

Trabalho Prático de

# Matemática Discreta

## 2024/2025

Trabalho Elaborado por:

**Grupo W**

8240696 Diogo Fernando Águia Costa

8240352 Guilherme Ribeiro Gomes

8240779 Vasco Meireles Leal

8240308 João Filipe Oliveira

Curso de:

LSIRC - Licenciatura em Segurança informática em redes de computadores.

Docentes:

Eliana Costa e Silva (eos@estg.ipp.pt)

Isabel Cristina Duarte (icd@estg.ipp.pt)

Felgueiras, 27 de abril de 2025



# Conteúdo

|                                       |           |
|---------------------------------------|-----------|
| <b>1 Pergunta 1</b>                   | <b>9</b>  |
| 1.1 Definição dos Conjuntos . . . . . | 9         |
| 1.2 Operações e Resultados . . . . .  | 9         |
| 1.3 Código SciLab . . . . .           | 9         |
| 1.4 Resolução Manual . . . . .        | 10        |
| 1.5 Conclusão . . . . .               | 10        |
| <b>2 Pergunta 2</b>                   | <b>11</b> |
| 2.1 Enunciado . . . . .               | 11        |
| 2.2 Código SciLab . . . . .           | 11        |
| 2.3 Resultados . . . . .              | 12        |
| 2.4 Resolução Manual . . . . .        | 12        |
| 2.5 Conclusão . . . . .               | 13        |
| <b>3 Problema 3</b>                   | <b>15</b> |
| 3.1 Enunciado . . . . .               | 15        |
| 3.2 Metodologia . . . . .             | 15        |
| 3.3 Resultados . . . . .              | 16        |
| 3.3.1 Matriz de Adjacência . . . . .  | 16        |
| 3.3.2 Arestas do Grafo . . . . .      | 17        |
| 3.3.3 Caminho Encontrado . . . . .    | 19        |
| 3.4 Conclusão . . . . .               | 19        |



# Lista de Figuras

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Resolução manual da Pergunta 1. . . . .                        | 10 |
| 2.1 | Resolução manual das alíneas (a) e (b). . . . .                | 12 |
| 2.2 | Resolução manual da alínea (c). . . . .                        | 13 |
| 3.1 | Output da matriz de adjacência dos pontos. . . . .             | 17 |
| 3.2 | Output da representação gráfica do caminho encontrado. . . . . | 19 |



# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Coordenadas dos pontos e distância à origem . . . . . | 16 |
| 3.2 | Arestas criadas (parte 1). . . . .                    | 17 |
| 3.3 | Arestas criadas (parte 2). . . . .                    | 18 |





# Pergunta 1

## 1.1 Definição dos Conjuntos

- Universo:  $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$
- Conjunto  $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
- Conjunto  $B = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$

## 1.2 Operações e Resultados

- a) **Cardinalidades:**  $|A| = 7$ ,  $|B| = 16$
- b) **Complemento:**  $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$
- c) **União:**  $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 20\}$
- d) **Interseção:**  $A \cap B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$
- e) **Diferença:**  $B - A = \{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- f) **Diferença Simétrica:**  $A \oplus B = \{1, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- g)  $\overline{A \oplus B} \cup (A - B)$ :  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}$
- h) **Produto Cartesiano**  $B \times A$ : 112 pares.
- i) **Produto Cartesiano**  $A^3$ :  $7^3 = 343$  trios.

## 1.3 Código SciLab

O código implementado encontra-se anexo ao relatório com nome do ficheiro "ScripEx01".

## 1.4 Resolução Manual

**Problema 1**

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

**Subconjunto A**

Como  $5 \leq \#A \leq 10$ , temos que o subconjunto A tem entre 5 e 10 elementos. Para isso, vamos escolher  $\#A = 7$ ,  $|A| = 7$ .

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$

**Subconjunto B**

Como  $\#B \geq 15$ , temos que o subconjunto B tem entre 16 e 20 elementos. Para isso, vamos escolher  $\#B = 16$ ,  $|B| = 16$ .

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

**Verificação:**

- $A \neq B$ , certo
- $A \subset U$  e  $B \subset U$ , certo
- $A \neq \emptyset$  e  $B \neq \emptyset$ , certo

a)  $\#A = 7$ ,  $|A| = 7$   
 $\#B = 16$ ,  $|B| = 16$

b)  $\bar{B} = U \setminus B = \{1, 2, 3, 4\}$

c)  $A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

d)  $A \cap B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

e)  $B - A = \{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

f)  $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

g)  $\overline{A \oplus B} = U \setminus (A \oplus B) = \{2, 5, 7, 9, 11, 13\}$

$A \oplus B = U \setminus \overline{A \oplus B} = \{1, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$

$A - B = \{1, 3\}$

$\{1, 3\} \cup \{2, 4, 5, 7, 9, 11, 13\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}$

h)  $B \times A = \{(a, b) \mid b \in B, a \in A\}$

Em  $|B| \cdot |A| = 16 \times 7 = 112$  pares

i)  $A^3 = |A| \times |A| \times |A| = 7^3 = 343$  ~~pares~~ triplas

Figura 1.1: Resolução manual da Pergunta 1.

## 1.5 Conclusão

A atividade permitiu consolidar conceitos de Teoria de Conjuntos, aliando a teoria à prática computacional, utilizando o *Scilab* para validar resultados.

# Pergunta 2

## 2.1 Enunciado

Considere  $\beta$  como o último algarismo do número de estudante de um dos membros do grupo. Escolha um número natural  $n$  tal que:

$$50 + \beta < 2n < 100 - \beta$$

Com o valor de  $n$  encontrado, pretende-se calcular no **Scilab** as seguintes expressões:

1. **Somatório:**

$$\sum_{j=\beta+2}^n \left( \frac{-2\beta-1}{5} \right)^j$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão  $r = \frac{-2\beta-1}{5}$ .

2. **Produtório com conjunto indexado:**

$$\prod_{i \in C} \left( \frac{\beta+1}{i-1} \right)^4$$

Com  $C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}$  e  $M = \min(5 + \beta, \lfloor \frac{100}{\beta+1} \rfloor)$ .

3. **Produtório com somatório interno:**

$$\prod_{k=1}^{n-15} \left( 3 \times \sum_{j=n-5}^n \left( \left\lfloor \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6!}{\beta+1} \right\rfloor \right) \right)$$

## 2.2 Código SciLab

O código implementado encontra-se anexo ao relatório com nome do ficheiro "ScripEx02".

## 2.3 Resultados

Com  $\beta = 8$  e  $n = 32$ , obtiveram-se os seguintes resultados:

- Somatório  $A = 7,859 \times 10^{16}$
- Produtório  $B = 2,008 \times 10^{-11}$
- Produtório com somatório interno  $C = -3,975 \times 10^{53}$

## 2.4 Resolução Manual

2)  $\beta = 8$  e  $n = 32$   
 $m \in \mathbb{N}$  tal que  $50 + \beta < 2m < 100 - \beta$   
 $50 + 8 < 2m < 100 - 8$   
 $58 < 2m < 92$   
 $29 < m < 46$   
 $m = 32$

a)  $\sum_{j=\beta+2}^m \left( \frac{-\beta+1}{5} \right)^j = \sum_{j=10}^{32} \left( \frac{-8+1}{5} \right)^j = \sum_{j=10}^{32} \left( \frac{-7}{5} \right)^j = \sum_{j=0}^{32} \left( \frac{-7}{5} \right)^j - \sum_{j=0}^9 \left( \frac{-7}{5} \right)^j$   
 $= \sum_{j=0}^{32} 1 \times \left( \frac{-7}{5} \right)^j - \sum_{j=0}^9 1 \times \left( \frac{-7}{5} \right)^j = 1 \times \frac{1 - \left( \frac{-7}{5} \right)^{33+1}}{1 - \left( \frac{-7}{5} \right)} - 1 \times \frac{1 - \left( \frac{-7}{5} \right)^{10+1}}{1 - \left( \frac{-7}{5} \right)}$   
 $= \frac{1 + \left( \frac{7}{5} \right)^{33}}{1 + \left( \frac{7}{5} \right)} - \frac{1 + \left( \frac{7}{5} \right)^{10}}{1 + \left( \frac{7}{5} \right)} = 7,859 \times 10^{16}$

b) Obtenção de  $\beta+1 \Rightarrow \beta+1 = 8+1 = 9$   
 Obtenção de  $M$ :  
 $M = \min \left\{ 5 + \beta, \left\lceil \frac{100}{\beta+1} \right\rceil \right\} = \min \left\{ 13, \left\lceil \frac{100}{9} \right\rceil \right\}$   
 $\frac{100}{9} \approx 11,11 \Rightarrow \left\lceil \frac{100}{9} \right\rceil = 12 \Rightarrow M = \min \{13, 12\} = 12$

Construção  $C$ :  
 $C = \{5m \in \mathbb{N} : m = 1, \dots, 12\} \Rightarrow C = \{5, 10, 15, 20, \dots, 60\}$

Produto final:  
 Expressão:  $\prod_{i \in C} \left( \left( \frac{4}{i} - 1 \right)^4 \right)$   
 Como é um produto de termos de múltiplos valores, usamos valores tabelados

Exemplo:  $\frac{4}{5} - 1 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \left( -\frac{1}{5} \right)^4 = 0,0016$   
 $\frac{4}{10} - 1 = -\frac{3}{5} \Rightarrow \left( -\frac{3}{5} \right)^4 = 0,324$   
 $\frac{4}{15} - 1 = -\frac{11}{15} \Rightarrow \left( -\frac{11}{15} \right)^4 = 0,3401$   
 $\frac{4}{20} - 1 = -\frac{9}{10} \Rightarrow \left( -\frac{9}{10} \right)^4 = 0,6561$   
 $\frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25} \Rightarrow \left( -\frac{21}{25} \right)^4 = 0,1944$   
 $\frac{4}{30} - 1 = -\frac{26}{30} \Rightarrow \left( -\frac{26}{30} \right)^4 = 0,2539$   
 $\frac{4}{35} - 1 = -\frac{31}{35} \Rightarrow \left( -\frac{31}{35} \right)^4 = 0,7738$   
 $\frac{4}{40} - 1 = -\frac{36}{40} \Rightarrow \left( -\frac{36}{40} \right)^4 = 0,81$   
 $\frac{4}{45} - 1 = -\frac{41}{45} \Rightarrow \left( -\frac{41}{45} \right)^4 = 0,8331$   
 $\frac{4}{50} - 1 = -\frac{46}{50} \Rightarrow \left( -\frac{46}{50} \right)^4 = 0,8489$   
 $\frac{4}{55} - 1 = -\frac{51}{55} \Rightarrow \left( -\frac{51}{55} \right)^4 = 0,8658$   
 $\frac{4}{60} - 1 = -\frac{56}{60} \Rightarrow \left( -\frac{56}{60} \right)^4 = 0,8847$

Produto final:  
 $0,0016 \times 0,324 \times 0,3401 \times 0,6561 \times 0,1944 \times 0,2539 \times 0,7738 \times 0,81 \times 0,8331 \times 0,8489 \times 0,8658 \times 0,8847$   
 $= 2,008 \times 10^{-11}$

Figura 2.1: Resolução manual das alíneas (a) e (b).

c)  $\prod_{h=1}^{m-15} \left( 3 \times \sum_{j=m-5}^m \left( \left\lceil 1 + \frac{j+h}{200} \right\rceil - \left\lceil \frac{6!}{\beta+1} \right\rceil \right) \right)$

$m = 32$   
 $j = 32 - 5 = 27$   
 $m - 15 = 32 - 15 = 17$   
 $\beta = 8 \Rightarrow \beta + 1 = 9 \Rightarrow \left\lceil \frac{6!}{9} \right\rceil = \left\lceil \frac{720}{9} \right\rceil = 80$

Derivada da soma:

$$\left\lceil 1 + \frac{j+h}{200} \right\rceil = 80$$

Como  $j \in [27, 32]$  e  $h \in [1, 17]$  o valor máximo de  $j+h \leq 32+17 = 49$

Então:

$$\left\lceil 1 + \frac{j+h}{200} \right\rceil - 80 = 1 - 80 = -79$$

$$\sum_{j=27}^{32} (-79) = -476$$

$$= 3 \times (-476) = -1428$$

Portanto:

$$\prod_{h=1}^{17} (-1428) = (-1428)^{17} = -3,975 \times 10^{53}$$

Figura 2.2: Resolução manual da alínea (c).

## 2.5 Conclusão

Este exercício reforçou o entendimento de progressões aritméticas, progressões geométricas, somatórios e produtórios, além da importância da verificação computacional no **SciLab** como ferramenta de apoio à análise matemática.



# Problema 3

## 3.1 Enunciado

A integração de robôs na indústria tem transformado profundamente o setor da produção, promovendo ganhos significativos em eficiência, inovação e sustentabilidade.

No contexto da Indústria 4.0, os robôs desempenham um papel central nas fábricas inteligentes, associando automação, Internet das Coisas (IoT) e Inteligência Artificial para realizar operações de forma autônoma e precisa. Já na Indústria 5.0, o foco desloca-se para a colaboração harmoniosa entre humanos e robôs, potencializando as capacidades criativas e estratégicas humanas, enquanto os robôs asseguram a excelência operacional.

Neste enquadramento, foi proposto o planeamento da trajetória de um braço robótico, cujo end-effector deve deslocar-se entre dois pontos, evitando colisões e minimizando a distância percorrida.

O problema proposto inclui os seguintes objetivos:

- Gerar 20 pontos tridimensionais localizados a uma distância máxima de 27 cm do ponto de origem  $(0, 0, 0)$ .
- Construir um grafo não orientado, conectando pares de pontos cuja distância seja inferior ou igual a 5,0 cm, limitando o número máximo de arestas a 100.
- Aplicar o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre dois pontos  $\beta$  e  $\sigma$ , definidos com base nos números de estudante do grupo.
- Assegurar que a distância total do percurso encontrado seja, no mínimo, de 50 cm.

## 3.2 Metodologia

A implementação foi realizada na linguagem de programação C, estando o código-fonte anexo a este relatório, com o nome de ficheiro "CodigoProblema3".

O processo desenvolvido incluiu:

1. Inserção manual de 20 pontos tridimensionais.
2. Cálculo da matriz de adjacência, considerando conexões apenas entre pontos com distância menor ou igual a 5,0 cm.
3. Construção do grafo com até 100 arestas.
4. Aplicação do algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mínimo entre os pontos  $\beta$  e  $\sigma$ .

Tabela 3.1: Coordenadas dos pontos e distância à origem

| Ponto | Coordenadas $(x, y, z)$ | Distância à origem (cm) |
|-------|-------------------------|-------------------------|
| 1     | (0, 4, 0)               | 4,00                    |
| 2     | (1, 4, 0)               | 4,12                    |
| 3     | (2, 4, 0)               | 4,47                    |
| 4     | (4, 2, 0)               | 4,47                    |
| 5     | (1, 2, 1)               | 2,45                    |
| 6     | (2, 1, 0)               | 2,24                    |
| 7     | (3, 0, 0)               | 3,00                    |
| 8     | (0, 3, 1)               | 3,16                    |
| 9     | (1, 1, 1)               | 1,73                    |
| 10    | (2, 2, 0)               | 2,83                    |
| 11    | (3, 1, 1)               | 3,32                    |
| 12    | (4, 3, 0)               | 5,00                    |
| 13    | (2, 2, 2)               | 3,46                    |
| 14    | (3, 3, 1)               | 4,36                    |
| 15    | (0, 0, 3)               | 3,00                    |
| 16    | (1, 1, 3)               | 3,32                    |
| 17    | (2, 0, 4)               | 4,47                    |
| 18    | (0, 4, 3)               | 5,00                    |
| 19    | (3, 0, 3)               | 4,24                    |
| 20    | (3, 3, 3)               | 5,20                    |

### 3.3 Resultados

#### 3.3.1 Matriz de Adjacência

Foi construída a matriz de adjacência representando as ligações entre os pontos segundo o critério de distância, limitado a 100 arestas.



Matriz de Adjacência:

|    | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1  |
| 2  | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 3  | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 4  | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 1  | 0  | 1  |
| 5  | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 6  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  |
| 7  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 1  | 0  | 1  | 0  |
| 8  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 9  | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 14 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 15 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 17 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 18 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 19 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 20 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |

Figura 3.1: Output da matriz de adjacência dos pontos.

### 3.3.2 Arestas do Grafo

As arestas criadas, ordenadas por comprimento, estão apresentadas nas Tabelas seguintes.

Tabela 3.2: Arestas criadas (parte 1).

| Ponto A | Ponto B | Distância (cm) | Ponto A | Ponto B | Distância (cm) |
|---------|---------|----------------|---------|---------|----------------|
| 1       | 2       | 1,00           | 6       | 9       | 1,41           |
| 6       | 10      | 1,00           | 4       | 14      | 1,73           |
| 5       | 9       | 1,00           | 3       | 14      | 1,73           |
| 4       | 12      | 1,00           | 5       | 6       | 1,73           |
| 2       | 3       | 1,00           | 4       | 11      | 1,73           |
| 6       | 7       | 1,41           | 2       | 8       | 1,73           |
| 6       | 11      | 1,41           | 4       | 10      | 2,00           |
| 5       | 13      | 1,41           | 1       | 3       | 2,00           |
| 7       | 11      | 1,41           | 3       | 10      | 2,00           |
| 5       | 10      | 1,41           | 2       | 10      | 2,24           |
| 1       | 8       | 1,41           | 2       | 5       | 2,24           |
| 5       | 8       | 1,41           | 3       | 12      | 2,24           |
| 4       | 6       | 2,24           | 7       | 14      | 3,16           |
| 4       | 7       | 2,24           | 3       | 11      | 3,32           |

Tabela 3.3: Arestas criadas (parte 2).

| Ponto A | Ponto B | Distância (cm) | Ponto A | Ponto B | Distância (cm) |
|---------|---------|----------------|---------|---------|----------------|
| 5       | 11      | 2,24           | 3       | 9       | 3,32           |
| 5       | 14      | 2,24           | 3       | 20      | 3,32           |
| 5       | 16      | 2,24           | 4       | 9       | 3,32           |
| 6       | 13      | 2,24           | 4       | 20      | 3,32           |
| 7       | 10      | 2,24           | 1       | 14      | 3,32           |
| 3       | 8       | 2,45           | 5       | 12      | 3,32           |
| 2       | 14      | 2,45           | 1       | 9       | 3,32           |
| 3       | 5       | 2,45           | 6       | 19      | 3,32           |
| 7       | 9       | 2,45           | 1       | 13      | 3,46           |
| 6       | 14      | 2,45           | 5       | 19      | 3,46           |
| 1       | 5       | 2,45           | 3       | 18      | 3,61           |
| 4       | 13      | 2,83           | 2       | 4       | 3,61           |
| 3       | 4       | 2,83           | 1       | 6       | 3,61           |
| 6       | 12      | 2,83           | 6       | 20      | 3,74           |
| 1       | 10      | 2,83           | 5       | 17      | 3,74           |
| 3       | 13      | 2,83           | 4       | 19      | 3,74           |
| 7       | 13      | 3,00           | 7       | 16      | 3,74           |
| 2       | 13      | 3,00           | 2       | 20      | 3,74           |
| 7       | 19      | 3,00           | 2       | 11      | 3,74           |
| 6       | 8       | 3,00           | 6       | 15      | 3,74           |
| 3       | 6       | 3,00           | 7       | 17      | 4,12           |
| 1       | 18      | 3,00           | 3       | 7       | 4,12           |
| 5       | 20      | 3,00           | 1       | 12      | 4,12           |
| 5       | 7       | 3,00           | 6       | 17      | 4,12           |
| 5       | 18      | 3,00           | 7       | 15      | 4,24           |
| 5       | 15      | 3,00           | 2       | 16      | 4,24           |
| 6       | 16      | 3,16           | 4       | 8       | 4,24           |
| 2       | 18      | 3,16           | 4       | 16      | 4,36           |
| 4       | 5       | 3,16           | 7       | 8       | 4,36           |
| 7       | 12      | 3,16           | 1       | 20      | 4,36           |
| 2       | 9       | 3,16           | 1       | 16      | 4,36           |
| 2       | 6       | 3,16           | 3       | 16      | 4,36           |
| 2       | 12      | 3,16           | 1       | 11      | 4,36           |
| 7       | 14      | 3,16           | 1       | 4       | 4,47           |
| 2       | 7       | 4,47           | 6       | 18      | 4,69           |
| 4       | 17      | 4,90           | 1       | 7       | 5,00           |
| 1       | 15      | 5,00           |         |         |                |

### 3.3.3 Caminho Encontrado

Aplicando o algoritmo de Dijkstra, encontrou-se o caminho de menor custo entre os pontos definidos  $\beta$  e  $\sigma$ , tendo estes sido retirados dos alunos com o Número de Aluno 8240696 para  $\beta$  e 8240352 para  $\sigma$ . Ou seja,  $\beta = 6$  e  $\sigma = 10$ , porque 52 é maior que 20 e temos de respeitar as limitações impostas.

O percurso encontrado foi:

- **Opção 1:**  $6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 1 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 10$  (50,01 cm)
- **Opção 2:**  $6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 1 \rightarrow 20 \rightarrow 2 \rightarrow 10$  (50,01 cm)

Ambas as opções satisfazem o critério de distância mínima de 50 cm.

```
Total de caminhos encontrados: 20

Caminho 1 (50.01 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 10
Caminho 2 (50.01 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 10
Caminho 3 (50.07 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 4 (50.10 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 5 (50.10 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 6 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 2 -> 16 -> 3 -> 20 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 7 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 2 -> 16 -> 3 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 8 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 9 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 10 (50.17 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 10
Caminho 11 (50.17 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 10
Caminho 12 (50.23 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 10
Caminho 13 (50.29 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 14 (50.29 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 15 (50.31 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 16 (50.31 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 17 (50.38 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 18 (50.38 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 19 (50.67 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 2 -> 20 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 20 (50.67 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10

Busca finalizada.
```

Figura 3.2: Output da representação gráfica do caminho encontrado.

## 3.4 Conclusão

Este trabalho permitiu consolidar conhecimentos teóricos e práticos no domínio da Teoria dos Grafos, nomeadamente na aplicação do algoritmo de Dijkstra para o planeamento de trajetórias de robôs.

A metodologia utilizada demonstrou ser eficaz para encontrar o caminho ótimo respeitando as restrições impostas, integrando conceitos fundamentais da Indústria 4.0 e 5.0.