Chương 4: Biểu diễn tín hiệu và hệ thống LTI trong miền tần số

Trần Văn Hưng
Bộ môn: Kỹ thuật điện tử (P502-A6)
Email: hungtv_ktdt@utc.edu.vn

Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược
4.2 Tính chất của biến đổi Fourier
4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI
4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống
4.5 Cơ bản về bộ lọc số

Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

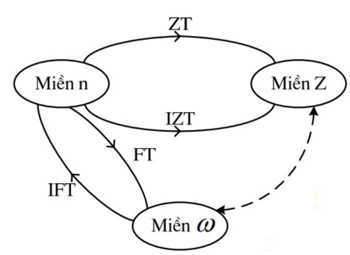
4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

❖ **Giới thiệu**



FT: Fourier Transform
IFT: Inverse Fourier Transform

❖ **Định nghĩa FT**

Biến đổi Fourier của một tín hiệu x(n)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

Cách tính: Dựa vào công thức định nghĩa

Ký hiệu toán tử:

$$FT\left[x(n)\right]=X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$x(n)\xrightarrow{FT}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$e^{j\omega}=\cos\omega+j\sin\omega$$

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Các cách thể hiện $X\left(e^{j\omega}\right)$

+ Biểu diễn theo phần thực phần ảo Re, Im

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]+j\,\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

+ Biểu diễn theo Modul và Argument

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$: Modul;

$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]$: Argument

Một số khái niệm

$X\left(e^{j\omega}\right)$: Phổ của tín hiệu x(n).

$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$: Phổ biên độ của tín hiệu x(n)

$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\varphi(\omega)$: Phổ pha của tín hiệu x(n)

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|.e^{j\varphi(\omega)}$$

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Các cách thể hiện $X\left(e^{j\omega}\right)$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha

Độ lớn có thể lấy giá trị âm và dương.

$$X\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right).e^{j\theta(\omega)}$$

$A\left(e^{j\omega}\right)$: độ lớn của tín hiệu x(n), có thể dương (>0) hoặc âm (<0)

$\theta(\omega)$: pha của tín hiệu x(n)

Một số các quan hệ:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left|A\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

khi $\omega \geq 0$

$\varphi(\omega)=\theta(\omega)$ khi $A\left(e^{j\omega}\right)\geq 0$

$\varphi(\omega)=\theta(\omega)+\pi$ khi $A\left(e^{j\omega}\right)<0$

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Ví dụ

Cho phổ tín hiệu $X\left(e^{j\omega}\right) = \sin 3\omega . e^{-j\frac{\omega}{2}}$

Hãy xác định:

- Các thành phần phần thực, ảo Re, Im
- $A\left(e^{j\omega}\right)$, $\theta(\omega)$, $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$, $\varphi(\omega)$

$$\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = \sin 3\omega . \cos\frac{\omega}{2};$$

$$\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = -\sin 3\omega . \sin\frac{\omega}{2}$$

$$A\left(e^{j\omega}\right) = \sin 3\omega$$

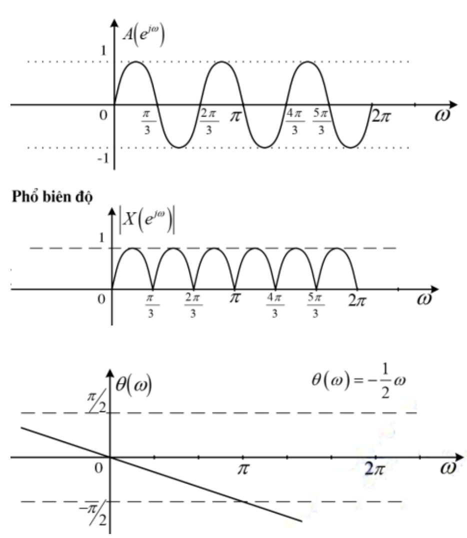
$$\theta(\omega) = -\frac{\omega}{2}$$

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right| = \left|\sin 3\omega\right|$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\omega}{2} & \text{khi} \quad \sin 3\omega \geq 0 \\ -\dfrac{\omega}{2} + \pi & \text{khi} \quad \sin 3\omega < 0 \end{cases}$$

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Ví dụ



4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Ví dụ Hãy tìm biến đổi Fourier các dãy sau đâv:

$$x_1(n)=\delta(n) \qquad x_4(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$
$$x_2(n)=\delta(n-1) \qquad x_5(n)=u(n)$$
$$x_3(n)=\delta(n+1)+\delta(n-1) \qquad x_6(n)=2^n u(n)$$

a. $X_1(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_1(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)e^{-jn\omega}=1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=0}=1$

b. $X_2(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_2(n)]=\sum^{\infty}\delta(n-1)e^{-jn\omega}=1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=1}=e^{-j\omega}$

c. $X_3(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_3(n)]=\sum^{\infty}\delta(n+1)e^{-jn\omega}+\sum^{\infty}\delta(n-1)e^{-jn\omega}$

$$=1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=-1}+1.e^{-j\omega n}\Big|_{n=1}=e^{j\omega}+e^{-j\omega}=2\cos\omega$$

d. $X_4(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_4(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

e. $X_5(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_5(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-j\omega n}$

không hội tụ do $\left|e^{-j\omega}\right|=\left|\cos\omega\text{-j}\sin\omega\right|=\sqrt{\cos^2\omega+\sin^2\omega}=1$

không tồn tại biến đổi Fourier.

f. $X_6(e^{j\omega})=\mathrm{FT}[\mathrm{x}_6(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}2^n u(n)e^{-jn\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(2e^{-j\omega}\right)^n$

$$\left|2e^{-j\omega}\right|=\left|2\cos\omega\text{-2j}\sin\omega\right|=\sqrt{4\cos^2\omega+4\sin^2\omega}=2$$

Sự tồn tại của biến đổi Fourier:

Biến đổi Fourier của một dãy x(n) tồn tại nếu chuỗi $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|$ **hội tụ**

Ví dụ : Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau đây:

$$x(n)=\mathrm{rect}_N(n)$$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$
- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$.

4.1.1 Biến đổi Fourier thuận

Ví dụ : Cho tín hiệu rời rạc $x(n)$ sau đây:

$$x(n) = \mathrm{rect}_N(n)$$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$
- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$.

$$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} = e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

Vậy ta có phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$ như sau :

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \left|\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right| \qquad \arg\left[X(e^{j\omega})\right] = -(N-1)\frac{\omega}{2} + \arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

4.1.2 Biến đổi Fourier ngược

(IFT: Inverse Fourier Transform)

Biến đổi Fourier ngược của phổ tín hiệu $X\left(e^{j\omega}\right)$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

Ký hiệu:

$$IFT\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = x(n)$$

$$X\left(e^{j\omega}\right) \xrightarrow{IFT} x(n)$$

Ví dụ

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$

xác định x(n) và vẽ x(n) với $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

Giải:

Ta có: $X\left(e^{j\omega}\right) = A\left(e^{j\omega}\right).e^{j\theta(\omega)}$

suy ra:

$$A\left(e^{j\omega}\right) = 1$$

$$\theta(\omega) = 0$$

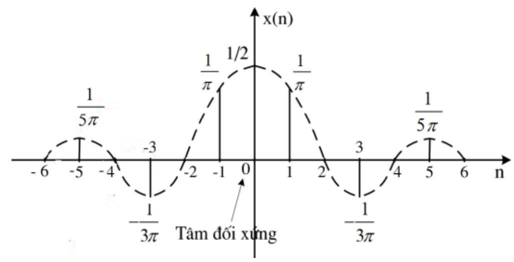
4.1.2 Biến đổi Fourier ngược

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi jn}e^{j\omega n}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}$$

$$=\frac{1}{2\pi jn}\left(e^{j\omega_c n}-e^{-j\omega_c n}\right)=\frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

$$x(n)=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}$$

Vẽ với $\omega_c=\frac{\pi}{2}$



4.1.2 Biến đổi Fourier ngược

Ví dụ

$$X(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega n_0} & |\omega|\le\omega_c\\ 0 & \omega \text{ còn lại}\end{cases}$$

n_0 : số nguyên

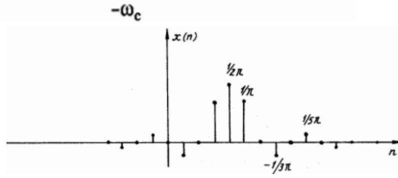
tìm $x(n)$, hãy vẽ $X(e^{j\omega})$ và $x(n)$

với $\omega_c=\frac{\pi}{2}$, $n_0=4$

Giải

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}e^{j\omega(n-n_0)}d\omega$$

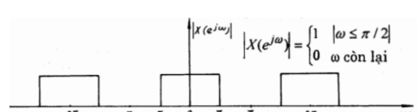
$$=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{j(n-n_0)}e^{j\omega(n-n_0)}\Big|_{-\omega_c}^{\omega_c}=\frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin[\omega_c(n-n_0)]}{\omega_c(n-n_0)}$$

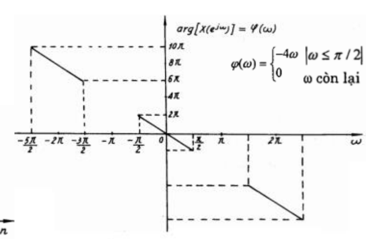


$\omega_c=\frac{\pi}{2}$ và $n_0=4$ ta có:

$$X(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j4\omega} & |\omega\le\pi/2|\\ 0 & \omega \text{ còn lại}\end{cases}$$

$$x(n)=\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(n-4)}{\frac{\pi}{2}(n-4)}$$





Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

TÍNH CHẤT TUYẾN TÍNH

$$x(n) = a\,x_1(n) + b\,x_2(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

Ví dụ Hãy xác định biến đổi Fourier của tín hiệu sau đây :

$$x(n) = 2\,x_1(n) + 3\,x_2(n)$$

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \qquad x_2(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Giải

$$X(e^{j\omega}) = 2X_1(e^{j\omega}) + 3\,x_2(e^{j\omega})$$

$$X_1(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}e^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} + \frac{3}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}} = \frac{1}{2-e^{-j\omega}} + \frac{1}{3-e^{-j\omega}} = \frac{1-2e^{-j\omega}}{6-5e^{-j\omega}+e^{j2\omega}}$$

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

TÍNH CHẤT TRỄ

$y(n) = x(n - n_0)$

$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$

$|Y(e^{j\omega})| = |X(e^{j\omega})|$

$\arg[Y(e^{j\omega})] = -\omega n_0 + \arg[X(e^{j\omega})]$

Ví dụ

Cho $x(n) = \text{rect}_N(n-n_0)$

- Hãy tìm $X(e^{j\omega})$
- Hãy tìm phổ biên độ và phổ pha của $x(n)$

Giải

$FT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = FT[\text{rect}_N(n-n_0)] = e^{-j\omega n_0} FT[\text{rect}_N(n)]$

$$FT[\text{rect}_N(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}}} \cdot \frac{e^{-j\omega\frac{N}{2}}}{e^{-j\frac{\omega}{2}}} = e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} e^{-j(N-1)\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$= e^{-j\omega(n_0+\frac{N-1}{2})} \frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

phổ biên độ

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right|$$

phổ pha

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\omega\left(n_0 + \frac{N-1}{2}\right) + \arg\left[\frac{\sin\frac{\omega N}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}\right]$$

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

TÍCH CHẬP CỦA HAI TÍN HIỆU

$x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

$FT[x_1(n)] = X_1(e^{j\omega})$

$FT[x_2(n)] = X_2(e^{j\omega})$

$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega})$

Ví dụ

$x_1(n) = x_2(n) = \delta(n+2) + \delta(n-2)$

Hãy tính tích chập $x_3(n) = x_1(n) * x_2(n)$

Giải

$$X_1(e^{j\omega}) = X_2(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(n+2)+\delta(n-2)]e^{-j\omega n}$$

$$= e^{j2\omega} + e^{-j2\omega} = 2\cos 2\omega$$

$$X_3(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}).X_2(e^{j\omega}) = 4\cos^2 2\omega = (e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})^2$$

$$= e^{j4\omega} + 2e^{j2\omega} e^{-j2\omega} + e^{-j4\omega}$$

$$= e^{j4\omega} + 2 + e^{-j4\omega}$$

$x_3(n) = \delta(n+4) + 2\delta(n) + \delta(n-4)$

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

Tổng kết các tính chất của FT với tín hiệu rời rạc

Miền n	**Miền ω**
$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
$ax_1(n)+bx_2(n)$	$aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$
$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$
x*(n)	$X^*\left(e^{-j\omega}\right)$
x(-n)	$X\left(e^{-j\omega}\right)$
$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2\left(e^{j\omega}\right)$
$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1\left(e^{j(\omega-\omega')}\right).X_2\left(e^{j\omega'}\right)d\omega'$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n).x_2^*(n)$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

QUAN HỆ GIỮA BIẾN ĐỔI FOURIER VÀ BIẾN ĐỔI Z

$$ZT[x(n)] = X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n}$$

$Z = r\,e^{j\omega}$ $\quad ZT[x(n)] = X(Z) = X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)r^{-n}e^{-j\omega n}$

nếu X(Z) hội tụ tại $|Z| = 1$, thì:

$$X(Z)\Big|_{Z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} = FT[x(n)]$$

Như vậy biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được đánh giá trên vòng tròn đơn vị

Ví dụ Cho dãy tín hiệu:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Hãy tìm $X(Z)$ và $X(e^{j\omega})$

Giải $X(Z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n Z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}Z^{-1}}$ $\quad |Z| > \frac{1}{3}$

$X(Z)$ hội tụ trên vòng tròn đơn vị nên $X(e^{j\omega})$ tồn tại, ta có:

$$X(e^{j\omega}) = X(Z)\Big|_{Z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Ví dụ Cho $x(n) = u(n)$

Hãy tính $X(Z)$ và $X(e^{j\omega})$

Giải $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)Z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}Z^{-n} = \frac{1}{1-Z^{-1}} = \frac{Z}{Z-1}$ $\quad RC: |Z|>1$

$|Z| = 1$ không nằm trong miền hội tụ $\quad X(e^{j\omega})$ không tồn tại

Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược

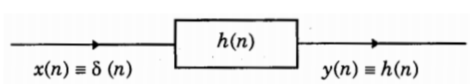
4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI



$y(n) = x(n) * h(n)$

$x(n) = e^{j\omega n}$ với $-\infty < n < \infty$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)} = \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}\right] e^{j\omega n}$$

Đặt: $\boxed{H(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(n) = H(e^{j\omega}).\, e^{j\omega n}}$

$H(e^{j\omega})$ được gọi là đáp ứng tần số của hệ thống.

đáp ứng tần số của hệ thống chính là biến đổi Fourier của đáp ứng xung:

$$H(e^{j\omega}) = FT[h(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$$h(n) = IFT\left[H(e^{j\omega})\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$x(n) \xrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

$$y(n) \xrightarrow{FT} Y(e^{j\omega})$$

$$h(n) \xrightarrow{FT} H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}).H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$$

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

$$X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega})$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$h(n) \xrightarrow{FT} H\left(e^{j\omega}\right)$$

Đáp ứng tần số $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$ sẽ đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống trong miền tần số ω

Các cách thể hiện $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)$:

+ Biểu diễn theo phần thực và phần ảo Re, Im:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{Re}\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right] + j\,\mathrm{Im}\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]$$

+ Biểu diễn theo modul và Argument:

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\arg\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right]}$$

$\left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right|$ Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ)

$\arg\left[\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right] = \varphi(\omega)$: Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha)

$$\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \left|\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

+ Biểu diễn theo độ lớn và pha: $\mathrm{H}\left(e^{j\omega}\right) = \mathrm{A}\left(e^{j\omega}\right) e^{j\theta(\omega)}$

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

Ví dụ Cho một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung

$$h(n) = a^n u(n) \qquad |a| < 1$$

Hãy xác định đáp ứng tần số của hệ thống và đáp ứng ra với kích thích vào là

$$x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n} \qquad a = \frac{1}{3}$$

Giải :

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n$$

Vì $|a| < 1$ nên $\left|ae^{-j\omega}\right| < 1$ nên chuỗi này hội tụ $\boxed{H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$

Từ đây ta có:

$$Re\left[H(e^{j\omega})\right] = \frac{1 - a\cos\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} \qquad \left|H(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$Im\left[H(e^{j\omega})\right] = -\frac{a\sin\omega}{1 + a^2 - 2a\cos\omega} \qquad \arg\left[H(e^{j\omega})\right] = -arctg\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

Với $x(n) = e^{j\frac{\pi}{3}n}$ $\Rightarrow$ $y(n) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\frac{\pi}{3}}}.e^{j\frac{\pi}{3}n}$

Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược

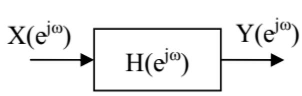
4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống



$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

$$H(e^{j\omega}) = Re\left[H(e^{j\omega})\right] + jIm\left[H(e^{j\omega})\right]$$

$$H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ đáp ứng biên độ của hệ thống

$\varphi(\omega) = \arg\left[H(e^{j\omega})\right]$ đáp ứng pha của hệ thống

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \sqrt{Re^2\left[H(e^{j\omega})\right] + Im^2\left[H(e^{j\omega})\right]}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{Im\left[H(e^{j\omega})\right]}{Re\left[H(e^{j\omega})\right]}$$

Nội dung

4.1 Biến đổi Fourier thuận/ngược

4.2 Tính chất của biến đổi Fourier

4.3 Đáp ứng tần số của hệ LTI

4.4 Đáp ứng biên độ - pha của hệ thống

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

- Một ứng dụng quan trọng nhất của xử lý tín hiệu là lọc số.
- Việc thiết kế các bộ lọc số thực tế đều đi từ lý thuyết các bộ lọc số lý tưởng, vì vậy cần phải nghiên cứu các bộ lọc lý tưởng.

bốn loại bộ lọc số tiêu biểu là:

- Bộ lọc số thông thấp.
- Bộ lọc số thông cao.
- Bộ lọc số thông dải.
- Bộ lọc số chắn dải.

Lọc ở đây chúng ta hiểu là lọc tần số chính, vì vậy mà tất cả các đặc trưng của lọc tần số đều được cho theo đáp ứng biên độ.

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

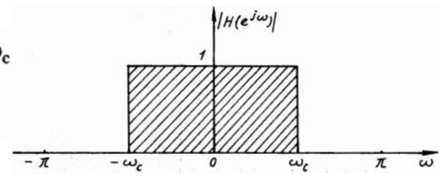
Bộ lọc số thông thấp lý tưởng **(Low pass Filter)**

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông thấp lý tưởng được định nghĩa

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



Nhận xét:

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ là đối xứng,chỉ cần xét một nửa chu kỳ ($0 \le \omega \le \pi$) là đủ.

trong một nửa chu kỳ thì các tham số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng

ω_c : tần số cắt

$0 \le \omega \le \omega_c$: dải thông

$\omega_c \le \omega \le \pi$: dải chắn

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

Bộ lọc số thông thấp lý tưởng **(Low pass Filter)**

Ví dụ

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông thấp lý tưởng pha không ($\theta(\omega) = 0$) như sau:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & -\omega_c \le \omega \le \omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc hãy vẽ $h(n)$ trong trường hợp $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

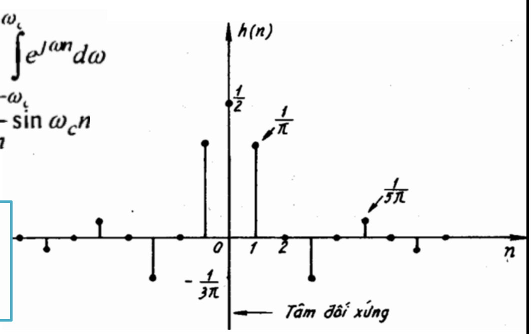
Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi j n}\left(e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\omega_c n$$

$$\boxed{h(n) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}}$$

$\omega_c = \frac{\pi}{2}$ ta có $\boxed{h(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n}}$



4.5 Cơ bản về bộ lọc số

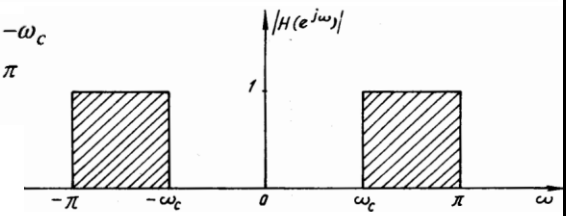
Bộ lọc số thông cao lý tưởng **(High pass Filter)**

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông cao lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$



Nhận xét:

$|H(e^{j\omega})|$ là đối xứng, chỉ cần xét một nửa chu kỳ ($0 \le \omega \le \pi$) là đủ.

ω_c : tần số cắt

$0 \le \omega \le \omega_c$: dải chắn

$\omega_c \le \omega \le \pi$: dải thông.

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

Bộ lọc số thông cao lý tưởng **(High pass Filter)**

Ví dụ

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc số thông cao lý tưởng pha không

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_c \\ \omega_c \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$$(-\pi \le \omega \le \pi)$$

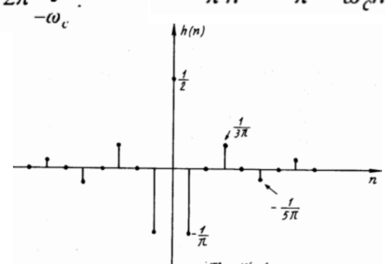
Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc vẽ $h(n)$ trong trường hợp $\omega_c = \frac{\pi}{2}$

Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n}d\omega = \frac{\sin \pi n}{\pi n} - \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$$h(n) = \delta(n) - \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin \omega_c n}{\omega_c n}$$

$$\omega_c = \frac{\pi}{2} \qquad h(n) = \delta(n) - \frac{1}{2}\frac{\sin \frac{\pi}{2} n}{\frac{\pi}{2} n}$$



4.5 Cơ bản về bộ lọc số

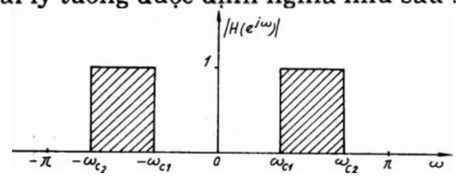
Bộ lọc số thông dải lý tưởng (ideal band pass filter)

Định nghĩa:

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thông dải lý tưởng được định nghĩa như sau :

$$\left|H(e^{j\omega})\right| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c_2} \le \omega \le -\omega_{c_1} \\ \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \le \omega \le \pi)$



Nhận xét:

$\left|H(e^{j\omega})\right|$ là đối xứng,chỉ cần xét một nửa chu kỳ ($0 \le \omega \le \pi$) là đủ.

Các tham số của bộ lọc thông dải lý tưởng như sau:

ω_{c1} : tần số cắt dưới.

ω_{c2} : tần số cắt trên.

$\omega_{c1} \le \omega \le \omega_{c2}$: dải thông.

$0 \le \omega \le \omega_{c1}$: dải chắn.

$\omega_{c2} \le \omega \le \pi$: dải chắn.

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

Bộ lọc số thông dải lý tưởng (ideal band pass filter)

Ví dụ

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc thông dải lý tưởng pha không

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\omega_{c_2} \le \omega \le -\omega_{c_1} \\ \omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_2} \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$ của bộ lọc và tìm $h(n)$

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3},\ \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

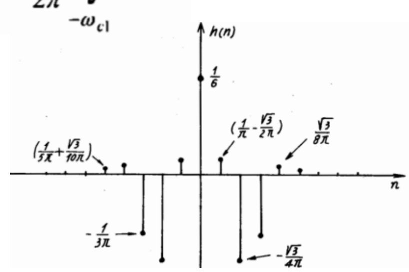
Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n}d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n}d\omega$$

$$h(n) = \frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}$$

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3},\ \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = \frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}$$



4.5 Cơ bản về bộ lọc số

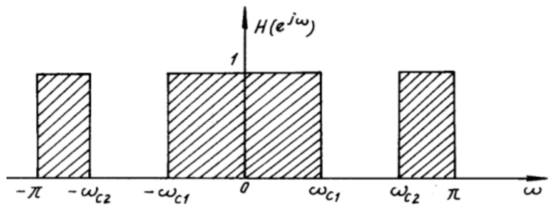
Bộ lọc số chắn dải lý tưởng (ideal band stop filter)

Định nghĩa :

Đáp ứng biên độ của bộ lọc số chắn dải lý tưởng được định nghĩa như sau:

$$|H(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_{c_2} \\ -\omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_1} \\ \omega_{c_2} \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

$(-\pi \le \omega \le \pi)$



Ví dụ

Cho đáp ứng tần số của bộ lọc chắn dải lý tưởng pha không

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \begin{cases} -\pi \le \omega \le -\omega_{c_2} \\ -\omega_{c_1} \le \omega \le \omega_{c_1} \\ \omega_{c_2} \le \omega \le \pi \end{cases} \\ 0 & \omega \text{ còn lại} \end{cases}$$

Hãy tìm đáp ứng xung $h(n)$

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

Bộ lọc số chắn dải lý tưởng (ideal band stop filter)

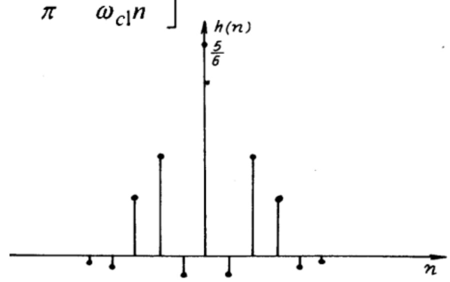
Giải :

$$h(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} d\omega - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c2}}^{\omega_{c2}} e^{j\omega n} d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_{c1}}^{\omega_{c1}} e^{j\omega n} d\omega$$

$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{\omega_{c2}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c2}n}{\omega_{c2}n} - \frac{\omega_{c1}}{\pi}\frac{\sin\omega_{c1}n}{\omega_{c1}n}\right]$$

$$\omega_{c1} = \frac{\pi}{3}, \quad \omega_{c2} = \frac{\pi}{2}$$

$$h(n) = \delta(n) - \left[\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\pi}{2}n}{\frac{\pi}{2}n} - \frac{1}{3}\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{\frac{\pi}{3}n}\right]$$



Kết luận chung về các bộ lọc số lý tưởng

$L[h(n)] = [-\infty, +\infty] = \infty$

$h(n) \neq 0$ khi $n < 0$.

Các bộ lọc số lý tưởng không thể thực hiện được về vật lý

4.5 Cơ bản về bộ lọc số

BỘ LỌC SỐ THỰC TẾ

Có 4 tham số quyết định chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số là:

δ_1 : độ gợn sóng ở dải thông

δ_2 : độ gợn sóng ở dải chắn

ω_p : tần số giới hạn (biên tần) dải thông

ω_s : tần số giới hạn (biên tần) dải chắn

Ngoài ra còn tham số phụ là: $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$: **bề rộng** dải quá độ

bộ lọc thông thấp