sai phân.

các hệ số $a_k(n)$ và $b_r(n)$ sẽ biểu diễn toàn bộ hành vi của hệ thống đối với một giá trị n cho trước

- **PTSP tuyến tính hệ số hằng:**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)}$$

Tập hợp các hệ số a_k và b_r sẽ biểu diễn một hệ thống tuyến tính bất biến

$$a_0 y(n) + \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \longrightarrow y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-r)$$

2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTST

❖ Căn cứ vào bậc PTSP TT HSH:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$\boxed{N=0}$: hệ thống không đệ quy

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r); \qquad a_0 \neq 0$$

$$\text{hoặc}: y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r); \qquad a_0 = 1$$

$$y(n) = F[x(n), x(n-1), ..., x(n-M)]$$

So sánh với công thức:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} h(k) x(n-k) \longrightarrow h(k) = b_k$$

$$L[h(n)] = M + 1$$

Hệ thống này gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn, FIR – Finite duration Impulse Response system

2.4 Biểu diễn hệ thống LTI qua PTST

$\boxed{N>0}$: hệ thống đệ quy

$$y(n) = \sum_{r=0}^{M} \frac{b_r}{a_0} x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{a_0} y(n-k); \qquad a_0 \neq 0$$

$$= \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \quad ; \qquad a_0 = 1$$

$$y(n) = F[y(n-1), y(n-2), ..., y(n-N), x(n), x(n-1), ..., x(n-M)]$$

Hệ thống này gọi là hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn, IIR – Infinite duration Impulse Response system

$\boxed{N>0 \text{ và } M=0}$ **Hệ thống đệ quy thuần tuý** (Purely recursive system)

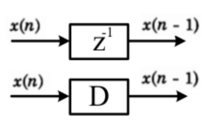
$$y(n) = b_0 x(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k), \qquad a_0 = 1$$

$$y(n) = F[x(n), y(n-1), y(n-2), ..., y(n-N)]$$

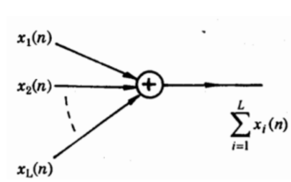
Nội dung

2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

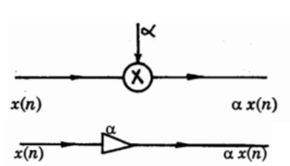
❖ **Các phần tử thực hiện hệ thống:**



Bộ trễ
(*D* : Delay : Trễ)



Bộ cộng



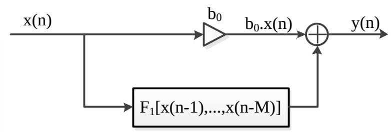
Bộ nhân với hằng số

2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

❖ **Thực hiện hệ thống:**

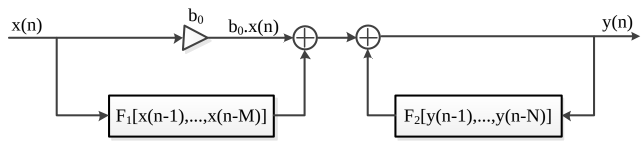
Hệ thống không đệ quy :

$$y(n) = b_0x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1),\ldots,x(n-M)]}$$



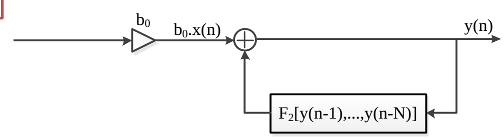
Hệ thống đệ quy :

$$y(n) = b_0x(n) + \underbrace{\sum_{r=1}^{M} b_r x(n-r)}_{F_1[x(n-1),\ldots,x(n-M)]} + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(-a_k)y(n-k)}_{F_2[y(n-1),\ldots,y(n-N)]}$$



Hệ thống đệ quy thuần tuý :

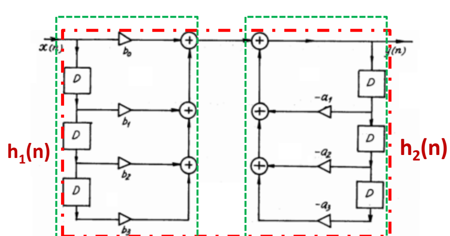
$$y(n) = b_0x(n) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N}(-a_k)y(n-k)}_{F_2[y(n-1),\ldots,y(n-N)]}$$



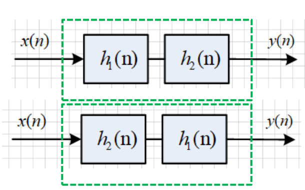
2.5 Sơ đồ thực hiện hệ thống

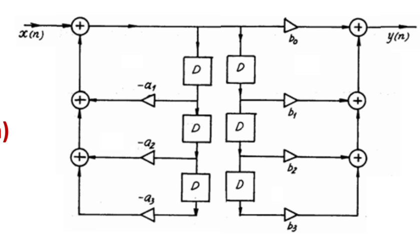
❖ **Ví dụ:** Hãy vẽ sơ đồ cấu trúc của hệ thống rời rạc

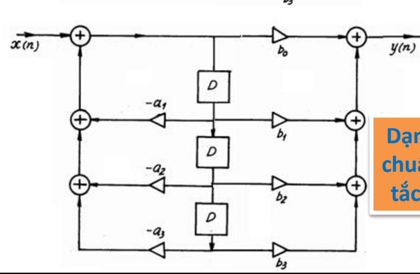
$$y(n) = -\sum_{k=1}^{3} a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^{3} b_r x(n-r)$$



Dạng chuẩn tắc 1







Dạng chuẩn tắc 2

Nội dung

2.6 Tương quan tín hiệu và ứng dụng

❖ Tương quan tín hiệu

- Trong xử lý tín hiệu luôn phải so sánh các tín hiệu với nhau

<u>**Ví dụ: Tín hiệu rada**</u>

Rada phát tín hiệu tìm mục tiêu x(n)

Nếu có mục tiêu, rada thu được tín hiệu: $A.x(n-n_0)$

Tín hiệu nhiễu: $\gamma(n)$

Nếu có mục tiêu: $y(n) = Ax(n - n_0) + \gamma(n)$

Không có hoặc không phát hiện được mục tiêu: $y(n) = \gamma(n)$

> - **So sánh x(n) và y(n) sẽ phát hiện có mục tiêu hay không**
> - **Xác định thời gian trễ $D=n_0T_s$ sẽ xác định được khoảng cách**

- **Tương quan chéo**

Tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$

$$\boxed{r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)y(m-n)} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- **Tự tương quan**

nếu ta có $x(n) \equiv y(n)$

hàm tự tương quan được định nghĩa

$$\boxed{r_{xx} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)x(m-n)}$$

2.6 Tương quan tín hiệu và ứng dụng

❖ **Ví dụ:**

- **VD1:** Cho hai tín hiệu $x(n)$ và $y(n)$ sau đây

$$x(n) = rect_5(n)$$

$$y(n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{n}{4} & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

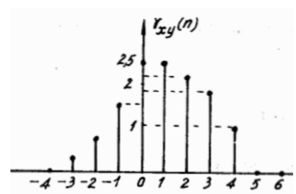
Hãy tìm tương quan chéo của $x(n)$ và $y(n)$.

$r_{xy}(0) = 2{,}5$
$r_{xy}(1) = 2{,}5$
$r_{xy}(2) = 2{,}25$
$r_{xy}(3) = 1{,}75$
$r_{xy}(4) = 1$
$r_{xy}(5) = 0$
$r_{xy}(-1) = 1{,}5$
$r_{xy}(-2) = 0{,}75$
$r_{xy}(-3) = 0{,}25$
$r_{xy}(-4) = 0$

- **VD2:**

Cho dãy : $x(n) = rect_3(n)$

Hãy tìm hàm tự tương quan r_{xx} và cho nhận xét về kết quả thu được.



Thảo luận