



ulm university universität  
**uulm**

**Fakultät für  
Mathematik und  
Wirtschafts-  
wissenschaften**

Institut für Numerische  
Mathematik

# Cache-optimierte QR-Zerlegung

Bachelorarbeit an der Universität Ulm

**Vorgelegt von:**

Florian Krötz  
florian.kroetz@uni-ulm.de

**Gutachter:**

Dr. Michael Lehn  
Dr. Andreas Borchert

**Betreuer:**

Dr. Michael Lehn

2018

Fassung 29. Mai 2018

© 2018 Florian Krötz

Satz: PDF- $\text{\LaTeX}$  2 <sub>$\varepsilon$</sub>

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Cache . . . . .	1
1.2	Intel MKL . . . . .	1
1.2.1	Anwendung der QR-Zerlegung . . . . .	1
<b>2</b>	<b>BLAS</b>	<b>2</b>
2.1	Datenstruktur für Matrizen . . . . .	2
2.2	Einige BLAS-Routinen . . . . .	3
2.2.1	Matrix-Matrix Produkt (gemv) . . . . .	3
2.2.2	Matrix-Vector Produkt (gemv) . . . . .	4
2.2.3	Rank1 update (ger) . . . . .	4
2.2.4	Matrix-Matrix Produkt (trmm) . . . . .	4
2.2.5	Matrix-Vector Produkt (trmv) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>QR-Zerlegung</b>	<b>6</b>
3.1	Definition . . . . .	6
3.1.1	Beispiel . . . . .	6
3.2	Householder-Transformation . . . . .	7
3.2.1	Householder Vector . . . . .	8
3.2.2	Householder-Transformation anwenden . . . . .	10
3.3	Geblockte QR-Zerlegung . . . . .	11
3.3.1	Berechnung der Matrix $T$ . . . . .	12
3.3.2	Anwenden von $I - VTV^T$ larfb . . . . .	13
3.3.3	Iterativer Algorithmus . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Implementierung und Benchmarks</b>	<b>15</b>
4.1	Fehlerschätzer . . . . .	15
4.2	MKL-Wrapper . . . . .	16
4.3	Benchmarks . . . . .	16
<b>A</b>	<b>Quelltexte</b>	<b>17</b>

<b>B Block Reflector</b>	<b>18</b>
B.0.1 Orthogonal . . . . .	22
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>23</b>

# 1 Einleitung

Wozu dient die QR-Zerlegung?

Warum muss die QR-Zerlegung schnell sein?

## 1.1 Cache

## 1.2 Intel MKL

Kapitel über die Wichtigkeit der Intel MKL.

### 1.2.1 Anwendung der QR-Zerlegung

- LGS lösen
- Ausgleichsprobleme lösen
- QR-Verfahren Eigenwerte berechnen.

## 2 BLAS

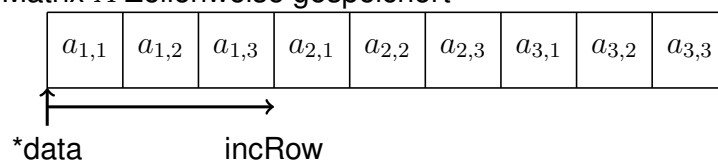
Die Abkürzung BLAS steht für Basic Linear Algebra Subprograms.

### 2.1 Datenstruktur für Matrizen

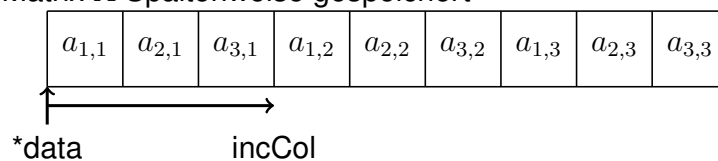
Vollbesetzte Matrizen werden bei BLAS entweder zeilen- oder spaltenweise abgespeichert. Das bedeutet, dass entweder die Zeilen- oder die Spalten der Matrix hintereinander im Speicher stehen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrix  $A$  Zeilenweise gespeichert



Matrix  $A$  Spaltenweise gespeichert



Eine Datenstruktur benötigt folgende Elemente:

- einen Zeiger auf eine Speicherfläche
- Informationen ob die Matrix zeilen- oder spaltenweise gespeichert ist

- die Dimension der Matrix.

Eine derartige Datenstruktur könnte in C so aussehen.

```
1 struct Matrix {  
2     double * data;  
3     std::ptrdiff_t incRow, incCol;  
4     std::size_t numRows, numCols;  
5 }
```

Für Intel MKL Routinen müssen die Matrizen zeilenweise gespeichert sein.

## 2.2 Einige BLAS-Routinen

Im Folgenden werden einige BLAS-Routinen beschrieben, die bei der QR-Zerlegung benutzt werden. BLAS-Routinen werden meist nach folgendem Schema benannt. Der erste Buchstabe im Namen gibt an für welchen Datentype die Funktion implementiert wurde. Der Rest beschreibt die Funktion der Funktion.

Beispiel: „dgemm“, das d zeigt an die Funktion ist für Doubles und „gemm“ steht für „general Matrix Matrix“, die Funktion berechnet also das Matrix-Matrix Produkt für Matrizen deren Einträge Doubles sind.

### 2.2.1 Matrix-Matrix Produkt (gemm)

Die „gemm“ Funktion berechnet das Matrix-Matrix Produkt. Der Funktion werden die Matrizen  $A$ ,  $B$  und  $C$  und die Skalare  $\alpha$  und  $\beta$  übergeben. Außerdem werden 2 Flags übergeben ob die Matrizen  $A$  und  $B$  transponiert werden sollen.

Die Funktion berechnet

$$C \leftarrow \beta C + \alpha AB \quad (2.1)$$

Falls  $\beta = 0$  wird die Matrix  $C$  zuerst mit Nullen initialisiert. Falls  $C$  Einträge hat die NaN (Not a Number) sind, werden diese somit mit 0 überschrieben.

Blas tecnica forum netlib

### 2.2.2 Matrix-Vector Produkt (gemv)

Die Funktion „gemv“ berechnet das Matrix-Vector Produkt. Der Funktion wird die Matrix  $A$  die Vektoren  $x$  und  $y$  und die Skalare  $\alpha$  und  $\beta$  übergeben. Außerdem wird ein Flag übergeben das anzeigt ob die Matrix transponiert werden soll.

Die Funktion berechnet

$$y \leftarrow \beta y + \alpha Ax \quad (2.2)$$

Falls  $\beta = 0$  wird der Vektor  $y$  zuerst mit Nullen initialisiert. Falls  $y$  Einträge hat die NaN (Not a Number) sind, werden diese somit mit 0 überschrieben.

### 2.2.3 Rank1 update (ger)

Die Funktion „ger“ berechnet ein dyadische Produkt aus den Vektoren  $x$  und  $y$ , skaliert die daraus resultierende Matrix mit  $\alpha$  und addiert das Ergebnis auf  $A$ .// Der Funktion wird die Matrix  $A$  die Vektoren  $x$  und  $y$  und das Skalar  $\alpha$  übergeben.

Die Funktion berechnet

$$A \leftarrow A + \alpha xy^T \quad (2.3)$$

### 2.2.4 Matrix-Matrix Produkt (trmm)

Die Funktion „trmm“ berechnet das Matrix-Matrix Produkt einer Dreiecksmatrix mit einer voll besetzten Matrix. Der Funktion wird die Dreiecksmatrix  $A$ , die Matrix  $B$  und das Skalar  $\alpha$  übergeben. Außerdem werden Flags mit übergeben die anzeigen ob  $A$  eine obere oder unter Dreiecksmatrix ist, ob  $A$  eine strikte oder unipotente Dreiecksmatrix ist, ob  $A$  von links oder rechts auf  $B$  multipliziert werden soll und ob  $A$  transponiert werden soll.

Die Funktion berechnet

$$B \leftarrow \alpha \cdot op(A) \cdot B \quad \text{or} \quad B \leftarrow \alpha \cdot B \cdot op(A) \quad (2.4)$$



### 2.2.5 Matrix-Vector Produkt (trmv)

Die Funktion berechnet das Matrix-Vector Produkt für Dreiecksmatrizen. Die Funktion berechnet

$$x \leftarrow \alpha Ax \tag{2.5}$$

## 3 QR-Zerlegung

### 3.1 Definition

Eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$  besitzt eine eindeutige QR-Zerlegung.

$$A = QR \quad (3.1)$$

mit einer orthogonalen Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und einer oberen Dreiecksmatrix  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  [2]

Eine QR Zerlegung kann mit einer Householder-Transformation berechnet werden.

#### 3.1.1 Beispiel

Lösung eines Minimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \quad (3.2)$$

mit Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $\text{rang}(A) = n < m$  für die eine QR Zerlegung existiert.  $R$  besitzt die Gestalt

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ \hline & & * \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{R}$  stellt eine obere Dreiecksmatrix dar. Damit kann man das Minimierungs Problem wie folgt modifizieren mit  $A = QR$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^T(Ax - b)\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Rx - Q^T b\|^2 \quad (3.3)$$

Also löst

$$Rx = Q^T b \quad (3.4)$$

das Minimierungsproblem (3.2). Da  $R$  eine Dreiecksmatrix ist, lässt sich (3.4) leicht mit Rückwärtseinsetzen lösen.

## 3.2 Householder-Transformation

Sei  $v \in \mathbb{R}^n$  ein Vektor dann wird die  $n \times n$  Matrix

$$H = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v} \quad (3.5)$$

als Householder-Transformation und der Vektor  $v$  als Householder-Vektor bezeichnet. Eine Householder-Transformation  $H = I - 2 \frac{vv^T}{v^T v}$  ist orthogonal und symmetrisch. [2]

Die Householder-Transformation spiegelt den Vektor  $x$  auf die Achse  $x_1$ . Dazu multipliziert man  $H$  von links auf  $x$

$$Hx = \alpha e_1 \quad (3.6)$$

mit dem Skalar  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $e_1$  als ersten kanonischen Einheitsvektor. Der Householder-Vektor steht senkrecht auf der Ebene an welcher  $x$  gespiegelt wird.

Die Abbildung 3.1 veranschaulicht die Spiegelung des Vektors  $x$  an der gestrichelt eingezeichneten Ebene auf die Achse  $x_1$ . [Abbildung 3.1]

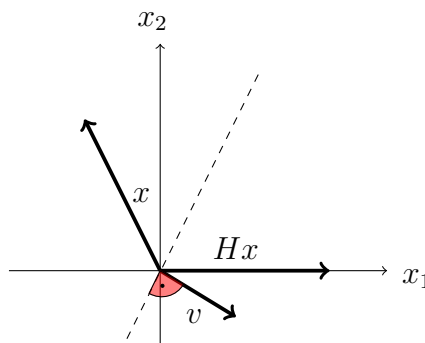


Abbildung 3.1: Beispiel Householder-Transformation mit  $x = (-1, 2)^T$

Eine Householder-Transformation kann die eine Matrix  $A$  wie folgt transformieren.

$$H_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}, \quad H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

So erhält man folgende Faktorisierung

$$R = H_{n-1} H_{n-2} \cdot \dots \cdot H_1 A \Leftrightarrow A = (H_1 \cdot \dots \cdot H_n) R \Rightarrow Q = H_1 \cdot \dots \cdot H_n$$

$Q$  ist also das Produkt aller Householder-Transformationen.

### 3.2.1 Householder Vector

Damit (3.6) gilt, muss der Vektor folgendermaßen berechnet werden.

Mit  $Hx = x - 2 \frac{vv^T}{v^T v} x = x - \lambda v \stackrel{!}{=} \alpha e_1$  folgt  $v \in \text{span}\{x - \alpha e_1\}$ . [2]

Die Definition des Vektors  $v = t(x - \alpha e_1)$  wird in  $Hx = \alpha e_1$  eingesetzt

$$\begin{aligned} Hx &= x - \frac{2}{v^T v} v (v^T x) = x - 2 \frac{v^T x}{v^T v} v \\ &= x - 2 \frac{t(x - \alpha e_1)^T x}{t(x - \alpha e_1)^T t(x - \alpha e_1)} t(x - \alpha e_1) = x - 2 \frac{(x - \alpha e_1)^T x}{(x - \alpha e_1)^T (x - \alpha e_1)} (x - \alpha e_1) \\ &= x - \frac{(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2} (x - \alpha e_1) = \underbrace{\left(1 - \frac{2(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2}\right)}_{\stackrel{!}{=} 0} x + \alpha e_1 \underbrace{\frac{2(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2}}_{\stackrel{!}{=} 1} \stackrel{!}{=} \alpha e_1 \end{aligned}$$

Damit das Letzte = gilt muss

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|^2} \\ \Leftrightarrow (x - \alpha e_1)^T (x - \alpha e_1) &= 2x^T x - 2\alpha x_1 \\ \Leftrightarrow x^T x - 2\alpha x_1 + \alpha^2 &= 2x^T x - 2\alpha x_1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \pm \sqrt{x^T x} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von  $\alpha = \pm \sqrt{x^T x}$  kann man frei wählen, um  $v = x - \alpha e_1$  zu berechnen.

### 3 QR-Zerlegung

---

Wählt man das Vorzeichen positiv kann Auslöschung auftreten, falls  $x$  annähernd ein positives Vielfaches von  $e_1$  ist.

LAPACK [4] vermeidet die Auslöschung indem das Vorzeichen entgegengesetzt gewählt wird. Das bedeutet  $x$  wird immer auf die gegenüberliegende Seite gespiegelt.

Im Skript von Numerik 1 [2] wird das Vorzeichen immer positiv gewählt

$\alpha = |\sqrt{x^T x}| = \|x\|_2$ . Eine mögliche Auslöschung im Fall  $x_1 > 0$  wird hier durch die folgende Umformung vermieden.

$$v_1 = x_1 - \|x\|_2 = \frac{x_1^2 - \|x\|_2^2}{x_1 + \|x\|_2} = \frac{-(x_2^2 + \dots + x_n^2)}{x_1 + \|x\|_2}$$

Um den Vektor  $v$  später auf der frei werdenden Diagonalen von  $A$  speichern zu können wird er auf  $v_1 = 1$  normiert. Dies geschieht mit

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{x_1 - \alpha}$$

Mit der Normierung kann man den Faktor  $\tau = \frac{2}{v^T v}$  berechnen.

$$\tau = \frac{2}{v^T v} = \frac{2(x_1 - \alpha)^2}{(x - \alpha e_1)^T (x - \alpha e_1)} = \frac{2(x_1 - \alpha)^2}{\|x\|_2^2 - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2} = \frac{2(x_1 - \alpha)^2}{2\alpha(\alpha - x_1)} = \frac{x_1 - \alpha}{\alpha}$$

Mit dem Faktor  $\tau = \frac{2}{v^T v}$  kann man die Householder-Transformation schreiben als

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} = I - \tau vv^T$$

Das macht man, weil die Berechnung des Skalarprodukts relativ aufwändig ist. Da man das Skalarprodukt zur Berechnung des Householder-Vektors benötigt, kann man damit direkt den Faktor  $\tau$  berechnen.

---

**Algorithmus 1** Housholder-Vector(LAPACK DLARFG)

---

Input:  $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha = -1 * \text{sign}(x_1) \|x\|_2$$

$$\tau = \frac{x_1 - \alpha}{\alpha}$$

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{x_1 - \alpha}$$

Output: Householder-Vektor  $v$ ,  $\tau$

---

### 3.2.2 Householder-Transformation anwenden

Ein aufwändiges Matrix-Matrix-Produkt kann bei der Anwendung der Householder-Matrix  $H = I - \tau vv^T$  auf die Matrix  $A$  umgangen werden, indem man geschickt klammert.

$$HA = (I - \tau vv^T)A = A - \tau(vv^T)A = A - \tau v * (v^T * A)$$

Statt eines Matrix-Matrix-Produkts muss man nur ein Matrix-Vektor-Produkt und ein dyadisches Produkt berechnen. Das Matrix-Vektor-Produkt und das dyadische Produkt haben nur einen Aufwand von  $O(n^2)$ .

Das führt zum Algorithmus 2.

---

#### Algorithmus 2 Ungeblockte Householder-Transformation

---

```

Input:  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 
for  $i = 0 : n$  do
     $(v_i, \tau_i) \leftarrow \text{housevector}(A(i : m, i))$ 
     $w \leftarrow v^T * A(i : m, i : n)$  (dgemv)
     $A(i : m, i : n) \leftarrow \tau * v * w + A$  (dger)
    if  $i > m$  then
         $A(i + 1 : m, i) \leftarrow v(2 : m - i + 1)$ 
    end if
end for
Output:  $A$  QR zerlegt, Vektor  $\tau \in \mathbb{R}^n$ 

```

---

Matrizen sind 0 indiziert notiert

Der Algorithmus 2 überschreibt die Matrix  $A$  mit  $R$ . Da  $R$  eine obere Dreiecksmatrix ist, werden unter der Diagonale die Householder-Vektoren gespeichert. Da die Householder-Vektoren auf  $v_1 = 1$  normiert wurden, muss das erste Element des Vektors nicht mit gespeichert werden. Die Householder-Vektoren können dadurch unterhalb der Diagonalen gespeichert werden. Die Matrix  $A$  hat also die Form

$$A = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ v_1 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ v_1 & v_2 & r_{3,3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

### 3.3 Geblockte QR-Zerlegung

Ein geblockter Algorithmus ist sinnvoll, um bei großen Matrizen den Cache optimal zu nutzen.

Im folgenden wird ein geblockter Algorithmus beschrieben wie er auf von LAPACK verwendet wird. Die entsprechende Funktion bei LAPACK heißt „DGEQRF“ [3].

Die Idee beim geblockten Algorithmus ist die Matrix in Blöcke aufzuteilen, die geblockte QR-Zerlegung für die Blöcke zu berechnen und die dabei verwendeten Householder-Transformationen auf den Rest der Matrix anzuwenden.

Betrachte dazu die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  geblockt, mit einer geeigneten Blockgröße  $bs$ .

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A_{0,0} & A_{0,bs} \\ \hline A_{bs,0} & A_{bs,bs} \end{array} \right) \quad (3.7)$$

Die Abbildung 3.2 zeigt schematisch die Partitionierung von A.

Die Blockgröße  $bs$  wird so gewählt das die Geschwindigkeit der ungeblockten QR-Zerlegung für den Block  $\begin{pmatrix} A_{0,0} \\ A_{bs,0} \end{pmatrix}$  optimal ist.

Für diesen Block wird nun die QR-Zerlegung mit dem ungeblockten Algorithmus (Algorithmus 2) berechnet.

$$\begin{pmatrix} A_{0,0} \\ A_{bs,0} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} Q_{0,0} \backslash R_{0,0} \\ Q_{bs,0} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Im Block  $A_{0,0}$  steht nun auf und über der Diagonalen  $R_{0,0}$ . Unterhalb der Diagonalen und im Block  $A_{bs,0}$  stehen die Householder-Vektoren.

Nun muss man die bei der ungeblockten QR-Zerlegung verwendeten Householder-Transformationen auf die Restliche Matrix  $\begin{pmatrix} A_{0,bs} \\ A_{bs,bs} \end{pmatrix}$  anwenden.

Man kann das Produkt mehrerer Householder-Transformationen schreiben als

$$H_1 H_2 \dots H_k = I - VT V^T \quad \text{mit} \quad H_i = I - \tau_i v_i v_i^T$$

[1]

Die Anwendung der Matrix  $I - V * T * V^T$  auf  $\begin{pmatrix} A_{0,bs} \\ A_{bs,bs} \end{pmatrix}$  erfolgt in 2 Schritten.

Zuerst wird von der Funktion „larft“ die Matrix  $T$  berechnet. Dann wird  $I - V * T * V^T$  von der Funktion „larfb“ auf  $\begin{pmatrix} A_{0,bs} \\ A_{bs,bs} \end{pmatrix}$  angewendet.

$$\begin{pmatrix} A_{0,bs} \\ A_{bs,bs} \end{pmatrix} \leftarrow H^T \begin{pmatrix} A_{0,bs} \\ A_{bs,bs} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

Der Block  $A_{bs,bs}$  wird erneut aufgeteilt. Das ist in Abbildung 3.2 gestrichelt dargestellt.

Fahre solange fort bis  $A_{bs,bs}$  gleich der Blockgröße ist.

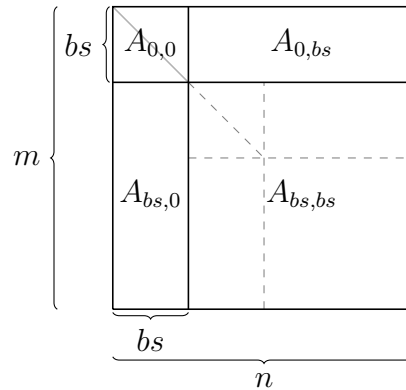


Abbildung 3.2: Partitionierung von A

#### 3.3.1 Berechnung der Matrix $T$

Die Funktion „larft“ berechnet die Matrix  $T$ .

Sie bekommt eine Dreiecksmatrix  $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$  einen Vektor  $\tau \in \mathbb{R}^k$  und eine Matrix  $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$  übergeben.

In der Dreiecksmatrix  $V$  stehen die Householder-Vektoren, im Vektor  $\tau$  die zu den Householder-Vektoren gehörende  $\tau_i$ .

Die Funktion berechnet eine obere Dreiecksmatrix  $T$  so dass

$$H_1 H_2 \dots H_k = I - V T V^T \quad \text{mit} \quad H_i = I - \tau_i v_i v_i^T$$

Warum und wie das funktioniert wird hier beschreiben [1].



### 3.3.2 Anwenden von $I - VTV^T$ larfb

Die Funktion „larfb“ wendet die Matrix  $I - VTV^T$  auf eine Matrix  $C$  an.

Sie bekommt eine Dreiecksmatrix  $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$ , eine Dreiecksmatrix  $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$  und eine Matrix  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  übergeben.

In der Dreiecksmatrix  $V$  stehen die Householder-Vektoren, im Vektor  $\tau$  die zu den Householder-Vektoren gehörende  $\tau_i$ . Die Matrix  $C$  wird upgedatet indem die Block Reflector Matrix  $H = I - VTV^T$  von rechts auf die Matrix  $C$  angewendet wird.

Ein weiterer Übergabeparameter gibt an ob die Block Reflector Matrix transponiert werden soll. Die Funktion berechnet also

$$C \leftarrow HC = C - VTV^T C \quad \text{oder} \quad C \leftarrow H^T C = C - VT^T V^T C$$

Die Abbildung 3.3 zeigt die Partitionierung der Matrix A für die Funktion larfb.

Falls  $m > k$  werden die Matrizen  $V$  und  $C$  aufgeteilt in  $V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$  und  $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ .

Dabei wird  $V$  genau so gewählt, dass  $V_1 \in \mathbb{R}^{k \times k}$  der Dreiecksteil der Matrix und quadratisch ist und  $V_2 \in \mathbb{R}^{m-k \times k}$  der Rest der Matrix. Die Matrix  $C$  wird in  $C_1 \in \mathbb{R}^{k \times n}$  und  $C_2 \in \mathbb{R}^{m-k \times n}$  aufgeteilt.

Die Aufteilung ist notwendig da die BLAS-Funktion trmm (matrix-matrix product where one input matrix is triangular) nur für Quadratische Dreiecksmatrizen implementiert ist.

Im Fall  $m = k$  ist die Aufteilung nicht notwendig da  $V$  quadratisch ist.

$$\begin{aligned} & (C_1^T * V_1 * T * V_1^T)^T \\ & V_1 * T^T * V_1^T * C_1 \end{aligned}$$

Dies führt zu den

**Algorithmus 3** Block reflector anwenden

```

 $W \leftarrow C_1^T$  (copy)
 $W \leftarrow W * V_1$  (trmm)
if  $m > k$  then
     $W \leftarrow W + C_2^T * V_2$  (gemm)
end if
 $W \leftarrow W * T^T$  or  $W * T$  (trmm)
if  $m > k$  then
     $C_2 \leftarrow C_2 - V_2 * W^T$  (gemm)
end if
 $W \leftarrow W * V_1^T$  (trmm)
 $C_1 \leftarrow C_1 - W^T$ 
    
```

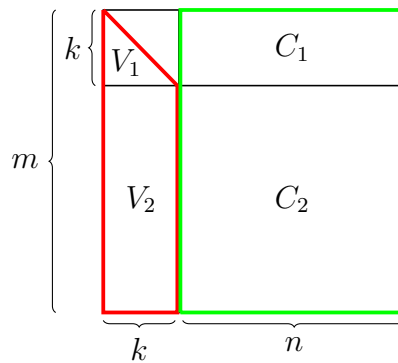


Abbildung 3.3: Partitionierung vom A für larfb

### 3.3.3 Iterativer Algorithmus

**Algorithmus 4** Iterativer Algorithmus

```

for  $i = 0 : n$  do
     $QR = A$ ;
    if  $i + ib > n$  then
        Calc T:  $H = I - VTV^T$ 
        Apply H:  $A = H^T A$ 
    end if
end for
    
```

## 4 Implementierung und Benchmarks

Kurze Beschreibung der HPC-Bibliothek

Die verwendete Bibliothek wurde in der Vorlesung HPC1 entwickelt.

objektorientiert

eventuell Beispiel

### 4.1 Fehlerschätzer

Es wurde der Fehlerschätzer von ATLAS verwendet.

$$err = \frac{\|A - QR\|_i}{\|A\|_i \cdot \min(m, n) \cdot \varepsilon} \quad (4.1)$$

mit  $\|\cdot\|_i$  passender Norm und  $\varepsilon$  die kleinste darstellbare Zahl.

Die QR-Zerlegung ist gut genug falls  $err < 1$ .

Als Norm wurde die Unendlichnorm  $\|\cdot\|_\infty$  gewählt. Die Unendlich-Norm entspricht der Zeilensummennorm, die für eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  gegeben ist durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$\varepsilon$  ist auf dem Test-System  $2.220446 \cdot 10^{-16}$

## 4.2 MKL-Wrapper

## 4.3 Benchmarks

peak performance einzeichnen

# A Quelltexte

In diesem Anhang sind einige wichtige Quelltexte aufgeführt.

```
1 #include<stdio.h>
2 int main(int argc, char ** argv) {
3     printf("Hallo HPC \n");
4     return 0;
5 }
```

## B Block Reflector

Das Produkt aus Householder-Transformationen  $H_1 \cdot \dots \cdot H_n$  lässt sich schreiben als

$$H_1 \cdot \dots \cdot H_n = I - VTV^T$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix  $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die die Housholder-Vektoren enthält und eine oberen Dreiecksmatrix  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  [1]

Beweis:

n=2 Vorwärts

$$\begin{aligned} H_1 H_2 x &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T)(I - \tau_2 v_2 v_2^T)x \\ &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T)x \\ &= x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x + \tau_1 \tau_2 v_1 (v_1^T v_2) v_2^T x \\ &= x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x + \tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2) v_1 v_2^T x \end{aligned}$$

Rückwärts

$$\begin{aligned} H_{1,2} x &= (I - VTV^T)x = x - VTV^T x \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} x \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T x \\ v_2^T x \end{pmatrix} \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} av_1^T x + bv_2^T x \\ cv_2^T x \end{pmatrix} \\ &= x - v_1(av_1^T x + bv_2^T x) - v_2(cv_2^T x) \\ &= x - av_1 v_1^T x - bv_1 v_2^T x - cv_2 v_2^T x \end{aligned}$$

### Koeffizienten Vergleich

$$a = \tau_1$$

$$b = -\tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2)$$

$$c = \tau_2$$

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2) \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}$$

n=3

Vorwärts

$$\begin{aligned}
 H_1 H_2 H_3 x &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T)(I - \tau_2 v_2 v_2^T)(I - \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
 &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T)(I - \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
 &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T - \tau_3 v_3 v_3^T \\
 &\quad + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_3 v_3 v_3^T + \tau_2 v_2 v_2^T \tau_3 v_3 v_3^T \\
 &\quad - \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
 &= x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x - \tau_3 v_3 v_3^T x \\
 &\quad + \tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2) v_1 v_2^T x + \tau_1 \tau_3 (v_1^T v_3) v_1 v_3^T x + \tau_2 \tau_3 (v_2^T v_3) v_2 v_3^T x \\
 &\quad - \tau_1 \tau_2 \tau_3 (v_1^T v_2 v_2^T v_3) v_1 v_3^T x
 \end{aligned}$$

Rückwärts

$$\begin{aligned}
 H_{1,2,3} x &= (I - V T V^T) x = x - V T V^T x \\
 &= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} x \\
 &= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T x \\ v_2^T x \\ v_3^T x \end{pmatrix} \\
 &= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a v_1^T x + b v_2^T x + c v_3^T x \\ d v_2^T x + e v_3^T x \\ f v_3^T x \end{pmatrix} \\
 &= x - v_1 (a v_1^T x + b v_2^T x + c v_3^T x) \\
 &\quad - v_2 (d v_2^T x + e v_3^T x) \\
 &\quad - v_3 (f v_3^T x) \\
 &= x - a v_1 v_1^T x - b v_1 v_2^T x - c v_1 v_3^T x \\
 &\quad - d v_2 v_2^T x - e v_2 v_3^T x \\
 &\quad - f v_3 v_3^T x
 \end{aligned}$$



### Koeffizienten Vergleich

$$a = \tau_1$$

$$b = -\tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2)$$

$$c = -\tau_1 \tau_2 \tau_3 (v_1^T v_2 v_2^T v_3) + \tau_1 \tau_3 (v_1^T v_3)$$

$$d = \tau_2$$

$$e = -\tau_2 \tau_3 (v_2^T v_3)$$

$$f = \tau_3$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2) & -\tau_1 \tau_2 \tau_3 (v_1^T v_2 v_2^T v_3) + \tau_1 \tau_3 (v_1^T v_3) \\ 0 & \tau_2 & -\tau_2 \tau_3 (v_2^T v_3) \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}$$

Mit Induktion kann man zeigen... siehe paper Im Paper wird gezeigt wie man das verallgemeinern kann. Und weiter?

## B.0.1 Orthogonal

Eine quadratische Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist orthogonal, dann gilt

$$QQ^T = Q^T Q = I$$

Produkt orthogonaler Matrizen ist orthogonal. Sei  $A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T$$

Die Householder-Transformation  $H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$  ist symmetrisch und orthogonal das heißt  $H^{-1} = H^T$

Da  $vv^T$  symmetrisch ist  $((vv^T)^T = vv^T)$ , folgt

$$H^T = \left( I - 2\frac{vv^T}{v^T v} \right)^T = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} = H$$

Orthogonalität

$$HH^T = \left( I - 2\frac{vv^T}{v^T v} \right) \left( I - 2\frac{vv^T}{v^T v} \right) = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} - 2\frac{vv^T}{v^T v} + \underbrace{4\frac{vv^T vv^T}{(v^T v)^2}}_{=4\frac{(v^T v)vv^T}{(v^T v)^2} = 4\frac{vv^T}{v^T v}} = I$$

$\Rightarrow H = I - VTV^T$  und  $Q$  sind orthogonal

# Literaturverzeichnis

- [1] JOFFRAIN, Thierry ; LOW, Tze M. ; QUINTANA-ORTÍ, Enrique S. ; GEIJN, Robert van d. ; ZEE, Field G. V.: Accumulating Householder Transformations, Revisited. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 32 (2006), Juni, Nr. 2, 169–179. <http://dx.doi.org/10.1145/1141885.1141886>. – DOI 10.1145/1141885.1141886. – ISSN 0098–3500
- [2] STEFAN A. FUNKEN, Karsten U.: *Einführung in die Numerische Lineare Algebra*. Ulm, Germany, 2016
- [3] TENNESSEE, Univ. of California B. o. ; LTD., NAG: *LAPACK blocked QR*. <http://www.netlib.org/lapack/explore-3.1.1-html/dgeqrf.f.html>, 2006. – [Online; zugegriffen 31-01-2018]
- [4] TENNESSEE, Univ. of California B. o. ; LTD., NAG: *LAPACK unblocked QR*. <http://www.netlib.org/lapack/explore-3.1.1-html/dgeqr2.f.html>, 2006. – [Online; zugegriffen 31-01-2018]

Name: Florian Krötz

Matrikelnummer: 884948

### **Erklärung**

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ulm, den .....

Florian Krötz