ulm university universität
uulm

Fakultät für Mathematik und Wirtschafts-wissenschaften

Institut für Numerische Mathematik

Cache-optimierte QR-Zerlegung

Bachelorarbeit an der Universität Ulm

Vorgelegt von:
Florian Krötz
florian.kroetz@uni-ulm.de

Gutachter:
Dr. Michael Lehn
Dr. Andreas Borchert

Betreuer:
Dr. Michael Lehn

2018

Fassung 26. Juni 2018

Satz: PDF-LaTeX 2ε

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Als QR-Zerlegung versteht man die Zerlegung der Matrix A in eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R.

$$A = Q \cdot R$$

In dieser Arbeit wird nur auf die Berechnung der QR-Zerlegung mittels Householder-Transfomation eingegangen.

Neben der Householder-Transfomation kann man die QR-Zerlegung auch noch mittels Givens-Rotationen oder mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens berechnet werden.

- Wozu dient die QR-Zerlegung?
- Besser beim Lösen von Gleichungssystemen mit schlechter Kondition.
- Lösen von l inearen Ausgleichsproblemen
- QR-Verfahren (Eigenwerte)
- Warum muss die QR-Zerlegung schnell sein? zb Kern operation beim QR verfahren.
- Warum Cache-Optimiert? Um Rechner capazität optiaml aus zu nuzen.

1.1 Intel MKL

Die Intel MKL ist ein

MKL ist eine Abkürzung für Math Kernel Library

Kapitel über die Wichtigkeit der Intel MKL.

2 BLAS

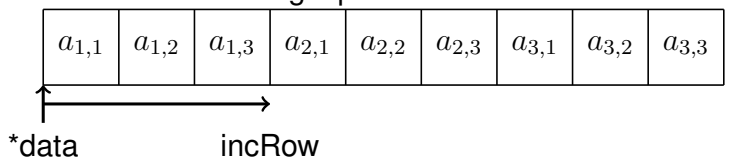
Die Abkürzung BLAS steht für Basic Linear Algebra Subprograms. BLAS-Bibliotheken enthalten elementare Operationen der linearen Algebra.

2.1 Datenstruktur für Matrizen

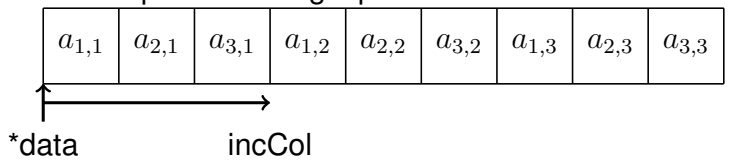
Vollbesetzte Matrizen werden bei BLAS entweder zeilen- oder spaltenweise abgespeichert. Das bedeutet, dass entweder die Zeilen- oder die Spalten der Matrix hintereinander im Speicher stehen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Matrix A Zeilenweise gespeichert



Matrix A Spaltenweise gespeichert



Eine Datenstruktur benötigt folgende Elemente:

- einen Zeiger auf eine Speicherfläche
- Informationen ob die Matrix zeilen- oder spaltenweise gespeichert ist

- die Dimension der Matrix.

Eine derartige Datenstruktur könnte in C/C++ so aussehen.

```
1 struct Matrix {
2   double * data;
3   std::ptrdiff_t incRow, incCol;
4   std::size_t numRows, numCols;
5 }
```

Diese Datenstruktur ist für Matrixeinträge vom Type double.

Die Variablen für die Speicherverwaltung(Zeile 3) sind vom Typ ptrdiff_t und die Variablen für die Dimensions Informationen sind Vom Typ size_t.

ptrdiff_t und size_t sind Datentypen für Ganzzahlen. Der Unterschied zwischen den Datentypen ist size_t kann nur Werte Darstellen die größer gleich 0 sind, ptrdiff_t dann auch negative Werte Darstellen.

Die das incRow und incCol aus negative Werte haben könne ist Sinnvoll, wenn man zugriff auf Einen Matrix Block haben will in anderer Reihenfolge.

Für Intel MKL Routinen müssen die Matrizen zeilenweise gespeichert sein. Das bedeutet incCol ist gleich 1.

Beispiel

Angenommen es wurde genügend Speicher für eine Matrix A allociert und die Werte 1 bis 25 liegen hintereinander im Speicher. Dann lässt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

durch die folgende Datenstruktur repräsentieren.

```
1 struct Matrix A;
2 A.data = /*pointer to data*/;
3 A.numRows = 5;
4 A.numCols = 5;
```

```
5 A.incRow = A.numCols;
6 A.incCol = 1;
```

Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 25 & 20 & 15 & 10 \\ 24 & 19 & 14 & 9 \\ 23 & 18 & 13 & 8 \end{pmatrix}$$

lässt sich mit folgender Datenstruktur repräsentieren.

```
1 struct Matrix B;
2 B.data = A.data[4*A.incRow + 4*A.incCol];
3 B.numRows = 3;
4 B.numCols = 4;
5 B.incRow = -A.incCol;
6 B.incCol = -A.incRow;
```

Diese Datenstruktur nutzt für die Daten den selben Speicherbereich wie die Matrix A.

Der data-Pointer wurde auf das letzte Element der Matrix A gesetzt.

Blablabla incRow Trans blabla

2.2 Einige BLAS-Routinen

Im Folgenden werden einige BLAS-Routinen beschrieben, die bei der QR-Zerlegung benutzt werden. BLAS-Routinen werden nach folgendem Schema benannt: Der erste Buchstabe im Namen gibt an für welchen Datentype die Funktion implementiert wurde. Der Rest beschreibt die Funktion der Funktion.
Beispiel „dgemm“: Das „d“ zeigt, dass die Funktion ist für Doubles gilt und „gemm“ steht für „generel Matrix Matrix“. Die Funktion berechnet also das Matrix-Matrix Produkt für Matrizen, deren Einträge Doubles sind.

2.2.1 Matrix-Matrix Produkt (gemm)

Die Funktion „gemm“ berechnet das Matrix-Matrix Produkt. Der Funktion werden die Matrizen A, B und C und die Skalare α und β übergeben. Außerdem werden 2 Flags übergeben ob die Matrizen A und B transponiert werden sollen.
Die Funktion berechnet

$$C \leftarrow \beta C + \alpha AB \tag{2.1}$$

Falls $\beta = 0$ wird die Matrix C zuerst mit Nullen initialisiert. Falls C Einträge hat die NaN (Not a Number) sind, werden diese somit mit 0 überschrieben.

[8] Blas tecnicla forum netlib

2.2.2 Matrix-Vektor Produkt (gemv)

Die Funktion „gemv“ berechnet das Matrix-Vektor Produkt. Der Funktion werden die Matrix A, die Vektoren x und y, und die Skalare α und β übergeben. Außerdem wird ein Flag übergeben, das anzeigt ob die Matrix A transponiert werden soll.
Die Funktion berechnet

$$y \leftarrow \beta y + \alpha Ax \tag{2.2}$$

Falls $\beta = 0$ wird der Vektor y zuerst mit Nullen initialisiert. Falls y Einträge hat, die NaN (Not a Number) sind, werden diese mit 0 überschrieben.

2.2.3 Rank1 update (ger)

Die Funktion „ger“ berechnet ein dyadisches Produkt aus den Vektoren x und y, skaliert die daraus resultierende Matrix mit α und addiert das Ergebnis auf A.
Der Funktion werden die Matrix A, die Vektoren x und y und das Skalar α übergeben.
Die Funktion berechnet

$$A \leftarrow A + \alpha x y^T \tag{2.3}$$

2.2.4 Matrix-Matrix Produkt (trmm)

Die Funktion „trmm“ berechnet das Matrix-Matrix Produkt einer Dreiecksmatrix mit einer voll besetzten Matrix. Der Funktion wird die Dreiecksmatrix A, die Matrix B und das Skalar α übergeben. Außerdem werden Flags mit übergeben, die anzeigen ob A eine obere oder untere Dreiecksmatrix ist, ob A eine strikte oder unipotente Dreiecksmatrix ist, ob A von links oder rechts auf B multipliziert werden soll und ob A transponiert werden soll. Diese Eigenschaften werden unten in $op(\cdot)$ zusammengefasst.
Die Funktion berechnet

$$B \leftarrow \alpha \cdot op(A) \cdot B \qquad \text{oder} \qquad B \leftarrow \alpha \cdot B \cdot op(A) \tag{2.4}$$

2.2.5 Matrix-Vektor Produkt (trmv)

Die Funktion „trmv“ berechnet das Matrix-Vektor Produkt für Dreiecksmatrizen. Die Funktion berechnet

$$x \leftarrow \alpha A x \tag{2.5}$$

Dreiecksmatrizen die von den Funktionen „trmm“ und „trmv“ verarbeitet werden sind quadratische Matrizen von denen nur der obere oder unter Dreiecks teil betrachtet wird. Das heißt die Matrix liegt als Quadratische Matrix im Speicher. Die Funktion beachtet nur die Einträge über oder unter der Diagonalen. Wird dem Algorithmus mit einem Flag angezeigt das es sich um eine eine unipotente Dreiecksmatrix handeln soll, werden die Diagonaleinträge im Speicher nicht beachtet sondern vom Algorithmus als 1 angenommen. [8]

3 QR-Zerlegung

3.1 Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$ besitzt eine eindeutige QR-Zerlegung

$$A = QR \tag{3.1}$$

mit einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und einer oberen Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [4].

Eine QR Zerlegung kann mit einer Householder-Transformation berechnet werden.

3.1.1 Beispiel für eine Anwednung

Lösung eines Minimierungsproblems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 \tag{3.2}$$

mit Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $rang(A) = n < m$ für die eine QR Zerlegung existiert. R besitzt die Gestalt

$$R = \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \\ \hline & 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ \hline 0 \end{pmatrix}$$

$\hat{R}$ stellt eine obere Dreiecksmatrix dar. Damit kann man das Minimierungsproblem wie folgt mit $A = QR$ modifizieren

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Q^T(Ax - b)\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Rx - Q^T b\|^2 \tag{3.3}$$

Eine Lösung des Gleichungssystems

$$\hat{R}x = Q^T b \tag{3.4}$$

ist auch eine Lösung des Minimierungsproblem (3.2). Da R eine Dreiecksmatrix ist, lässt sich (3.4) leicht mit Rückwärtseinsetzen lösen.

3.2 Householder-Transformation

Eine Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} \tag{3.5}$$

wird als Householder-Transformation und der Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ als Householder-Vektor bezeichnet. Eine Householder-Transformation $H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v}$ ist orthogonal und symmetrisch [4].
Die Householder-Transformation spiegelt den Vektor x auf die Achse x_1. Dazu multipliziert man H von links auf x

$$Hx = \alpha e_1 \tag{3.6}$$

mit dem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und e_1 als ersten kanonischen Einheitsvektor. Der Householder-Vektor steht senkrecht auf der Ebene an welcher x gespiegelt wird.
Die Abbildung 3.1 veranschaulicht die Spiegelung des Vektors x an der gestrichelt eingezeichneten Ebene auf die Achse x_1.

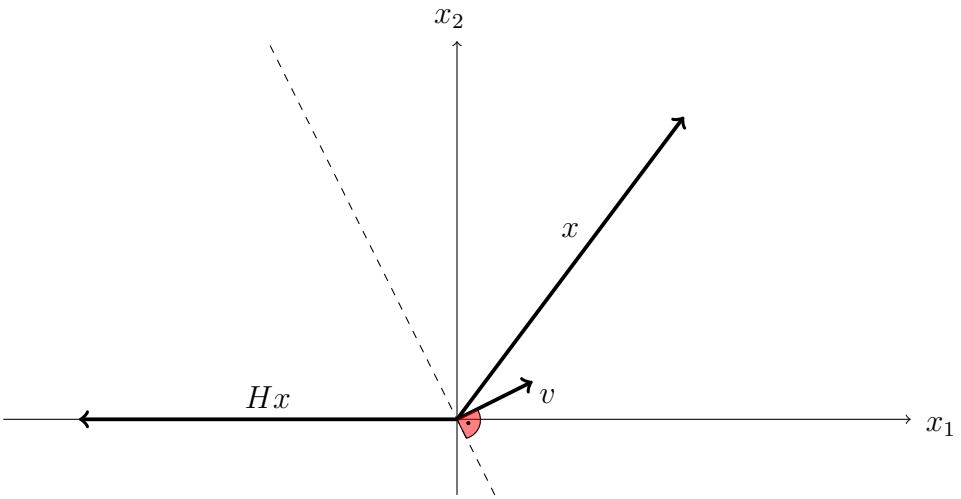


Abbildung 3.1: Beispiel Householder-Transformation mit $x = (3, 4)^T$

Beispiel

Beispiel Rechnung zu Abbildung 3.1. Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ soll auf die x_1 Achse gespiegelt werden.

Zuerst wird der Householder-Vektor v und der dazugehörige Faktor τ, wie in Kapitel 3.2.1, berechnet.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ \alpha &= -1 \cdot \mathsf{sign}(x_1) \cdot \|x\| = -5 \\ \tau &= \frac{\alpha - x_1}{\alpha} = \frac{-5 - 3}{-5} = \frac{8}{5} \\ v &= \frac{x - \alpha e_1}{x_1 - \alpha} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}}{3 - (-5)} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun wird H auf x angewandt, wie in Kapitel 3.2.1 beschrieben.

$$\begin{aligned} Hx = x - \tau v(v^T x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \cdot (5) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Vektor $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ wurde mit dem Householder-Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ auf die x_1 Achse gespiegelt.

$$Hx = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.2.1 Householder Vector

Damit (3.6) gilt, wird der Vektor berechnet, indem man (3.5) in (3.6) einsetzt

$$\begin{aligned} Hx = x - 2\frac{vv^T}{v^T v}x = x - 2\underbrace{\frac{v^T x}{v^T v}}_{\lambda} v = x - \lambda v \stackrel{!}{=} \alpha e_1 \\ \implies v \in \text{span}\{x - \alpha e_1\} \end{aligned}$$

Dadurch erhält man, dass v in dem Span $x - \alpha e_1$ liegt.[4]

Setzt man $v = t(x - \alpha e_1)$ in $Hx = \alpha e_1$(3.6) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} Hx =& x - \frac{2}{v^T v} v(v^T x) = x - 2\frac{v^T x}{v^T v} v \\ =& x - 2\frac{t(x - \alpha e_1)^T x}{t(x - \alpha e_1)^T t(x - \alpha e_1)} t(x - \alpha e_1) = x - 2\frac{(x - \alpha e_1)^T x}{(x - \alpha e_1)^T (x - \alpha e_1)}(x - \alpha e_1) \\ =& x - \frac{(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2}(x - \alpha e_1) = \underbrace{\left(1 - \frac{2(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2}\right)}_{\stackrel{!}{=}0} x + \alpha e_1 \underbrace{\frac{2(x - \alpha e_1)^T x}{\|x - \alpha e_1\|_2^2}}_{\stackrel{!}{=}1} \stackrel{!}{=} \alpha e_1 \end{aligned}$$

Damit das Letzte $=$ gilt muss gelten.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{2(x-\alpha e_1)^T x}{\|x-\alpha e_1\|^2} \\ \Leftrightarrow (x-\alpha e_1)^T(x-\alpha e_1) &= 2x^T x - 2\alpha x_1 \\ \Leftrightarrow x^T x - 2\alpha x_1 + \alpha^2 &= 2x^T x - 2\alpha x_1 \\ \Leftrightarrow \alpha &= \pm\sqrt{x^T x} \end{aligned}$$

Das Vorzeichen von $\alpha = \pm\sqrt{x^T x}$ kann man frei wählen, um $v = x - \alpha e_1$ zu berechnen.

Wählt man das Vorzeichen positiv, kann Auslöschung auftreten, falls x annähernd ein positives Vielfaches von e_1 ist.

LAPACK [7] vermeidet die Auslöschung, indem das Vorzeichen entgegengesetzt gewählt wird. Das bedeutet x wird immer auf die gegenüberliegende Seite gespiegelt.

Im Skript von Numerik 1 [4] wird das Vorzeichen immer positiv gewählt:
$\alpha = |\sqrt{x^T x}| = \|x\|_2$. Eine mögliche Auslöschung im Fall $x_1 > 0$ wird hier durch die folgende Umformung vermieden.

$$v_1 = x_1 - \|x\|_2 = \frac{x_1^2 - \|x\|_2^2}{x_1 + \|x\|_2} = \frac{-(x_2^2 + ... + x_n^2)}{x_1 + \|x\|_2}$$

Um den Vektor v später auf der frei werdenden Diagonalen von A speichern zu können, wird er auf $v_1 = 1$ normiert. Dies geschieht mit

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{x_1 - \alpha} \tag{3.7}$$

Mit der Normierung kann man den Faktor $\tau = \dfrac{2}{v^T v}$ berechnen. Setze dazu (3.7) in die Definition von τ ein.

$$\tau = \frac{2}{v^T v} = \frac{2(x_1-\alpha)^2}{(x-\alpha e_1)^T(x-\alpha e_1)} = \frac{2(x_1-\alpha)^2}{\underbrace{\|x\|_2^2}_{=\alpha^2} - 2\alpha x^T e_1 + \alpha^2} = \frac{2(x_1-\alpha)^2}{2\alpha(\alpha - x_1)} = \frac{\alpha - x_1}{\alpha}$$

Mit dem Faktor $\tau = \frac{2}{v^T v}$ kann man die Householder-Transformation schreiben als

$$H = I - 2\frac{vv^T}{v^T v} = I - \tau v v^T$$

Algorithmus 1 Housholder-Vector(LAPACK DLARFG)

Input: $x \in \mathbb{R}^n$
$\alpha = -1 \cdot \text{sign}(x_1)\|x\|_2$
$\tau = \frac{\alpha - x_1}{\alpha}$
$v = \frac{x - \alpha e_1}{x_1 - \alpha}$
Output: Householder-Vektor v, τ

3.2.2 Householder-Transformation anwenden

Ein aufwändiges Matrix-Matrix-Produkt kann bei der Anwendung einer Housholder-Transformation $H = I - \tau v v^T$ auf die Matrix A umgangen werden, indem man geschickt klammert.

$$HA = (I - \tau v v^T)A = A - \tau(vv^T)A = A - \tau v(v^T A)$$

Statt eines Matrix-Matrix-Produkts muss man nur ein Matrix-Vektor-Produkt und ein dyadisches Produkt berechnen.

3.2.3 QR-Zerlegung mittels Housholder-Transformationen

Um A in eine obere Dreiecksmatrix R zu transformieren, wird eine Folge von Housholder-Transformationen auf A angewendet.

Zuerst wird aus der ersten Spalte der Matrix A ein Householder-Vektor berechnet, dann wird die Householder-Transformationen auf die Matrix angewandt. Diese Housholder-Transformation erzeugt Nullen in der ersten Spalte unterhalb es ersten Eintrags. Damit eine obere Dreiecksmatrix entsteht, wird als nächstes die Matrix A ohne die erste Zeile und Spalte betrachtet. Aus der ersten Spalte der neu betrachteten Matrix wird wieder ein Householder-Vektor berechnet. Dieser Vektor erzeugt

eine Householder-Transformation $\hat{H}$. Um diese Transformation auf A anwenden zu können setzt man:

$$H_1 = \left(\hat{H}_1\right) \quad , \quad H_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_1 & 0 \\ \hline 0 & \hat{H}_2 \end{array}\right) \quad , \quad H_i = \left(\begin{array}{c|c} I_{i-1} & 0 \\ \hline 0 & \hat{H}_i \end{array}\right)$$

I_{i-1} bezeichnet die $i-1$ dimensionale Einheitsmatrix, $\tilde{H}_i$ ist eine Householder-Transformation.

Diese Householder-Transformationen werden auf die Matrix angewandt. Fährt man nach diesem Schema immer weiter fort, entsteht eine obere Dreiecksmatrix.

$$H_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix} \quad , \quad H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

So erhält man die Faktorisierung

$$R = H_{n-1} H_{n-2} \cdot ... \cdot H_1 A \Leftrightarrow A = (H_1 \cdot ... \cdot H_{n-1}) R \Rightarrow Q = H_1 \cdot ... \cdot H_{n-1}$$

Q ist das Produkt aller Householder-Transformationen. Diese Vorgehensweise führt zum Algorithmus 2.

Algorithmus 2 Ungeblockte Housholder-Transformation.
Zur übersichtlicheren Beschreibung des Algorithmus werden die Bezeichnungen A_i und $\hat{a}_i$ eingeführt. A_i zeigt auf einen Matrixblock der am i-ten Diagonalelement beginnt. $\hat{a}_i$ zeigt auf die i-te Spalte unterhalb der Diagonalen. Matrizen sind 0-indiziert notiert.

1: Input: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
2: **for** i = 0,1,2,..., n-1 **do**
3: (v_i, τ_i) $\leftarrow$ householdervector($\hat{a}_i$)
4: $w \leftarrow v^T \dot{A}_i$ (dgemv)
5: $A_i \leftarrow \tau * v * w + A_i$ (dger)
6: **if** i < m **then**
7: $\hat{a}_i \leftarrow v$
8: **end if**
9: **end for**
10: Output: A QR zerlegt, Vektor $\tau \in \mathbb{R}^n$

Der Algorithmus 2 überschreibt die Matrix A mit R. Aufgrund der Dreiecksstruktur von R, können unter der Diagonale die Housholder-Vektoren gespeichert werden. Die Householder-Vektoren haben die Form

$$v^{(j)} = (\underbrace{0, ..., 0}_{j-1}, 1, v_{j+1}^{(j)}, ..., v_m^{(j)})$$

Da die ersten $j-1$ Einträge Null sind und der Vektor so normiert wurde, dass der j Eintrag gleich 1 ist, müssen die ersten j Einträge nicht gespeichert werden. Die Householder-Vektoren können somit unterhalb der Diagonalen gespeichert werden. Das geschieht im Algorithmus 2 in Zeile 7. Die Matrix A hat somit die Form

$$A = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ v_2^{(1)} & r_{2,2} & r_{2,3} \\ v_3^{(1)} & v_3^{(2)} & r_{3,3} \\ v_4^{(1)} & v_4^{(2)} & v_4^{(3)} \end{pmatrix}$$

Indem man Householder-Vektoren unter halb der Diagonalen speichert benötigt man keinen zusätzlichen Speicher für die Matrix Q.

Meistens ist es nicht notwendig die Matrix Q explizit zu bestimmen, da man Q, nur mit den Householder-Vektoren, sehr effizient anwenden kann(siehe Kapitel 3.2.2).

3.3 Geblockte QR-Zerlegung

Ein geblockter Algorithmus ist sinnvoll, um bei großen Matrizen den Cache optimal zu nutzen.

Im Folgenden wird ein geblockter Algorithmus beschrieben wie er auch von LAPACK verwendet wird. Die entsprechende Funktion bei LAPACK heißt „DGEQRF“ [6].

Die Idee beim geblockten Algorithmus ist, die Matrix in Blöcke aufzuteilen, die geblockte QR-Zerlegung für die Blöcke zu berechnen und die dabei verwendeten Householder-Transformationen auf den Rest der Matrix anzuwenden.

Betrachte dazu die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ geblockt, mit einer geeigneten Blockgröße bs.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_{0,0} & A_{0,\text{bs}} \\ \hline A_{\text{bs},0} & A_{\text{bs,bs}} \end{array} \right) \tag{3.8}$$

Die Abbildung 3.2 zeigt schematisch die Partitionierung von A.

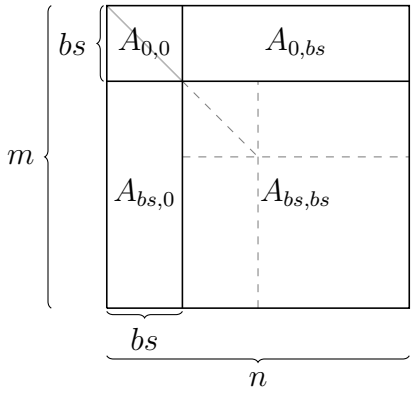


Abbildung 3.2: Aufteilung der Matrix A

Die Blockgröße bs wird so gewählt, dass die Geschwindigkeit der ungeblockten QR-Zerlegung für den Block $\left(\frac{A_{0,0}}{A_{\text{bs},0}} \right)$ optimal ist.

Für diesen Block wird die QR-Zerlegung mit dem ungeblockten Algorithmus (Algorithmus 2) berechnet.

$$\left(\frac{A_{0,0}}{A_{\text{bs},0}} \right) \leftarrow \left(\frac{Q_{0,0} \backslash R_{0,0}}{Q_{\text{bs},0}} \right) \tag{3.9}$$

Im Block $A_{0,0}$ steht auf und über der Diagonalen $R_{0,0}$. Unterhalb der Diagonalen und im Block $A_{\text{bs},0}$ stehen die Householder-Vektoren.

Nun muss man die bei der ungeblocketn QR-Zerlegung verwendeten Housholder-Transformationen auf die restliche Matrix $\left(\frac{A_{0,\text{bs}}}{A_{\text{bs,bs}}}\right)$ anwenden.

Das Produkt mehrerer Householder-Transformationen kann geschrieben werden als:

$$H_1 H_2 \cdots H_k = I - VTV^T \qquad \text{mit} \qquad H_i = I - \tau_i v_i v_i^T$$

[2]

Die Anwendung der Householder-Transformationen $I - V * T * V^T$ auf $\left(\frac{A_{\text{bs,bs}}}{A_{\text{bs,bs}}}\right)$ erfolgt in 2 Schritten. Zuerst wird die Matrix T berechnet. Dann wird $I - V * T * V^T$ auf $\left(\frac{A_{\text{bs,bs}}}{A_{\text{bs,bs}}}\right)$ angewandt.

$$\left(\frac{A_{0,\text{bs}}}{A_{bs,\text{bs}}}\right) \leftarrow H^T \left(\frac{A_{0,\text{bs}}}{A_{bs,\text{bs}}}\right) \tag{3.10}$$

Der Block $A_{bs,\text{bs}}$ wird erneut aufgeteilt. Das ist in Abbildung 3.2 gestrichelt dargestellt. Dies wird solange fortgesetzt, bis $A_{bs,\text{bs}}$ gleich der Blockgröße ist.

3.3.1 Berechnung der Matrix T

Die Matrix T wird in LAPACK von der Funktion „DLARFT“ berechnet [5].

Sie bekommt eine Dreiecksmatrix $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$, einen Vektor $\tau \in \mathbb{R}^k$ und eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ übergeben.

In der Dreiecksmatrix V stehen die Householder-Vektoren, im Vektor τ die zu den Householder-Vektoren gehörende τ_i.

Die Funktion berechnet eine obere Dreiecksmatrix T so, dass

$$H_1 H_2 ... H_k = I - VTV^T \qquad \text{mit} \qquad H_i = I - \tau_i v_i v_i^T \tag{3.11}$$

Warum und wie das Verfahren funktioniert, wird hier beschreiben [2].

Algorithmus 3 Der Algorithmus berechnet die Matrix T so dass (3.11) gilt. Die untere Dreiecksmatrix V enthält die Householder-Vektoren. Der Vektor τ die dazugehörigen $\tau_i = \frac{2}{v_i^T v_i}$. Hinweise zur Notation: Kleine Buchstaben bezeichnen einen einzelne Matrixeintrag(Beipsiel $v_{i,j}$ ist der Eintrag der i-ten-Zeile und j-ten Spalte der Matrix V). Die nach unten gestelletn Indices geben einen Block an der betrachtet werden soll(Beispiel $V_{i:n,j:m}$ bezeichnet einen Block aus der Matrix V der von i-ten bis zur n-ten Zeile und von der j-ten bis zur m-ten Spalte geht).

Input $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$,$\tau \in \mathbb{R}^k$,$T \in \mathbb{R}^{k \times k}$
for i = 0,1,2,..., k **do**
    if τ_i == 0 **then**
        $T_{1:i,i} = 0$
    else
        vii= $v_{i,i}$
        $v_{i,i} = 1$
        $T_{0:i,i} = -\tau_i \cdot V^T_{i:n-i,0:i} \cdot V_{i:n-i,i}$ (dgmv)
        $v_{i,i} =$ vii
        $T_{0:i,i} = T_{0:i,0:i} \cdot T_{0:i,i}$ (dtrmv)
        $t_{i,i} = \tau_i$
    end if
end for

Der Algorithmus 3 überschreibt die Matrix T nach folgendermaßen

$$T = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1\tau_2(v_1^T v_2) & -\tau_1\tau_2\tau_3(v_1^T v_2 v_2^T v_3) + \tau_1\tau_3(v_1^T v_3) \\ 0 & \tau_2 & -\tau_2\tau_3(v_2^T v_3) \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}$$

Beispiel mit $k = 3$

3.3.2 Anwenden von $I - VTV^T$

Die Anwendung der Householder-Transformationen auf eine Matrix C wird in LAPACK von der Funktion „LARFB“ implementiert.

Die Funktion bekommt eine untere Dreiecksmatrix $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$, eine obere Dreiecksmatrix $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$ und eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ übergeben.

In der Dreiecksmatrix V stehen die Householder-Vektoren und T ist die zuvor berechnete Matrix. Die Matrix C wird upgedatet, indem die Matrix $I - VTV^T$ von rechts auf die Matrix C angewendet wird.

Ein weiterer Übergabeparameter gibt an, ob die Matrix $I - VTV^T$ transponiert werden soll. Die Funktion berechnet also

$$C \leftarrow HC = C - VTV^TC \quad \text{oder} \quad C \leftarrow H^TC = C - VT^TV^TC \tag{3.12}$$

Der Zweck der Funktion ist es, die Householder-Transformationen die bei der Bereicherung der QR-Zerlegung für einen Block entstanden sind, auf die restliche Matrix anzuwenden. Die Abbildung 3.3 zeigt, wie die Matrix A für die Funktion partitioniert wird.

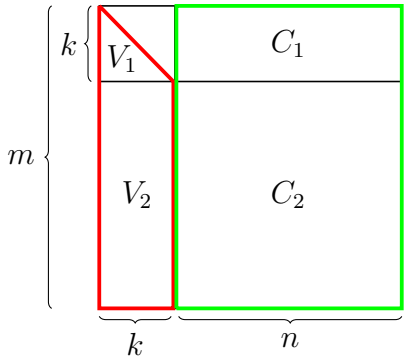


Abbildung 3.3: Partitionierung vom A für larfb

alls $m > k$ werden die Matrizen V und C aufgeteilt in

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ \hline V_2 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \hline C_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Dabei wird V genau so geteilt, dass $V_1 \in \mathbb{R}^{k\times k}$ der quadratisch Dreiecksteil der Matrix ist und $V_2 \in \mathbb{R}^{m-k\times k}$ der Rest der Matrix. Die Matrix C wird in $C_1 \in \mathbb{R}^{k\times n}$ und $C_2 \in \mathbb{R}^{m-k\times n}$ aufgeteilt. Die Aufteilung ist so gewählt, dass das Matrix-Matrix-Produkt $V_1 \cdot C_1$ und $V_2 \cdot C_2$ möglich ist.
Diese Aufteilung ist notwendig, da die BLAS-Funktion trmm (matrix-matrix product where one input matrix is triangular) nur für quadratische Dreiecksmatrizen implementiert ist.

Im Fall $m = k$ ist die Aufteilung nicht notwendig, da V quadratisch ist.

Mit folgender Umformung kommt man vom (3.12) auf Algorithmus 4

$$
\begin{aligned}
C &\leftarrow C - VTV^TC \\
C &\leftarrow C - \left(VTV^TC\right)^{TT} \\
C &\leftarrow C - \left(C^TVT^TV^T\right)^T
\end{aligned}
$$

anwenden von (3.13). Aufteilen der Matrizen C und V.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} &\leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} - \left(\left(\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \overline{V_2} \end{pmatrix} \cdot T \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \overline{V_2} \end{pmatrix}^T \right)^T \right) \\
\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} &\leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} - \left(\left(C_1^T | C_2^T\right) \cdot \begin{pmatrix} V_1 \\ \overline{V_2} \end{pmatrix} \cdot T \cdot \left(V_1^T | V_2^T\right) \right)^T \\
\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} &\leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} - \left(\left(C_1^T \cdot V_1 + C_2^T \cdot V_2\right) \cdot T \cdot \left(V_1^T | V_2^T\right) \right)^T
\end{aligned}
$$

$\left(C_1^T \cdot V_1 + C_2^T \cdot V_2\right)$ wird in Zeil 2 - 6 berechnet und das Ergebnis in W Gespeichert. Die Matrix W ist eine Workspace-Matrix. In Zeile 7 - 11 wird $\left(C_1^T \cdot V_1 + C_2^T \cdot V_2\right) \cdot T$ berechnet in dem T auf W Multipliziert wird $W \leftarrow W \cdot T$.

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} &\leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} - \left(W \cdot \left(V_1^T | V_2^T\right)\right)^T \\
\begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} &\leftarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ \overline{C_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} V_1 \\ \overline{V_2} \end{pmatrix} \cdot W^T \\
\Longrightarrow C_1 &\leftarrow C_1 - V_1 \cdot W^T \\
C_2 &\leftarrow C_2 - V_2 \cdot W^T
\end{aligned}
$$

C_1 wird in Zeile 15 und 16 berechnet. C_2 wird in Zeile 13 berechnet.

Algorithmus 4 $I - VTV^T$ auf C anwenden.
Die Matrix W ist ein Workspace. Die Matrizen V und C werden geteilt in V_1, V_2 und C_1, C_2 wie oben beschrieben.

1: Input: $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $T \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$
2: $W \leftarrow C_1^T$ (copy)
3: $W \leftarrow W * V_1$ (trmm)
4: **if** m > k **then**
5: $\quad W \leftarrow W + C_2^T * V_2$ (gemm)
6: **end if**
7: **if** trans **then**
8: $\quad W \leftarrow W * T^T$ (trmm)
9: **else**
10: $\quad W \leftarrow W * T$ (trmm)
11: **end if**
12: **if** m > k **then**
13: $\quad C_2 \leftarrow C_2 - V_2 * W^T$ (gemm)
14: **end if**
15: $W \leftarrow W * V_1^T$ (trmm)
16: $C_1 \leftarrow C_1 - W^T$

4 Implementierung und Benchmarks

Was wurde Implementiert und warum?

4.1 Bibliothek

Die verwendete Bibliothek wurde in der Vorlesung High Performance Computing 1 entwickelt [3].

Die Bibliothek ist in C++ geschrieben. Es sind Klassen für Matrizen und Vektoren implementiert, sowie einige BLAS-Routinen.

Die Matrix-Klassen erlauben den zugriff auf Matrixblöcke. Der folgender Code Soll Beispielhaft den Zugriff auf Matrixblöcke veranschaulichen.

```
1 GenerelMatrix<T> A(5,5);  // erzeuer Matrix Objekt
2 rand(A);  // Matrix mit zufalls Zahlen initialisieren
3 print(A); // Matrix Ausgeben
4 print(A.block(2,2));
5 print(A.block(2,2).view(Trans::view));
```

Dieser Code kann die folgende Ausgabe erzeugen.

```
A =
     0.4162    0.1087    0.6753   -0.3967   -0.5583
    -0.6969    0.4358    0.6349   -0.6566    0.8933
     0.9340    0.7451   -0.2149   -0.0740   -0.1027
     0.5809    0.5491    0.0163    0.1676   -0.9108
    -0.4325   -0.0732   -0.1847   -0.1897   -0.0717

A =
    -0.2149   -0.0740   -0.1027
     0.0163    0.1676   -0.9108
```

```
     -0.1847   -0.1897   -0.0717

A =
     -0.2149    0.0163   -0.1847
     -0.0740    0.1676   -0.1897
     -0.1027   -0.9108   -0.0717
```

4.1.1 Algorithmus

Beispiel Ungeblockte QR Implementierung vom Algorithmus 2

```
size_t mn = std::min(m,n);
DenseVector<T> work(mn);
for (std::size_t i = 0; i < mn; ++i){
  householderVector(A(i,i), A.col(i+1,i),tau(i));
  if (i < n && tau(i) != 0) {
    AII = A(i,i);
    A(i,i) = 1;
    mv(1, A.block(i,i+1).view(hpc::matvec::Trans::view),
       A.col(i,i), 0, work.block(i+1));
    rank1(-tau(i), A.col(i,i), work.block(i+1),
          A.block(i,i+1));
    A(i,i) = AII;
  }
}
```

Die anderen Algorithem wurden analog Implementiert siehe Anhang.

4.2 Aufwand

Die QR-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ erfordert

$$n^2(m - \frac{1}{3}n) + \mathcal{O}(mn) \qquad \text{oder 2 mal LRs}$$

Rechenoperationen. Quelle???

4.2.1 FLOPS

FLPOS (Floating Point Operations Per Second)

4.3 Fehlerschätzer

Um zu testen ob die QR-Zerlegung korrekt ist, ist ein Fehlerschätzer notwendig. Es wurde der Fehlerschätzer von ATLAS[1] verwendet.

$$err = \frac{\|A - QR\|_i}{\|A\|_i \cdot \min(m, n) \cdot \varepsilon} \tag{4.1}$$

$\|\cdot\|_i$ ist eine passende Norm. Die Matrizen Q und R sind die QR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. ε ist die kleinste darstellbare Zahl.
Die QR-Zerlegung ist gut genug falls der Fehler kleiner 1 ist: $err < 1$.

Als Norm wurde die Zeilensummennorm $\|\cdot\|_\infty$ gewählt. Diese ist für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben durch

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Diese Norm wurde gewählt das sie sich leicht zu berechnen ist.

4.4 Benchmarks

4.4.1 Test System

Getestet wurde auf einem System mit einer Intel(R) Core(TM) i5-3470 CPU mit 3.20GHz.

Die Theoretische peak performance errechnet sich aus der Taktrate mal die Registerbreite mal 2. Quelle???

ϵ ist auf dem Test-System $2.220446 \cdot 10^{-16}$

Die CPU des Test Systems hat eine Taktrate von 3.20GHz. Die AVX-Register sind 256-Bit groß. Darin haben 4 double Platz.

Taktrate · Registerbreite · $2 = 3,20$ GHz $\cdot\ 4 \cdot 2 = 25,6$ GFLOPs

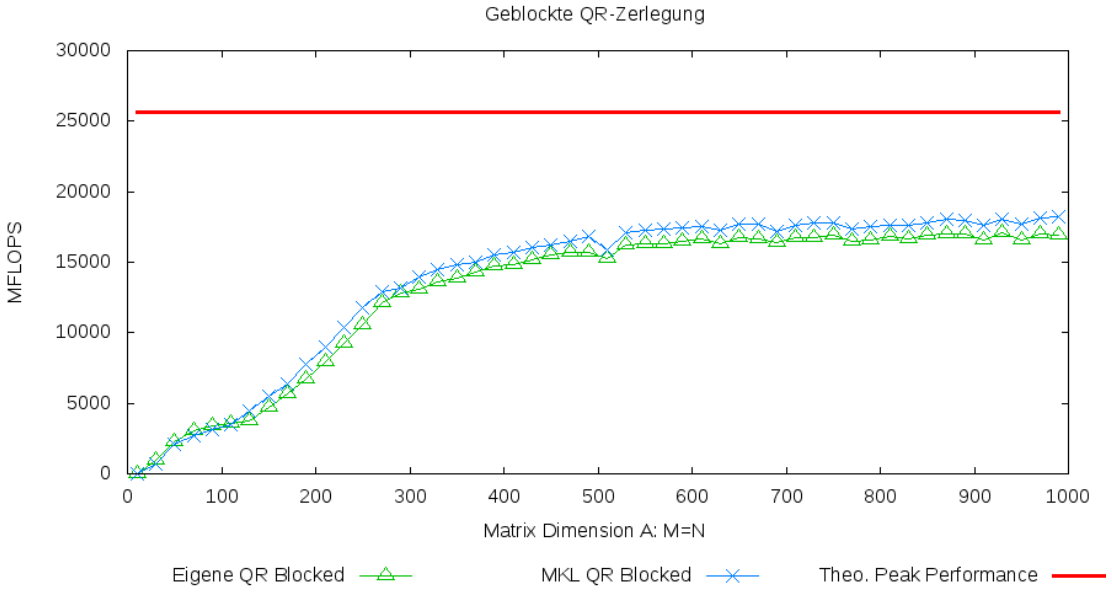


Abbildung 4.1: Benchmark geblockte QR-Zerlegung

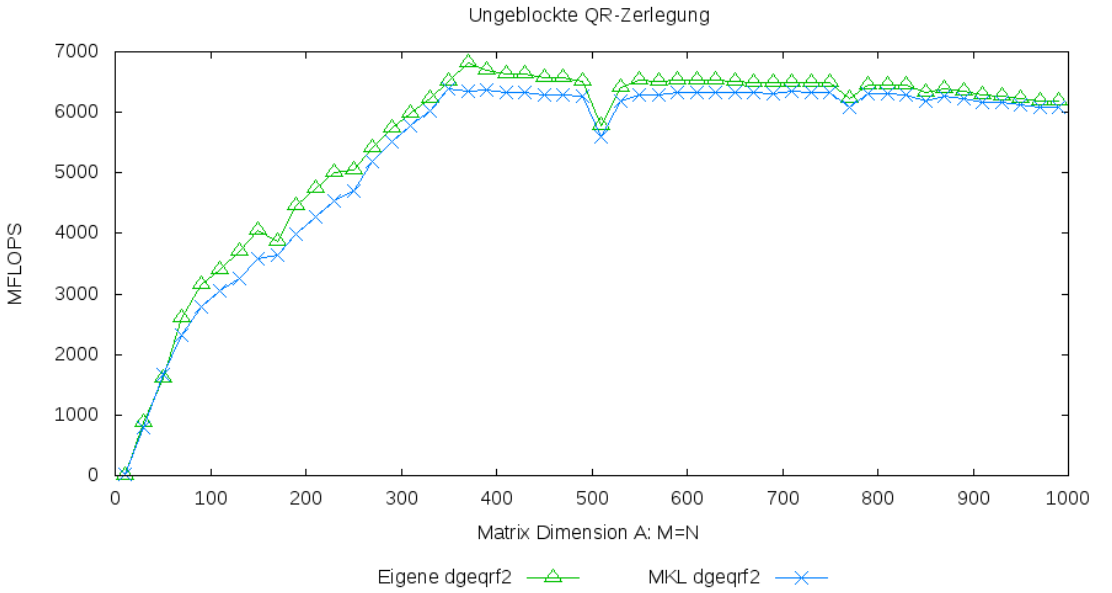


Abbildung 4.2: Benchmark ungeblockte QR-Zerlegung

A Block Reflector

Das Produkt aus Householder-Transformationen $H_1 \cdot ... \cdot H_n$ lässt sich schreiben als

$$H_1 \cdot ... \cdot H_n = I - VTV^T$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die die Housholder-Vektoren enthält und eine oberen Dreiecksmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ [2]
Beweis:
n=2 Vorwärts

$$\begin{aligned} H_1 H_2 x &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T)(I - \tau_2 v_2 v_2^T)x \\ &= (I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T)x \\ &= x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x + \tau_1 \tau_2 v_1 (v_1^T v_2) v_2^T x \\ &= x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x + \tau_1 \tau_2 (v_1^T v_2) v_1 v_2^T x \end{aligned}$$

Rückwärts

$$\begin{aligned} H_{1,2} x = (I - VTV^T)x &= x - VTV^T x \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \end{pmatrix} x \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T x \\ v_2^T x \end{pmatrix} \\ &= x - (v_1, v_2) \begin{pmatrix} a v_1^T x + b v_2^T x \\ c v_2^T x \end{pmatrix} \\ &= x - v_1 (a v_1^T x + b v_2^T x) - v_2 (c v_2^T x) \\ &= x - a v_1 v_1^T x - b v_1 v_2^T x - c v_2 v_2^T x \end{aligned}$$

Koeffizienten Vergleich

$$
\begin{aligned}
a &= \tau_1 \\
b &= -\tau_1\tau_2(v_1^T v_2) \\
c &= \tau_2 \\
T &= \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1\tau_2(v_1^T v_2) \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

n=3
Vorwärts

$$
\begin{aligned}
H_1H_2H_3x = (I - \tau_1 v_1 v_1^T)(I - \tau_2 v_2 v_2^T)(I - \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
=&(I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T)(I - \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
=&(I - \tau_1 v_1 v_1^T - \tau_2 v_2 v_2^T - \tau_3 v_3 v_3^T \\
&+ \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T + \tau_1 v_1 v_1^T \tau_3 v_3 v_3^T + \tau_2 v_2 v_2^T \tau_3 v_3 v_3^T \\
&- \tau_1 v_1 v_1^T \tau_2 v_2 v_2^T \tau_3 v_3 v_3^T)x \\
=&x - \tau_1 v_1 v_1^T x - \tau_2 v_2 v_2^T x - \tau_3 v_3 v_3^T x \\
&+ \tau_1\tau_2 (v_1^T v_2) v_1 v_2^T x + \tau_1\tau_3 (v_1^T v_3) v_1 v_3^T x + \tau_2\tau_3 (v_2^T v_3) v_2 v_3^T x \\
&- \tau_1\tau_2\tau_3 (v_1^T v_2 v_2^T v_3) v_1 v_3^T x
\end{aligned}
$$

Rückwärts

$$
\begin{aligned}
H_{1,2,3}x = (I - VTV^T)x = x - VTV^T x \\
&= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix} x \\
&= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T x \\ v_2^T x \\ v_3^T \end{pmatrix} \\
&= x - (v_1, v_2, v_3) \begin{pmatrix} a v_1^T x + b v_2^T x + c v_3^T \\ d v_2^T x + e v_3^T \\ f v_3^T \end{pmatrix} \\
=&x - v_1(a v_1^T x + b v_2^T x + c v_3^T x) \\
&- v_2(d v_2^T x + e v_3^T x) \\
&- v_3(f v_3^T) \\
=&x - a v_1 v_1^T x - b v_1 v_2^T x - c v_1 v_3^T x \\
&- d v_2 v_2^T x - e v_2 v_3^T \\
&- f v_3 v_3^T
\end{aligned}
$$

Koeffizienten Vergleich

$$
\begin{aligned}
a =& \tau_1 \\
b =& -\tau_1\tau_2(v_1^T v_2) \\
c =& -\tau_1\tau_2\tau_3(v_1^T v_2 v_2^T v_3) + \tau_1\tau_3(v_1^T v_3) \\
d =& \tau_2 \\
e =& -\tau_2\tau_3(v_2^T v_3) \\
f =& \tau_3
\end{aligned}
$$

$$
T = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & -\tau_1\tau_2(v_1^T v_2) & -\tau_1\tau_2\tau_3(v_1^T v_2 v_2^T v_3) + \tau_1\tau_3(v_1^T v_3) \\ 0 & \tau_2 & -\tau_2\tau_3(v_2^T v_3) \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{pmatrix}
$$

Mit Induktion kann man zeigen... siehe paper Im Paper wird gezeit wie man das verallgemeinern kann. [2]

Literaturverzeichnis

[1] *Automatically Tuned Linear Algebra Software (ATLAS)*. http://math-atlas.sourceforge.net/, . – [Online; zugegriffen 12-06-2018]

[2] JOFFRAIN, Thierry ; LOW, Tze M. ; QUINTANA-ORTÍ, Enrique S. ; GEIJN, Robert van d. ; ZEE, Field G. V.: Accumulating Householder Transformations, Revisited. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 32 (2006), Juni, Nr. 2, 169–179. http://dx.doi.org/10.1145/1141885.1141886. – DOI 10.1145/1141885.1141886. – ISSN 0098–3500

[3] LEHN MICHAEL, Borchert A.: *Vorlesung High Performance Computing 1*. http://www.mathematik.uni-ulm.de/numerik/hpc/ws17/, 2017. – [Online; zugegriffen 31-05-2018]

[4] STEFAN A. FUNKEN, Karsten U.: *Einführung in die Numerische Lineare Algebra*. Ulm, Germany, 2016

[5] TENNESSEE, Univ. of California B. o. ; LTD.., NAG: *DLARFT forms the triangular factor T of a real block reflector H of order n, which is defined as a product of k elementary reflectors.* http://www.netlib.org/lapack/explore-3.1.1-html/dgeqrf.f.html#DGEQRF.1, 2006. – [Online; zugegriffen 12-06-2018]

[6] TENNESSEE, Univ. of California B. o. ; LTD.., NAG: *LAPACK blocked QR*. http://www.netlib.org/lapack/explore-3.1.1-html/dgeqrf.f.html, 2006. – [Online; zugegriffen 31-01-2018]

[7] TENNESSEE, Univ. of California B. o. ; LTD.., NAG: *LAPACK unblocked QR*. http://www.netlib.org/lapack/explore-3.1.1-html/dgeqr2.f.html, 2006. – [Online; zugegriffen 31-01-2018]

[8] TENNESSEE, University of: *BLAS Technical Forum*. http://www.netlib.org/blas/blast-forum/, 2001. – [Online; zugegriffen 03-06-2018]

Name: Florian Krötz Matrikelnummer: 884948

Erklärung

Ich erkläre, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Ulm, den .....

Florian Krötz