

Trabalho Prático de
Matemática Discreta
2024/2025

Trabalho Elaborado por:

Grupo W

8240696 Diogo Fernando Águia Costa
8240352 Guilherme Ribeiro Gomes
8240779 Vasco Meireles Leal
8240308 João Filipe Oliveira

Curso de:

LSIRC - Licenciatura em Segurança informatica em redes de computadores.

Docentes:

Eliana Costa e Silva (eos@estg.ipp.pt)
Isabel Cristina Duarte (icd@estg.ipp.pt)

Felgueiras, 27 de abril de 2025

Conteúdo

1 Pergunta 1	9
1.1 Definição dos Conjuntos	9
1.2 Operações e Resultados	9
1.3 Código SciLab	9
1.4 Resolução Manual	10
1.5 Conclusão	10
2 Pergunta 2	11
2.1 Enunciado	11
2.2 Código SciLab	11
2.3 Resultados	12
2.4 Resolução Manual	12
2.5 Conclusão	13
3 Problema 3	15
3.1 Enunciado	15
3.2 Metodologia	15
3.3 Resultados	16
3.3.1 Matriz de Adjacência	16
3.3.2 Arestas do Grafo	17
3.3.3 Caminho Encontrado	19
3.4 Conclusão	19

Lista de Figuras

1.1	Resolução manual da Pergunta 1.	10
2.1	Resolução manual das alíneas (a) e (b).	12
2.2	Resolução manual da alínea (c).	13
3.1	Output da matriz de adjacência dos pontos.	17
3.2	Output da representação gráfica do caminho encontrado.	19

Lista de Tabelas

3.1	Coordenadas dos pontos e distância à origem	16
3.2	Arestas criadas (parte 1).	17
3.3	Arestas criadas (parte 2).	18

Pergunta 1

1.1 Definição dos Conjuntos

- Universo: $U = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$
- Conjunto $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$
- Conjunto $B = \{5, 6, 7, \dots, 20\}$

1.2 Operações e Resultados

- Cardinalidades:** $|A| = 7, |B| = 16$
- Complemento:** $\bar{B} = \{1, 2, 3, 4\}$
- União:** $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 20\}$
- Interseção:** $A \cap B = \{5, 7, 9, 11, 13\}$
- Diferença:** $B - A = \{6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- Diferença Simétrica:** $A \oplus B = \{1, 3, 6, 8, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$
- $\bar{A} \oplus \bar{B} \cup (A - B)$:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13\}$
- Produto Cartesiano $B \times A$:** 112 pares.
- Produto Cartesiano A^3 :** $7^3 = 343$ trios.

1.3 Código SciLab

O código implementado encontra-se anexo ao relatório com nome do ficheiro "ScripEx01".

1.4 Resolução Manual

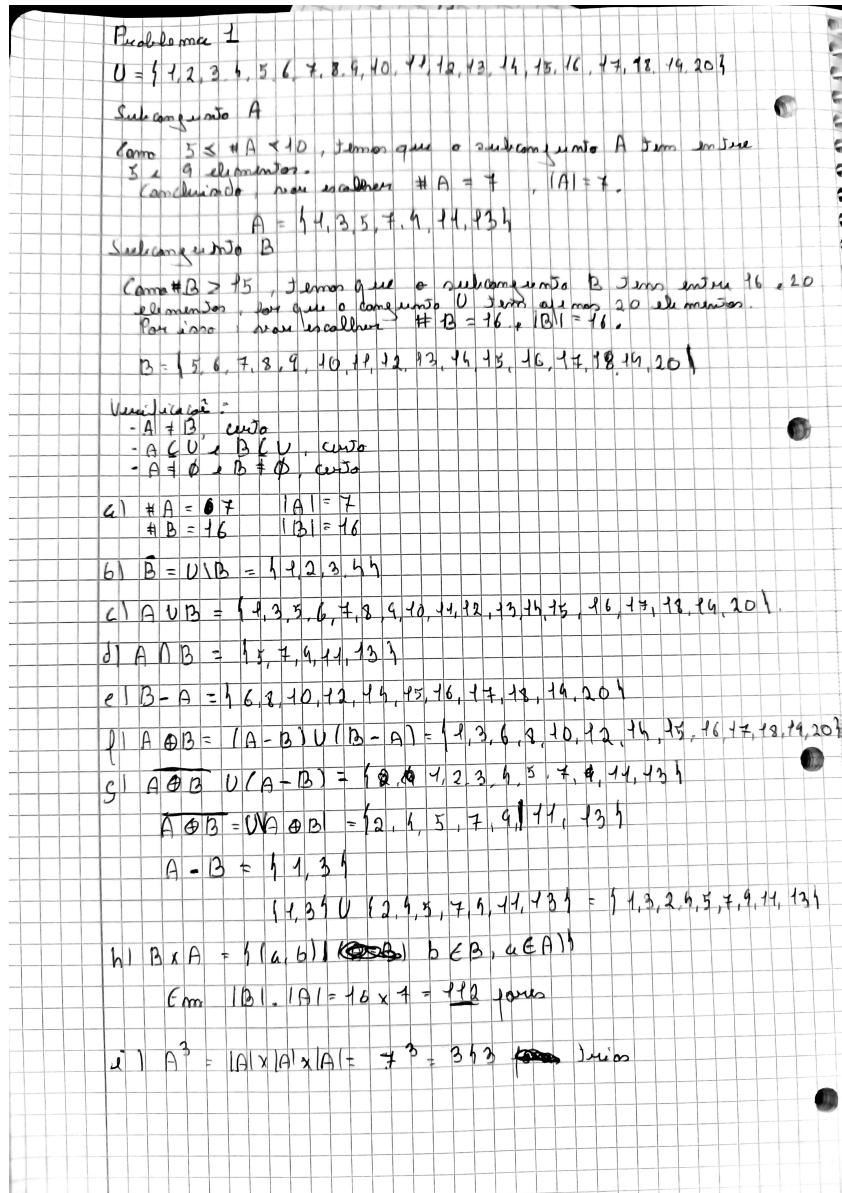


Figura 1.1: Resolução manual da Pergunta 1.

1.5 Conclusão

A atividade permitiu consolidar conceitos de Teoria de Conjuntos, aliando a teoria à prática computacional, utilizando o *Scilab* para validar resultados.

Pergunta 2

2.1 Enunciado

Considere β como o último algarismo do número de estudante de um dos membros do grupo. Escolha um número natural n tal que:

$$50 + \beta < 2n < 100 - \beta$$

Com o valor de n encontrado, pretende-se calcular no **Scilab** as seguintes expressões:

1. **Somatório:**

$$\sum_{j=\beta+2}^n \left(\frac{-2\beta-1}{5} \right)^j$$

Trata-se de uma progressão geométrica de razão $r = \frac{-2\beta-1}{5}$.

2. **Produtório com conjunto indexado:**

$$\prod_{i \in C} \left(\frac{\beta+1}{i-1} \right)^4$$

Com $C = \{5m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, M\}$ e $M = \min(5 + \beta, \lfloor \frac{100}{\beta+1} \rfloor)$.

3. **Produtório com somatório interno:**

$$\prod_{k=1}^{n-15} \left(3 \times \sum_{j=n-5}^n \left(\left\lfloor \frac{j+k}{200} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{6!}{\beta+1} \right\rfloor \right) \right)$$

2.2 Código SciLab

O código implementado encontra-se anexo ao relatório com nome do ficheiro "ScripEx02".

2.3 Resultados

Com $\beta = 8$ e $n = 32$, obtiveram-se os seguintes resultados:

- Somatório $A = 7,859 \times 10^{16}$
- Produtório $B = 2,008 \times 10^{-11}$
- Produtório com somatório interno $C = -3,975 \times 10^{53}$

2.4 Resolução Manual

a) $\beta = 8 \quad n = 32$
 $m \in \mathbb{N}$ tal que $50 \leq m < 100 - 8$
~~50 <= m < 92~~ $50 + 8 \leq m < 100 - 8$
~~58 <= m < 92~~
~~58 <= 82 < 92~~
 $m = 82$ $58 \leq 82 < 92$, certo
 $\sum_{j=82}^{82} \left(\frac{-2}{5} \right)^j = \sum_{j=0}^{82} \left(\frac{-2}{5} \right)^j = \sum_{j=0}^{23} \left(\frac{-1}{5} \right)^j - \sum_{j=0}^{23} \left(\frac{1}{5} \right)^j$
 $= \sum_{j=0}^{23} 1 \times \left(\frac{-1}{5} \right)^j - \sum_{j=0}^{23} 1 \times \left(\frac{1}{5} \right)^j = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^{32+1}}{1 - \left(\frac{1}{5} \right)} - 1 \times \frac{1 - \left(\frac{-1}{5} \right)^{32+1}}{1 - \left(\frac{-1}{5} \right)}$
 $= \frac{1 + \left(\frac{1}{5} \right)^{33}}{1 + \left(\frac{1}{5} \right)} - \frac{1 + \left(\frac{-1}{5} \right)^{33}}{1 + \left(\frac{-1}{5} \right)} = 7,859 \times 10^{16}$

b)
 $\text{Cálculo de } B+1 \Rightarrow B+1 = 8+1 = 9$
 $\text{Cálculo de } M:$
 $M = \min \left\{ 5 + B, \left[\frac{100}{B+1} \right] \right\} = \min \left\{ 13, \left[\frac{100}{9} \right] \right\}$
 $\frac{100}{9} \geq 11,11 \Rightarrow \left[\frac{100}{9} \right] = 12 \Rightarrow M = \min \{ 13, 12 \} = 12$

Conjunto C.
 $C = \{ 15 - m \in \mathbb{Z} : m = 1, \dots, 12 \} = \{ 15, 10, 5, 20, \dots, 60 \}$

Expressão final:

$$\prod_{m=1}^{12} \left(\frac{15}{15-m} \right)^4$$

Como é um fatorial, temos de multiplicar todos os valores juntos

Exemplos:

$m=5 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,1096$	$m=10 \Rightarrow 0,3041$	$m=15 \Rightarrow 0,1096 \times 0,3041 \times 0,0256$
$m=10 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,0001$	$m=15 \Rightarrow 0,3041$	$\times 0,0495 \times \dots \times 0,5220$
$m=15 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,0256$	$m=15 \Rightarrow 0,1096$	$= 2,008 \times 10^{-11}$
$m=20 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,0915$	$m=20 \Rightarrow 0,4910$	<i>Pseudocódigo</i>
$m=25 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,1681$	$m=25 \Rightarrow 0,4875$	$= 2,008 \times 10^{-11}$
$m=30 \Rightarrow \left(\frac{15}{10} \right)^4 = 0,2104$	$m=30 \Rightarrow 0,4820$	

Figura 2.1: Resolução manual das alíneas (a) e (b).

$$\begin{aligned}
 & \text{(c) } \prod_{k=1}^{m-15} \left(3 \times \sum_{j=m-5}^m \left(\left\lceil \frac{j+h}{200} \right\rceil - \left\lfloor \frac{61}{B+q} \right\rfloor \right) \right) \\
 & m = 32 \\
 & j = 32 - 5 = 27 \\
 & m - 15 = 32 - 15 = 17 \\
 & B = 8 \Rightarrow B + 1 = 9 \Rightarrow \left\lceil \frac{61}{9} \right\rceil = \left\lceil \frac{710}{9} \right\rceil = 80 \\
 & \text{Dentro da soma:} \\
 & \left\lceil \frac{j+h}{200} \right\rceil - 80 \\
 & \text{Com } 56127 + 32 \leq 14699 + 178 \Rightarrow \text{Verificar intervalo} \\
 & j+h \leq 32+17 = 49 \\
 & \text{E assim:} \\
 & \sum_{j=27}^{32} (-79) = -474 \\
 & = 3 \times (-474) = -1422 \\
 & \text{Por fim:} \\
 & \prod_{k=1}^{14} (-1422) = (-1422)^{14} = -3,975 \times 10^{53}
 \end{aligned}$$

Figura 2.2: Resolução manual da alínea (c).

2.5 Conclusão

Este exercício reforçou o entendimento de progressões aritméticas, progressões geométricas, somatórios e produtórios, além da importância da verificação computacional no **SciLab** como ferramenta de apoio à análise matemática.

Problema 3

3.1 Enunciado

A integração de robôs na indústria tem transformado profundamente o setor da produção, promovendo ganhos significativos em eficiência, inovação e sustentabilidade.

No contexto da Indústria 4.0, os robôs desempenham um papel central nas fábricas inteligentes, associando automação, Internet das Coisas (IoT) e Inteligência Artificial para realizar operações de forma autônoma e precisa. Já na Indústria 5.0, o foco desloca-se para a colaboração harmoniosa entre humanos e robôs, potencializando as capacidades criativas e estratégicas humanas, enquanto os robôs asseguram a excelência operacional.

Neste enquadramento, foi proposto o planeamento da trajetória de um braço robótico, cujo end-effector deve deslocar-se entre dois pontos, evitando colisões e minimizando a distância percorrida.

O problema proposto inclui os seguintes objetivos:

- Gerar 20 pontos tridimensionais localizados a uma distância máxima de 27 cm do ponto de origem $(0, 0, 0)$.
- Construir um grafo não orientado, conectando pares de pontos cuja distância seja inferior ou igual a 5,0 cm, limitando o número máximo de arestas a 100.
- Aplicar o algoritmo de Dijkstra para determinar o caminho de menor custo entre dois pontos β e σ , definidos com base nos números de estudante do grupo.
- Assegurar que a distância total do percurso encontrado seja, no mínimo, de 50 cm.

3.2 Metodologia

A implementação foi realizada na linguagem de programação C, estando o código-fonte anexo a este relatório, com o nome de ficheiro "CodigoProblema3".

O processo desenvolvido incluiu:

1. Inserção manual de 20 pontos tridimensionais.
2. Cálculo da matriz de adjacência, considerando conexões apenas entre pontos com distância menor ou igual a 5,0 cm.
3. Construção do grafo com até 100 arestas.
4. Aplicação do algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mínimo entre os pontos β e σ .

Tabela 3.1: Coordenadas dos pontos e distância à origem

Ponto	Coordenadas (x, y, z)	Distância à origem (cm)
1	(0, 4, 0)	4,00
2	(1, 4, 0)	4,12
3	(2, 4, 0)	4,47
4	(4, 2, 0)	4,47
5	(1, 2, 1)	2,45
6	(2, 1, 0)	2,24
7	(3, 0, 0)	3,00
8	(0, 3, 1)	3,16
9	(1, 1, 1)	1,73
10	(2, 2, 0)	2,83
11	(3, 1, 1)	3,32
12	(4, 3, 0)	5,00
13	(2, 2, 2)	3,46
14	(3, 3, 1)	4,36
15	(0, 0, 3)	3,00
16	(1, 1, 3)	3,32
17	(2, 0, 4)	4,47
18	(0, 4, 3)	5,00
19	(3, 0, 3)	4,24
20	(3, 3, 3)	5,20

3.3 Resultados

3.3.1 Matriz de Adjacência

Foi construída a matriz de adjacência representando as ligações entre os pontos segundo o critério de distância, limitado a 100 arestas.

		Matriz de Adjacência:																			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
		+																			
1		0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
2		1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
3		1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
4		1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
5		1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6		1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
7		1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
8		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15		1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16		1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18		1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
20		1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 3.1: Output da matriz de adjacência dos pontos.

3.3.2 Arestas do Grafo

As arestas criadas, ordenadas por comprimento, estão apresentadas nas Tabelas seguintes.

Tabela 3.2: Arestas criadas (parte 1).

Ponto A	Ponto B	Distância (cm)	Ponto A	Ponto B	Distância (cm)
1	2	1,00	6	9	1,41
6	10	1,00	4	14	1,73
5	9	1,00	3	14	1,73
4	12	1,00	5	6	1,73
2	3	1,00	4	11	1,73
6	7	1,41	2	8	1,73
6	11	1,41	4	10	2,00
5	13	1,41	1	3	2,00
7	11	1,41	3	10	2,00
5	10	1,41	2	10	2,24
1	8	1,41	2	5	2,24
5	8	1,41	3	12	2,24
4	6	2,24	7	14	3,16
4	7	2,24	3	11	3,32

Tabela 3.3: Arestas criadas (parte 2).

Ponto A	Ponto B	Distância (cm)	Ponto A	Ponto B	Distância (cm)
5	11	2,24	3	9	3,32
5	14	2,24	3	20	3,32
5	16	2,24	4	9	3,32
6	13	2,24	4	20	3,32
7	10	2,24	1	14	3,32
3	8	2,45	5	12	3,32
2	14	2,45	1	9	3,32
3	5	2,45	6	19	3,32
7	9	2,45	1	13	3,46
6	14	2,45	5	19	3,46
1	5	2,45	3	18	3,61
4	13	2,83	2	4	3,61
3	4	2,83	1	6	3,61
6	12	2,83	6	20	3,74
1	10	2,83	5	17	3,74
3	13	2,83	4	19	3,74
7	13	3,00	7	16	3,74
2	13	3,00	2	20	3,74
7	19	3,00	2	11	3,74
6	8	3,00	6	15	3,74
3	6	3,00	7	17	4,12
1	18	3,00	3	7	4,12
5	20	3,00	1	12	4,12
5	7	3,00	6	17	4,12
5	18	3,00	7	15	4,24
5	15	3,00	2	16	4,24
6	16	3,16	4	8	4,24
2	18	3,16	4	16	4,36
4	5	3,16	7	8	4,36
7	12	3,16	1	20	4,36
2	9	3,16	1	16	4,36
2	6	3,16	3	16	4,36
2	12	3,16	1	11	4,36
7	14	3,16	1	4	4,47
2	7	4,47	6	18	4,69
4	17	4,90	1	7	5,00
1	15	5,00			

3.3.3 Caminho Encontrado

Aplicando o algoritmo de Dijkstra, encontrou-se o caminho de menor custo entre os pontos definidos β e σ , tendo estes sido retirados dos alunos com o Número de Aluno 8240696 para β e 8240352 para σ . Ou seja, $\beta = 6$ e $\sigma = 10$, porque 52 é maior que 20 e temos de respeitar as limitações impostas.

O percurso encontrado foi:

- **Opção 1:** $6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 1 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 10$ (50,01 cm)
- **Opção 2:** $6 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 3 \rightarrow 18 \rightarrow 5 \rightarrow 17 \rightarrow 7 \rightarrow 15 \rightarrow 1 \rightarrow 20 \rightarrow 2 \rightarrow 10$ (50,01 cm)

Ambas as opções satisfazem o critério de distância mínima de 50 cm.

```
Total de caminhos encontrados: 20

Caminho 1 (50.01 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 10
Caminho 2 (50.01 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 10
Caminho 3 (50.07 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 4 (50.10 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 5 (50.10 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 6 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 2 -> 16 -> 3 -> 20 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 7 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 2 -> 16 -> 3 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 8 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 9 (50.12 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 10
Caminho 10 (50.17 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 10
Caminho 11 (50.17 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 10
Caminho 12 (50.23 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 18 -> 5 -> 10
Caminho 13 (50.29 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 14 (50.29 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 19 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 15 (50.31 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 16 (50.31 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 12 -> 7 -> 15 -> 1 -> 11 -> 2 -> 16 -> 3 -> 10
Caminho 17 (50.38 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 2 -> 16 -> 3 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 18 (50.38 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 20 -> 3 -> 16 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 19 (50.67 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 2 -> 20 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10
Caminho 20 (50.67 cm): 6 -> 8 -> 4 -> 17 -> 5 -> 18 -> 3 -> 16 -> 2 -> 11 -> 1 -> 15 -> 7 -> 10

Busca finalizada.
```

Figura 3.2: Output da representação gráfica do caminho encontrado.

3.4 Conclusão

Este trabalho permitiu consolidar conhecimentos teóricos e práticos no domínio da Teoria dos Grafos, nomeadamente na aplicação do algoritmo de Dijkstra para o planeamento de trajetórias de robôs.

A metodologia utilizada demonstrou ser eficaz para encontrar o caminho ótimo respeitando as restrições impostas, integrando conceitos fundamentais da Indústria 4.0 e 5.0.