Chương 3: Biểu diễn hệ thống LTI trong miền Z

TS. Trần Văn Hưng
Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)
Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

❖ **Biến đổi Z hai phía và một phía**

Biến đổi Z hai phía của dãy $x(n)$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$ZT\,[x(n)\,] = X\,(Z)$$

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(Z)$$

- Biến đổi Z là một chuỗi lũy thừa vô hạn, nó tồn tại chỉ đối với các giá trị của Z mà tại đó chuỗi này hội tụ
- Z là biến số phức, X(Z) là hàm phức

Biến đổi Z một phía của dãy $x(n)$

$$X^1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$ZT^1\,[x(n)] = X^1\,(Z)$$

Định nghĩa miền hội tụ của biến đổi Z

Tập hợp tất cả các giá trị của Z mà tại đó chuỗi

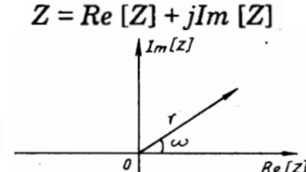
$$X(Z) = \sum^{\infty} x(n)Z^{-n} = ZT[x(n)]$$

hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi Z hai phía.

Mặt phẳng Z

Z là biến số phức

$Z = Re\,[Z] + jIm\,[Z]$



$Re\,[Z] = r\cos\omega$

$Im\,[Z] = r\sin\omega$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

❖ **Ví dụ: Tìm ZT và miền hội tụ của các dãy sau**

$x_1(\mathrm{n})=\delta(\mathrm{n})$ $\quad x_2(\mathrm{n})=\delta(\mathrm{n}-1)$ $\quad x_3(\mathrm{n})=\delta(\mathrm{n}-1)$

$x_4(\mathrm{n})=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(\mathrm{n})$ $\quad x_5(\mathrm{n})=(2)^n u(\mathrm{n})$ $\quad x_6(\mathrm{n})=u(\mathrm{n})$

$x_7(\mathrm{n})=u(\mathrm{n}-3)$ $\quad x_8(\mathrm{n})=u(\mathrm{n}+3)$ $\quad x_9(\mathrm{n})=u(-\mathrm{n})$

<u>**Giải:**</u>

$$a.\quad X_1(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n).Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n).Z^{-n}=1.Z^0=1 \quad ;\forall z$$

$$b.\quad X_2(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n).Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n-1).Z^{-n}=1.Z^{-1}=Z^{-1} \quad ;z\neq 0$$

$$c.\quad X_3(Z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_3(n).Z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(n+1).Z^{-n}=1.Z^{1}=Z \quad ;z\neq \infty$$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

$$X_4(\mathrm{z})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_4(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right|<1\rightarrow|z|>\frac{1}{2} \qquad RC[\mathrm{X}_4(\mathrm{z})]:|z|>\frac{1}{2}$$

$$X_5(\mathrm{z})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_5(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}2^n u(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$\left|2z^{-1}\right|<1\rightarrow|z|>2 \qquad RC[\mathrm{X}_4(\mathrm{z})]:|z|>2$$

$$X_6(\mathrm{z})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_6(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}u(\mathrm{n}).z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(z^{-1}\right)^n=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\left|z^{-1}\right|<1\rightarrow|z|>1 \qquad RC[\mathrm{X}_6(\mathrm{z})]:|z|>1$$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

$$X_7(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_7(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n-3).z^{-n} = \sum_{n=3}^{+\infty} z^{-n}$$ Đặt n=m+3

$$X_7(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{-(m+3)} = z^{-3}.\sum_{m=0}^{+\infty} z^{-m} = z^{-3}.\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{z^2(z-1)}; \quad |z|>1$$

$$X_8(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_8(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(n+3).z^{-n} = \sum_{n=-3}^{+\infty} z^{-n}$$

$$X_8(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} z^{-(m-3)} = z^{3}.\sum_{m=0}^{+\infty} z^{-m} = z^{3}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z^4}{z-1}; \quad |z|>1$$

$$X_9(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_9(n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u(-n).z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} z^{-n} = \sum_{m=0}^{+\infty} .z^{m} = \frac{1}{1-z};$$

$$|z|<1$$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

Miền hội tụ của hệ thống: $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n} = X_1(Z) + X_2(Z)$

$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)Z^{-n} \qquad X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} x(n)Z^{-n}$$

$$RC\,[X(Z)] = RC\,[X_1(Z)] \cap RC\,[X_2(Z)]$$

Ví dụ: $x(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|}$ với mọi n

Hãy tìm biến đổi Z hai phía và miền hội tụ.

Giải:

$$ZT[x(n) = X(Z)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{|n|} Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}Z^{-1}\right)^{n} + \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} Z^{-1}\right]^{n}$$

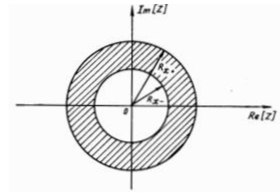
$$X_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}Z^{-1}\right)^{n} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}Z^{-1}} \quad \text{với } \left|\frac{3}{4}Z^{-1}\right| < 1 \quad |Z| > \frac{3}{4}$$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

$$X_2(Z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{3}{4}Z^{-1}\right)^{n}=\sum_{l=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{3}{4}Z^{-1}\right]^{-1}\right\}^{l}=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}Z\right)^{l}=\frac{\frac{3}{4}Z}{1-\frac{3}{4}Z}$$

với $\left|\frac{3}{4}Z\right|<1 \qquad |Z|<\frac{4}{3}$

$$X(Z)=X_1(Z)+X_2(Z)=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{\left(1-\frac{3}{4}Z^{-1}\right)\left(1-\frac{3}{4}Z\right)}$$



$$\frac{3}{4}<|Z|<\frac{4}{3}$$

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

❖ **Điểm cực và điểm không (Poles & Zeros):**

$$\boxed{X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}}$$

- **Điểm không:**

  Tại các điểm $Z = Z_{0r}$ ta có $X(Z_{or}) = 0$ gọi là các không của $X(Z)$

  Vậy nghiệm của $N(Z)$ chính là không của $X(Z)$

- **Điểm cực:**

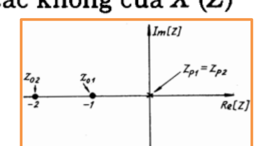
  Tại các điểm $Z = Z_{pk}$ ta có $X(Z_{pk}) = \infty$ gọi là các cực của $X(Z)$

  Vậy nghiệm của $D(Z)$ chính là cực của $X(Z)$

❖ **Ví dụ:** $x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-2)$

Hãy tìm $X(Z)$, miền hội tụ và các cực các không của $X(Z)$

$$ZT[x(n)]=X(Z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n}=1+3Z^{-1}+2Z^{-2}$$



$$X(Z)=Z^{-2}(Z^2+3Z+2)=Z^{-2}(Z+1)(Z+2)$$

$$X(Z)=\frac{(Z+1)(Z+2)}{Z^2}$$

$X(Z)$ có hai không tại $Z_{01} = -1$ và $Z_{02} = -2$

một cực kép tại $Z = 0$; $Z_{p1} = Z_{p2} = 0$

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

3.3 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

❖ **Biểu thức của biến đổi Z ngược:**

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ$$

C là đường cong khép kín bao quanh gốc tọa độ của mặt phẳng phức theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ)

$$IZT\,[X(Z)] = x(n)$$

cặp biến đổi Z như sau:

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)Z^{-n}$$

$$IZT[X(Z)] = x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ$$

❖ **Có 3 phương pháp tính IZT**

- **Phương pháp thặng dư**
- **Khai triển theo chuỗi lũy thừa z, z^{-1}**
- **Khai triển thành phân thức tối giản**

Phương pháp thặng dư (1/3)

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ = \sum_k Res\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right]$$

Z_{pk} là các cực của $X(Z)\,Z^{n-1}$ nằm trong đường cong khép kín c

$Res\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=Z_{pk}}\right]$ đọc là thặng dư của $X(Z)\,Z^{n-1}$ tại cực $Z = Z_{pk}$

nếu $X(Z)\,Z^{n-1}$ là một hàm hữu tỷ của Z thì

$$X(Z)Z^{n-1} = \frac{\psi(Z)}{(Z - Z_{pk})^{s_k}}$$

Z_{pk} là một cực bội bậc s_k của $X(Z)\,Z^{n-1}$

Ví dụ $X(Z) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}Z^{1}}$; $RC\,[X(Z)] : |Z| > \dfrac{1}{2}$

Hãy tìm biến đổi Z ngược.

Giải : $x(n) = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_c X(Z)Z^{n-1}dZ = \dfrac{1}{2\pi j}\oint_c \dfrac{Z^n}{Z - \frac{1}{2}}dZ$

Phương pháp thặng dư (2/3)

$$X(Z)Z^{n-1} = \frac{Z^n}{Z - \frac{1}{2}}$$

với $n \geq 0$ ta có:

$Z_{p1} = \dfrac{1}{2}$; $s_1 = 1$: một cực đơn

$\Psi(Z) = Z^n$

$$Res\left[X(Z)Z^{n-1}\Big|_{Z=1/2}\right] = \psi\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x(n) = \psi(Z_{p1}) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Với $n < 0$: Ta đặt $n = -m$

$$x(-m) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \frac{1}{Z^m(Z - \frac{1}{2})}dZ$$

có một cực đơn tại $Z_{p1} = \dfrac{1}{2}$

một cực bội bậc m tại $Z_{p2} = 0$

tính thặng dư của $X(Z)\,Z^{m-1}$

$$X(Z)Z^{m-1} = \frac{1}{Z^m\left(Z - \frac{1}{2}\right)} \quad ; m > 0$$

Tại cực đơn $Z_{p1} = \dfrac{1}{2}$ và $s_1 = 1$

$$\psi(Z) = \frac{1}{Z^m} = Z^{-m}$$

$$Res\left[X(Z)Z^{m-1}\Big|_{Z=1/2}\right] = \psi\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-m} = 2^m$$

Phương pháp thặng dư (3/3)

Tại cực bội bậc m $Z_{p2} = 0$ và $s_2 = m$:

$$\psi(Z) = \frac{1}{\left(Z - \frac{1}{2}\right)} = \left(Z - \frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$Res\left[X(Z)Z^{m-1}\Big|_{Z=0}\right] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}\psi(Z)}{dZ^{m-1}}\Big|_{Z=0} = \frac{1}{(m-1)!}\left[-\frac{(m-1)!}{(1/2)^m}\right] = -2^m$$

Kết quả với $n < 0$ ta có:

$$x(-m) = Res\left[X(Z)Z^{m-1}\Big|Z = \frac{1}{2}\right] + Res\left[X(Z)Z^{m-1}\Big|Z = 0\right] = 2m - 2m = 0$$

Đổi biến $-m = n = 0$ ta có :

$x(n) = 0$ với $n < 0$

Kết quả cuối cùng

$$x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{với } n \geq 0 \\ 0 & \text{với } n < 0 \end{cases}$$

Khai triển thành chuỗi lũy thừa

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n Z^{-n}$$

khai triển $X(Z)$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) Z^{-n}$$

định nghĩa

$$x(n) = \alpha_n$$

tức là các hệ số của Z^{-n} chính là các giá trị của $x(n)$

Nhận xét: Phương pháp này sử dụng phép chia, có khối lượng tính toán lớn, vì vậy thường dùng cho máy tính

Khai triển thành phân thức tối giản

Nội dung PP:

$$X(Z)=\frac{N(Z)}{D(Z)}$$

$N(Z)$ là đa thức bậc M.
$D(Z)$ là đa thức bậc N.

Nếu $M \geq N$ chia đa thức $N(Z)$ cho $D(Z)$

$$X(Z)=S(Z)+\frac{P(Z)}{Q(Z)}$$

$$S(Z)=B_{M-N}Z^{M-N}+B_{M-N-1}Z^{M-N-1}+\ldots+B_1Z+B_0$$

Nếu $M < N$

$S(Z)=0$ và $X(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}$

Trường hợp $X(Z)$ chỉ có các cực đơn

$$X(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{(Z-Z_{pk})}$$

$$A_k=(Z-Z_{pk})\frac{P(Z)}{Q(Z)}\Big|_{Z=Z_{pk}}$$

Khai triển thành phân thức tối giản

Nội dung PP:

Trường hợp $X(Z)$ có một cực bội

Giả sử $X(Z)$ có một cực bội bậc s là Z_{pl} các cực còn lại là cực đơn

$$X(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}=\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N-s}\frac{A_k}{(Z-Z_{pk})}+\sum_{j=1}^{s}\frac{cj}{(Z-Z_{pl})^j}$$

$$A_k=(Z-Z_{pk})\frac{P(Z)}{Q(Z)}\Big|_{Z=Z_{pk}}$$

$$c_j=\frac{1}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}}{dZ^{s-j}}\left[(Z-Z_{pl})^s\frac{P(Z)}{Q(Z)}\right]\Big|_{Z=Z_{pl}}$$

Trường hợp $X(Z)$ có L cực bội

Giả sử $X(Z)$ có L cực bội bậc $s_1, s_2, \ldots s_L$, các cực còn lại là cực đơn

$$X(Z)=\frac{P(Z)}{Q(Z)}=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{(Z-Z_{pk})}+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{c_{js_i}}{(Z-Z_{pli})^j}$$

$$A_k=(Z-Z_{pk})\frac{P(Z)}{Q(Z)}\Big|_{Z=Z_{pk}}$$

$$N=N-\sum_{i=1}^{L}s_i$$

$$c_{jsi}=\frac{1}{(s_i-j)!}\frac{d^{si-j}}{dZ^{si-j}}\left[(Z-Z_{pli})^{si}\frac{P(Z)}{Q(Z)}\right]\Big|_{Z=Z_{pli}}$$

Z_{pk} là các cực đơn.

Z_{pli} là các cực bội bậc s_i

Khai triển thành phân thức tối giản

Áp dụng công thức:

$$IZT\left[\frac{Z}{Z - Z_{pk}}\right] = \left(Z_{pk}\right)^n u(n)$$

$$IZT\left[\frac{1}{Z - Z_{pk}}\right] = \left(Z_{pk}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$IZT\left[\frac{Z}{\left(Z - Z_{pk}\right)^{m+1}}\right] = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m} u(n) \quad \text{với } |Z| > |Z_{pk}|$$

$$IZT\left[\frac{Z}{\left(Z - Z_{pk}\right)^{m+1}}\right] = -\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} Z_{pk}^{n-m} u(-n-1) \quad \text{với } |Z| < |Z_{pk}|$$

Khai triển thành phân thức tối giản

Ví dụ 01:

$$X(Z) = \frac{Z+2}{2Z^2 - 7Z + 3}$$ Hãy tìm $x(n)$

Giải:

$$X(Z) = \frac{Z+2}{2(Z - \frac{1}{2})(Z-3)} = \sum_{k=1}^{2} \frac{A_k}{\left(Z - Z_{pk}\right)}$$

$$A_1 = \left(Z - Z_{p1}\right)\frac{P(Z)}{Q(Z)}\Bigg|_{Z = Z_{p1}} = \left(Z - \frac{1}{2}\right)\frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)}\Bigg|_{Z = 1/2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left(Z - Z_{p2}\right)\frac{P(Z)}{Q(Z)}\Bigg|_{Z = Z_{p1}} = (Z-3)\frac{Z+2}{2\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-3)}\Bigg|_{Z = 3} = 1$$

$$X(Z) = \frac{-\frac{1}{2}}{Z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{Z-3} \qquad x(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) + 3^{n-1} u(n-1)$$

$$= 3^{n-1} u(n-1) - \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

Khai triển thành phân thức tối giản

Ví dụ 02:

$$X(Z) = \frac{Z}{\left(Z - \frac{1}{2}\right)(Z-1)^2}$$

Hãy tìm $x(n)$

Giải:

$$X(Z) = \sum_{k=1}^{1} \frac{A_k}{(Z - Z_{pk})} + \sum_{j=1}^{2} \frac{c_j}{(Z - Z_{pl})^j}$$

$$= \frac{A_1}{Z - \frac{1}{2}} + \frac{c_1}{Z-1} + \frac{c_2}{(Z-1)^2}$$

$A_1 = 2$ $c_1 = -2$ $c_2 = 2$

$$X(Z) = \frac{2}{\left(Z - \frac{1}{2}\right)} - \frac{2}{(Z-1)} + \frac{2}{(Z-1)^2} = X_1(Z) + X_2(Z) + X_3(Z)$$

$$IZT[X_1(Z)] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

$$IZT[X_2(Z)] = -2u(n-1)$$

$$IZT[X_3(Z)] = 2(n-1)u(n-2)$$

$$\boxed{x(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1) - 2u(n-1) + 2(n-1)u(n-2)}$$

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

❖ **Tính tuyến tính**

$x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$

$X(z) = ZT[x(n)] = aX_1(Z) + bX_2(Z)$

$RC[X(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_2(Z)]$

❖ **Trễ**

$ZT[x(n)] = X(Z)$

Nếu ta có dãy $y(n) = x(n - n_0)$

$ZT[x(n - n_0)] = Z^{-n_0} X(Z)$

Ví dụ

Hãy tìm biến đổi Z ngược của các $X(Z)$

a) $X_1(Z) = \dfrac{Z^4}{Z-1}$ b) $X_2(Z) = \dfrac{Z^{-4}}{Z-a}$

Giải :

$IZT[X_1(Z)] = IZT\left[Z^3 \dfrac{Z}{Z-1}\right]$

$IZT\left[\dfrac{Z}{Z-1}\right] = u(n)$

$ZT[u(n)] = \dfrac{Z}{Z-1}$

$ZT[u(n+3)] = Z^3 \dfrac{Z}{Z-1}$

$IZT[X_1(Z)] = u(n+3)$

$IZT[X_2(Z)] = IZT\left[Z^{-5} \dfrac{Z}{Z-a}\right]$

$IZT\left[\dfrac{Z}{Z-a}\right] = a^n u(n)$

$IZT\left[Z^{-5} \dfrac{Z}{Z-a}\right] = a^{n-5} u(n-5)$

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

❖ **Nhân với hàm số mũ a^n**

$ZT[x(n)] = X(Z)$

$y(n) = a^n x(n)$

$ZT[a^n u(n)] = X\left(\dfrac{Z}{a}\right)$

$RC\left[X\left(\dfrac{Z}{a}\right)\right] : |a|R_{x-} < |Z| < |a|R_{x+}$

Ví dụ

Cho các dãy sau đây:

a) $x_1(n) = 2^n u(n)$

b) $x_2(n) = 3^n 2^n u(n)$

c) $x_3(n) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n 2^n u(n)$

d) $x_4(n) = e^{j\frac{\pi}{2}n} 2^n u(n)$

Hãy tìm biến đổi Z

❖ **Đạo hàm của biến đổi Z**

$ZT[nx(n)] = -Z \dfrac{dX(Z)}{dZ}$

❖ **Tích chập 2 dãy**

$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$X_3(Z) = X_1(Z) . X_2(Z)$

$RC[X_3(Z)] = RC[X_1(Z)] \cap RC[X_3(Z)]$

❖ **Tương quan của 2 tín hiệu**

$r_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) y(m-n)$

$R_{xy}(Z) = X(Z)\, Y\left(\dfrac{1}{Z}\right)$

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

Bảng tổng kết một số tính chất của biến đổi Z

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$x_1(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(Z)Z^{n-1}dZ$	$X_1(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)Z^{-n}$	$R_{x_{1-}} < \lvert Z\rvert < R_{x_{1+}}$
$x_2(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_2(Z)Z^{n-1}dZ$	$X_2(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)Z^{-n}$	$R_{x_{2-}} < \lvert Z\rvert < R_{x_{2+}}$
$ax_1(n) + bx_2(n)$	$aX_1(Z) + bX_2(Z)$	$RC\,[X_1(Z)] \cap RC\,[X_2(Z)]$
$x(n - n_0)$	$Z^{-n_0}X(Z)$	$R_{x-} < \lvert Z\rvert < R_{x+}$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}Z)$	$\lvert a\rvert R_{x-} < \lvert Z\rvert < \lvert a\rvert R_{x+}$
$nx(n)$	$-Z\frac{dX(Z)}{dZ}$	$R_{x-} < \lvert Z\rvert < R_{x+}$
$x^*(n)$	$X^*(Z^*)$	$R_{x-} < \lvert Z\rvert < R_{x+}$
$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{Z}\right)$	$\frac{1}{R_{x+}} < \lvert Z\rvert < \frac{1}{R_{x-}}$
$x(0)$ (nếu $x(n)$ là nhân quả)	$\lim_{z\to\infty} X(Z)$	

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

Bảng tổng kết một số tính chất của biến đổi Z

$Re[x(n)] = \frac{x(n) + x^*(n)}{2}$	$\frac{1}{2}\left[X(Z) + X^*(Z^*)\right]$	$R_{x-} < \lvert Z\rvert < R_{x+}$
$Im[x(n)] = \frac{x(n) - x^*(n)}{2}$	$\frac{1}{2}\left[X(Z) - X^*(Z^*)\right]$	$R_{x-} < \lvert Z\rvert < R_{x+}$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(Z).X_2(Z)$	$RC\,[X_1(Z)] \cap RC\,[X_2(Z)]$
$x_1(n)\,.\,x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X_1(v)X_2\left(\frac{Z}{v}\right)v^{-1}dv$	$RC\,[X_1(Z)] \cap RC\,[X_2(Z)]$
$r_{x_1x_2} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(m-n)$	$R_{x_1x_2}(Z) = X_1(Z)X_2\left(\frac{1}{Z}\right)$	$RC[X_1(Z)] \cap RC\left[X_2\left(\frac{1}{Z}\right)\right]$

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

Một số biến đổi Z thông dụng

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$\delta(n)$	1	Toàn bộ mặt phẳng Z
$\delta(n - n_0)$	Z^{-n_0}	Toàn bộ mặt phẳng Z trừ tại 0 nếu $n_0 > 0$ trừ tại ∞ nếu $n_0 < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$u(-n-1)$	$\frac{1}{1-Z^{-1}}$	$\lvert Z\rvert < 1$
$nu(n)$	$\frac{Z^{-1}}{\left(1-Z^{-1}\right)^2}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-aZ^{-1}}$	$\lvert Z\rvert > a$
$-a^n u(-u-1)$	$\frac{1}{1-aZ^{-1}}$	$\lvert Z\rvert < a$
$na^n u(n)$	$\frac{aZ^{-1}}{\left(1-aZ^{-1}\right)^2}$	$\lvert Z\rvert > a$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{aZ^{-1}}{\left(1-aZ^{-1}\right)^2}$	$\lvert Z\rvert < a$
$(\cos \omega_0 n) . u(n)$	$\frac{1-Z^{-1}\cos\omega_0}{1-2Z^{-1}\cos\omega_0+Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > 1$

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

Một số biến đổi Z thông dụng

Miền n	Miền Z	Miền hội tụ
$(\sin \omega_0 n). u(n)$	$\frac{Z^{-1}\sin\omega_0}{1-2Z^{-1}\cos\omega_0+Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > 1$
$a^n(\cos \omega_0 n) . u(n)$	$\frac{1-aZ^{-1}\cos\omega_0}{1-2aZ^{-1}\cos\omega_0+a^2Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n(\sin \omega_0 n) .u(n)$	$\frac{aZ^{-1}\sin\omega_0}{1-2aZ^{-1}\cos\omega_0+a^2Z^{-2}}$	$\lvert Z\rvert > \lvert a\rvert$

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

3.4 Phân tích HT LTI bằng biến đổi Z

❖ **Hàm truyền đạt của HT rời rạc**

Miền n

$$x(n) \rightarrow \boxed{h(n)} \rightarrow y(n)$$

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$h(n) = IZT\,[H(Z)]$$

Miền Z

$$X(Z) \rightarrow \boxed{H(Z)} \rightarrow Y(Z)$$

$$Y(Z) = X(Z) \cdot H(Z)$$

$$X(Z) = ZT\,[x(n)]$$

$$H(Z) = ZT[h(n)]$$

$$Y(Z) = ZT\,[y(n)]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)}$$

❖ **Với hệ thống mô tả bằng PTST**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r)$$

$$Y(Z)\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k} = X(Z)\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}$$

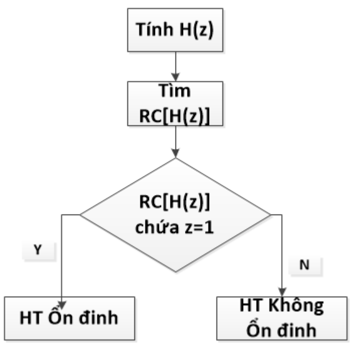
$$\Rightarrow \quad H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}}$$

3.4 Phân tích HT LTI bằng biến đổi Z

❖Độ ổn định của hệ thống

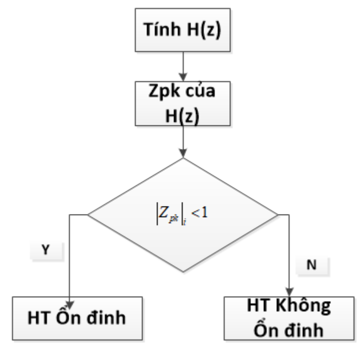
HT Tuyến tính bất biến

- <u>Điều kiện ổn định</u>: Vòng tròn đơn vị (z=1) nằm trong miền hội tụ của H(z)



HT tuyến tính bất biến & NQ

- <u>Điều kiện ổn định</u>: Tất cả các cực của H(z) đều nằm bên trong vòng tròn đơn vị (z=1)



3.4 Phân tích HT LTI bằng biến đổi Z

❖Tiêu chuẩn ổn định Jury

$$H(z) = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{-k}} = \frac{\sum_{r=0}^{M} b_r Z^{N-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k Z^{N-k}}$$

Gọi: $D(Z) = \sum_{k=0}^{N} a_k Z^{N-k}$

Xây dựng bảng gồm 2N-3 hàng

Hàng	Hệ số			
1	a_0	a_1	a_2	.... a_N
2	a_N	a_{N-1}	a_{N-2}	.... a_0
3	c_0	c_1	c_2	.... c_{N-1}
4	c_{N-1}	c_{N-2}	c_{N-3}	.... c_0
5	d_0	d_1	d_2	.... d_{N-2}
6	d_{N-2}	d_{N-3}	d_{N-4}	.... d_0
.	.	.	.	....
.	.	.	.	....
.	.	.	.	....
2N - 3	r_0	r_1	r_2	

1. $D(Z)\Big|_{Z=1} > 0$
2. $D(Z)\Big|_{Z=-1} > 0$ với N chẵn

   $D(Z)\Big|_{Z=-1} < 0$ với N lẻ
3. $1 > |a_N|$

   $|c_0| > |c_{N-1}|$

   $|d_0| > |d_{N-2}|$

   ....

   $|r_0| > |r_2|$

$$c_i = \det\begin{bmatrix} a_0 & a_{N-i} \\ a_N & a_i \end{bmatrix}$$

$$d_i = \det\begin{bmatrix} c_0 & c_{N-1-i} \\ c_{N-1} & c_i \end{bmatrix}$$

3.4 Phân tích HT LTI bằng biến đổi Z

❖VD01:

Cho hệ thống TTBB có PTSP:
y(n)=ay(n-1)+x(n)   a>0

a) Tìm hàm truyền đạt H(z)
b) Tìm đáp ứng xung h(n)
c) Xét tính ổn định

Tìm $H(Z)$:

$$Y(Z) = aZ^{-1}Y(Z) + X(Z)$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1}{1-aZ^{-1}} = \frac{Z}{Z-a}$$

đáp ứng xung $h(n)$

$$h(n) = IZT[H(Z)]$$

$$h(n) = a^n u(n) \quad |Z| > a$$

$$h(n) = -a^n u(-n-1) \quad |Z| < a$$

độ ổn định

$H(Z)$ chỉ có một điểm cực $Z_{p1} = a$

hệ thống ổn định nếu $a < 1$

3.4 Phân tích HT LTI bằng biến đổi Z

❖VD02:

$$H(Z) = \frac{1}{4 + 3Z^{-1} + 2Z^{-2} + Z^{-3} + Z^{-4}}$$

Hãy xét sự ổn định

$$H(Z) = \frac{1/4}{1 + \frac{3}{4}Z^{-1} + \frac{1}{2}Z^{-2} + \frac{1}{4}Z^{-3} + \frac{1}{4}Z^{-4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}Z^4}{\boxed{Z^4 + \frac{3}{4}Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 + \frac{1}{4}Z + \frac{1}{4}}}$$

$N = 4$: là số chẵn.

2N-3 = 2*4-3 = 5 hàng

Hệ số	a0	a1	a2	a3	A4
Hàng 1	1	3/4	1/2	1/4	1/4
Hàng 2	1/4	1/4	1/2	3/4	1
Hàng 3	15/16	11/16	6/16	1/16	
Hàng 4	1/16	6/16	11/16	15/16	
Hàng 5	224/256	159/256	79/256		

1. $D(Z)\Big|_{Z=1} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4} > 0$

2. $D(Z)\Big|_{Z=-1} = 1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2} > 0$

3. $1 > \frac{1}{4} \Rightarrow 1 > |a_4|$

$\frac{15}{16} > \frac{1}{16} \Rightarrow |c_0| > |c_3|$

$\frac{224}{256} > \frac{79}{256} \Rightarrow |d_0| > |d_2|$

Cả 3 điều kiện đều thỏa mãn nên hệ thống ổn định

Nội dung

3.1 Khái niệm biến đổi Z và miền hội tụ

3.2 Các phương pháp tính biến đổi Z ngược

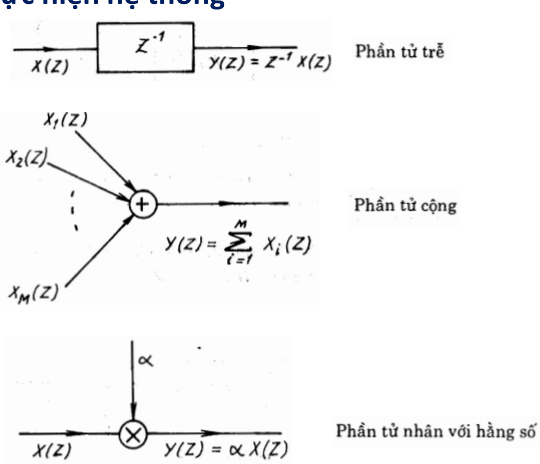
3.3 Các tính chất của biến đổi Z

3.4 Phân tích các đặc trưng hệ thống LTI bằng biến đổi Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

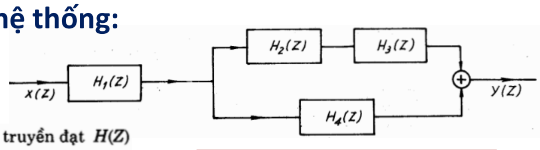
❖ **Các phần tử thực hiện hệ thống**



Bài toán tổng hợp hệ thống tương tự trong miền n (dạng I & II)

3.5 Thực hiện hệ thống trong miền Z

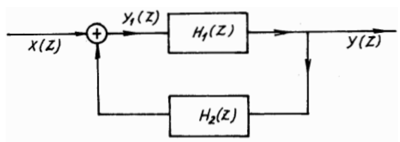
❖ **VD1: Cho hệ thống:**



Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$

$$\boxed{H(Z) = H_1(Z)\,[H_2(Z)\,.\,H_3(Z) + H_4(Z)]}$$

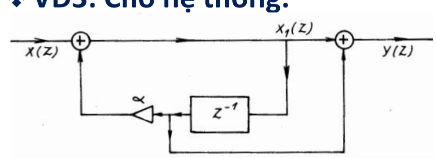
❖ **VD2: Cho hệ thống:**



Hãy tìm hàm truyền đạt $H(Z)$

$$\boxed{H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{H_1(Z)}{1 - H_1(Z)H_2(Z)}}$$

❖ **VD3: Cho hệ thống:**



Hãy tìm hàm truyền $H(Z)$ và đáp ứng xung $h(n)$.

$$\boxed{H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{1 + Z^{-1}}{1 - \alpha Z^{-1}}}$$

$$\boxed{h(n) = \alpha^{n} u(n) + \alpha^{n-1}\, u(n-1)}$$