第一章 广义函数（Generalized Function or Distribution Function）

（一）广义函数的引入

考虑一个质量为m小木块，将其放在光滑平面上并连接上一条固定在墙上的一根弹性系数为k的弹簧上，如图 1 所示:

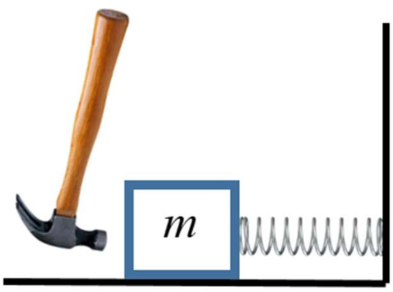


图 1 用锤子迅速敲击木块

在$t=t_0$时刻，迅速用锤子敲击木块，对木块的作用力随时间变化函数设为f(t)。假设 t 时刻，木块向右偏移的距离是$u(t)$。此时小木块只受到弹簧的弹力，-ku(t)。由牛顿第二定律（Newton's Second Law），我们可以列出，小木块随时间变化的运动方程，

$$m\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}=-ku(t)+f(t)$$

Equation 1

考虑到敲击过程$t_0\to t_1$非常短暂，因此忽略木块动量变化的时间。

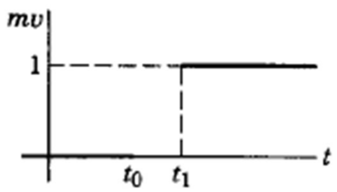
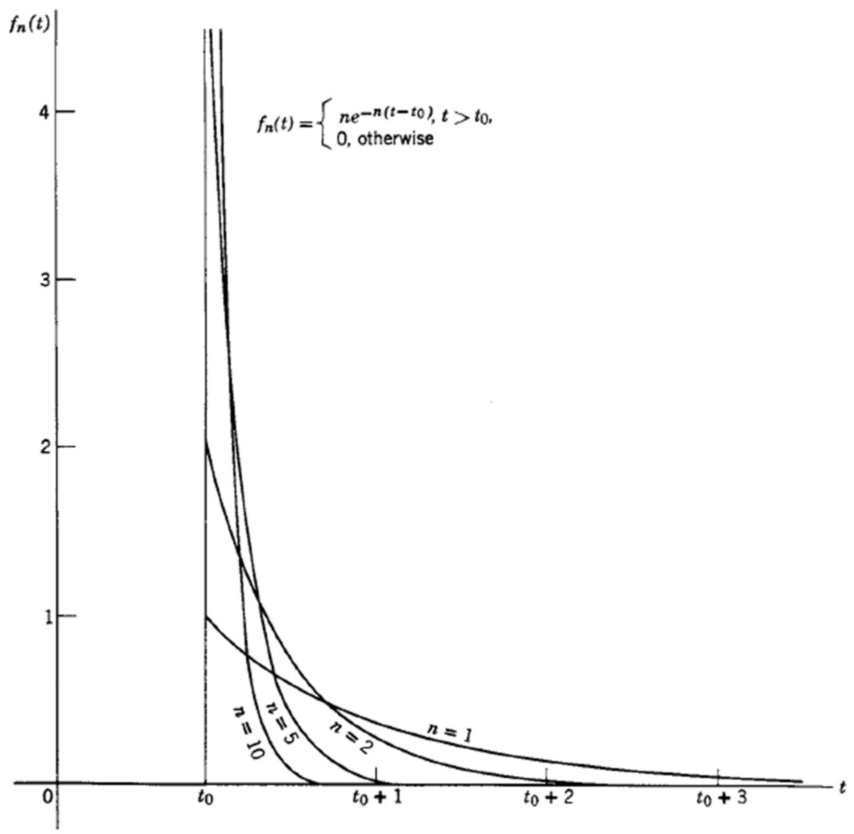


图 2 小木块动量随时间的变化

我们尝试来描述木块受敲击的外力$f(t)$，$f(t)$需要满足，（1）持续时

间非常短，使得小木块的动量非常迅速发生变化（2）产生的动量为有限值。

这里选取一列函数， $f_n(t)=\begin{cases} ne^{-n(t-t_0)} & t>t_0 \\ 0 & t\le t_0 \end{cases}$， 这些函数的积分为 1，因此均满足条件（2）。且当 $n\to\infty$， $f_n(t)$越来越满足条件（1），如图所示，。



$$\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\begin{cases} \infty & t=t_0 \\ 0 & t\ne t_0 \end{cases}$$

我们将 $f_n(t)$ 带入到木块的运动方程当中，

$$\frac{\partial^2 u(t)}{\partial t^2}=-\omega u(t)+F(t)$$

这里 $\omega=k/m$， $F_n(t)=f_n(t)/m$ 。

$$u(t)=n\left(\frac{e^{-n(t-t_0)}}{n^2+\omega^2}+\frac{n\sin\omega(t-t_0)}{(n^2+\omega^2)\omega}-\frac{\cos\omega(t-t_0)}{n^2+\omega^2}\right)$$

令 $n\to\infty$， $u(t)=\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-t_0)$ 。

小木块在平面上做频率为 ω 的周期运动。

是否存在函数 $f(t)$ 既满足该极限 $f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)\begin{cases}\infty & t=t_0\\ 0 & t\neq t_0\end{cases}$ 同时满足积分要求 $\int f(t)dt=1$？

在普通函数中，不存在满足上述条件的函数。因此我们需要扩大函数的定义范围，将函数的定义扩展到广义函数。

（二）为什么广义函数涵盖的范围更广。

广义函数是定义在某些特定函数空间上的连续线性泛函。

(a）泛函是指一类自变量为函数的函数，例如 $F[\varphi]=\int_{-\infty}^{\infty}dx\varphi(x)$ 。

(b) 连续性，普通函数连续性的定义，对于任意的一组数列 $\{x_n\}$，如果 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$，则 $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$

类比泛函的连续性，对于任意的一个函数序列 $\{\varphi_n\}$，若 $\lim_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi$，则满足 $\lim_{n\to\infty}F[\varphi_n]=F[\varphi]$ 。

(c) 线性，对于任意的实数 a_1,a_2 以及 $F[a_1\varphi_1+a_2\varphi_2]=a_1F[\varphi_1]+a_2F[\varphi_2]$ 。

考虑下面一类泛函， $F[\varphi]=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$ 。若积分可积，则需要满足 $\varphi(x)\in L^p[a,b]$ $f(x)\in L^q[a,b]$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，其中 $L^q[a,b]$ 表示定义域在 $[a,b]$ 上 q 次可积的函数集合。

另一方面，由 Riesz Representation theorem，$L^p[a,b]$ 上的线性泛函

$F[\varphi]$存在唯一一个函数$f(x)$与之对应。因此我们可以加强φ的要求，降低 f 的要求，来扩大函数$f(x)$的定义范围，或者说，我们用定义泛函的方式得到了一些不属于普通函数空间的函数。

例 考虑连续函数空间，$\varphi(x) \in C[a,b]$，定义泛函$F[\varphi]=\varphi(0)$。

易证该泛函满足线性，连续性，因此$F[\varphi]$是一个广义函数，但是不存在普通函数$f(x)$能表示成$F[\varphi]=\int_a^b f(x)\varphi(x)dx$。

该泛函被称为 Dirac δ 函数，并在形式上表示为

$$F[\varphi]=<\delta,\varphi>$$

函数型/正则型广义函数，$f[\phi]=\langle f,\phi\rangle=\int_a^b f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$，f(x)在区域内是绝对可积函数。

反之，不存在普通函数表示的泛函被称为**非正则型/奇异型广义函数。**

对于定义在C^∞上的广义函数F（C^∞是无穷可微的函数空间），对于任意$\varphi\in\Omega,\Omega\subset C^\infty$，都成立$F[\varphi]=0$，**则称$F$在区域$\Omega$中值为 0.**

根据此定义，广义函数F_1-F_2,如果在区间Ω中取零值，则称在Ω中F_1与F_2相等。

因此广义函数在R^n的某些开子集上等于一个普通函数，例如δ仅在包含原点的开集内是非正则广义的，不包含原点的任意开集上取值恒为 0。

广义函数 F 取零值的最大开集的余集称为**广义函数的支集、支撑，记为 supp F.**

例，广义函数δ的支集为原点

参考书目:

谷超豪，李大潜，陈恕行，郑宋穆，谭永基．数学物理方程（第二版），高等教育出版社