University of Florida
Dept. of Computer & Information Science & Engineering

COT 3100

Applications of Discrete Structures

Dr. Michael P. Frank

Slides for a Course Based on the Text
Discrete Mathematics & Its Applications
(5^{th} Edition)
by Kenneth H. Rosen

Module #21: **Relations**

Rosen 5th ed., ch. 7

~35 slides (in progress), ~2 lectures

Quan hệ hai ngôi - Binary Relations

- G/s *A*, *B* là các tập bất kỳ. Quan hệ hai ngôi *R* từ *A* vào *B*, viết dạng $R{:}A\times B$, hoặc $R{:}A{,}B$, là (có thể đồng nhất với) tập con của tập $A\times B$.
  - Chẳng hạn $<\,:\mathbf{N}\times\mathbf{N} :\equiv \{(n,m) \mid n < m\}$
- Ký hiệu $a\ R\ b$ hoặc aRb nghĩa là $(a,b)\in R$.
  - VD $a < b$ nghĩa là $(a,b)\in\, <$
- Nếu aRb ta nói "*a* có quan hệ với *b* (bởi quan hệ *R*)",
  - Hoặc đơn giản "*a* quan hệ với *b* (qua quan hệ *R*)".
- Quan hệ hai ngôi *R* tương ứng với hàm *vị từ* $P_R{:}A\times B\rightarrow\{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$ xác định trên tích đề các của *A*,*B*;
  - VD, vị từ "eats" :≡ {(*a*,*b*)| organism *a* eats food *b*}

Các ví dụ quan hệ hai ngôi

- Quan hệ hoc: sinh viên s học môn m trên S x M
- Quan hệ bạn bè: a là bạn của b trên S x S
- Quan hệ cùng lớp: a cùng lớp với b
- Quan hệ đồng hương: a đồng hương với b
- Quan hệ ước số: a | b
- Quan hệ nguyên tố cùng nhau: (a, b) =1
- Quan hệ đọc sách: a đọc sách b

Quan hệ bù – Complementary Relations

- G/s $R{:}A{,}B$ là quan hệ hai ngôi bất kỳ.
- Khi đó ,$\overline{R}{:}A\times B$, phần bù của R, là quan hệ hai ngôi xác định như sau

  $$\overline{R} :\equiv \{(a,b) \mid (a,b)\notin R\} = (A\times B) - R$$

- Ký hiệu là $\overline{R}$ nếu vũ trụ nói đến là $U = A\times B$; vì vậy có tên là phần bù.
- Ký hiệu phần bù của R là $\overline{R}$.

Example: $\overline{<} = \{(a,b) \mid (a,b)\notin <\} = \{(a,b) \mid \neg a<b\} = \geq$

Quan hệ ngược -Inverse Relations

- Quan hệ hai ngôi bất kỳ $R{:}A\times B$ có quan hệ ngược $R^{-1}{:}B\times A$, xác định bởi
  $$R^{-1} :\equiv \{(b,a) \mid (a,b)\in R\}.$$
  E.g., $<^{-1} = \{(b,a) \mid a<b\} = \{(b,a) \mid b>a\} = >$.
- *E.g.*, if R:People→Foods is defined by
  $a\ R\ b \Leftrightarrow a\ eats\ b$, then:
  $b\ R^{-1}\ a \Leftrightarrow b\ is\ eaten\ by\ a$. (Passive voice.)

Quan hệ trên một tập hợp
Relations on a Set

- Quan hệ hai ngôi từ A vào chính nó được gọi là quan hệ trên *A*.
- *VD*., quan hệ nhỏ hơn "**<**" được định nghĩa trong ví dụ trước là quan hệ trên tập số tự nhiên N.
- Quan hệ hai ngôi đồng nhất $\mathbf{I}_A$ trên tập *A* là tập sau $\{(a,a)|a\in A\}$.

Phản xạ - Reflexivity

- Quan hệ R trên A là phản xạ nếu $\forall a \in A,\ aRa$.
  - VD, quan hệ $\geq :\equiv \{(a,b) \mid a \geq b\}$ là phản xạ.
- Quan hệ R là phi phản xạ (*irreflexive)* iff quan hệ bù của nó $\cancel{R}$ là phản xạ .
  - Example: < is irreflexive, because ≥ is reflexive.
  - Note "*irreflexive*" does **NOT** mean "*not reflexive*"!
    - For example: the relation "likes" between people is not reflexive, but it is not irreflexive either.
      - Since not everyone likes themselves, but not everyone *dislikes* themselves either!

Đối xứng và phản đối xứng
Symmetry & Antisymmetry

- Quan hệ hai ngôi R trên A là đối xứng iff $R = R^{-1}$, tức là, nếu $(a,b)\in R \leftrightarrow (b,a)\in R$.
  - *VD*, = (equality) is symmetric. < is not.
  - "is married to" is symmetric, "likes" is not.
- Quan hệ hai ngôi R là phản xứng nếu $\forall a\neq b, (a,b)\in R \rightarrow (b,a)\notin R$.
  - **Examples:** < is antisymmetric, "likes" is not.
  - **Exercise:** prove this definition of antisymmetric is equivalent to the statement that $R\cap R^{-1} \subseteq \mathbf{I}_A$.

Bắc cầu - Transitivity

- Quan hệ R là bắc cầu iff (với mọi a,b,c)
  $(a,b)\in R \wedge (b,c)\in R \rightarrow (a,c)\in R$..
- Some examples:
  - "is an ancestor of" is transitive.
  - "likes" between people is intransitive.
  - "is located within 1 mile of" is… ?

Toàn thể - Totality

- Quan hệ $R{:}A\times B$ là toàn thể nếu đối với mỗi $a\in A$, có ít nhất một $b\in B$ sao cho $(a,b)\in R$.
- Nếu R không là toàn thể, thì nó được gọi là bộ phận chặt (*strictly partial*).
- Quan hệ bộ phận là quan hệ mà có thể là bộ phận chặt. (Hoặc có thể không là toàn thể)
  - Nói cách khác, mọi quan hệ đang xét được xem là bộ phận.

Tính hàm số - Functionality

- Quan hệ $R:A\times B$ là hàm số nếu, đối với bất kỳ $a\in A$, có nhiều nhất một $b\in B$ sao cho $(a,b)\in R$.
  - "R là hàm" $\Leftrightarrow$ $\forall a\in A: \neg\exists b_1\neq b_2\in B: aRb_1 \wedge aRb_2$.
  - Iff R là hàm, thì nó tương ứng với một hàm bộ phận $R:A\rightarrow B$
    - where $R(a)=b \Leftrightarrow aRb$; *e.g.*
      - *E.g.*, The relation $aRb :\equiv$ "$a + b = 0$" yields the function $-(a) = b$.
- R là phản hàm nếu quan hệ ngược của nó R^{-1} là hàm số.
  - Lưu ý: quan hệ hàm số (hàm bộ phận) đồng thời là phản hàm là hàm bộ phận khả nghịch (*invertible*).
- R hàm toàn thể $R:A\rightarrow B$ nếu nó vừa là hàm số vừa là toàn thể, tức là, với mọi $a\in A$, có chính xác một b sao cho $(a,b)\in R$. *I.e.*, $\forall a\in A:\exists! b: aRb$.
  - Nếu R là hàm nhưng không toàn thể, thì nó là hàm bộ phận chặt.
  - **Exercise:** Show that iff R is functional and antifunctional, and both it and its inverse are total, then it is a bijective function.

Ký hiệu Lambda

- Tính toán *lambda* là ngôn ngữ toán học hình thức để định nghĩa và thao tác trên hàm số.
  - Đây là cơ sở toán cho một số ngôn ngữ lập trình hàm (dựa trên đệ qui hàm) như LISP và ML.
- Nó dựa trên ký hiệu *lambda*, trong đó "λa: $f(a)$" là cách ký hiệu hàm f mà không gán nó một ký hiệu đặc biệt nào.
  - *VD*, (λx. $3x^2+2x$) là tên của hàm f:**R**→**R** trong đó $f(x)=3x^2+2x$.
- Ký hiệu Lambda và phép toán "∍" có thể được sử dụng tạo nên biểu diễn cho hàm số tương ứng với quan hệ hàm bất kỳ.
  - G/s R:$A\times B$ là quan hệ hàm trên A,B.
  - Khi đó biểu thức (λa: $b \ni aRb$) ký hiệu hàm f:$A\rightarrow B$ trong đó $f(a) = b$ iff aRb.
    - VD., nếu viết : $f :\equiv (\lambda a$: $b \ni a+b = 0)$, thì đây là cách định nghĩa hàm $f(a)=-a$.

Tích quan hệ - Composite Relations

- Let $R{:}A\times B$, and $S{:}B\times C$. Then the *composite* $S\circ R$ of R and S is defined as:

  $$S\circ R = \{(a,c) \mid \exists b: aRb \wedge bSc\}$$

- Note that function composition $f\circ g$ is an example.
- **BT**: CM rằng $R{:}A\times A$ là bắc cầu iff $R\circ R = R$.
- R^n Lũy thừa bậc *n của R* trên tập *A* được định nghĩa đệ qui như sau:

  $$R^0 :\equiv \mathbf{I}_A; \qquad R^{n+1} :\equiv R^n\circ R \quad \text{for all } n\geq 0.$$

  – Luỹ thừa âm của R có thể định nghĩa bởi $R^{-n} :\equiv (R^{-1})^n$.

§7.2: Quan hệ *n*-ngôi

- Quan hệ *n*-ngôi *R* trên các tập $A_1,\ldots,A_n$, được viết dạng $R{:}A_1\times\ldots\times A_n$ hoặc $R{:}A_1,\ldots,A_n$, đơn giản là tập con của tích đề các của chúng

$$R \subseteq A_1\times \ldots \times A_n.$$

- Các tập con A_i được gọi là các miền *domains* của *R*.
- Bậc của *R* là *n*.
- *R* là hàm trên miền A_i nếu f chỉ chứa nhiều nhất một bộ n $(\ldots, a_i ,\ldots)$ đối với giá trị a_i bất kỳ của miền A_i.

Cơ sở dữ liệu quan hệ
Relational Databases

- CSDL quan hệ thực chất là một quan hệ n ngôi *R*.
- Miền A_i là khoá chính (*primary key*) *cho CSDL* nếu quan hệ *R* là hàm trên A_i.
- Khoá phức (*composite key*) cho CSDL là tập các miền $\{A_i, A_j, \ldots\}$ sao cho *R* chứa nhiều nhất một bộ n $(\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots)$ đối với mỗi bộ giá trị $(a_i, a_j,\ldots)\in A_i\times A_j\times\ldots$

Phép toán chọn-Selection Operators

- G/s A là miền n ngôi bất kỳ $A=A_1\times\ldots\times A_n$, và G/s $C:A\rightarrow\{\mathbf{T},\mathbf{F}\}$ là điều kiện (hay vị từ) trên các bộ n của A.
- Khi đó, phép toán chọn s_C là phép toán ánh xạ quan hệ n ngôi bất kỳ R trên A vào quan hệ n ngôi con (tập con) của R mà thoả C.
  - *I.e.*, $\forall R\subseteq A,\ s_C(R) = \{a\in R \mid s_C(a) = \mathbf{T}\}$

Selection Operator Example

- Suppose we have a domain
  A = StudentName × Standing × SocSecNos
- Suppose we define a certain condition on A,
  $\mathit{UpperLevel}(\mathit{name},\mathit{standing},\mathit{ssn}) :\equiv$
  $[(\mathit{standing} = \text{junior}) \vee (\mathit{standing} = \text{senior})]$
- Then, $s_{\mathit{UpperLevel}}$ is the selection operator that takes any relation R on A (database of students) and produces a relation consisting of *just* the upper-level classes (juniors and seniors).

Phép toán chiếu
Projection Operators

- G/s $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ là miền n ngôi bất kỳ, và G/s $\{i_k\}=(i_1,\ldots,i_m)$ là dãy các chỉ số nằm trong khoảng từ 1 đến n,
  - Tức là $1 \leq i_k \leq n$ với mọi $1 \leq k \leq m$.
- Khi đó phép chiếu trên các bộ n được định nghĩa bởi:

$$P_{\{i_k\}} : A \rightarrow A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_m}$$

$$P_{\{i_k\}}(a_1,\ldots,a_n) = (a_{i_1},\ldots,a_{i_m})$$

Projection Example

- Suppose we have a ternary (3-ary) domain *Cars*=*Model*×*Year*×*Color*. (note n=3).
- Consider the index sequence $\{i_k\}$= 1,3. (m=2)
- Then the projection $P_{\{i_k\}}$ simply maps each tuple $(a_1,a_2,a_3) = (model, year, color)$ to its image:

$$(a_{i_1}, a_{i_2}) = (a_1, a_3) = (model, color)$$

- This operator can be usefully applied to a whole relation $R \subseteq Cars$ (a database of cars) to obtain a list of the model/color combinations available.

Phép toán hợp - Join Operator

- Đặt hai quan hệ cạnh nhau đẻ tạo ra một kiểu quan hệ kết hợp.
- Nếu bộ (A,B) xuất hiện trong R_1, và bộ (B,C) xuất hiện trong R_2, thì bộ (A,B,C) xuất hiên trong hợp $J(R_1,R_2)$.
  - A, B, và C ở đây có thể là dãy các phần tử (thông qua các trường lặp), chứ không chỉ các phần tử riêng biệt.

Join Example

- Suppose R_1 is a teaching assignment table, relating *Professors* to *Courses*.
- Suppose R_2 is a room assignment table relating *Courses* to *Rooms*,*Times*.
- Then $J(R_1,R_2)$ is like your class schedule, listing (*professor*,*course*,*room*,*time*).

§7.3: Biểu diễn quan hệ Representing Relations

- Có một số cách biểu diễn quan hệ *n*-ngôi:
  - Bằng danh sách hoặc bảng các bộ của nó một cách tường minh.
  - Bằng hàm từ miền vào **{T,F}**.
    - Hoặc bằng thuật toán tính hàm này.
- Có một số cách biểu diễn quan hệ hai ngôi:
  - Bằng ma trận 0-1.
  - Bằng đồ thị định hướng.

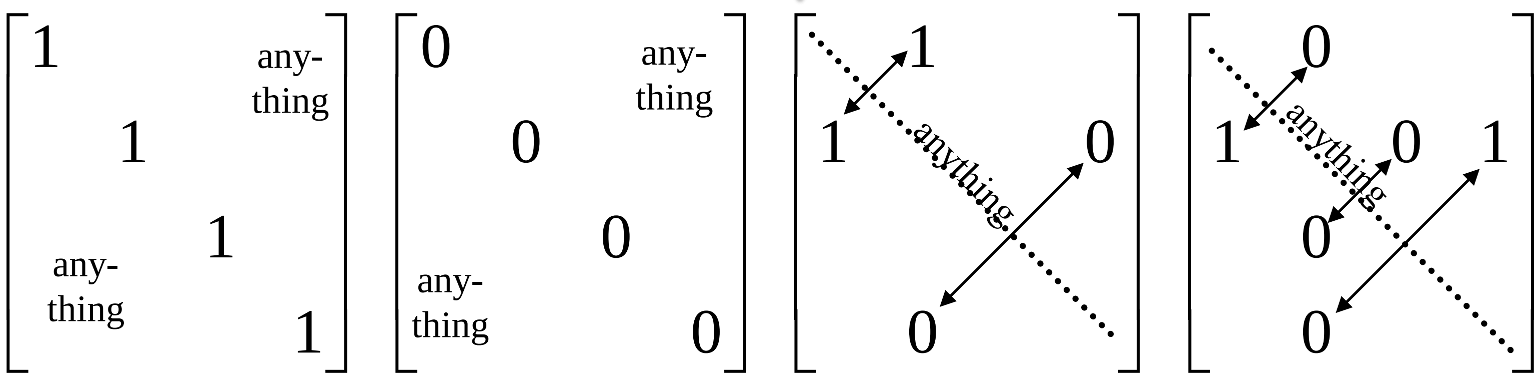
Using Zero-One Matrices

- Biểu diễn quan hệ hai ngôi $R{:}A\times B$ bằng ma trận 0-1 (cỡ $|A|\times|B|$) $\mathbf{M}_R = [m_{ij}]$, với $m_{ij} = 1$ iff $(a_i,b_j)\in R$.
- *E.g.*, Suppose Joe likes Susan and Mary, Fred likes Mary, and Mark likes Sally.
- Then the 0-1 matrix representation of the relation Likes:Boys×Girls relation is:

$$\begin{array}{c} \\ \text{Joe} \\ \text{Fred} \\ \text{Mark} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Susan} & \text{Mary} & \text{Sally} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ma trận 0-1 đối xứng phản xạ Zero-One Reflexive, Symmetric

- Thuật ngữ: *Reflexive*, *non-reflexive*, *irreflexive*, *symmetric*, *asymmetric*, *and* *antisymmetric*.
  - Đặc trưng của các quan hệ này rất dễ nhận thấy khi xem xét các ma trận 0-1.



Reflexive: all 1's on diagonal	*Irreflexive*: all 0's on diagonal	*Symmetric*: all identical across diagonal	*Antisymmetric*: all 1's are across from 0's

Thực hiện các phép toán trên quan hệ nhờ ma trận 0-1

- Cho R:A×B, S:A×B, khi đó

$$M_{R\cup S} = M_R \vee M_S$$

$$M_{R\cap S} = M_R \wedge M_S$$

$$M_{\overline{R}} = \overline{M_R}$$

- Cho R:A×B, S:B×C, khi đó

$$M_{S\circ R} = M_R \otimes M_S$$

$$m_{i,j} = \bigcup_{k=1}^{|B|} r_{ik} s_{kj}$$

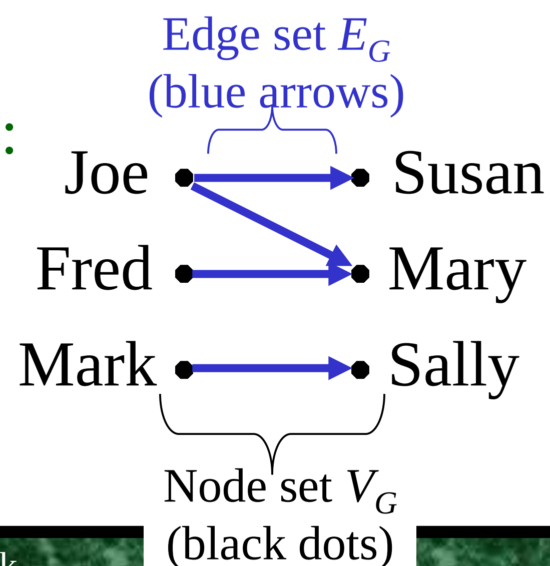
Sử dụng đồ thị có hướng
Using Directed Graphs

- Đồ thị có hướng $G=(V_G,E_G)$ gồm tập các đỉnh V_G với tập các cạnh có hướng $E_G \subseteq V_G \times V_G$
- Dùng chấm biểu diễn đỉnh và mũi tên biểu diễn cạnh. Nhận thấy quan hệ $R{:}A\times B$ có thể biểu diễn như đồ thị $G_R=(V_G=A\cup B,\ E_G=R)$.

Matrix representation $\mathbf{M}_R$:

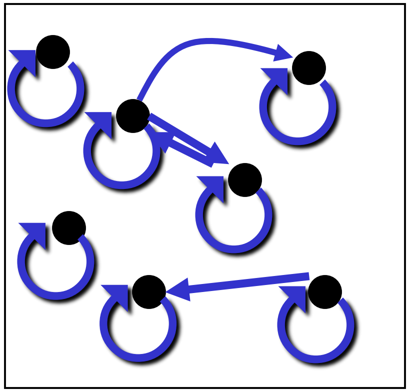
$$\begin{array}{c} \\ \text{Joe} \\ \text{Fred} \\ \text{Mark} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Susan} & \text{Mary} & \text{Sally} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Graph rep. G_R:

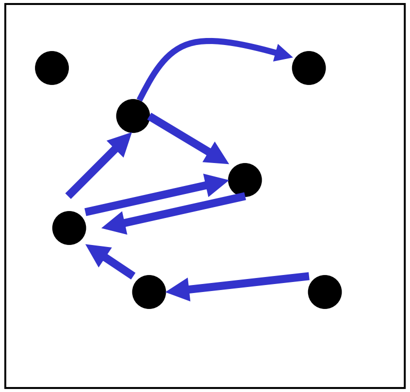


Đồ thị có hướng, phản xạ và đối xứng
Digraph Reflexive, Symmetric

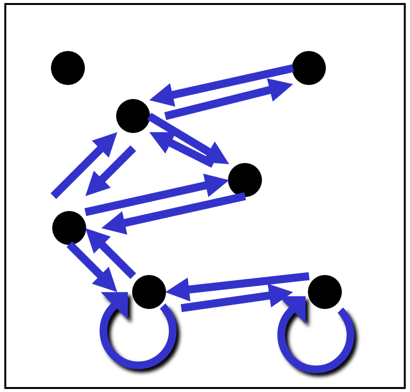
Bằng cách quan sát đồ thị rất dễ nhận thấy các tính chất: reflexive/irreflexive/ symmetric/antisymmetric.



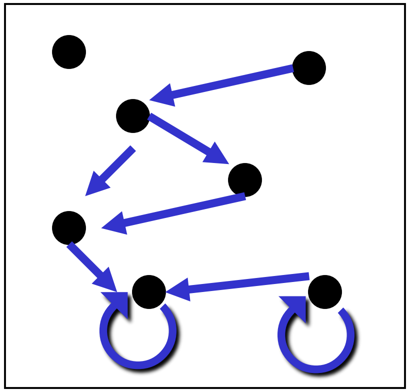
Reflexive: Every node has a self-loop



Irreflexive: No node links to itself



Symmetric: Every link is bidirectional



Antisymmetric: No link is bidirectional

These are asymmetric & non-antisymmetric

These are non-reflexive & non-irreflexive

Đường đi trong đồ thị có hướng/ quan hệ hai ngôi

- Đường đi độ dài n từ đỉnh a đến b trong đồ thị có hướng G (hoặc quan hệ hai ngôi R) là dãy (a,x_1), (x_1,x_2), …, (x_{n-1},b) của n cặp có thứ tự trong E_G (or R).
  - Dãy rỗng các cạnh được coi là đường đi độ dài 0 từ a đến a.
- Đường đi có độ dài $n\geq 1$ từ a đến chính nó được gọi là chu trình.
- ***Định lý:*** rằng tồn tại đường đi độ dài n từ a đến b trong R khi và chỉ khi $(a,b)\in R^n$.

§7.4: Bao đóng của quan hệ Closures of Relations

- Đối với tính chất *X*, "bao đóng *X*" của quan hệ R được định nghĩa là tập cha nhỏ nhất của R mà có tính chất X đó.
- Bao đóng phản xạ của quan hệ *R* trên *A* nhận được bằng cách bổ sung (*a*,*a*) vào *R* với mỗi $a \in A$.
  - Tức là $R \cup I_A$
- Bao đóng đối xứng của *R* nhận được bằng cách bổ sung (*b*,*a*) vào *R* cho mỗi (*a*,*b*) trong *R*.
  - Tức là $R \cup R^{-1}$
- Bao đóng bắc cầu của *R* nhận được bằng cách bổ sung lặp (*a*,*c*) vào *R* cho mỗi (*a*,*b*),(*b*,*c*) trong *R*.

Quan hệ liên thông R*

- Cho quan hệ hai ngôi R trên tập A. Khi đó quan hệ liên thông R* của R được định nghĩa như sau:

R*={(a,b)|tồn tại đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị có hướng G_R}

$$\boxed{R^* = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}^+} R^n}$$

Định lý : Bao đóng bắc cầu của quan hệ hai ngôi R trên tập A chính là quan hệ liên thông R^* của R

Định lý : Nếu có đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b trong đồ thị G_R thì sẽ có đường đi như vậy với độ dài nhỏ hơn hoặc bằng số đỉnh của G_R

Thuật toán tìm bao đóng bắc cầu đơn giản
Simple Transitive Closure Alg.

Thuật toán tính ma trận 0-1 của R^*.

procedure *transClosure*(**M**$_R$:rank-n 0-1 mat.)

A := B := M$_R$;

for i := 2 to n **begin**

A := A $\otimes$ **M**$_R$; **B := B** $\vee$ **A** {join}

end {note **A** represents R^i, **B** represents $\bigcup_{j=1}^{i} R^i$ }

return B {Alg. takes $\Theta(n^4)$ time}

Thuật toán tìm bao đóng nhanh
A Faster Transitive Closure Alg.

procedure *transClosure*(**M**$_R$:rank-n 0-1 mat.)

A := **M**$_R$;

for i := 1 to $\lceil \log_2 n \rceil$ **begin**

A := **A**⊙(**A**+**I**$_n$); {**A** represents $\bigcup_{j=1}^{2^{i+1}-1} R^i$ }

end

return A

{Alg. takes only $\Theta(n^3 \log n)$ time!}

Roy-Warshall Algorithm

- Chỉ sử dụng $\Theta(n^3)$ phép toán!

Procedure *Warshall*($\mathbf{M}_R$: rank-n 0-1 matrix)

W := $\mathbf{M}_R$

for k := 1 **to** n

for i := 1 **to** n

for j := 1 **to** n

$w_{ij} := w_{ij} \vee (w_{ik} \wedge w_{kj})$

return W {this represents R^*}

$w_{ij} = 1$ means there is a path from i to j going only through nodes $\leq k$

§7.5: Quan hệ tương đương Equivalence Relations

- Quan hệ tương đương (e.r.) trên *A* đơn giản là quan hệ hai ngôi bất kỳ mà phản xạ, đối xứng và bắc cầu.
  - VD, quan hệ **=** là quan hệ tương đương.
  - Đối với mọi hàm $f{:}A\rightarrow B$, quan hệ "có cùng giá trị hàm *f*", hoặc $=_f :\equiv \{(a_1,a_2) \mid f(a_1)=f(a_2)\}$ là quan hệ tương đương,
    - *e.g.*, let m= "mother of" then $=_m$ = "have the same mother" is an e.r.

Equivalence Relation Examples

- "Strings a and b are the same length."
- "Integers a and b have the same absolute value."
- "Real numbers a and b have the same fractional part." (*i.e.*, $a - b \in \mathbf{Z}$)
- "Integers a and b have the same residue modulo m." (for a given $m>1$)

Các lớp tương đương Equivalence Classes

- G/s *R* là quan hệ tương đương bất kỳ trên *A*.
- Lớp tương đương của *a*,
  $[a]_R :\equiv \{ b \mid aRb \}$ (optional subscript *R*)
  - Đây là tập gồm mọi phần tử của A mà tương đương với *a* theo quan hệ tương đương *R*.
  - Mỗi *b như vậy* (kể cả bản thân *a*) được gọi là đại diện của $[a]_R$.
- Vậy $f(a)=[a]_R$ là hàm của *a*, mọi quan hệ tương đương *R* có thể được định nghĩa dạng *aRb* :≡ "*a* và *b* có cùng giá trị của hàm f ", với *f* *cho trước*.

Equivalence Class Examples

- "Strings a and b are the same length."
  - $[a]$ = the set of all strings of the same length as a.
- "Integers a and b have the same absolute value."
  - $[a]$ = the set $\{a, -a\}$
- "Real numbers a and b have the same fractional part (*i.e.*, $a - b \in \mathbf{Z}$)."
  - $[a]$ = the set $\{\ldots, a-2, a-1, a, a+1, a+2, \ldots\}$
- "Integers a and b have the same residue modulo m." (for a given $m>1$)
  - $[a]$ = the set $\{\ldots, a-2m, a-m, a, a+m, a+2m, \ldots\}$

Phân hoạch - Partitions

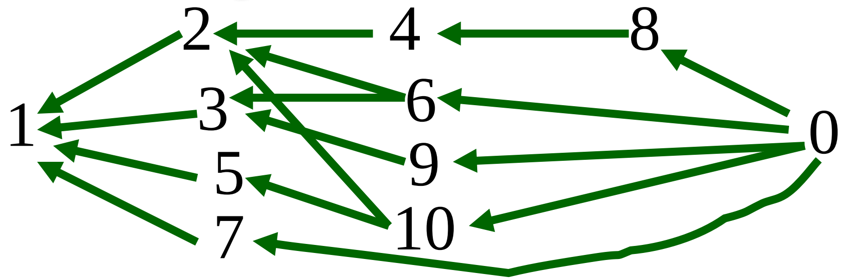
- Phân hoạch của tập *A* là tập mọi lớp tương đương $\{A_1, A_2, \ldots\}$ của một quan hệ tương đương nào đó trên *A*.
  – Mọi A_i là rời nhau và hợp của chúng = *A*.
- Chúng chia tập A thành các mảnh rời nhau. Mỗi mảnh chứa mọi phần tử tương đương với nhau.

§7.6: Thứ tự bộ phận Partial Orderings

- Quan hệ R trên A được gọi là thứ tự bộ phận iff nó là phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu.
  - Chúng ta sử dụng ký hiệu kiểu như $\preccurlyeq$ cho các quan hệ thứ tự bộ phận.
  - VD: $\leq$, $\geq$ trên các tập số thực, và $\subseteq$, $\supseteq$ trên tập hợp.
  - VD khác: quan hệ ước số | trên $\mathbf{Z}^+$.
    - Lưu ý không nhất thiết với mọi a, b ta có $a \preccurlyeq b$ hoặc $b \preccurlyeq a$.
- Tập A cùng với thứ tự bộ phận $\preccurlyeq$ trên A được goi là tập thứ tự bộ phận (*partially ordered set* or *poset) và ký hiệu* $(A, \preccurlyeq)$.

Tập thứ tự bộ phận như đồ thị có hướng không có chu trình

- Có ánh xạ 1-1 giữa tập thứ tự bộ phận và các bao đóng phản xạ và bắc cầu của các đồ thị có hướng không có chu trình.
- VD: xét tập thứ tự bộ phận ({0,…,10},|)
  - Đây là đồ thị có hướng nhỏ nhất của nó:



Thiết lập thứ tự bộ phận

- Đỉnh a được gọi là trước b: *a≼b, nếu có một đường đi có hướng từ a đến b:*
  - Quan hệ trên có tính phản xạ: đỉnh a coi là có đường đi đến nó có độ dài 0.
  - Không đối xứng (vì không có chu trình: nếu a có đường đi đến b và ngược lại thì có chu trình)
  - Bắc cầu (vì nối tiếp hai đường đi: nối đường a đến b với đường từ b đến c ta được đường từ a đến c).

Ví dụ thứ tự bộ phận (1)

- Xét quan hệ khúc đầu trên tập các xâu của một bảng chữ: xâu x trước xâu y , nếu x là khúc đầu của y
  - x là khúc đầu của chính nó
  - x là khúc đầu của y và y là khúc đầu của x thì x trùng với y
  - x là khúc đầu của y và y là khúc đầu của z thì x là khúc đầu của z.

Ví dụ thứ tự bộ phận (2)

- Quan hệ chia hết n|m trên tập số tự nhiên N, tức là m chia hết cho n hay n là ước số của m.
- Quan hệ chia hết là thứ tự bộ phận trên N, vì
  – Mọi số chia hết cho chính nó
  – Hai số tự nhiên chia hết cho nhau chỉ khi hai số đó bằng nhau
  – Có tính bắc cầu, vì   n|m và m|k suy ra n|k

Khái niệm dàn đầy đủ

- Một tập có thứ tự bộ phận (A, $\preccurlyeq$) được gọi là một dàn đầy đủ, nếu hai phần tử a, b bất kỳ bao giờ cũng có:
  - Cận dưới lớn nhất của chúng, tức là có c sao cho $c \preccurlyeq a$, $c \preccurlyeq b$ và với mọi d: $d \preccurlyeq a$, $d \preccurlyeq b$, thì $d \preccurlyeq c$.
  - Cận trên nhỏ nhất của chúng, tức là có e sao cho $a \preccurlyeq e$, $b \preccurlyeq e$ và với mọi f: $a \preccurlyeq f$, $b \preccurlyeq f$, thì $e \preccurlyeq f$.

Ví dụ dàn đầy đủ

- Tập số tự nhiên với quan hệ chia hết (N, |) tạo thành dàn đầy đủ, khi đó
  - Ước chung lớn nhất của a và b: UCLN(a, b) chính là cận dưới của a và b
  - Bội chung nhỏ nhất của a và b: BCNN(a, b) chính là cận trên của a và b

Ví dụ cụ thể

- Cho {1, 2, 3, 5, 6, 10,15, 30}
- Với quan hệ “là ước số” a|b (a là ước số của b, hoặc b chia hết cho a)
- Với mọi cặp trên đều có USCLN và BSCNN đều thuộc tập đang xét nên nó tạp thành một dàn.
- Nếu bỏ bớt một phần tử nào đó nó không còn là dàn nữa

Quan hệ thứ tự

Problem 3. Verify that each of the following relations is a partial order by describing a function, g, such that the relation is defined by g according to the Definition 4.2 in the Appendix. For each, is it a total order?

(a) The relation, $<$, on $\mathbb{R}$.

(b) The superset relation, $\supseteq$, on $\mathcal{P}(B)$ for a set, B.

(c) The "divides" relation on natural numbers.

Tìm lỗi trong chứng minh sai sau

Problem 1. Find the flaw in the following false proof, and give a counter-example to the claim.

Claim. *Suppose R is a relation on A. If R is symmetric and transitive, then R is reflexive.*

False proof. Let x be an arbitrary element of A. Let y be any element of A such that xRy. Since R is symmetric, it follows that yRx. Then since xRy and yRx, we conclude by transitivity that xRx. Since x was arbitrary, we have shown that $\forall x \in A\ (xRx)$, so R is reflexive. $\square$

Lấy ví dụ thỏa mãn đối xứng và bắc cầu, nhưng không phản xạ

Solution. The flaw is assuming that y exists. It is possible that there is an $x \in A$ that is not related by R to anything. No such R will be reflexive. The simplest such R that is also symmetric and transitive is the empty relation on any nonempty set A. We can easily construct other examples, such as

$$R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

on the set $A ::= \{a,b,c\}$, which is not reflexive because (c,c) is not in R. These relations are counterexamples to the claim.

Note that the theorem can be fixed: R restricted to its domain of definition is reflexive, and hence an equivalence relation. ∎

Trong mỗi t/h sau, R có là quan hệ tương đương không

Problem 2. In each case, say whether or not R is a equivalence relation on A. If it is an equivalence relation, what are the equivalence classes and how many equivalence classes are there?

(a) $R ::= \{(x, y) \in W \times W \mid$ the words x and y start with the same letter$\}$ where W is the set of all words in the 2001 edition of the Oxford English dictionary.

(b) $R ::= \{(x, y) \in W \times W \mid$ the words x and y have at least one letter in common$\}$.

(c) $R = \{(x, y) \in W \times W$ and the word x comes before the word y alphabetically$\}$.

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $|x| \leq |y|\}$.

(e) $R = \{(x, y) \in B \times B$, where B is the set of all bit strings and x and y have the same number of 1s.$\}$

a) R quan hệ tương đương,
b) R không có tính bắc cầu

(a) $R ::= \{(x, y) \in W \times W \mid$ the words x and y start with the same letter$\}$ where W is the set of all words in the 2001 edition of the Oxford English dictionary.

Solution. R is an equivalence relation since it is reflexive, symmetric, and transitive. The equivalence class of x with respect to R is the set $[x]_R =$ the set of words y, such that y has the same first letter as x. There are 26 equivalence classes, one for each letter of the English alphabet. ■

(b) $R ::= \{(x, y) \in W \times W \mid$ the words x and y have at least one letter in common$\}$.

Solution. S is reflexive and symmetric, but it is not transitive. Therefore, S is not an equivalence relation. For example, let w_1 be the word "scream," let w_2 be the word "and," and let w_3 be the word "shout." Then $w_3 S w_1$, and $w_1 S w_2$, but it is **not** the case that $w_3 S w_2$. ■

c) R không có tính phản xạ,

d) R quan hệ tương đương,

(c) $R = \{(x, y) \in W \times W$ and the word x comes before the word y alphabetically$\}$.

Solution. R is not reflexive but it is transitive and antisymmetric. It is not an equivalence relation, but it is a partial order. $\blacksquare$

(d) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ and $|x| \leq |y|\}$.

Solution. R is reflexive and transitive. It is not symmetric. It is not antisymmetric either. As a counterexample, $|-3| \leq |3|$, $|3| \leq |-3|$, but $3 \neq -3$. $\blacksquare$

(e) $R = \{(x, y) \in B \times B$, where B is the set of all bit strings and x and y have the same number of 1s.$\}$

Solution. R is reflexive, symmetric and transtive, and therefore an equivalence relation. There is an equivalence class for each natural number corresponding to bit strings with that number of 1s. $\blacksquare$

Chứng minh các lớp tương đương rời nhau

Problem 3. Let R be an equivalence relation on the set A. For an element $a \in A$, let $[a]$ denote the set $\{b \in A \text{ given } aRb\}$. This set is the *equivalence class of a under R* and we call a a *representative* of the set $[a]$.

Prove that the sets $[a]$ for all $a \in A$ constitute a partition of A. In other words, prove that for every $a, b \in A$, either $[a] = [b]$ or $[a] \cap [b] = \emptyset$.

Solution. *Proof.* Consider some arbitrary $a, b \in A$. If either $[a] = [b]$ or $[a] \cap [b] = \emptyset$ then we are done, so suppose not.

Let c be any element that is in one of the sets but not the other. Without loss of generality we can assume that $c \in [b] - [a]$. (We know that either $c \in [b] - [a]$ or $c \in [a] - [b]$. In the latter case we can simply swap a and b and reduce to the first case.)

Let d be any element in $d \in [a] \cap [b]$. We will get a contradiction by showing that aRc and therefore that $c \in [a]$. First, aRd because $d \in [a]$ (note that $d = a$ is a possibility but this is ok because R is reflexive). Second, dRb and bRc because both $c, d \in [b]$ and R is symmetric. This implies, by transitivity, that dRc. Finally, by transitivity, aRc because aRd and dRc. Hence we have a contradiction. Also, we know that for every $a \in A$, a is in its own equivalence class since R is

Chứng minh phản xạ

reflexive. Therefore the union of all the equivalence classes gives us A, and thus the sets $[a]$ for $a \in A$ constitute a parition of A.

Note that all three properties of equivalence relations were used in this proof. Checking that the proof uses all available assumptions is usually a good sanity check when writing proofs. If one of the properties you assumed were not needed, you have either made a mistake or proven a much more strong theorem than you thought. For example, if you didn't use transitivity anywhere in the proof of this problem, you would have falsely proven that any reflexive symmetric relation produces a partition. □

■