TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HỒ CHÍ MINH

KHOA KHOA HỌC CƠ BẢN

BỘ MÔN TOÁN

****

Trương Vĩnh An - Phạm Văn Hiển - Lê Xuân Trường

GIÁO TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

TRÖÔØNG ÑAÏI HOÏC SÖ PHAÏM KYÕ THUAÄT TP. HOÀ CHÍ MINH
KHOA KHOA HOÏC CÔ BAÛN
BOÄ MOÂN TOAÙN

****

Tröông Vónh An - Phaïm Vaên Hieån - Leâ Xuaân Tröôøng

GIAÙO TRÌNH

PHÖÔNG PHAÙP TÍNH

LÖU HAØNH NOÄI BOÄ

GIÁO TRÌNH

PHƯƠNG PHÁP TÍNH

Trương Vĩnh An - Phạm Văn Hiển - Lê Xuân Trường

GIỚI THIỆU

Các bài toán ứng dụng trong kinh tế, kỹ thuật … thường là không "đẹp" và không thể giải theo các phương pháp tính đúng. Người ta cần các phương pháp giải có tính chất giải thuật và, nếu các kết quả là gần đúng thì sai số phải "đủ nhỏ" (thường là hội tụ về 0). Cho dù các phương pháp đó đòi hỏi lượng phép tính lớn, thì với máy tính, bài tóan dễ dàng được giải quyết. Một trong các ngành học nghiên cứu các phương pháp như trên là Giải tích số.

Giáo trình phương pháp tính này được viết với mục đích nhập môn Giải tích số và dành riêng cho sinh viên Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM. Với mục đích và đối tượng như vậy, tài liệu không đào sâu các cơ sở toán học của giải thuật cũng như tính tổng quát của các bài toán. Các lập luận chủ yếu dùng các lý thuyết cơ bản mà sinh viên đã học trong toán cao cấp A1 như định nghĩa đạo hàm, các định lý trung bình, khai triển Maclaurin…

Trong các lập luận, chứng minh trong tài liệu này, người đọc hãy xem các điều kiện "đầu vào" là thỏa mãn đến mức cần thiết. Ví dụ trong lập luận cần đến đạo hàm cấp 3 của f(x) thì xem như f(x) đảm bảo khả vi đến cấp 3… Cũng như tính duy nhất nghiệm của các bài toán là mặc định.

Dù đã rất cố gắng nhưng chắc chắn tài liệu này còn nhiều thiếu sót. Rất mong người đọc và các đồng nghiệp quan tâm và góp ý.

Nhóm tác giả

CHƯƠNG 1
SAI SỐ

§1. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

1. Sai số tuyệt đối

Ta cần xấp xỉ A bằng số gần đúng a thì ta viết A ≈a. Khi đó sai số phép tính gần đúng là mức chênh lệch giữa A và a, tức là $|A-a|$. Tuy nhiên, vì không tính đúng A được nên ta cũng không thể tính được mức chênh lệch này. Chúng ta sẽ đánh giá sai số bằng một cận trên của nó

$$\boxed{|A-a| \le \Delta_a} \qquad (1.1)$$

Khi đó Δ_a được gọi là sai số tuyệt đối giới hạn hay sai số tuyệt đối nếu không sợ nhầm lẫn.

Rõ ràng là sai số tuyệt đối có nhiều chọn lựa.

Ví dụ 1.1: Nếu lấy gần đúng $\pi \approx 3.14$, dù không biết chính xác số π nhưng ta có $|\pi - 3{,}14| \le 0{,}0016 \le 0{,}002 \le 0{,}003$. Như vậy ta có thể chọn sai số tuyệt đối là 0,0016 hay 0,002, hay nhiều chọn lựa khác.

Sai số tuyệt đối cho phép chúng ta xác định khoảng giá trị của đại lượng đúng A, tức là $A \in [a-\Delta_a; a+\Delta_a]$ hay còn viết là $\boxed{A = a \pm \Delta_a}$. Do đó ta sẽ chọn Δ_a nhỏ nhất theo yêu cầu nào đó. Thông thường ta yêu cầu Δ_a gồm một chữ số khác 0. Với yêu cầu đó, trong ví dụ trên ta có $\pi = 3{,}14 \pm 2.10^{-3}$

2. Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối cho chúng ta xác định miền giá trị của đại lượng đúng A nhưng không cho biết mức chính xác của phép tính. Để so sánh sai số nhiều phép tính gần đúng khác nhau, chúng ta xét sai số tương đối

$$\boxed{\delta_a = \frac{\Delta_a}{a}} \qquad (1.2)$$

Ví dụ 1.2: Phép tính $\frac{1}{9} \approx 0{,}111$ có sai số tuyệt đối là 2.10^{-4} nhỏ hơn trong ví dụ 1.1 nhưng nếu so sánh sai số tương đối ta có $\frac{2.10^{-3}}{3{,}14} < \frac{2.10^{-4}}{0{,}111}$. Vậy phép tính $\frac{1}{9} \approx 0{,}111$ có sai số lớn hơn phép tính $\pi \approx 3{,}14$

§2. SAI SỐ QUY TRÒN

Một số dạng thập phân có thể có nhiều chữ số. Những chữ số mà nếu ta bỏ đi sẽ làm thay đổi giá trị của số thì được gọi là chữ số có nghĩa. Như vậy ta chỉ viết các chữ số có nghĩa khi biểu diễn số.

Tuy nhiên, nếu một số có quá nhiều chữ số có nghĩa (thậm chí vô hạn) thì ta cần quy tròn bớt. Việc quy tròn sẽ làm phát sinh sai số. Hãy xem ví dụ 1.1 và 1.2 là một minh họa.

Quy ước khi quy tròn số: Nếu chữ số quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta quy tròn xuống và các trường hợp khác ta quy tròn lên. Với một số gần đúng chúng ta không quy tròn nhiều lần. Ví dụ nếu cần quy tròn 1,2345 giữ lại 3 chữ số ta xét chữ số 4 và quy tròn thành 1,23 (không xét chữ số 5)

Ví dụ 1.3: Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$. Trước hết chúng ta thay tích phân (diện tích hình thang cong) bằng diện tích hình thang $I \approx \frac{1}{2}(1+e)$, sai số ở đây được gọi là sai số phương pháp, đặt là ε.

Tiếp theo chúng ta tính biểu thức dạng số thập phân $\frac{1}{2}(1+e)=1{,}85914...\approx 1{,}859$, sai số quy tròn phát sinh là $|1{,}85914...-1{,}859|\le 2.10^{-4}$. Vậy ta có kết quả $I=1{,}859\pm(\varepsilon+2.10^{-4})$.

§3. CHỮ SỐ CHẮC

Ví dụ 1.3 cho thấy sai số cuối cùng là tổng sai số phương pháp và sai số quy tròn. Từ đây đặt ra yêu cầu quy tròn sao cho sai số quy tròn không làm tăng đáng kể sai số cuối cùng. Chúng ta đặt ra khái niệm chữ số chắc để giải quyết yêu cầu.

Cho $A=a\pm\Delta_a$ trong đó a gồm các chữ số a_i: $a=\overline{...a_1a_0,a_{-1}...}$ (chữ số hàng đơn vị là a_0, từ trái sang phải chỉ số giảm dần). Khi đó chữ số a_i được gọi là chắc khi và chỉ khi $\boxed{\Delta_a\le 0{,}5.10^i}$ (1.3)

Nhận xét: Nếu (1.3) đúng với $i=i_0$ thì cũng đúng với mọi $i>i_0$ và nếu (1.3) sai với $i=i_0$ thì cũng sai với mọi $i<i_0$. Như vậy các chữ số chắc luôn ở bên trái các chữ số không chắc.

Để đảm bảo sai số quy tròn không ảnh hưởng đến sai sai số cuối cùng, chúng ta sẽ làm tròn giữ lại một chữ số không chắc. Khi đó, sai số quy tròn nhỏ hơn sai số trước quy tròn.

Từ đây trở về sau nếu quy tròn giữ lại chữ số không chắc, ta sẽ bỏ qua sai số quy tròn.

Ví dụ 1.4: Hãy làm tròn số gần đúng với một chữ số không chắc trong phép tính $A=12{,}345677\pm 3.10^{-4}$.

Xét bất đẳng thức (1.3) với D = 3.10^{-4}, ta thấy i nhỏ nhất thỏa (1.3) là i=-3, tức là $0{,}5.10^{-4}<3.10^{-4}<0{,}5.10^{-3}$. Vậy số gần đúng chỉ có 5 chữ số chắc 1, 2, 3, 4, 5. Theo yêu cầu ta sẽ làm tròn là $A\approx 12{,}3457$. Khi đó sai số quy tròn là $2{,}3.10^{-5}<3.10^{-4}$.

Nếu làm tròn hết các chữ số không chắc ta có $A\approx 12{,}346$ và sai số quy tròn sẽ là $3{,}23.10^{-4}$ lớn hơn cả sai số ban đầu.

Khái niệm chữ số chắc còn có một ý nghĩa khác. Xét ví dụ: Cho số gần đúng $A\approx -12{,}3$ có một chữ số không chắc. Khi đó chữ số 2 là chắc và ta có (1.3) thỏa với i=0. Nói cách khác sai số không quá $0{,}5.10^0$ vậy ta có biểu diễn sai số $A=-12{,}3\pm 5.10^{-1}$.

§4. SAI SỐ BIỂU THỨC

Trong phần này chúng ta tính sai số khi tính toán một biểu thức mà các biến đầu vào có sai số.

Một biểu thức có thể có nhiều biến đầu vào. Ở đây, ta xét trường hợp 2 biến $A=f(x;y)$. Giả sử $x=x_0\pm\Delta_x$ và $y=y_0\pm\Delta_y$. Khi đó $A\approx f(x_0;y_0)$ với sai số tuyệt đối

$$\boxed{\Delta_a=\left|f'_x(x_0;y_0)\right|\Delta_x+\left|f'_y(x_0;y_0)\right|\Delta_y} \quad (1.4)$$

Ví dụ 1.5: Đo bán kính quả cầu bằng thước đo với sai số tương đối 0,1% ta được $R\approx 13{,}44cm$.

Với $\pi\approx 3{,}14$ ta có $V\approx\frac{4}{3}.3{,}14.(13{,}44)^3=10164{,}03591$. Sai số khi đó là $\Delta_V=\left|\frac{4}{3}.(13{,}44)^3\right|\Delta_\pi+\left|4.(3{,}14).(13{,}44)^2\right|\Delta_R$.

Theo ví dụ 1.1 ta có $\Delta_\pi=2.10^{-3}$, xét công thức sai số tương đối (1.2) ta có $\Delta_R=13{,}44.0{,}1\%$. Vậy $\Delta_V\le 4.10^1$. Với một chữ số không chắc ta có kết quả $V=10160\pm 4.10^1\left(cm^3\right)$ hay $V=10{,}16\pm 4.10^{-2}\,(l)$.

§5. BÀI TẬP

1.1 Cho số gần đúng a = 12.45972 với sai số tương đối $\delta_a = 0.7\%$. Hãy làm tròn a với 1 chữ số không chắc. So sánh sai số do làm tròn và sai số ban đầu

1.2 Để tính thể tích hình cầu V với sai số tương đối 1.2% thì cần đo bán kính của V với sai số thế nào trong hai trường hợp

a) Cho $\pi = 3.14$

b) Cho số $\pi = 3.14159\ldots \approx 3.14$

1.3 Cho biểu thức $u = x + \dfrac{y}{x}$. Biết x ≈ 1.321 và y ≈ 0.9731 với 1 chữ số không chắc. Tính u và sai số

1.4 Cho $u = \dfrac{x + y^2}{z}$ trong đó $x \approx 3{,}28$ $\quad y \approx 0{,}932$ $\quad z \approx 1{,}132$ với sai số tương đối 0,3%. Hãy tính u với 2 chữ số không chắc.

1.5 Dùng công thức (1.4) chứng minh rằng sai số tuyệt đối của tổng bằng tổng các sai số tuyệt đối, sai số tương đối của tích là tổng các sai số tương đối.

1.6 Cho phương trình bậc hai $x^2 + bx + c = 0$ trong đó $b \approx 2.34$; $c \approx -1.57$ với cùng sai số tương đối là 0,7%. Hãy giải phương trình và cho biết sai số

1.7 Cho $e \approx 2{,}71$, hãy tính gần đúng $A \approx \dfrac{e+1}{2}$ và đánh giá sai số.

1.8 Dùng thước đo có sai số tương đối δ để đo chiều cao, đáy lớn, đáy bé của một hình thang, kết quả lần lượt là 2,3cm; 12,5cm và 4,01cm. Hãy cho biết δ không quá bao nhiêu để sai số tương đối khi tính diện tích hình thang không quá 1%.

CHƯƠNG 2
GIẢI GẦN ĐÚNG
PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ VÀ SIÊU VIỆT

§1. NGHIỆM VÀ KHOẢNG TÁCH NGHIỆM

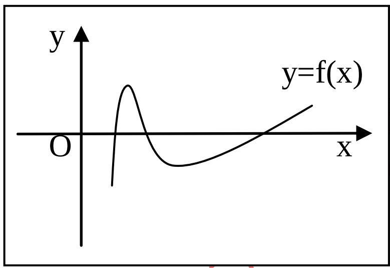
1. Nghiệm

Một phương trình đại số có dạng tổng quát f(x) = 0 (2.1). Nghiệm phương trình là giá trị x* thỏa mãn phương trình, tức là f(x*) = 0.

Việc giải phương trình (2.1) được chia thành 2 bước:

- Bước sơ bộ: Tìm các khoảng tách nghiệm là những khoảng mà trên đó phương trình có nghiệm duy nhất

- Bước kiện toàn: Tìm nghiệm gần đúng trên từng khoảng tách nghiệm



Ở dạng đồ thị, nghiệm phương trình là hoành độ giao điểm giữa đường cong y = f(x) và trục hoành.

Trong phần này chúng ta nêu một cách tìm khoảng tách nghiệm và hai phương pháp kiện toàn nghiệm.

2. Khoảng tách nghiệm

Việc tìm các khoảng tách nghiệm có nhiều cách. Ví dụ, chúng ta vẽ đồ thị y = f(x) và dựa vào đó tìm khoảng tách nghiệm.

Trong phần này chúng ta nêu lại một kết quả giúp tìm khoảng tách nghiệm

Định lý 2.1: Giả sử phương trình (2.1) thỏa f(x) có đạo hàm f'(x) không đổi dấu trên [a,b]. Khi đó:

- Nếu f(a) cùng dấu f(b) thì phương trình không có nghiệm trên [a,b]

- Nếu f(a) trái dấu f(b) thì [a,b] là khoảng tách nghiệm phương trình.

Ví dụ 2.1: Xét phương trình $f(x) \equiv x^3 - 3x + 5 = 0$. Lập bảng xét dấu đạo hàm ta có

x	-∞		-1		1		+∞
$f'(x) = 3x^2 - 3$		+	0	-	0	+	

Tính giá trị hàm ta có

$f(-\infty) < 0,\ f(-1) > 0,\ \ f(1) > 0,\ f(+\infty) > 0$. Vậy phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng (-∞;-1).

Xét thêm một điểm trong khoảng (1;+∞). ta chọn f(-3)<0.

Từ đó suy ra phương trình chỉ có một nghiệm thuộc khoảng tách nghiệm [-3;-1].

Tương tự sinh viên hãy xét phương trình $x + e^x = 0$ và cho biết số nghiệm phương trình với khỏang tách nghiệm tương ứng.

§2. PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

1. Nội dung phương pháp

Cho phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b]. Gọi x* là nghiệm phương trình trên [a,b]

Đưa phương trình về dạng $x = \varphi(x)$ sao cho

$$\boxed{|\varphi'(x)| \le q < 1 \quad \forall x \in [a,b]} \tag{2.2}$$

Chọn một giá trị $x_0 \in [a,b]$ làm giá trị ban đầu

Tính dần các phần tử của dãy số

$$\boxed{x_1 = \varphi(x_0); x_2 = \varphi(x_1);...; x_n = \varphi(x_{n-1})} \tag{2.3}$$

Nếu các phần tử của dãy trên đều thuộc khoảng tách nghiệm thì dãy số sẽ hội tụ về nghiệm x*. Sau một số n bước tính ta có nghiệm gần đúng $x^* \approx x_n$. Khi đó sai số tuyệt đối được đánh giá theo công thức

$$\boxed{|x_n - x^*| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \equiv \varepsilon_n} \tag{2.4}$$

2. Sự hội tụ và sai số

Trước hết chúng ta chứng minh sự hội tụ của phương pháp. Áp dụng định lý giá trị trung bình Lagrange ta có:

$$|x_{n+1} - x_n| = |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| = |\varphi'(c)(x_n - x_{n-1})|$$
$$\le q|x_n - x_{n-1}| \le ... \le q^{n-1}|x_1 - x_0| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Do đó dãy $\{x_n\}$ là dãy Cô si nên hội tụ.

Mặt khác do hàm φ liên tục (có đạo hàm nên liên tục) nên nếu ta đặt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X \Rightarrow X = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(X)$.

Vậy $\{x_n\}$ hội tụ về nghiệm phương trình trên [a,b]

Tiếp theo chúng ta tìm công thức đánh giá sai số.

Cũng bằng cách áp dụng định lý Lagrange ta có $|x_{n+k} - x_n| \le |x_{n+k} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \le q(|x_{n+k-1} - x_n| + |x_n - x_{n-1}|)$.

Cho k → ∞ ta có $|x^* - x_n| \le q(|x^* - x_n| + |x_n - x_{n-1}|)$ hay $|x_n - x^*| \le \dfrac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \equiv \varepsilon_n$.

Về việc chọn giá trị x_0: Để đảm bảo sự hội tụ phương pháp chúng ta phải đảm bảo giả thiết (2.2) và giả thiết x_n thuộc khoảng tách nghiệm với mọi n.

Tuy nhiên nếu biết nghiệm x* thuộc nửa trái hay nửa phải khoảng tách nghiệm ta có thể chọn x_0 sao giả thiết thứ hai thỏa mãn.

Cụ thể nếu nghiệm x* thuộc nửa trái khoảng tách nghiệm, tức là thuộc [a,(a+b)/2] thì ta chọn x_0=a.

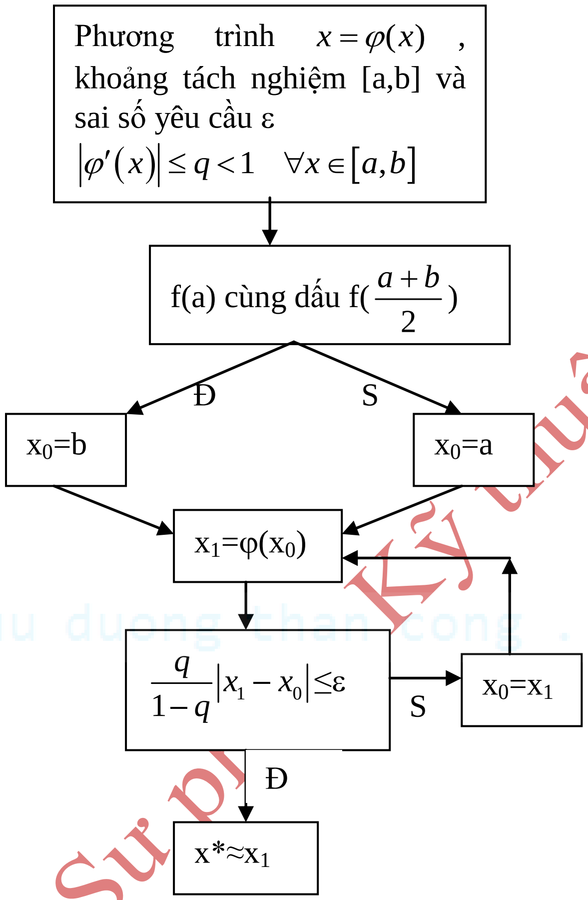
Và trường hợp nghiệm thuộc nửa phải khoảng tách nghiệm ta chọn x_0=b.

Để xác định nghiệm thuộc nửa trái hay nửa phải khoảng tách nghiệm, chúng ta xét dấu hàm f(x) tại điểm giữa khoảng tách nghiệm và dùng định lý 2.1.

Nói chung ta có cách chọn x_0 như sau:

$$\boxed{x_0 = \begin{cases} a & f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0 \\ b & f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0 \end{cases}} \qquad (2.5)$$

Sơ đồ khối phương pháp lặp:



3. Một cách khác đánh giá sai số

Giả sử phương trình (2.1) có f(x) khả vi và $|f'(x)| \ge m > 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Gọi x* và x_n lần lượt là nghiệm và nghiệm gần đúng trên khoảng tách nghiệm [a,b]. Theo định lý trung bình ta có $|x^* - x_n| = \dfrac{|f(x^*) - f(x_n)|}{|f'(c)|}$ trong đó c nằm giữa x* và x_n. Khi đó ta có đánh giá sai số là

$$\boxed{|x^* - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{m}} \qquad (2.5)$$

4. Thực hành trên máy Casio

Ví dụ 2.2: Cho phương trình $f(x) \equiv x^3 - 3x - 5 = 0$.

Dùng phương pháp lặp đơn giải phương trình trên khoảng tách nghiệm [2;3] với yêu cầu:

a) Ba bước lặp và đánh giá sai số

b) Nghiệm gần đúng có 5 chữ số chắc

Giải: Trước hết đưa phương trình về dạng (2.2)

$$x = \sqrt[3]{3x+5} \equiv \varphi(x)$$

Khi đó với mọi x thuộc [2;3] ta có

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{(6+5)^2}} \leq 0.203 = q$$

Xét f(2) < 0, f(2,5) > 0 nên từ (2.4) chọn $x_0 = 2$

a)

Bước tính (2.3)	Bấm trên máy	Màn hình
x_0=2	2 =	2
$x_1=\varphi(x_0)$	(3*ans+5)^(1/3) =	2,223980091
$x_2=\varphi(x_1)$	=	2,268372388
$x_3=\varphi(x_2)$	=	2,276967161

Với yêu cầu 3 bước lặp ta có nghiệm gần đúng x_3=2,276967161. Đánh giá sai số $\frac{q}{1-q}|x_3 - x_2| \leq 3.10^{-3}$

Với một chữ số không chắc ta có kết quả

$$x^* = 2,277 \pm 3.10^{-3}$$

b) Do nghiệm có một chữ số bên trái dấu thập phân nên nghiệm gần đúng có 5 chữ số chắc nếu chữ số thứ 4 sau dấu thập phân là chắc. Tức là sai số không quá 5.10^{-5}

Đánh giá:

$$\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \leq 5.10^{-5} \Leftrightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq 1,96....10^{-4} \quad (*)$$

Bước tính	Bấm trên máy	Màn hình
x_0=2	2 =	2
$x_1=\varphi(x_0)$	(3*ans+5)^(1/3) =	2,223980091
$x_2=\varphi(x_1)$	=	2,268372388
$x_3=\varphi(x_2)$	=	2,276967161
$x_4=\varphi(x_3)$	=	2,278623713
$x_5=\varphi(x_4)$	=	2,278942719
$x_6=\varphi(x_5)$	=	2,279004141

So sách từ trái qua phải đến chữ số thứ 4 sau dấu thập phân trong các giá trị x_n ta nhận thấy x_6 thỏa (*) nên vòng lặp dừng và ta có kết quả $x^* \approx 2,27900$ với 5 chữ số chắc, hay sai số không quá 5.10^{-5}.

§3. PHƯƠNG PHÁP NEWTON

1. Nội dung phương pháp

Cho phương trình (2.1) với khoảng tách nghiệm [a,b]. Gọi x* là nghiệm phương trình trên [a,b].

Giả sử đạo hàm f'(x) và f''(x) không đổi dấu (Riêng đạo hàm cấp 1 khác 0) trên khoảng tách nghiệm.

Chọn một giá trị $x_0 \in [a,b]$ sao cho f(x_0) cùng dấu $f''(x_0)$ làm giá trị ban đầu (ta gọi x_0 như thế là điểm fourier).

Tính dần các phần tử của dãy số

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}; ...$$

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \qquad (2.6)$$

Khi đó dãy số x_n sẽ đơn điệu hội tụ về nghiệm x*. Sau một số n bước lặp ta có nghiệm gần đúng $x^* \approx x_n$ với sai số tuyệt đối được đánh giá theo công thức

$$\boxed{|x_n - x^*| \leq \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2} \qquad (2.7)$$

Trong đó m và M đánh giá từ các bất đẳng thức

$$\boxed{|f'(x)| \geq m > 0; |f''(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]} \qquad (2.8)$$

2. Sự hội tụ và sai số

Trước hết chúng ta chứng minh sự hội tụ của phương pháp.

Trong khai triển Maulaurin tại x_0 phần dư Lagrange cho $x=x_1$ ta có: $f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x_1 - x_0)^2$ trong đó c nằm giữa x_0 và x_1. Thế công thức x_1 từ (2.6) vào ta có

$$f(x_1) = \frac{f''(c)}{2}(x_1 - x_0)^2 \qquad (*)$$

Xét trường hợp f' và f'' cùng dấu dương. Biểu thức (*) suy ra f(x_1) ≥0, mặt khác hàm đồng biến nên suy ra $x_1 \geq x^*$.

Dùng biểu thức (2.6) với x_1 với lưu ý f(x_0) cùng dấu dương với f'' nên: $x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \leq 0$ hay $x_1 \leq x_0$.

Như vậy chúng ta chứng minh được $x^* \leq x_1 \leq x_0$, x_1 thuộc khoảng tách nghiệm và f(x_1) cùng dấu f''. Bằng cách làm tương tự và thay x_0 là x_1 ta lại chứng minh được điều tương tự với x_2, …

Do đó dãy {x_n} giảm và bị chặn dưới bởi x* nên hội tụ, đặt $X = \lim_{n \to \infty} x_n$. Cho n → ∞ trong biểu thức (2.6) ta có f(X)=0 nên X=x* là nghiệm cần tìm.

Trường hợp f' và f'' cùng âm ta làm tương tự

Các trường hợp f' và f'' trái dấu làm tương tự (dãy x_n giảm)

Tiếp theo ta chứng minh công thức đánh giá sai số.

Tổng quát biểu thức (*) ta có $f(x_n) = \frac{f''(c)}{2}(x_n - x_{n-1})^2$

Từ biểu thức (2.6) suy ra

$$\left|x_{n+1} - x_n\right| = \left|-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right| = \left|\frac{f''(c)(x_n - x_{n-1})^2}{2f'(x_n)}\right|$$

Đặt m, M từ (2.8) ta có $\left|x_{n+1} - x_n\right| \le \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$

Dãy x_n đơn điệu hội tụ về x* cho nên x_{n+1} nằm giữa x* và x_n. Do vậy ta có công thức sai số (2.7).

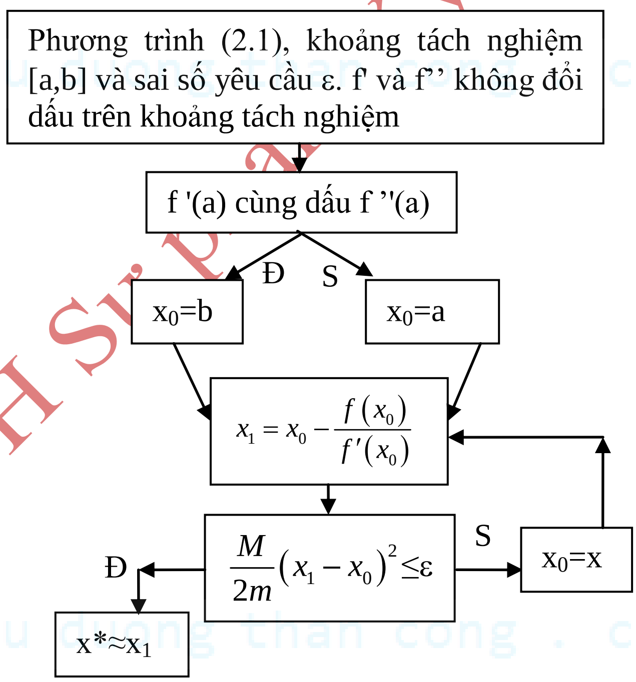
Về việc chọn x_0: Trên khoảng tách nghiệm có nhiều giá trị x_0 thỏa điều kiện là điểm fourier nên x_0 có nhiều chọn lựa. Tuy nhiên, bằng cách xét từng trường hợp về dấu f' và f'' ta có công thức xác định x_0 một cách rõ ràng như sau:

$$\boxed{x_0 = \begin{cases} a & f'(x)f''(x) \le 0 \\ b & f'(x)f''(x) \ge 0 \end{cases}} \qquad (2.9)$$

Về tốc độ hội tụ: Sai số của phương pháp lặp đơn và phương pháp Newton là các vô vùng bé khi n tăng lên vô hạn. Điều này chứng tỏ với mọi sai số yêu cầu, tồn tại bước lặp hữu hạn thõa mãn sai số không quá sai số yêu cầu. So sánh bậc của hai vô cùng bé đó, ta nhận thấy sai số ở phương pháp Newton có bậc hai so với sai số phương pháp lặp đơn. Điều này chứng tỏ tốc độ hội tụ ở phương pháp Newton cao hơn. Nói cách khác với cùng sai số yêu cầu, phương pháp Newton thường có số bước lặp nhỏ hơn.

Một cách khác đánh giá sai số: chúng ta cũng có thể đánh giá sai số phương pháp lặp đơn theo công thức (2.5).

Sơ đồ khối phương pháp Newton:



3. Thực hành trên máy Casio

Ví dụ 2.3: Cho phương trình $f(x) \equiv x^3 - 3x - 5 = 0$.

Dùng phương pháp Newotn giải phương trình trên khoảng tách nghiệm [2;3] với yêu cầu:

a) 3 bước lặp và đánh giá sai số

b) Nghiệm gần đúng có 5 chữ số chắc

c) 2 bước lặp với x_0=2,4

Giải: Xét dấu đạo hàm cấp 1 và 2 trên [2;3] ta được $f'(x)=3x^2-3\geq 12-3>0$ và $f''(x)=6x\geq 0$. Theo (2.9) ta chọn $x_0=3$

a) Với yêu cầu 3 bước lặp ta có nghiệm gần đúng x_3

Bước tính (2.6)	Bấm trên máy	Màn hình
$x_0=3$	3 =	3
$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	Ans-(ans^3-3*ans-5)/(3*ans^2-3) =	2,458333333
$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	=	2,294310576
$x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	=	2,279144331

Vậy x_3=2,279144331 là nghiệm gần đúng

Để đánh giá sai số ta tính $|f'(x)|=3x^2-3\geq 9=m$ và $|f''(x)|=6x\leq 18=M$ suy sai số $\dfrac{M}{2m}|x_3-x_2|^2\leq 3.10^{-4}$

Với một chữ số không chắc ta có kết quả

$x^*=2,2791\pm 3.10^{-4}$

b) Tương tự ví dụ 2.2, yêu cầu sai số không quá 5.10^{-5}

Đánh giá $\dfrac{M}{2m}|x_n-x_{n-1}|^2\leq 5.10^{-5}\Leftrightarrow |x_n-x_{n-1}|\leq 0,0070...(*)$

Bước tính (2.6)	Bấm trên máy	Màn hình
$x_0=3$	3 =	3
$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	Ans-(ans^3-3*ans-5)/(3*ans^2-3) =	2,458333333
$x_2=x_1-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	=	2,294310576
$x_3=x_2-\dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$	=	2,279144331
$x_4=x_3-\dfrac{f(x_3)}{f'(x_3)}$		2,279018795

So sánh các kết quả gần đúng từ trái qua phải đến chữ số thứ 3 sau dấu thập phân trong các giá trị x_n ta nhận thấy x_4 thỏa (*) nên vòng lặp dừng và ta có kết quả $x^*\approx 2,27902$ với 5 chữ số chắc, hay sai số không quá 5.10^{-5}.

Bước tính (2.6)	Bấm trên máy	Màn hình

x_0=2,4	2.4 =	2.4
$x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$	Ans-(ans^3-3*ans-5)/(3*ans^2-3) =	2,28627451
$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$	=	2,27904723

c) Tính sai số tương tự các câu trên và ta có kết quả

$x^* = 2,27904 \pm 7.10^{-5}$

4. Tìm căn bậc k (k nguyên dương) một số thực

Cho k nguyên dương, a>1 và xét phương trình $\boxed{x^k = a}$ (2.10)

Rõ ràng (2.10) có nghiệm $x^* = \sqrt[k]{a}$ trên khoảng tách nghiệm [1;a].

Đặt f(x)=x^k-a. Trên khoảng [1;a], đạo hàm cấp 1 và 2 của f(x) cùng mang dấu dương nên theo phương pháp Newton ta chọn x_0=a. Dãy nghiệm gần đúng có công thức $x_n = x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1})^k - a}{k(x_{n-1})^{k-1}}$.

Để tìm m, ta xét: $|f'(x)| = kx^{k-1} \geq k = m$

Vậy dãy số $\begin{cases} x_0 = a \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1})^k - a}{k(x_{n-1})^{k-1}} \end{cases}$ (2.11) hội tụ về $x^* = \sqrt[k]{a}$. Bằng cách dùng một phần tử thứ n trong dãy làm giá trị gần đúng của x* ta có sai số theo (2.5) là $|x^* - x_n| \leq \dfrac{|(x_n)^k - a|}{k}$

Trường hợp a<1 chúng ta xây dựng tương tự.

Ví dụ 2.5: Tính gần đúng $\sqrt{3}$ bằng các phép toán +,-,*,/ với sai số không quá 10^{-8}.

Áp dụng (2.11) ta có dãy số $\begin{cases} x_0 = 3 \\ x_n = x_{n-1} - \dfrac{(x_{n-1})^2 - 3}{2(x_{n-1})} \end{cases}$ và sai số của x_n là $|\sqrt{3} - x_n| \leq \dfrac{|(x_n)^2 - 3|}{2}$. Kết quả tính toán:

x_n	3	2	1,75	1,73214..	1,73205081
Sai số			0,03..	2.10^{-4}	5.10^{-9}

§4. BÀI TẬP

Mỗi bài toán sau hãy dùng phương pháp lặp đơn và phương pháp Newton giải gần đúng với yêu cầu

a) Hai bước lặp (có đánh giá sai số) với hai giá trị ban đầu x_0 khác nhau

b) Sai số không quá 10^{-5}.

c) Nghiệm gần đúng có 7 chữ số chắc

2.1 Phương trình $x^3 + x + 1 = 0$ trên khoảng tách nghiệm [-0,8;0]

2.2 Phương trình $e^x + 2x = 0$ trên khoảng tách nghiệm [-1;0]

2.3 Phương trình x = ln(x+2) trên khoảng tách nghiệm [1;2]

2.4 Phương trình x = cosx trên khoảng tách nghiệm [0,6;0,8]

Mỗi phương trình sau hãy cho biết số nghiệm phương trình và các khoảng tách nghiệm tương ứng. Dùng phương pháp lặp đơn và phương pháp Newton tìm nghiệm lớn nhất với 4 chữ số chắc

2.5 Phương trình $x^3 – 3x = 2010$

2.6 Phương trình 2x = ln(x+1000)

2.7 Phương trình $x + 2011 = e^x$

2.8 Dùng (2.11) tính gần đúng $\sqrt{0.91}$ và $\sqrt[4]{7}$ với sai số không quá 10^{-4}.

2.9 Dùng (2.5) chứng minh rằng nếu phương trình (2.1) thỏa f' và f'' cùng dương trên khoảng tách nghiệm thì sai số phương pháp lặp đơn và phương pháp Newton có thể đánh giá bằng công thức $\left|x^* - x_n\right| \le \dfrac{\left|f(x_n)\right|}{f'(a)}$

2.10 Chứng minh rằng sai số phương pháp lặp đơn có thể đánh giá bằng công thức $\left|x^* - x_n\right| \le \dfrac{q^n}{1-q}\left|x_0 - x_1\right|$.

Áp dụng vào phương trình $x = 1 + \sin x$ trên khoảng tách nghiệm [1;2] với x_0=1,5 tìm số bước lặp cần thiết để sai số không quá 10^{-9}.

2.11 Cho phương trình $x^4 - 4x^3 = -26$ có khoảng tách nghiệm [2,5;3,2]. Hãy thu hẹp khoảng tách nghiệm để các điều kiện của phương pháp Newton thoả mãn

2.12 Dùng định nghĩa đạo hàm chứng minh rằng nếu hàm φ(x) khả vi trên khoảng [a,b] và tồn tại số L thuộc (0;1) sao cho:

$\left|\varphi(x) - \varphi(y)\right| \le L\left|x - y\right| \ \forall x, y \in [a,b]$ (2.12) thì điều kiện (2.2) thỏa mãn, tức là $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1 \quad \forall x \in [a,b]$.

Áp dụng định lý giá trị trung bình Lagrange chứng minh chiều ngược lại cũng đúng.

Điều kiện (2.12) được gọi là điều kiện Lipschitz.

CHƯƠNG 3

GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẶP

Trong môn toán 2, chúng ta đã biết giải hệ phương trình tuyến tính n phương trình và m ẩn bằng phương pháp Cramer và phương pháp Gauss. Đây cũng là hai phương pháp có tính giải thuật. Trong đó phương pháp Gauss hiệu quả hơn do lượng phép tính ít hơn. Trong nội dung chương này chúng ta không đạt mục đích giải một hệ phương trình tuyến tính tổng quát, mà chỉ đặt mục đích mở rộng phương pháp lặp đơn đã học chương trước mà thôi.

§1 MỞ ĐẦU

1. Hệ phương trình tuyến tính

Một hệ phương trình tuyến tính có dạng:

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}} \qquad (3.1)$$

Ma trận A=[a_{ij}] gọi là ma trận hệ số vế trái, ma trận cột $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$ lần lượt gọi là ma trận cột các ẩn và ma trận cột hệ số tự do (ta có thể viết $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}^T$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}^T$).

Khi đó, theo phép tính ma trận hệ (3.1) có dạng ma trận là

$$\boxed{AX = B} \qquad (3.2)$$

Với mục đích áp dụng phương pháp lặp đơn đã học chương trước vào phương trình (3.2), trong chương này chúng ta giả sử hệ có nghiệm duy nhất đặt là X* (hệ Cramer).

Trước hết chúng ta cần nhắc lại khái niệm chuẩn trên không gian ma trận.

2. Chuẩn "dòng" của ma trận

Chuẩn là một khái niệm trên không gian vec tơ chỉ độ dài của một vec tơ. Cho vec tơ v, chuẩn v là một số thực viết là $\|v\|$, nó phải được xây dựng thỏa các tiên đề:

- $\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = \theta$

- $\|av\| = |a|\|v\| \quad \forall a \in R, \forall v$

- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v$

Trên một không gian vec tơ, ta có nhiều cách để xây dựng chuẩn. Ví dụ trên R^n ta có các chuẩn đã học:

- Chuẩn Euclide $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$, với $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- Chuẩn tổng $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Để đơn giản, trong chương này chúng ta chỉ sử dụng một chuẩn trên không gian ma trận mà ta tạm gọi là chuẩn "dòng":

Cho ma trận $A=[a_{ij}]_{mxn}$, khi đó chuẩn "dòng" A là

$$\boxed{\|A\| = \max_{1 \le i \le m} \left\{ d_i = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right\}} \quad (3.3)$$

Với chuẩn ma trận xây dựng như trên, từ 3 tiên đề người ta chứng minh được tính chất $\|u.v\| \le \|u\|\|v\|$.

Chú thích: d_i là tổng các giá trị tuyệt đối các phần tử dòng i.

Ví dụ 3.1: Tính chuẩn "dòng" ma trận

$$T = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.4 & -0.2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0.7 & -0.9 & 1.8 \end{bmatrix}$$

Áp dụng (3.3) ta có d_1=0,7, d_2=3 và d_3=3,4, do đó $\|T\| = 3{,}4$

Tương tự ta cũng tính được

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0{,}9 \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} 0{,}9 \\ 0{,}7 \\ 1{,}05 \end{bmatrix} \Rightarrow \|X\| = 1;\ \|X - Y\| = \left\| \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}15 \end{bmatrix} \right\| = 0{,}2$$

§2 PHƯƠNG PHÁP LẶP ĐƠN

1. Nội dung phương pháp

Từ phương trình (3.2), chúng ta biến đổi tương đương thành

$$\boxed{X = TX + C} \quad (3.4)$$

trong đó T là ma trận vuông $T=[t_{ij}]$ và C là ma trận cột

$C=[c_1\ \ c_2\ \ \dots\ \ c_n]^T$.

Để phương pháp lặp hội tụ ta cần điều kiện: $\boxed{\|T\| < 1}$ (3.5)

Khi đó dãy nghiệm gần đúng được tính theo công thức

$$\boxed{\begin{cases} X_0 = C \\ X_k = TX_{k-1} + C \end{cases}} \quad (3.6)$$

Sau k bước lặp, nghiệm gần đúng hệ là $X^* \approx X_k$ với sai số

$$\boxed{\|X^* - X_k\| \le \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\|X_k - X_{k-1}\|} \quad (3.7)$$

Về cách chọn X_0: Việc chọn X_0 trong phương pháp trên không đòi hỏi yêu cầu gì (hệ đã có nghiệm duy nhất). Do đó cách chọn đơn giản nhất là $X_0=\theta$ (cột không), khi đó X_1=C. Vậy để tiết kiệm bước tính ta nên chọn X_0=C nếu không có yêu cầu gì thêm.

Chứng minh sự hội tụ và sai số:

Do X* là nghiệm nên X*=TX*+C, lấy vế trừ vế với (3.6) ta có $X_k - X^* = T(X_{k-1} - X^*)$. Theo tính chất chứng minh từ 3 tiên đề ta có $\|X_k - X^*\| \le \|T\| \|(X_{k-1} - X^*)\|$.

Tương tự ta có:

$$\|X_k - X^*\| \le \|T\| \|(X_{k-1} - X^*)\| \le \|T\|^2 \|(X_{k-2} - X^*)\| \le \ldots \le \|T\|^k \|(X_0 - X^*)\|$$

Do (3.5) nên nếu k tăng vô hạn $\|T\|^k$ giảm về 0 hay $\|X_k - X^*\|$ giảm về 0. Theo định nghĩa chuẩn "dòng", $\|X_k - X^*\|$ chính là giá trị lớn nhất các chênh lệch giữa các phần tử tương ứng trong X_k và X*. Nói cách khác nếu đặt $X_k = [x_{k1} \quad x_{k2} \quad \ldots \quad x_{kn}]$, $X^* = \begin{bmatrix} x_1^* & x_2^* & \ldots & x_n^* \end{bmatrix}$ thì ta có $|x_{ki} - x_i^*| \le \|X_k - X^*\|$, do đó $x_{ki} \xrightarrow{k \to \infty} x_i^*$.

Để chứng minh sai số ta xét

$$\|X_k - X^*\| \le \|T\| \|X_{k-1} - X^*\| = \|T\| \|(X_{k-1} - X_k) + (X_k - X^*)\|$$

$$\le \|T\| \left(\|(X_{k-1} - X_k)\| + \|(X_k - X^*)\| \right)$$

Từ đây, chuyển vế và biến đổi ta có (3.7).

2. Thực hành máy Casio 570

Ví dụ 3.2: Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn với hai bước lặp.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0,1 & 0,05 \\ 0 & 0,3 & 0,05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} \equiv TX + C$$

Giải: Chuẩn $\|T\| = 0,35 < 1$ nên phương pháp hội tụ

Đặt X_0=C=[5 7 -1]^T. Ta có kết quả tính toán

Bấm máy ($\boxed{a}$ tức là alpha)		Màn hình	
-0.1$\boxed{a}$X+0.2$\boxed{a}$Y+5$\boxed{a}$: 0.2$\boxed{a}$X+0,1 $\boxed{a}$Y+0.05$\boxed{a}$A+7$\boxed{a}$: 0.3$\boxed{a}$Y+0.05$\boxed{a}$A-1		-0.1X+0.2Y+5:0.2X+0,1 Y+0.05A+7: 0.3Y+0.05A-1	
calc		X?	
5 =	*Nhập X_0*	Y?	
7 =		A?	
-1 =		5.9	*Các thành phần X_1*
=		8.65	
=		1.05	
=		X?	
5.9 =	*Nhập X_1*	Y?	
8.65 =		A?	
1.05 =		6.14	*Các thành*

=	9.0975	*phần X_2*
=	1.6475	

Với X*≈X$_2$ ta có $\begin{cases} x \approx 6,14 \\ y \approx 9,0975 \\ z \approx 1,6475 \end{cases}$. Để đánh giá sai số ta xét:

$$\|X^* - X2\| \le \frac{0,35}{1-0,35}\|X_1 - X_2\|$$

$$= \frac{0,35}{0,65}\max\{0,024; 0,04475; 0,05975\} \le 4.10^{-2}$$

3. Hệ "chéo trội"

Để đưa từ hệ phương trình tuyến tính (3.1) về dạng ma trận (3.2) sao cho điều kiện (3.5) thỏa mãn không phải là dễ dàng. Tùy vào (3.1) cụ thể mà ta có cách biến đổi khác nhau. Trong phần này ta xét trường hợp đơn giản mà ta tạm gọi là A có dạng chéo trội.

Ma trận A=[a_{ij}] chéo trội nếu giá trị tuyệt đối phần tử trên đường chéo chính lớn hơn tổng các giá trị tuyệt đối các phần tử còn lại cùng dòng với nó, tức là:

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots = \sum\limits_{j\neq 1} |a_{1j}| \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}| + \ldots = \sum\limits_{j\neq 1} |a_{2j}| \\ \ldots \\ |a_{nn}| > |a_{n1}| + |a_{n2}| + \ldots + |a_{nn-1}| = \sum\limits_{j\neq n} |a_{nj}| \end{cases}$$

Khi đó từ hệ (3.1) chúng ta chuyển vế các số hạng bên trái dạng $a_{ij}x_j$ mà i khác j. Sau đó chia hai vế phương trình thứ i cho a_{ii} ta được kết quả dạng (3.4) với $\|T\|<1$.

Ví dụ 3.3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7.9x + 0.2y - 0.3z = 7.7 \\ -0.1x + 3.7y + 0.1z = -3.8 \\ 0.2x + 3.7z = -0.2 \end{cases}$ bằng phương pháp lặp đơn hai bước với $X_0=[1\ \ -1\ \ 0]^T$

Giải: ma trận hệ số vế trái $A = \begin{bmatrix} 7,9 & 0,2 & -0,3 \\ -0,1 & 3,7 & 0,1 \\ 0,2 & 0 & 3,7 \end{bmatrix}$ có dạng "chéo trội". Bằng cách biến đổi theo hướng dẫn ta đưa hệ về dạng

$$\begin{cases} x = -0,025y + 0,038z + 0,975 \\ y = 0,027x - 0,027z - 1,027 \\ z = -0,054x - 0,054 \end{cases}$$

(các phép chia làm tròn với ba chữ số sau dấn thập phân).

Dạng (3.4) này có ma trận $T = \begin{bmatrix} 0 & -0,025 & 0,038 \\ 0,027 & 0 & -0,027 \\ 0,054 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ thỏa $\|T\| = 0,0629 < 1$.

Dùng máy tính như ví dụ trên ta có kết quả

$X_1 = [1 \quad -1 \quad -0{,}108]^T$, $X_2 = [0{,}996 \quad -0{,}997 \quad -0{,}108]^T$.

Kết luận: $\begin{cases} x \approx 0.996 \\ y \approx -0.997 \\ z \approx -0.108 \end{cases}$

Với sai số $\|X^* - X2\| \le \dfrac{0{,}0629}{1-0{,}0629}\|X_1 - X_2\| \le 3.10^{-4}$ (các số gần đúng đã làm tròn hết các chữ số không chắc)

§3 PHƯƠNG PHÁP LẶP SEIDEN

1. Phương pháp lặp seiden

Phương pháp lặp Seidel là một sự cải biến của phương pháp lặp đơn. Ý tưởng của sự thay đổi này là trong quá trình tính thành phần thứ i (i>1) của nghiệm gần đúng X_k ta sử dụng ngay các thành phần thứ 1, 2, …, i-1 trong X_k vừa tính được. Điều này đòi hỏi phép nhân ma trận phải thực hiện tuần tự từng dòng, kết quả dòng 1 dùng cho phép tính dòng 2, kết quả dòng 2 dùng trong phép tính dòng 3 …. Cụ thể là, đối với phương pháp lặp seidel, công thức lặp (3.6) được thay đổi dưới dạng

$$\boxed{\begin{cases} x_1^{(k)} = t_{11}x_1^{(k-1)} + t_{12}x_2^{(k-1)} + \cdots + t_{1n}x_n^{(k-1)} + c_1 \\ x_2^{(k)} = t_{21}x_1^{(k)} + t_{22}x_2^{(k-1)} + \cdots + t_{2n}x_n^{(k-1)} + c_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_n^{(k)} = t_{n1}x_1^{(k)} + t_{n2}x_2^{(k)} + \cdots + t_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} + t_{nn}x_n^{(k-1)} + c_n \end{cases}} \qquad (3.8)$$

Trong đó $X_k = [x_1^{(k)} \quad x_2^{(k)} \quad \ldots \quad x_n^{(k)}]$, $C = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]$

Ngoài ra thì điều kiện hội tụ và công thức tính sai số vẫn tương tự phương pháp lặp đơn

Ví dụ 3.4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 7.9x + 0.2y - 0.3z = 7.7 \\ -0.1x + 3.7y + 0.1z = -3.8 \\ 0.2x + 3.7z = -0.2 \end{cases}$ bằng phương pháp lặp Seiden ba bước.

Giải: Biến đổi tương tự ví dụ 3.3:

$$\begin{cases} x = -0{,}025y + 0{,}038z + 0{,}975 & (1) \\ y = 0{,}027x - 0{,}027z - 1{,}027 & (2) \\ z = -0{,}054x - 0{,}054 & (3) \end{cases}$$

Chọn X_0=C=[0,975 -1,027 -0,054]^T. Thế các thành phần X_0 vào vế phải phương trình (1) được x = 0,9986…, giá trị này thay cho thành phần 0,975 trong X_0. Sau đó thế các thành phần mới X_0 vào vế phải (2) được y = -0,99857…, giá trị này thay cho thành phần -1,027 trong X_0. Tiếp tục thế các thành phần mới X_0 vào (3) được z=-0,1079….. Kết thúc bước lặp thứ nhất $X_1 = [0{,}9986 \quad -0{,}99857 \quad -0{,}1079]^T$

Quá trình tính X_2 tương tự.

2. Thực hành trên máy Casio 570

Bấm máy (a tức là alpha)	Màn hình
aXacalc-0.025aY+0.038aA+0,975a:aYacalc	X=-0,025Y+0,038A+0,0975:

0.027aX-0,027 aA-1,027a:aAacalc -0,054aX-0,054a		Y=0,027X-0,027A-1,027: A=-0,054A-0,054	
calc		X?	
0,0975 =	*Nhập X_0*	Y?	
-1,027 =		A?	
-0,054 =		0,9986…	*Các thành phần X_1*
=		-0,99857…	
=		-0,1079….	
=		X?	
=	*Không nhập giá trị gì*	Y?	
=		A?	
=		0.99586…	*Các thành phần X_2*
=		-0.99719…	
=		-0.10777…	

Tiếp tục bấm các dấu = ta được

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0,99583 & -0,99720 & -0,107775 \end{bmatrix}^T$$

Kết quả $\begin{cases} x \approx 0,99583 \\ y \approx -0,99720 \\ z \approx -0,107775 \end{cases}$ với sai số $\|X^* - X_2\| \le 3.10^{-6}$.

3. Bài tập

Với mỗi hệ phương trình sau, hãy giải bằng phương pháp lặp đơn và lặp seiden với 3 bước lặp. Sinh viên có thể chọn nhiều vectơ X_0 khác nhau.

3.1 $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,1 & 0,1 \\ -0,3 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0 & -0,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

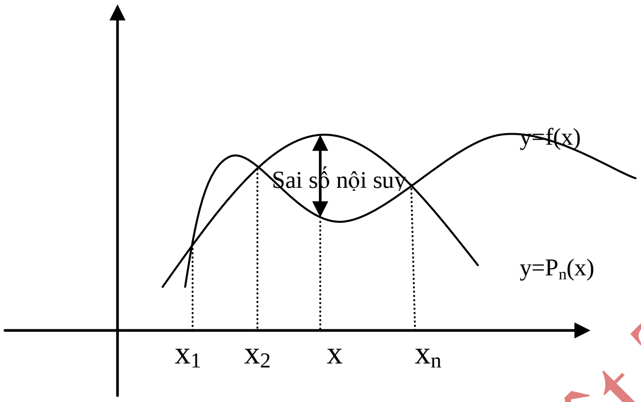
3.2 $$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 $\begin{cases} 10x - y - z = -2 \\ 2x + 10y - z = 9 \\ -x + y + 10z = 11 \end{cases}$ **3.4** $\begin{cases} 5x - 3y + z = -6 \\ 2x - 7y + z = -7 \\ -x + y + 5z = 12 \end{cases}$

CHƯƠNG 4
ĐA THỨC NỘI SUY

§1. VẤN ĐỀ CHUNG

1. Đa thức nội suy



- Bài toán nội suy: Cho (n+1) mốc nội suy phân biệt x_i (i=0,1,…,n) thuộc [a,b] trong đó a, b là hai mốc nào đó.

Cho giá trị hàm số *f(x)* tại x_i là $y_i = f(x_i), \quad (i = 0,1,...,n)$.

Ta cần tính gần đúng f(x) với mọi x thuộc [a,b].

- Đa thức nội suy: là đa thức $P_n(x)$ thỏa hai điều kiện: bậc không quá n và có đồ thị đi qua các nút nội suy (x_i,y_i) (hay $y_i=P_n(x_i)$) với i=0,1,…,n). Đa thức $P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy. Ta dùng đa thức nội suy xấp xỉ cho hàm cần tìm: $f(x) \approx P_n(x), \forall x \in [a,b]$. Hàm *f(x)* gọi là hàm nội suy và hệ thống nút (x_i, y_i) gọi là lưới nội suy, n là bậc nội suy.

2. Sai số nội suy

Giả sử hàm nội suy khả vi cấp (n+1) và thỏa

$$\boxed{\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M, \forall x \in [a,b]} \quad (4.1)$$

Ta có sai số nội suy là $\boxed{\left|f(x) - P_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|p(x)\right|}$ (4.2) trong đó $p(x) = (x - x_0)...(x - x_n)$.

Chứng minh: Đặt $F(x) = f(x) - P_n(x) - k.p(x)$ trong đó là là hằng số. Cho trước giá trị x cố định thuộc [a,b] khác x_i, khi đó F(x)=0 với $k = \frac{f(x) - P_n(x)}{p(x)}$.

Do $f(x_i)=P_n(x_i)$ và $p(x_i)=0$ nên $F(x_i)=0$ với mọi i=0,…,n. Áp dụng định lý Rolle trên các đoạn nhỏ $[x_i,x_j]$ (i khác j) ta có các giá trị c_i thuộc $[x_i,x_{i+1}]$ sao cho $F'(c_i)=0$ với i=0,…,n-1. Tiếp tục suy luận như thế nhiều lần ta suy ra có giá trị c thuộc $[x_0,x_n]$ sao cho $F^{(n+1)}(c)=0$. Từ biểu thức F(x) đạo hàm hai vế suy ra $F^{(n+1)}(c)=f^{(n+1)}(c)-k.(n+1)!$. Hay ta có $k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$.

Kết hợp suy luận trên ta có $k = \dfrac{f(x) - P_n(x)}{p(x)} = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$, từ đó và do (4.1) suy ra sai số cần chứng minh.

Nhận xét:

- Trong chứng minh trên, ta chỉ chứng minh sai số tại x khác x_i. Tuy nhiên dễ thấy là tại x_i sai số bằng 0 nên trong công thức sai số (4.2), ta cho x bất kỳ thuộc [a,b].

- Giả sử hàm f(x) cũng là một đa thức bậc không quá n, khi đó dễ thấy M=0. Do đó $f(x)=P_n(x)$ với mọi x. Điều này cũng chứng tỏ đa thức nội suy là duy nhất.

Ví dụ 4.1 Giả sử biểu thức $\left(1 + 2^2 + \ldots + k^2\right) = S(k)$ có dạng đa thức bậc 3 theo k, tìm đa thức đó.

Giải: Theo đề bài và áp dụng tính duy nhất của đa thức nội suy, ta có S(k) chính là đa thức nội suy bậc 3 của chính nó. Cho k = 1, 2, 3, 4 ta được 4 nút (bậc nội suy là 3): (1,1); (2,5); (3,14) và (4,30).

Ta nhận thấy đa thức $\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ có bậc 3 và có đồ thị đi qua 4 nút trên. Vậy đó chính là đa thức cần tìm, hay $1 + 2^2 + \ldots + k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$.

Việc tìm ra đa thức trên sẽ được trình bày trong các phần sau.

§2. ĐA THỨC NỘI SUY LAGRANGE

1. Đa thức nội suy Lagrange

Chúng ta tìm đa thức nội suy từ (n+1) đa thức cơ bản sau:

$$d_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}$$

…. $$\boxed{d_k(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)}} \quad (4.3)$$

(k=0,1,…,n).

Ta có thể mô tả biểu thức đa thức cơ bản $d_k(x)$ (4.3) là: tử thức là tích các nhân tử bậc nhất $(x-x_i)$ thiếu $(x-x_k)$, mẫu số chính là tử thức khi thay x bằng x_k.

Do các x_i phân biệt nên các biểu thức cơ bản trên tồn tại là các đa thức bậc n và có các tính chất:

$$\begin{cases} d_k(x_k) = 1 \ \forall k \\ d_k(x_i) = 1 \ \forall k \neq i \end{cases}.$$

Do đó ta dễ thấy đa thức nội suy có dạng sau (gọi là dạng Lagrange):

$$\boxed{L_n(x) = y_0 d_0(x) + y_1 d_1(x) + \ldots + y_n d_n(x)} \qquad (4.4)$$

Nhận xét:

- Cách tìm đa thức nội suy dạng Lagrange trên phù hợp khi các x_i cố định dù y_i thay đổi (hàm nội suy thay đổi). Khi đó người ta xây dựng sẵn các đa thức cơ bản và dùng cho nhiều hàm nội suy khác nhau.

- Cách xây dựng trên không phù hợp khi số nút nội suy thay đổi dù các nút cũ không đổi (bổ sung lưới nội suy). Khi đó nên dùng cách xây dựng khác ta sẽ học bài sau.

Ví dụ 4.2: Tìm đa thức nội suy cho các hàm f(x), g(x) trên đọan [0,1] với các nút:

x	0	0,2	1
f(x)	7,1	2,3	4,5
g(x)	-1,2	3,5	0,8

Từ đó tính gần đúng các giá trị f(0,5) và g(0,7).

Giải:

Từ các giá trị $x_0=0$, $x_1=0,2$, $x_2=1$, áp dụng (4.3) ta có

$$d_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0,2)(x-1)}{(0-0,2)(0-1)}=5(x-0,2)(x-1)$$

$$d_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(0,2-0)(0,2-1)}=-6,25x(x-1)$$

$$d_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=\frac{(x-0)(x-0,2)}{(1-0)(1-0,2)}=1,25x(x-0,2)$$

Với f(x): ta có $y_0=7,1$; $y_1=2,3$ và $y_2=4,5$ thế vào (4.4) ta có

$$f(x)\approx L_2(x)=7,1d_0(x)+2,3d_1(x)+4,5d_2(x);\ \forall x\in[0,1]$$

Cho x=0,5 ta có

$d_0(0,5)=-0,75$; $d_1(0,5)=1,5625$; $d_2(0,5)=0,1875$ và suy ra $f(0,5)\approx L_2(0,5)=-0,8875$.

Với g(x): ta có $y_0=-1,2$; $y_1=3,5$ và $y_2=0,8$. Một cách tương tự ta có kết quả:

$$g(x)\approx L_2(x)=-1,2d_0(x)+3,5d_1(x)+0,8d_2(x);\ \forall x\in[0,1]$$

Và $g(0,7)\approx L_2(0,7)=5,84375$

2. Phân tích về phân thức tối giản

Bài toán đặt ra là cần phân tích $B(x)=\dfrac{P_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}$ về dạng tối giản $\dfrac{A_0}{x-x_0}+\dfrac{A_1}{x-x_1}+...+\dfrac{A_n}{x-x_n}$. Trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc không quá n và $x_0, x_1, \ldots, x_n$ là các giá trị phân biệt.

Do tính duy nhất của đa thức nội suy, $P_n(x)$ là đa thức nội suy của chính nó với (n+1) nút $(x_i,P_n(x_i))$. Áp dụng cách xây dựng đa thức nội suy trên, $P_n(x)\equiv L_n(x)$ với $y_i= P_n(x_i)$.

Thế các dạng (4.3), (4.4) vào phân thức B(x):

$$B(x)=\frac{y_0}{T_0(x-x_0)}+\frac{y_1}{T_1(x-x_1)}+...+\frac{y_n}{T_n(x-x_n)}$$

Trong đó $T_i=(x_i-x_0)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-1})...(x_i-x_n)=\prod_{k\neq i}(x_i-x_k)$

Suy ra kết quả cần tìm $\boxed{A_i=\dfrac{P_n(x_i)}{T_i}}$ (4.5).

Ví dụ 4.3: Phân tích $\dfrac{-x^3+2x^2+5}{(x-1)x(x+1)(x+2)}$ về dạng tối giản.

Đặt $P_n(x)=-x^3+2x^2+5$, $x_0=1$, $x_1=0$, $x_2=-1$ và $x_3=-2$.

Áp dụng (4.5): $P_n(x_0)=6$, $T_0=(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)=6$ suy ra $A_0=1$

Tương tự $P_n(x_1)=5$, $T_1=-2$, $A_1=-2{,}5$; …; $A_2=4$; $A_3=-21/6$

Kết quả:

$$\frac{-x^3+2x^2+5}{(x-1)x(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x-1}-\frac{5}{2x}+\frac{4}{x+1}-\frac{7}{2(x+2)}$$

Nhận xét:

Trường hợp x_k là nghiệm của $P_n(x)$, khi đó ta có thể rút gọn tử mà mẫu thức cho $(x-x_k)$. Bài toán khi đó sẽ giảm một bậc. Hoặc áp dụng (4.5) ta cũng có kết quả tương tự là $A_k=0$.

§3. ĐA THỨC NỘI SUY NEWTON

1. Trường hợp tổng quát

Chúng ta đặt các tỷ sai phân trên lưới nội suy như sau:

- Tỷ sai phân cấp 1:

$$T_0^{(1)}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0};\quad T_1^{(1)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1};\ldots;T_i^{(1)}=\frac{y_{i+1}-y_i}{x_{i+1}-x_i}\quad (0\le i\le n-1)$$

- Tỷ sai phân cấp 2:

$$T_0^{(2)}=\frac{T_1^{(1)}-T_0^{(1)}}{x_2-x_0};\ldots;T_i^{(2)}=\frac{T_{i+1}^{(1)}-T_i^{(1)}}{x_{i+2}-x_i}\quad (0\le i\le n-2)$$

- Tỷ sai phân cấp k ($1\le k\le n$)

$$\boxed{T_0^{(k)}=\frac{T_1^{(k-1)}-T_0^{(k-1)}}{x_k-x_0};\ldots;T_i^{(k)}=\frac{T_{i+1}^{(k-1)}-T_i^{(k-1)}}{x_{i+k}-x_i}\quad (0\le i\le n-k)}\quad (4.6)$$

Chúng ta sẽ bố trí các tỷ sai phân vào bảng trong đó các tỷ sai phân cùng cấp thuộc một cột, các tỷ sai phân cùng chỉ số dưới thuộc một dòng. Hai cột đầu tiên là x_i và y_i, cột cuối cùng là $T^{(n)}$ chỉ có một phần tử là $T_0^{(n)}$:

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	…	$T^{(n)}$
x_0	y_0	$T_0^{(1)}$	$T_0^{(2)}$		$T_0^{(n)}$
x_1	y_1	$T_1^{(1)}$	$T_1^{(2)}$		
..	..	..	..	..	

Ví dụ 4.4: Cho lưới nội suy

x	0	4	5	7	10
y	2	114	202	492	1302

Bảng tỷ sai phân là:

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$	$T^{(4)}$
0	2	28	12	1	0
4	114	88	19	1	

5	202	145	25		
7	492	270			
10	1302				

Tính chất tỷ sai phân:

- Nếu $y_i=P_n(x_i)$ trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc không quá n thì mọi tỷ sai phân cấp (n+1) đều bằng không.

- Nếu thêm một nút nội suy mới vào lưới nội suy, ta sắp xét nút mới vào bên phải lưới (các x_i không nhất thiết có thứ tự, chỉ bắt buộc phải phân biệt) thì các tỷ sai phân cũ không thay đổi, trong bảng tỷ sai phân ta có thêm một dòng và một cột.

Với bảng tỷ sai phân, chúng ta xây dựng được đa thức nội suy cần tìm (gọi là dạng Newton tiến) như sau:

$$\boxed{\begin{aligned} N_n(x) = y_0 + T_0^{(1)}(x-x_0) + T_0^{(2)}(x-x_0)(x-x_1) + \ldots \\ + T_0^{(n)}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned}} \quad (4.7)$$

Chúng ta không chứng minh tính chất này. Lưu ý rằng các hệ số là tỷ sai phân trong (4.7) thuộc dòng đầu tiên trong bảng tỷ sai phân theo cách bố trí đã nêu trên.

Ví dụ 4.5: Cho bảng giá trị hàm số

x	0	0,2	1
f(x)	7,1	2,3	4,5

Tính gần đúng giá trị f(0,5) bằng đa thức nội suy bậc hai

Bảng tỷ sai phân

x	y	$T^{(1)}$	$T^{(2)}$
0	7,1	-24	26,75
0,2	2,3	2,75	
1	4.5		

Khi đó đa thức nội suy $N_2(x) = 7{,}1 - 24x + 26{,}75x(x-0{,}2)$

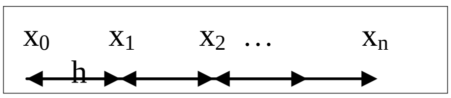
Xấp xỉ $f(0{,}5) \approx N_2(0{,}5) = -0{,}8875$.

So sánh ví dụ 4.2 ta thấy giả thiết và kết quả không thay đổi. Đây không phải là ngẫu nhiên. Đó là do tính duy nhất của đa thức nội suy. Tức là với lưới nội suy cho trước ta có

$$\boxed{L_n(x) \equiv N_n(x)} \quad (4.8)$$

Nhận xét: Do tính chất tỷ sai phân nêu trên, nếu lưới nội suy thêm hay bớt một nút thì việc xây dựng đa thức nội suy Newton không phải làm lại từ đầu. Đây là ưu điểm của đa thức nội suy Newton. Tuy nhiên nếu các giá trị y_i thay đổi thì ta nên dùng cách xây dựng đa thức nội suy Lagrange.

2. Trường hợp lưới đều



Lưới nội suy là đều nếu các mốc x_i cách đều một bước lưới h cho trước. Khi đó ta chỉ cần có x_0 và h thì sẽ tính được $\boxed{x_i = x_0 + ih}$ với mọi $i=0,\ldots,n$. (4.9)

Áp dụng vào cách tính các tỷ sai phân (4.6), ta thấy mẫu số trong tỷ sai phân cấp *k* là (*kh*) không đổi. Do đó ta sẽ tính tỷ sai phân thông qua các đại lượng sai phân đơn giải hơn.

Ta gọi sai phân trên lưới nội suy là:

- Sai phân cấp 1:

$$\Delta_0^{(1)} = y_1 - y_0;\quad \Delta_1^{(1)} = y_2 - y_1; \ldots; \Delta_i^{(1)} = y_{i+1} - y_i \quad (0 \le i \le n-1)$$

- Sai phân cấp 2:

$$\Delta_0^{(2)} = \Delta_1^{(1)} - \Delta_0^{(1)};\quad \ldots; \Delta_i^{(2)} = \Delta_{i+1}^{(1)} - \Delta_i^{(1)} \quad (0 \le i \le n-2)$$

- Sai phân cấp *k* ($1 \le k \le n$)

$$\boxed{\Delta_0^{(k)} = \Delta_1^{(k-1)} - \Delta_0^{(k-1)}; \ldots \Delta_i^{(k)} = \Delta_{i+1}^{(k-1)} - \Delta_i^{(k-1)} \quad (0 \le i \le n-k)} \quad (4.9)$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được công thức tính tỷ sai phân cấp *k* là với lưới đều là $\boxed{T_i^{(k)} = \dfrac{\Delta_i^{(k)}}{k!h^k}}$

(4.10)

Bây giờ ta đưa x_i về x_0 và h. Áp dụng (4.9):

$$(x - x_i) = (x - x_0 - ih) = \left(\frac{x - x_0}{h} - i\right)h \equiv (t - i)h$$

Thế kết quả đó và (4.10) vào (4.7) thì được đa thức nội suy Newton dạng lưới đều sau:

$$\boxed{\begin{aligned} N_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta_0^{(1)}}{1!}t + \frac{\Delta_0^{(2)}}{2!}t(t-1) + \ldots \\ &\quad + \frac{\Delta_0^{(n)}}{n!}t(t-1)\ldots(t-n+1) \end{aligned}} \quad (4.11)$$

Trong đó $\boxed{t = \dfrac{x - x_0}{h}}$ (4.12)

§4 BÀI TẬP

Trong các bài tập sau hãy giải bằng đa thức thức nội suy Lagrange và đa thức Newton (lưới đều nếu có thể được).

4.1 Cho

x	0	1	1,2	1,4
f(x)	3	3,2	5,7	4,1

Tính gần đúng f(0,5). Đánh giá sai số theo M nếu biết

$$|f''''(x)| \le M \quad \forall x \in [0; 1,4]$$

4.2 Cho

x	1	1,2	1,4	1,6
f(x)	-3	2	-1,7	-4,1

Tính gần đúng f(0,5). Đánh giá sai số theo M nếu biết

$$|f''''(x)| \le M \quad \forall x \in [0; 1,6]$$

4.3 Cho

x	1	1,2	1,4	1,6

f(x)	-3	-5	-1,7	4,1

Tính gần đúng f(0,5). Đánh giá sai số theo M nếu biết

$$\left|f'''(x)\right| \le 2,5 \ \forall x \in [0;1,6]$$

4.4 Cho

x	1	1,2	1,4	1,6	1,8
f(x)	-3	2	-1,7	4,1	9,2

Tính gần đúng f(0,5). Đánh giá sai số theo M nếu biết

$$\left|f'''(x)\right| \le M \ \forall x \in [0;1,8]$$

4.5 Cho

x	1	1,2	1,4	1,6	1,9
f(x)	-3	2	-1,7	4,1	9,2

Tính gần đúng f(0,5). Đánh giá sai số theo M nếu biết

$$\left|f'''(x)\right| \le 1 \ \forall x \in [0;1,9]$$

4.6 Tìm đa thức nội suy lưới đều bậc 3 cho hàm $f(x)=\dfrac{e^x}{x+1}$ trên đoạn $x \in [0;0,9]$

4.7 Cho q(x) là đa thức nội suy của f(x) với $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và r(x) là đa thức nội suy của f(x) với $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Chứng minh rằng đa thức nội suy của f(x) với $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ là

$$p(x)=\frac{(x-x_0)r(x)-(x-x_{n+1})q(x)}{x_{n+1}-x_0}$$

4.8 Cho q(x) là đa thức nội suy của f(x) với $x_0, x_1, \ldots, x_n$ và $y_{n+1}=q(x_{n+1})$ (x_{n+1} khác $x_0, x_1, \ldots, x_n$). Tìm đa thức nội suy của f(x) với $x_0, x_1, .., x_{n+1}$.

4.9 Tìm A_1, A_2, A_3 sao cho

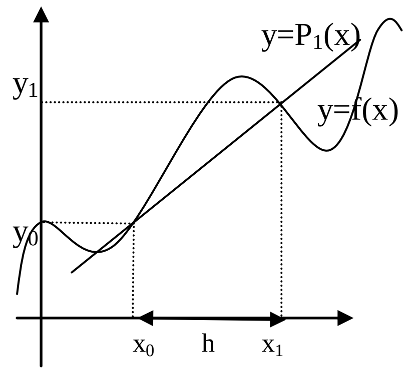
$$\frac{x-1}{x(x+1)(x+3)}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{A_3}{x+3}$$

CHƯƠNG 5

TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Trong chương này chúng ta tính gần đúng tích phân xác định mà ta đặt là $I=\int_a^b f(x)dx$ (a<b) trong đó hàm *f(x)* khả tích trên [a;b].

§1. CÔNG THỨC HÌNH THANG

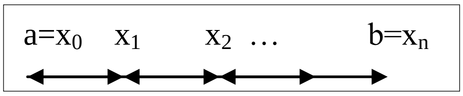


Gọi $P_1(x)$ là đa thức nội suy với hai nút $(x_0, y_0=f(x_0))$ và $(x_1, y_1=f(x_1))$. Khi đó ta có $P_1(x)=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}x+\dfrac{y_0x_1-y_1x_0}{x_1-x_0}$. Sau đó xấp xỉ *f(x)* bằng $P_1(x)$ trên $[x_0;x_1]$ và dùng công thức Newton-Lepnitz ta có

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} P_1(x)dx=\frac{x_1-x_0}{2}(y_0+y_1)} \qquad (5.1)$$

Tích phân $P_1(x)$ có thể tính bằng công thức Newton-Lebnitz nhưng nếu nhìn vào hình vẽ, có thể thấy tích phân đó có giá trị chính là diện tích một hình thang.

Trở lại việc tính $I=\int_a^b f(x)dx$. Chúng ta chia đều đoạn [a,b] thành n đoạn nhỏ có chiều dài $\boxed{h=\dfrac{b-a}{n}}$. Ký hiệu các đầu đoạn con là x_0, x_1, … hay $x_i=a+ih$ và $y_i=f(x_i)$ (i=0,1, …,n).



Áp dụng (5.1) trên mỗi số hạng của phân tích $I=\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx+\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$ và cộng các kết quả chúng ta có công thức hình thang sau:

$$\boxed{I\approx\frac{h}{2}\left[y_0+y_1+\ldots+y_n\right]\equiv I_H(n)} \qquad (5.2)$$

Sai số của (5.2) là

$$\boxed{\left|I-I_H(n)\right|\le\frac{M_2(b-a)h^2}{12}} \qquad (5.3)$$

Trong đó $\boxed{\left|f''(x)\right|\le M_2 \quad \forall x\in[a,b]}$

Thật vậy, áp dụng sai số nội suy trên từng đoạn nhỏ ta được $\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} P_i(x)\,dx\right| \le \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{M}{2}\left|(x-x_i)(x-x_i-h)\right|dx = \frac{Mh^3}{12}$ Cộng sai số trên từng đoạn nhỏ với lưu ý ta $h = \frac{b-a}{n}$ có kết quả (5.3)

Ví dụ (5.1)

Tính gần đúng tích phân xác định $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ bằng công thức hình thang biết các giá trị f(x):

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
f(x)	-1,23	-0,81	-0,22	0,4	0,1	0,5

Hãy đánh giá sai số kết quả biết rằng $\left|f''(x)\right| \le 2{,}91 \quad \forall x \in [0,1]$

Giải:

Qua bảng giá trị ta chọn h=0,2 và y_0 đến y_6 cho bởi dòng thứ 2 trong bảng. Áp dụng (5.2) ta có kết quả $I \approx$ -0,126.

Từ giả thiết suy ra M_2=2,91.

Áp dụng (5.3) ta có sai số không quá 10^{-2}. Với một chữ số không chắc ta kết luận:

$I = -0{,}13 \pm 10^{-2}$

Ví dụ (5.2) thực hành trên máy casio 570:

Cho $I = \int_1^2 \ln(2x+3)\,dx$.

Dùng công thức hình thang tính *I* với yêu cầu

a) 4 đoạn chia và đánh giá sai số

b) Sai số không quá 4.10^{-4}.

Giải:

a) n = 4 suy ra h = 0,25

Dùng mode table lập bảng giá trị (570ES):

Bấm	Mode 7	ln 2 $\boxed{a}$ X + 3 =	0 =	1 =	0,25=
Màn hình	f(X)=	Start?	End?	Step?	

Ta có kết quả là bảng giá trị x,y tại 5 nút (h=0,25)

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	1.09861	1.25276	1.38629	1.50408	1.60944

Tính gần đúng (mode 1):

Bấm $\boxed{a}$ A $\boxed{a}$ calc $\boxed{a}$ A + (ln 2 $\boxed{a}$ X + 3) + ln 2 ($\boxed{a}$ X + 0,25) + 3)) x 0,25 ÷ 2 $\boxed{a}$: X $\boxed{a}$ calc $\boxed{a}$ X + 0,25

Màn hình sẽ là A=A+(ln(2X+3)+ln(2(X+0,25)+3))x0,25÷2: X=X+0,25

Bấm	calc	0 =	0 =	= (4 lần)	= (4 lần)	= (4 lần)

Màn hình	A?	X?	0,293…	0,6238…	0,9851…	1,3742...

Kết quả gần đúng $I \approx 1,3742$

Đánh giá sai số: Xét $\left|f''(x)\right| = \dfrac{2^2}{(2x+3)^2} \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = M_2$

Suy ra sai số $\left|I - 1,3742\right| \le \dfrac{M_2.0,25^2}{12} = 3.10^{-3}$.

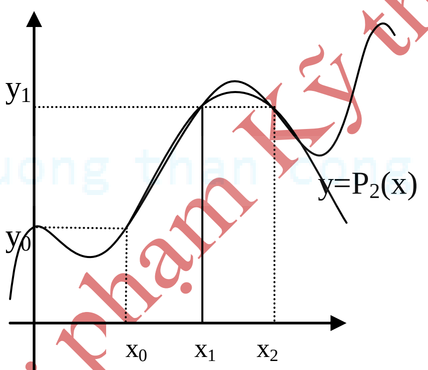
Vậy $I \approx 1,374 \pm 3.10^{-3}$

b) Xét công thức sai số

$$\frac{M_2 h^2}{12} \le 4.10^{-4} \Leftrightarrow h \le 0,103... \Rightarrow n = \frac{1}{h} \ge 9,6...$$

Chọn n = 10 suy ra h = 0,1 và tính gần đúng như câu a. Bấm màn hình là A=A+(ln(2X+3)+ln(2(X+**0,1**)+3))**x0,1**÷2: X=X+**0,1**. Bấm bộ (= 4 lần) chín lần ta có kết quả $I \approx 1,375454$.

§2. CÔNG THỨC SIMPSON



Gọi $P_2(x)$ là đa thức nội suy với ba nút tạo thành lưới đều $(x_0,y_0=f(x_0))$; $(x_1,y_1=f(x_1))$ và $(x_2,y_2=f(x_2))$.

Khi đó ta có $P_2(x) = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{1}t + \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2}t(t-1)$ trong đó $t = \dfrac{x - x_0}{h}$; $h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$.

Sau đó xấp xỉ $f(x)$ bằng $P_2(x)$ trên $[x_0;x_2]$ và dùng công thức Newton-Lepnitz ta có

$$\boxed{\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)} \qquad (5.4)$$

Trở lại việc tính $I = \int_a^b f(x)dx$. Chúng ta chia đều đoạn [a,b] thành n đoạn nhỏ bởi các điểm chia x_0, x_1, … x_n (n chẵn hay n=2k, k nguyên dương), mỗi đoạn có chiều dài $\boxed{h = \dfrac{b-a}{n}}$. Ta có $x_i = a + ih$ và đặt $y_i=f(x_i)$ $(i=1, 2, …,n)$ tương tự như trong phần trước.

Áp dụng (5.4) trên mỗi hai đoạn con $[x_{2i};x_{2i+2}]$ và cộng các kết quả chúng lại ta có công thức Simpson (5.5)

$$\boxed{I \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3... + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + ... + y_{n-2}) + y_n\right] \equiv I_S(n)}$$

Đặt $\boxed{\left|f^{(4)}(x)\right| \le M_4 \quad \forall x \in [a,b]}$ người ta chứng minh được sai số ở (5.5) là:

$$\boxed{\left|I - I_S(n)\right| \le \frac{M_4(b-a)h^4}{180}} \qquad (5.6)$$

Ví dụ (5.3) thực hành trên máy casio 570:

Cho $I = \int_1^2 \ln(2x+3)\,dx$. Dùng công thức hình thang tính I với yêu cầu

a) 4 đoạn chia và đánh giá sai số

b) Sai số không quá 3.10^{-7}.

Giải:

a) n = 4 suy ra h = 0,25

Dùng mode table lập bảng giá trị (570ES):

x	0	0.25	0.5	0.75	1
y	1.09861	1.25276	1.38629	1.50408	1.60944

Tính gần đúng (mode 1):

Bấm a A a calc a A + (ln 2 a X + 3) + 4ln 2 (a X + 0,25) + 3)+ ln 2 (a X+0,5) + 3)) x 0,25 ÷ 3 a: X a calc a X + 0,5

Màn hình sẽ là A=A+(ln(2X+3)+4ln(2(X+0,25)+3)+ln(2(X+0,5)+3))x0,25÷3: X=X+0,5

Bấm	calc	0 =	0 =	= (4 lần)
Màn hình	A?	X?	0,624…	1,3756666…

Kết quả gần đúng $I \approx 1,3756666...$

Đánh giá sai số: Xét $\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{2^4}{(2x+3)^4} \le \left(\frac{2}{3}\right)^4 = M_4$

Suy ra sai số $\left|I - 1,3742\right| \le \frac{M_4.0,25^4}{180} = 5.10^{-6}$.

Vậy $I \approx 1,375667 \pm 5.10^{-6}$

b) Xét công thức sai số

$$\frac{M_4 h^4}{180} \le 3.10^{-7} \Leftrightarrow h \le 0,128... \Rightarrow n = \frac{1}{h} \ge 7,7...$$

Chọn n = 8 suy ra h = 0,125 và tính gần đúng như câu a.

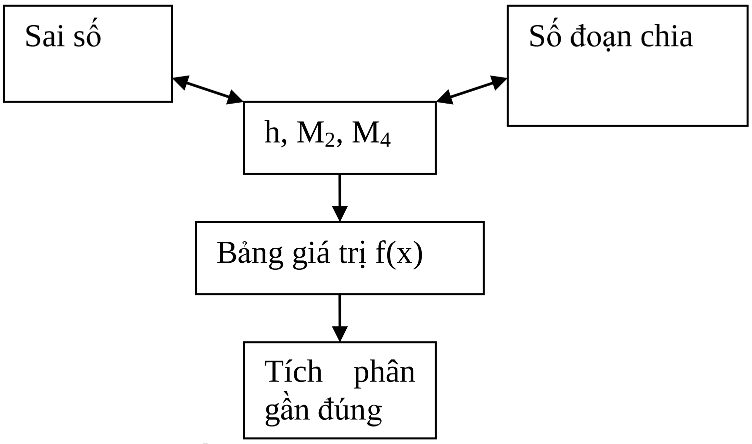
Bấm màn hình là

A=A+(ln(2X+3)+4ln(2(X+**0,125**)+3)+ln(2(X+**0,25**)+3))**x0,125**÷3: X=X+**0,25**.

Bấm bộ (dấu = 4 lần) ba lần.

Ta có kết quả $I \approx 1,3756757$.

1. Sơ đồ phương pháp (công thức hình thang, công thức Simpson)



2. Ứng dụng tính gần đúng lna và π bằng phép toán +,-,*,/

Cho a>0, bằng công thức Newton-Lepnitz chúng ta biết $\ln a = \int_1^a \frac{dx}{x}$. Áp dụng tính gần đúng các tích phân đó chúng ta thu được kết quả gần đúng lna.

Tương tự với $p = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Ta cũng tính gần đúng được π.

Ví dụ 5.4: Tính gần đúng tích phân $I = \int_{0,5}^1 \frac{dx}{x}$ bằng công thức Simpson 4 đoạn chia. Từ đó suy ra giá trị gần đúng ln2. Các phép toán có đánh giá sai số

Giải:Bảng giá trị

x	0.5	0.625	0.75	0.875	1
1/x	2	1.6	1.333333	1.142857	1

Dùng công thức Simpson ta có $I \approx 0,69325$.

Xét $\left|(1/x)^{(4)}\right| = \frac{24}{x^5} \le 768 = M_4$ suy ra sai số $\frac{M_4.0,5.0,125^4}{180} \le 6.10^{-4}$. Vậy $I = 0,6933 \pm 6.10^{-4}$

Mặt khác $I = -\ln 0,5 = \ln 2$, tức là $\ln 2 = 0,6933 \pm 6.10^{-4}$

3. Bài tập

Với mỗi tích phân sau hãy dùng công thức hình thang và công thức Simpson tính gần đúng với yêu cầu:

a) Dùng 4 đoạn chia

b) Sai số không quá 10^{-5}.

1.1 $\int_0^{0,25} e^{x^2} dx$

1.2 $\int_2^{2,5} \frac{xdx}{\ln x}$

1.3 $\int_0^{1,2} \sqrt{x+1}dx$

1.4 $\int_1^2 x^2 \ln x dx$

1.5 Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ bằng công thức Simpson 8 đoạn chia. Từ đó suy ra giá trị gần đúng của π.

CHƯƠNG 6
PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG BÉ NHẤT

§1. BÀI TOÁN

Giả sử ta cần tìm hàm số y=f(x). Bằng thực nghiệm chúng ta biết giá trị gần đúng hàm số tại một số điểm x_i là $y_i \approx f(x_i)$ (i=1,2,…,n). Điều quan trọng nữa là chúng ta muốn hàm f(x) được định dạng:

$$\boxed{f(x) = a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \ldots + a_k f_k(x)} \qquad (6.1)$$

trong đó $f_i(x)$ là những hàm số ta chọn.

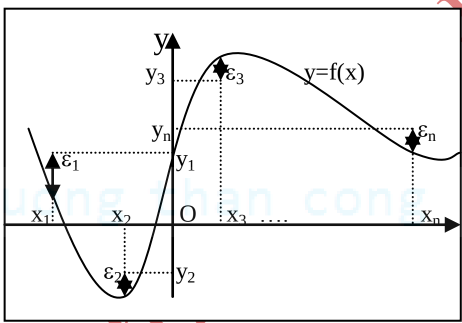
Việc chọn $f_i(x)$ thực hiện trên cơ sở đặc điểm hàm f(x) mà ta biết. Và hơn nữa, đó là những hàm số đơn giản, đủ tính chất để giúp ta xử lý vấn đề.

Khi đó, chúng ta cần đến phương pháp bình phương bé nhất.

Nội dung phương pháp: Đặt

$$S = \left(f(x_1) - y_1\right)^2 + \ldots + \left(f(x_n) - y_n\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2$$

S được hiểu là tổng các bình phương sai số ε_i tại các nút (x_i,y_i). Do đó chúng ta cần tìm các hệ số a_i sao cho *S* nhỏ nhất có thể được.



Người ta chứng minh được *S* nhỏ nhất với các giá trị a_i là nghiệm hệ phương trình:

$$\boxed{\left\{S'_{a_1} = 0 \quad \ldots \quad S'_{a_k} = 0\right.}$$
(6.2)

Trường hợp k = 2, hệ (6.2) viết thành:

$$\begin{cases} a_1 \sum_{i=1}^{n} \left[f_1(x_i)\right]^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_1(x_i) \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) f_2(x_i) + a_2 \sum_{i=1}^{n} \left[f_2(x_i)\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i f_2(x_i) \end{cases} \qquad (6.3)$$

Sau đây ta xét một số trường hợp

§2. TUYẾN TÍNH $y = a_1 + a_2 x$

Áp dụng (6.3) với $f_1(x)=1$ và $f_2(x)=x$ ta có

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \end{cases} \qquad (6.4)$$

Tính các tổng trong (6.4) và giải hệ ta có a_1, a_2 cần tìm

Ví dụ 6.1: Áp dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm đường thẳng (tuyến tính) xấp xỉ số liệu

x_i	-1	2	2	7	9	10	10
y_i	3	5	7	18	18	23	27

Giải: Tính các tổng trong (6.4) ta có

$$n=7, \sum_{i=1}^{7} x_i = 39, \sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 339, \sum_{i=1}^{7} y_i = 101, \sum_{i=1}^{7} y_i x_i = 809$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 7a_1 + 39a_2 = 101 \\ 39a_1 + 339a_2 = 809 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 224/71 \approx 3{,}15 \\ a_2 = 431/213 \approx 2{,}02 \end{cases}$$

Đường thẳng cần tìm là $y = 3{,}15 + 2{,}02x$

Thực hành máy Casio MS: $\boxed{\text{S}}$ là bấm shift

Bấm mode, reg, lin (lin viết tắt nghĩa là tuyến tính)

Nhập số liệu -1; 3 M+ (nhập cặp x_1, y_1)

2; 5 M+ (nhập cặp x_2, y_2)

…. 10; 27 M+ (nhập cặp x_7, y_7)

Xuất kết quả $\boxed{\text{S}}$ S-var A = (cho kết quả a_1)

$\boxed{\text{S}}$ S-var B = (cho kết quả a_2)

Thực hành máy Casio ES: $\boxed{\text{S}}$ là bấm shift

Bấm mode, stat, A+BX (đường thẳng)

Nhập số liệu theo bảng tính trên màn hình, xong bấm $\boxed{\text{AC}}$

Xuất kết quả $\boxed{\text{S}}$ 1 7 A = (cho kết quả a_1)

$\boxed{\text{S}}$ 1 7 B = (cho kết quả a_2)

§3. HÀM ln $y = a_1 + a_2 \ln x$ (x>0)

Áp dụng (6.3) với $f_1(x)=1$ và $f_2(x)=\ln x$ ta có

$$\begin{cases} a_1 n + a_2 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} (\ln x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln x_i \end{cases} \qquad (6.5)$$

Tính các tổng trong (6.5) và giải hệ ta có a_1, a_2 cần tìm

Ví dụ 6.2: Áp dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm đường cong dạng $y = a_1 + a_2 \ln x$ xấp xỉ số liệu

x_i	1	2	2	7	9	10	10
y_i	3	5	7	18	18	23	27

Giải: Tính các tổng trong (6.5) ta có

$$n=7, \sum_{i=1}^{7} \ln x_i \approx 10{,}135, \sum_{i=1}^{7} (\ln x_i)^2 \approx 20{,}179,$$

$$\sum_{i=1}^{7} y_i = 101, \sum_{i=1}^{7} y_i \ln x_i \approx 198{,}02$$

Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 7a_1 + 10{,}135a_2 = 101 \\ 10{,}135a_1 + 20{,}179a_2 = 198{,}02 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \approx 0{,}809 \\ a_2 \approx 9{,}407 \end{cases}$$

Đường cong cần tìm là $y = 0{,}809 + 9{,}407 \ln x$

Thực hành máy Casio MS: $\boxed{S}$ là bấm shift

Bấm mode, reg, log (hãy so sánh cách bấm máy ở VD6.1)

Nhập số liệu 1; 3 M+ (nhập cặp x_1, y_1)

2; 5 M+ (nhập cặp x_2, y_2)

…. 10; 27 M+ (nhập cặp x_7, y_7)

Xuất kết quả $\boxed{S}$ S-var A = (cho kết quả a_1)

$\boxed{S}$ S-var B = (cho kết quả a_2)

Thực hành máy Casio ES: $\boxed{S}$ là bấm shift

Bấm mode, stat, lnX

Nhập số liệu theo bảng tính trên màn hình, xong bấm $\boxed{AC}$

Xuất kết quả $\boxed{S}$ 1 7 A = (cho kết quả a_1)

$\boxed{S}$ 1 7 B = (cho kết quả a_2)

§4. TRƯỜNG HỢP TUYẾN TÍNH HÓA

Một số yêu cầu định dạng đường cong không thể dùng phương pháp bình phương bé nhất. Đường cong dạng $y = a_1 e^{a_2 x}$ là một ví dụ. Nói đúng hơn là phương pháp bình phương bé nhất chỉ áp dụng khi biểu thức đường cong là dạng tổ hợp tuyến tính các hàm số cho trước.

Trong một số trường hợp không dùng được như trên, người ta có cách biến đổi đưa dạng đường cong về tuyến tính, từ đó mới áp dụng phương pháp bình phương bé nhất. Cách làm đó được gọi là tuyến tính hóa.

Ví dụ 6.3: Áp dụng tuyến tính hóa và phương pháp bình phương bé nhất tìm đường cong dạng $y = a_1 e^{a_2 x}$ xấp xỉ số liệu

x_i	1	2	2	3	4	6	7
y_i	139	115	97	51	18	2	0,7

Giải: Từ dạng đường cong và số liệu đã cho ta lấy ln hai vế được $\ln y = \ln a_1 + \ln e^{a_2 x} = \ln a_1 + a_2 x \quad (x, y, a_1 > 0)$. Đặt $A_1=\ln a_1$ và $Y=\ln y$ ta có số liệu mới và đường cong mới có dạng tuyến tính $Y=A_1+a_2x$

x_i	1	2	2	3	4	6	7
Y_i	ln139	ln115	ln97	ln51	ln18	ln2	ln0,7

Áp dụng phương pháp bình phương bé nhất ta có kết quả $\begin{cases} A_1 \approx 6{,}41 \\ a_2 \approx -0{,}94 \end{cases}$. Từ đó ta suy ra hệ số từ dạng ban đầu. $\begin{cases} a_1 = e^{A_1} \approx 608 \\ a_2 \approx -0{,}94 \end{cases}$. Đường cong cần tìm $y = 608e^{-0{,}94x}$.

Cách làm tuyến tính hóa trên cũng được lập trình sẵn trong máy tính Casio. Cụ thể, trong máy Casio có lập trình sẵn các dạng đường cong sau (hoặc dùng bình phương bé nhất trực tiếp, hoặc tuyến tính hóa)

Dạng đường cong	Máy MS	Máy ES
$y=a_1+a_2x$	lin	Y=A+BX
$y=a_1+a_2x+a_3x^2$	quad	_+cX^2
$y=a_1+a_2\ln x$	log	lnX
$y=a_1+a_2/x$	inv	1/X
$y=a_1e^{a_2x}$	exp	e^X
$y=a_1x^{a_2}$	pwr	A.X^B

§5. BÀI TẬP

Với bộ số liệu sau hãy áp dụng phương pháp bình phương bé nhất tìm các đường cong xấp xỉ dạng $y=a_1+a_2x$, $y=a_1\sqrt{x}$, $y=a_1+\frac{a_2}{x}$, $y=a_1e^{a_2x}$, $y=a_1x+a_2x^2$, $y=a_1+a_2\ln x$, $y=a_1x^{a_2}$, $y=a_1\sin x+a_2\cos x$.

Trường hợp nào phải dùng tuyến tính hóa, trường hợp nào không tìm được đường cong, vì sao?

6.1 Số liệu

x	-1	1	2	5
y	12	34	76	101

6.2 Số liệu

X	0	1	3	5
Y	122	74	26	10

6.3 Số liệu

x	0	1	3	5	5	5
y	-4	-2	3	7	12	21

6.4 Số liệu

x	3	7	5	3	7	9
y	10	21	21	15	30	31

CHƯƠNG 7
GIẢI GẦN ĐÚNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

§1. BÀI TOÁN CÔSI

Một phương trình vi phân cấp một có dạng $y'(x) = f(x;y)$ trong đó y là một hàm số theo x. Nghiệm phương trình là hàm *y(x)* khả vi trên một miền $x \in [a,b]$ và thỏa mãn phương trình. Một phương trình vi phân cấp một thường có một họ nghiệm y=y(x,c) trong đó c là một tham số, họ nghiệm đó gọi là nghiệm tổng quát của phương trình.

Khi thay c bằng một hằng số cụ thể trong nghiệm tổng quát ta được một nghiệm cụ thể mà ta gọi là nghiệm riêng.

Ví dụ 7.1: Xét phương trình $y'(x) = 2x - y$.

Chuyển vế y, nhân hai vế với e^x ta sẽ có $\dfrac{d(ye^x)}{dx} = 2xe^x$.

Tích phân hai vế ta được $ye^x = 2e^x(x-1) + c$ hay $y = 2(x-1) + ce^{-x}$ là nghiệm tổng quát phương trình.

Giả sử ta có thêm điều kiện y(0)=0,5. Khi đó thế x=0, y=0,5 và nghiệm tổng quát ta được c=2,5. Điều kiện trên gọi là điều kiện giá trị đầu.

Như vậy phương trình vi phân $y'(x) = 2x - y$ với điều kiện đầu y(0)=0,5 có nghiệm riêng duy nhất $y = 2(x-1) + 2,5e^{-x}$.

Người ta gọi bài toán bao gồm một phương trình vi phân cấp một và một điều kiện giá trị đầu là bài toán Cô si

Nói chung không phải bài toán Cô si nào cũng có nghiệm duy nhất. Điều đó đòi hỏi một số điều kiện.

Trong nội dung tài liệu này chúng ta giả thiết bài toán có nghiệm duy nhất và giới thiệu một số phương pháp giải gần đúng. Các phương pháp này không tìm nghiệm bài toán dưới dạng phương trình đường cong y=y(x). Mà chúng ta tìm gần đúng giá trị nghiệm y(x) tại n mốc x_i cách đều với một bước lưới h cho trước.

Cụ thể: Cho $\boxed{\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0, x_n = x_0 + nh]}$ (7.1)

Tính gần đúng $y(x_i)$ với $x_i = x_0 + ih$, i=1, 2,…,n

§2. PHƯƠNG PHÁP Ơ LE

Nội dung phương pháp: Từ phương trình vi phân trong (7.1) ta suy ra $y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))dx$. Với h đủ nhỏ để coi *f(x,y(x))* là không đổi trên [x_0,x_1=x_0+*h*], ta có:

$$y(x_1)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x))dx \approx f(x_0,y_0)\int_{x_0}^{x_1} dx$$

Từ đây ta có công thức gần đúng $\boxed{y(x_1)\approx y_0+hf(x_0,y_0)}$ (7.2)

Sau khi tính gần đúng *y(x₁)*, ta xem như có nút $(x_1,y(x_1))$. Tiếp tục làm tương tự sẽ có tiếp gần đúng nút $(x_2,y(x_2))$. Tổng quát nếu ký hiệu gần đúng $y(x_i)\approx y_i$ thì ta có:

$$\boxed{\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y(x_i)\approx y_i=y_{i-1}+hf(x_{i-1},y_{i-1}) \quad \forall i=1,2,...,n \end{cases}} \quad (7.3)$$

Ví dụ 7.2: Cho bài tóan $\begin{cases} y'(x)=2x-y \\ y(0)=0,5 \end{cases}, x\in[0,1]$

a) Dùng phương pháp Ơ le giải bài toán với h=0,2

b) Từ kết quả câu a) tính gần đúng y(0,1) bằng nội suy tuyến tính (bậc nhất)

c) Tính gần đúng y(0,1) bằng phương pháp Ơ le với h=0,1.

Giải

a) $x_0=0$; $y_0=0,5$; f(x,y)=2x-y suy ra $hf(x_0,y_0)=0,2(0-0,5)=-0,1$. Áp dụng (7.3) ta có giá trị gần đúng tại $x_1=0,2$ là $y(0,2)\approx y_1=0,4$.

Tiếp tục: $x_1=0,2$; $y_1=0,4$ $hf(x_1,y_1)=0 \Rightarrow x_2=0,4$ $y(0,4)\approx y_2=0,4$.

Tương tự được các nút kế tiếp. Kết quả:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	0,5	0,4	0,4	0,48	0,624	0,8192
hf(x,y)	-0,1	0	0,08	0,144	0,1952	

b) Đa thức nội suy bậc nhất từ hai nút (0;0,5) và (0,2;0,4) là đường thẳng $P_1(x)=-0,5x+0,5$. Xấp xỉ theo đa thức nội suy: $y(x)\approx P_1(x)$ với x thuộc [0;0,2]. Cho x=0,1 ta có y(0,1) ≈0,45

c) Áp dụng (7.3) với $x_0=0$; $y_0=0,5$; h=0,1 ta có $x_1=0,1$ và giá trị cần tìm $y(0,1)\approx y_1=0,45$

Nhận xét: Bài toán ở ví dụ trên chính là bài toán xét trong ví dụ (7.1). Nghiệm đúng của nó là $y=2(x-1)+2,5e^{-x}$. Hay y(0,1)=0,462… Như vậy kết quả gần đúng trên có sai số tương đối không quá 3%.

Tiếp theo ta chứng minh sự hội tụ của phương pháp.

Định lý: Đặt sai số tại x_i là $|\varepsilon_i|=|y(x_i)-y_i|$, dễ thấy $\varepsilon_0=0$. Khi đó:

$$\boxed{|\varepsilon_i|\le \frac{A.M}{2L}h} \quad (7.4)$$

trong đó $|y''(x)|\le M$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|\le L$ và $A=e^{iLh}$

Chứng minh:

Áp dụng khai triển taylor đến cấp 2:

$y(x) = y(x_{i-1}) + hy'(x_{i-1}) + \frac{h^2}{2}y''(c_{i-1})$, cho $x=x_i$ và thay $y'(x_i)$ từ phương trình vi phân (7.1) ta có:

$$y(x_i) = y(x_{i-1}) + hf\left(x_{i-1}, y(x_{i-1})\right) + \frac{h^2}{2}y''(c_{i-1})$$

Trừ hai vế với đẳng thức thứ hai trong (7.3) ta có:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + h\left[f\left(x_{i-1}, y(x_{i-1})\right) - f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)\right] + \frac{h^2}{2}y''(c_{i-1})$$

Áp dụng định lý trung bình theo biến thứ hai trong *f(,)* và lấy trị tuyệt đối hai vế ta có:

$$|\varepsilon_i| \le |\varepsilon_{i-1}| + h\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_{i-1}, \theta_{i-1})\right||\varepsilon_{i-1}| + \frac{h^2}{2}|y''(c_{i-1})| \le |\varepsilon_{i-1}|(1+hL) + \frac{h^2}{2}M$$

Cho $i=1, 2, \ldots$ ta có các bất đẳng thức:

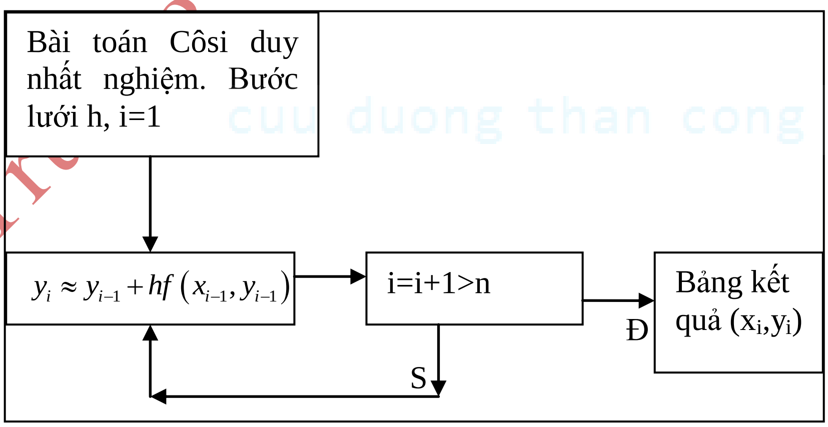
$$\begin{cases} |\varepsilon_1| \le |\varepsilon_0|(1+hL) + \frac{h^2}{2}M = \frac{Mh^2}{2} \\ |\varepsilon_2| \le |\varepsilon_1|(1+hL) + \frac{h^2}{2}M \\ \ldots \\ |\varepsilon_i| \le |\varepsilon_{i-1}|(1+hL) + \frac{h^2}{2}M \end{cases}$$

Làm động tác thế bất đẳng thức trên xuống dưới, dần dần ta có $|\varepsilon_i| \le \frac{h^2M}{2}\left[1 + (1+Lh) + \ldots + (1+Lh)^{i-1}\right]$. Dùng tổng cấp số nhân công bội $(1+Lh)$ ta được $|\varepsilon_i| \le \frac{h^2M}{2} \cdot \frac{(1+Lh)^i}{Lh}$

Theo tính chất số e ta được $(1+Lh)^i \le e^{iLh}$, thế vào và ta có kết quả cuối cùng (7.4).

Định lý này về hình thức là công thức sai số của phương pháp Ơ le, tuy nhiên nó không được dùng trong tính toán vì khó đánh giá các đại lượng *M, L*. Định lý này chỉ có ý nghĩa chứng minh sự hội tụ của phương pháp. Thật vậy do *A, M, L* là các hằng số cho nên ta có $\lim_{h\to 0} \varepsilon_i = 0$.

Sơ đồ phương pháp:



§3. PHƯƠNG PHÁP Ơ LE CẢI TIẾN

Từ phương trình vi phân trong bài toán (7.1), ta lấy tích phân $y(x_1)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x))dx$. Áp dụng công thức hình thang (một đoạn chia) vào vế phải và thay $y(x_0)=y_0$ ta có công thức tính gần đúng:

$$\boxed{y(x_1)\approx y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f(x_1,y(x_1))\right]} \qquad (7.5)$$

Ẩn số cần tìm $y(x_1)$ thuộc cả hai vế của (7.5). Áp dụng cách tính tương tự phương pháp lặp khi giải phương trình đại số, chúng ta dùng giá trị đầu của $y(x_1)$ là giá trị gần đúng theo phương pháp Ơ le thay vào vế phải (7.5). Tính toán vế phải ta được vế trái là $y(x_1)$ sau một bước lặp, lại tiếp tục thế kết quả sau một bước lặp vào vế phải của (7.5) được giá trị vế trái là $y(x_1)$ sau hai bước lặp, ….

Nếu đặt giá trị gần đúng $y(x_1)$ sau k bước lặp là $y(x_1)\approx y_1^{(k)}$, ta có:

$$\boxed{\begin{cases} y_1^{(0)}=y_0+hf(x_0,y_0) \\ y_1^{(k)}=y_0+\frac{h}{2}\left[f(x_0,y_0)+f\left(x_1,y_1^{(k-1)}\right)\right]\end{cases}} \qquad (7.6)$$

Thông thường, bước lặp sẽ dừng lại khi hai giá trị gần đúng liên tiếp lệch nhau không quá ε cho trước. Cũng có khi số bước lặp được quy định từ ban đầu.

Tương tự cho các nút kết tiếp.

Tổng quát, nếu yêu cầu 3 vòng lặp ta có bộ công thức:

$$\boxed{\begin{cases} y_i^{(0)}=y_{i-1}+hf(x_{i-1},y_{i-1}) \quad \forall i=1,2,\dots,n \\ y_i^{(k)}=y_{i-1}+\frac{h}{2}\left[f(x_{i-1},y_{i-1})+f\left(x_i,y_i^{(k-1)}\right)\right] \quad k=1,2,3 \\ y(x_i)\approx y_i=y_i^{(3)} \quad i=1,\dots,n\end{cases}} \qquad (7.7)$$

Chúng ta bỏ qua phần đánh giá sai số và độ hội tụ của phương pháp này.

Lưu ý: Trong phần bài tập, nếu đề bài không yêu cầu số bước lặp hay điều kiện dừng của vòng lặp ta quy ước dùng một bước lặp.

Ví dụ 7.3: Xét bài toán $\begin{cases} y'(x)=2xe^y+1 \\ y(0)=1\end{cases}$, $x\in[0;0,2]$, h=0,05

a) Trước hết ta giải bài toán với phương pháp Ơ le cải tiến hai bước lặp.

Xét i=1, thay x_0=0, y_0=1 vào phương trình đầu của (7.7) ta được $y_1^{(0)}=y_0+h(2x_0e^{y_0}+1)=1,05$. Thay kết quả đó vào phương trình thứ hai trong (7.7) với k=1 được:

$$y_1^{(1)}=y_0+h(2x_0e^{y_0}+1+2x_1e^{y_1^{(0)}}+1)/2=1,057144.$$

Tiếp tục với k=2 ta có:

$$y_1^{(2)}=y_0+h(2x_0e^{y_0}+1+2x_1e^{y_1^{(1)}}+1)/2=1,057195$$

Vậy $y(x_1)\approx y_1=y_1^{(2)}=1,057195$

Tương tự cho các nút khác ta có kết quả:

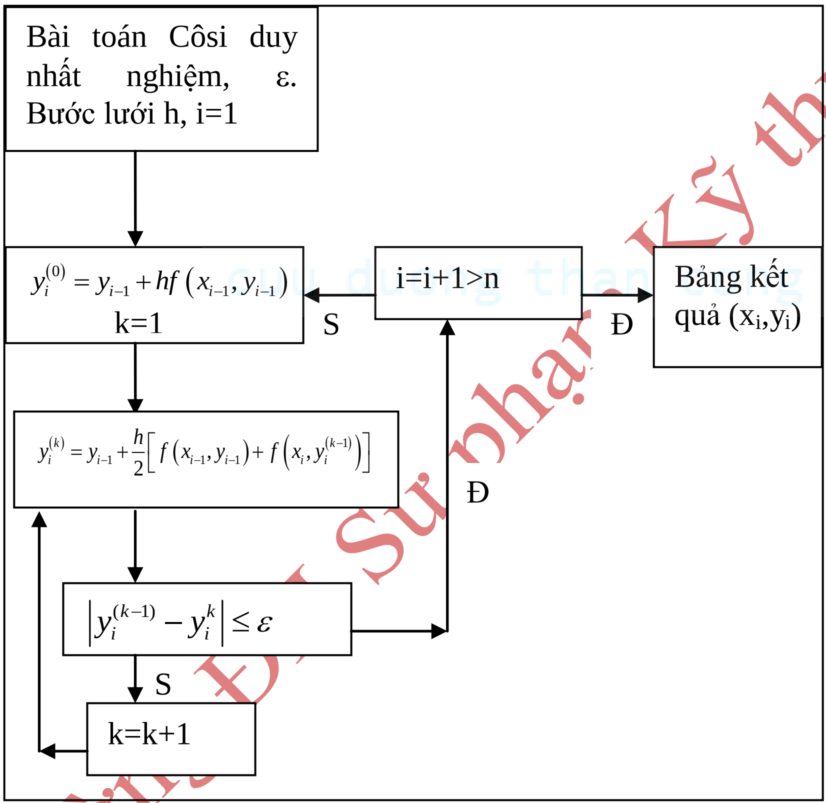
x	0	0,05	0,1	0,15	0,2
Y	1	1,057195	1,129865	1,220758	1,334131

$y^{(0)}$	1,05	1,121587	1,210818	1,321605	
$y^{(1)}$	1,057144	1,12974	1,220513	1,333676	
$y^{(2)}$	1,057195	1,129865	1,220758	1,334131	

b) Với yêu cầu hai giá trị lặp liên tiếp sai nhau không quá 10^{-5} ta có kết quả:

x	0	0,05	0,1	0,15	0,2
y	1	1,057196	1,129868	1,220767	1,334158
$y^{(0)}$	1,05	1,121587	1,21082	1,321614	
$y^{(1)}$	1,057144	1,12974	1,220516	1,333685	
$y^{(2)}$	1,057195	1,129866	1,220761	1,334141	
$y^{(3)}$	1,057196	1,129868	1,220767	1,334158	
$y^{(4)}$				1.334158	

Sơ đồ phương pháp Ơ le cải tiến, hai giá trị lặp liên tiếp sai nhau không quá ε



§4. PHƯƠNG PHÁP RUNGE – KUTTA (RK)

Đặt $\boxed{y_1(h) = y_0 + b_1k_1(h) + b_2k_2(h) + \ldots + b_nk_n(h)}$ (7.8)

trong đó:

$$\boxed{\begin{cases} k_1(h) = hf\left(x_0; y_0\right) \\ k_i(h) = hf\left(x_0 + c_ih; y_0 + a_{i1}k_1 + a_{i2}k_2 + \ldots + a_{ii-1}k_{i-1}\right) \end{cases} i = 2,3,\ldots,n} \quad (7.9)$$

Sau đó người ta tìm các tham số a_{ij}, b_i, c_i sao cho $y(x_0+h) \approx y_1(h)$ với sai số $\varepsilon(h) = y(x_0+h) - y_1(h)$ tốt nhất theo nghĩa $\varepsilon(h)$ là một vô cùng bé bậc cao khi h → 0.

Để dễ nhớ, các hệ số a_{ij}, b_i, c_i còn được bố trí theo bảng Butcher: (n>1)

0				
c_2	a_{21}			
c_3	a_{31}	a_{32}		
…	…	…	…	
c_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nn-1}
	b_1	b_2	…	b_n

Để xác định a_{ij}, b_i, c_i, ta xét điều kiện

$$\boxed{\varepsilon(0) = \varepsilon'(0) = ... = \varepsilon^{(n)}(0) = 0} \qquad (7.10)$$

khi đó bằng khai triển maclaurin ta suy được $\varepsilon(h)$ là một VCB bậc cao hơn h^n.

Xác định được $y(x+h) \approx y_1(h)$ từ $y(x_0)$ thế nào thì một cách tương tự ta xác định $y(x+ih) \approx y_i(h)$ từ $y(x_0+(i-1)h)$.

Sau đây chúng ta xét một số trường hợp đơn giản:

1. Trường hợp bậc 1 (RK1) và 2 (RK2)

Với n=1 ta có:

$$\varepsilon(h) = y(x_0+h) - y_1(h) = y(x_0+h) - y_0 - b_1 h f(x_0, y_0)$$

Suy ra $\begin{cases} \varepsilon(0) = 0 \\ \varepsilon'(h) = 1.y'(x_0+h) - b_1 f(x_0, y_0) \end{cases}$.

Vậy điều kiện (7.10.) dẫn tới

$$\varepsilon'(0) = f(x_0, y_0) - b_1 f(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow b_1 = 1$$

Ta có công thức cuối cùng

$$\boxed{y(x_0+h) \approx y_0 + hf(x_0, y_0)}.$$

Công thức này cũng chính là công thức của phương pháp Ơ le

Với n=2 ta có

$$\varepsilon(h) = y(x_0+h) - y_1(h) = y(x_0+h) - y_0 - b_1 k_1(h) - b_2 k_2(h).$$

Suy ra $\boxed{\begin{cases} \varepsilon(0) = 0 \\ \varepsilon'(h) = 1.y'(x_0+h) - b_1 f(x_0, y_0) - b_2 k_2'(h) \\ \varepsilon''(h) = y''(x_0+h) - b_2 k_2''(h) \end{cases}}$ (7.11)

Ta tính các đạo hàm

$$y'(x_0+h)=f(x_0+h;y(x_0+h))$$
$$\Rightarrow y''(x_0+h)=f'_x(x_0+h;y(x_0+h))$$
$$+y'(x_0+h)\,f'_y(x_0+h;y(x_0+h))$$

$$k_2'(h)=f(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)+h\frac{d}{dh}f(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)$$
$$\Rightarrow k_2''(h)=2.\frac{d}{dh}f(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)$$
$$+h.\frac{d^2}{dh^2}f(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)$$

Trong đó

$$\frac{d}{dh}f(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)=c_2f'_x(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)$$
$$+a_{21}k_1'(h)\,f'_y(x_0+c_2h;y_0+a_{21}k_1)$$

Thế tất cả vào (7.11) ta được $\begin{cases}\varepsilon(0)=0\\ \varepsilon'(0)=f(x_0,y_0)-b_1f(x_0,y_0)-b_2f(x_0,y_0)\\ \varepsilon''(0)=f'_x(x_0;y_0)+f(x_0,y_0)f'_y(x_0,y_0)\\ \qquad -b_22.\left[c_2f'_x(x_0,y_0)+a_{21}f(x_0,y_0)f'_y(x_0,y_0)\right]\end{cases}$

Do đó điều kiện (7.10) trở thành $\begin{cases}b_1+b_2=1\\ b_2c_2=b_2a_{21}=1/2\end{cases}$

Hệ điều kiện này có nhiều

0		
1	1	
	1/2	1/2

rong các nghiệm hay dùng là $\begin{cases}b_1=b_2=\dfrac{1}{2}\\ c_2=a_{21}=1\end{cases}$. Bảng Butcher

Công thức gần đúng trong ... y là

$$\begin{cases}k_1=hf(x_0;y_0)\\ k_2=hf(x_0+h;y_0+k_1)\\ y(x_0+h)\approx y_0+\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)\end{cases}\qquad (7.12)$$

Nhận xét: Công thức (7.12) cũng chính là phương pháp Ơ le cải tiến với một bước lặp

Ví dụ 7.4: Áp dụng phương pháp RK2 giải bài toán $\begin{cases}y'(x)=x-y\\ y(0)=0,5\end{cases}$ tìm gần đúng y(0,3) với h=0,1 và so sánh nghiệm đúng bài toán.

Với $x_0=0$, $y_0=0,5$; f(x;y)=x-y và h=0,1 thế vào (7.12) ta có:

$k_1=-0,05$; $k_2=hf(0,1;0,45)=-0,035$ suy ra $y(0,1)\approx 0,4575$

Tiếp tục trong (7.12) thay x_0,y_0 thành $x_1=0,1$; $y_1=0,4575$ ta có:

$k_1=-0,03575$; $k_2=-0,02218$ suy ra $y(0,2)\approx 0,48538$.

Tương tự cho nút cuối cùng.

Phương trình vi phân trong bài toán có dạng tuyến tính cấp 1. Giải ra ta có nghiệm tổng quát $y = x - 1 + Ce^{-x}$. Thế điều kiện giá trị đầu vào ta được tham số C=1,5. Vậy nghiệm đúng bài *tóan* là $y = x - 1 + 1,5e^{-x}$. Tính toán nghiệm đúng tại các điểm cần so sánh ta có bảng kết quả:

y đúng	0,5	0,457256	0,428096	0,411227
x	0	0,1	0,2	0,3
y	0,5	0,4575	0,428538	0,411826
k1	-0,05	-0,03575	-0,02285	
k2	-0,035	-0,02218	-0,01057	

2. Trường hợp bậc 3 (RK3)và 4 (PK4)

Quá trình xây dựng điều kiện (7.10) trong trường hợp n=3 hay n=4 là rất cồng kềnh, nên trong phần này chúng ta chỉ nêu một kết quả hay dùng.

Trường hợp n=3

0			
½	½		
1	-1	2	
	1/6	2/3	1/6

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_0; y_0) \\ k_2 = hf\left(x_0 + \dfrac{h}{2}; y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf(x_0 + h; y_0 - k_1 + 2k_2) \\ y(x_0 + h) \approx y_0 + \dfrac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \end{cases} \qquad (7.13)$$

Trường hợp n=4

0				
½	½			
½	0	½		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

$$\begin{cases} k_1 = hf(x_0; y_0) \\ k_2 = hf\left(x_0 + \dfrac{h}{2}; y_0 + \dfrac{k_1}{2}\right) \\ k_3 = hf\left(x_0 + \dfrac{h}{2}; y_0 + \dfrac{k_2}{2}\right) \\ k_4 = hf(x_0 + h; y_0 + k_3) \\ y(x_0 + h) \approx y_0 + \dfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \qquad (7.14)$$

Ví dụ 7.5:

Áp dụng RK3 và RK4 giải bài toán $\begin{cases} y'(x) = xe^{-x} - y \\ y(0) = 0,2 \end{cases}$ với h=0,15 tìm gần đúng y(0,6)

Kết quả phương pháp RK3 (áp dụng 7.13)

x	0	0,15	0,3	0,45	0,6
y	0,2	0,181801	0,181466	0,192047	0,20851
k1	-0,03	-0,0079	0,006117	0,014233	
k2	-0,01731	0,000273	0,010981	0,016711	
k3	-0,00994	0,004799	0,013443	0,017708	

$y(0,6) \approx 0,20851$

Kết quả phương pháp RK4 (áp dụng 7.14)

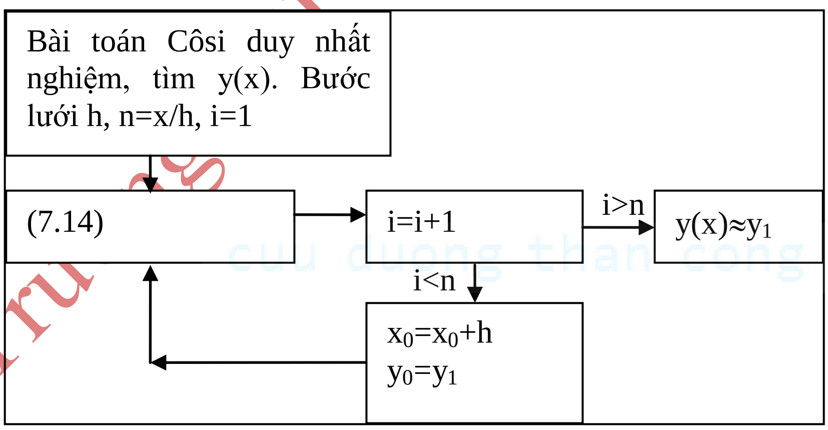
x	0	0,15	0,3	0,45	0,6
y	0,2	0,181825	0,181501	0,192086	0,208549
k1	-0,03	-0,00791	0,006112	0,014227	
k2	-0,01731	0,000269	0,010976	0,016705	
k3	-0,01826	-0,00034	0,010612	0,016519	
k4	-0,00789	0,006115	0,014223	0,018102	

$y(0,6) \approx 0,208549$

Nghiệm đúng bài toán $y = \left(\frac{x^2}{2} + 0,2\right)e^{-x}$

x	0	0,15	0,3	0,45	0,6
y đúng	0,2	0,181825	0,1815	0,192085	0,208548

Sơ đồ phương pháp RK4 với công thức 7.14



§5. VỀ MỘT CÁCH TÍNH SỐ e

Xét bài toán $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ có nghiệm $y = e^x$ do đó y(1)=e.

Giải bài toán bằng phương pháp RK(4) với $h = \frac{1}{n}$ (n nguyên dương). Ta có:

$$k_1 = hy_0;\ k_2 = h\left(y_0 + \frac{k_1}{2}\right);\ k_3 = h\left(y_0 + \frac{k_2}{2}\right);\ k_4 = h\left(y_0 + k_3\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right) = y_0\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right]$$

Tổng quát

$$y_i = y_{i-1}\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right] = y_0\left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right]^i$$

Do đó $y(1) \approx y_n = \left[1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!}\right]^n$.

Kết quả ta có công thức tính gần đúng số e:

$$\boxed{e \approx \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{24n^4}\right]^n} \text{ (n đủ lớn)} \qquad (7.15)$$

Lưu ý: chúng ta cũng biết số e định nghĩa theo giới hạn là $e = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ do đó với n đủ lớn thì $\boxed{e \approx \left[1 + \frac{1}{n}\right]^n}$ (7.16). So sánh hai công thức ta có

n	5	6	7	8
7.15	2.48832	2.521626372	2.546499697	2.565784514
7.16	2.718251137	2.718266612	2.718273451	2.718276844

Lưu ý số e đúng là e=2,718281828

§6. BÀI TẬP

Hãy giải các bài toán sau bằng các phương pháp đã học và so sánh nghiệm đúng bài toán.

7.1 $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{xy}{x^2+1} \\ y(1) = 0{,}5 \end{cases}$ tính y(1,1) với h=0,05

7.2 $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ tìm y(x), x thuộc [1;2] với h=0,2

7.3 $\begin{cases} y'(x) = y + \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ tìm y(0,5) với h=0,1

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Phương pháp tính – Tạ Văn Đĩnh**
2. **Phương pháp tính – Dương Thủy Vỹ**
3. **Giải tích số - Phạm Kỳ Anh**
4. **Giải tích số - Nguyễn Minh Chương**
5. **Introduction to Numerical Analysis – Endre Suli và David F.Mayers**

MỤC LỤC