前情提要

在物理研究中，我们需要一类特殊的连续分布函数，来描述集中分布的量，比如脉冲、点电荷、瞬时受力等等。因此我们借助广义函数来扩展函数的定义范围。

1. 广义函数的定义、以及表示方式 $F[\varphi]=<f,\varphi>=\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$
2. 认为 f 与泛函 F 等价，不区别对待。因此可以借助广义函数得到的非正则型广义函数，扩展原有的函数范围。
3. Dirac delta 函数的定义。

课时 2 广义函数的运算

（一）广义函数序列的弱极限

若有一列广义函数 $\{f_n\}$，对于基本函数空间内任一给定的元素 $\varphi(x)$，当

$n\to\infty$，有

$$\lim_{n\to\infty}<f_n-f,\varphi>=0$$

则称 $\{f_n\}$ 的极限是 f （或弱收敛于 f ）。

这个定义可以帮助我们用正则型广义函数逼近得到非正则型广义函数。

对于正则型广义函数列，如果满足

$\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)=\begin{cases}\infty & x=0\\ 0 & x\neq 0\end{cases}$ 且任意给定的区域 $(-a,a)$ 内积分，有 $\int_{-a}^{a} f_\varepsilon(x)dx=1$。

我们有 $\lim\limits_{\varepsilon\to\varepsilon_0} f_\varepsilon(x)=\delta(x)$

例 1， $f_n(t)=\begin{cases} ne^{-n(t-t_0)} & t>t_0\\ 0 & t\leq t_0\end{cases}$，对于任意的 $\varphi\in C^\infty$，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_0}^{\infty} ne^{-n(t-t_0)}\varphi(t)dt-\varphi(0)=\int_0^{\infty} e^{-t'}\lim_{n\to\infty}\varphi(t'/n)dt'-\varphi(0)$$

$$=\int_0^{\infty} e^{-t'}\lim_{n\to\infty}\varphi(t'/n)dt'-\varphi(0)=\varphi(0)\int_0^{\infty} e^{-t'}dt'-\varphi(0)$$

$$=0$$

因此$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \to \delta(t-t_0)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{\pi\left(x^2+\varepsilon^2\right)}=\delta\left(x\right),\ \ \varepsilon>0$$

定义原则：正则型广义函数的运算按照黎曼积分的规则运算，$\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$。为了保持广义积分运算规则的一致性，我们按照正则型广义函数的运算来定义非正则型广义函数的运算规则。

（二）简单运算

（a）线性运算$\left\langle \alpha_1 f_1+\alpha_2 f_2,\phi\right\rangle=\alpha_1\left\langle f_1,\phi\right\rangle+\alpha_2\left\langle f_2,\phi\right\rangle$

（b）乘法运算$\left\langle \alpha\left(x\right)f\left(x\right),\phi\left(x\right)\right\rangle\equiv\left\langle f\left(x\right),\alpha\left(x\right)\phi\left(x\right)\right\rangle$,其中$\alpha(x)\in C^\infty$**是无穷可微函数。**

例 1，$\left\langle \alpha\left(x\right)\delta\left(x-x_0\right),\phi\left(x\right)\right\rangle=\left\langle \delta\left(x-x_0\right),\alpha\left(x\right)\phi\left(x\right)\right\rangle=\alpha\left(x_0\right)\phi\left(x_0\right)$

$\left\langle \alpha\left(x_0\right)\delta\left(x-x_0\right),\phi\left(x\right)\right\rangle=\alpha\left(x_0\right)\left\langle \delta\left(x-x_0\right),\phi\left(x\right)\right\rangle=\alpha\left(x_0\right)\phi\left(x_0\right)$

$\therefore \alpha\left(x\right)\delta\left(x-x_0\right)=\alpha\left(x_0\right)\delta\left(x-x_0\right)$

例 2，$x\delta\left(x\right)=0$

（三）复合函数的运算（定义）

若 $y=T(x)$ 和它的反函数 $x=T^1(y)$ 都是无穷可微函数。

$$\left\langle f\left[T\left(x\right)\right],\phi\left(x\right)\right\rangle=\left\langle f\left(x\right),\left|\frac{\mathrm{d}T^{-1}\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right|\phi\left[T^{-1}\left(x\right)\right]\right\rangle$$

$$\left\langle f\left[T^{-1}\left(x\right)\right],\phi\left(x\right)\right\rangle=\left\langle f\left(x\right),\left|\frac{\mathrm{d}T\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right|\phi\left[T\left(x\right)\right]\right\rangle$$

$$\begin{aligned}\left\langle f\left[T\left(x\right)\right],\phi\left(x\right)\right\rangle&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left[T\left(x\right)\right]\phi\left(x\right)\mathrm{d}x\\&=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(y\right)\phi\left[T^{-1}\left(y\right)\right]\cdot\left|\frac{\mathrm{d}T^{-1}\left(y\right)}{\mathrm{d}y}\right|\mathrm{d}y\\&=\left\langle f\left(x\right),\left|\frac{\mathrm{d}T^{-1}\left(x\right)}{\mathrm{d}x}\right|\phi\left[T^{-1}\left(x\right)\right]\right\rangle\end{aligned}$$

例 1 平移变换

$$T(x)=x+x_0,\ T^{-1}(x)=x-x_0$$

$$\langle\delta(x-x_0),\phi(x)\rangle=\langle\delta(x),\phi(x+x_0)\rangle=\phi(x_0)$$

例 2 原点反射 $T(x)=-x$, $T^{-1}(x)=-x$

$$\begin{aligned}\langle\delta(-x),\phi(x)\rangle&=\langle\delta(x),\phi(-x)\rangle\\&=\phi(0)=\langle\delta(x),\phi(x)\rangle\end{aligned}$$

$$\therefore\delta(-x)=\delta(x)$$

例 3 相似变换 $T(x)=\alpha x$，α 是常数

$$\begin{aligned}\langle\delta(\alpha x),\phi(x)\rangle&=\left\langle\delta(x),\frac{1}{|\alpha|}\phi\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right\rangle\\&=\frac{1}{|\alpha|}\phi(0)=\frac{1}{|\alpha|}\langle\delta(x),\phi(x)\rangle\end{aligned}$$

（四）若 $y=T(x)$ 连续，且只有单根 x_n，并在 x_n 处可导，则定义

$$\delta[T(x)]=\sum_n\frac{\delta(x-x_n)}{|T'(x_n)|}$$

例 1 $\delta(|x|-1)=\delta(x+1)+\delta(x-1)$

例 2 $\delta(\sin x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-n\pi)$

（五）广义函数的微商和积分（定义）

广义函数的微商

$$\left\langle\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x},\phi\right\rangle\equiv-\left\langle f,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x}\right\rangle$$

广义函数的积分

若 $\left\langle\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x},\varphi\right\rangle=\langle f,\varphi\rangle$ 则 $\int f(x)\mathrm{d}x\equiv g(x)+C$ 。

例 1 $\langle\delta'(x),\varphi(x)\rangle=-\langle\delta(x),\varphi'(x)\rangle=-\varphi'(0)$

$$\langle\delta''(x),\varphi(x)\rangle=-\langle\delta'(x),\varphi'(x)\rangle=\langle\delta(x),\varphi''(x)\rangle=\varphi''(0)$$

例 2 **Heaviside 函数，** $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x},\varphi\right\rangle=-\left\langle H,\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right\rangle$$
$$=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\varphi(0)$$
$$=\langle\delta(x),\varphi(x)\rangle$$
$$\therefore\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}=\delta(x);\quad\int\delta(x)\,\mathrm{d}x=H(x)+C$$

$H(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\delta(y)dy$ **（非常重要）**

（六）卷积 $<f*g,\varphi>=<f(x),<g(y),\varphi(x+y)>>$

$$\int dx\int dy[f(y)g(x-y)]\,\varphi(x)$$
$$=\int dyf(y)\int dxg(x-y)\varphi(x)$$

(七)多元广义函数（Dirac δ 函数）

定义 $\delta(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\delta(x_1)\delta(x_2)\cdots\delta(x_n)$

1.平面极坐标

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r}$$
$$\langle\delta(x-x_0)\delta(y-y_0),\phi(x,y)\rangle=\phi(x_0,y_0)=\phi(r_0,\phi_0)$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)}{r}\phi(r,\phi)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$$

2.**柱坐标**

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(z-z_0)$$

3.**球坐标**

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\delta(r-r_0)\delta(\phi-\phi_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)$$

$$\mathrm{d}^3\mathbf{r}=\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\;=r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\vartheta$$

例 3 证明广义函数 $\nabla\cdot\frac{\mathbf{e}_\mathrm{r}}{\mathbf{r}^2}=4\pi\delta(\mathbf{r})$

当 $r \neq 0$

$$\nabla\cdot\frac{\mathbf{e_r}}{\mathbf{r}^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)$$
$$=\left(\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}-3x^2(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right)+\cdots$$
$$=\frac{3(x^2+y^2+z^2)-3x^2-3y^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}=0$$

$$<\nabla\cdot\frac{\mathbf{e_r}}{\mathbf{r}^2},g>=\int_{vol}dV(\nabla\frac{\mathbf{e_r}}{r^2})g(r)$$
$$=\int_{sur}dSg(r)\frac{\mathbf{e_r}}{r^2}\mathbf{e_r}r^2-\int_{vol}dV(\frac{\mathbf{e_r}}{r^2})\nabla g(r)$$
$$=4\pi g(a)-4\pi[g(a)-g(0)]$$
$$=4\pi g(0)$$

第三课时 广义函数的傅里叶变换

傅里叶变换的定义：对于任意给定的绝对可积函数 f，可以定义傅里叶变换为，

$$\hat{f}(\mathbf{q})=F[f(\mathbf{x})]=\int_{\mathbf{R^n}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\mathbf{dx}\,f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{qx}}$$
$$f(\mathbf{x})=F^{-1}[\hat{f}(\mathbf{q})]=\int_{\mathbf{R^n}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n}\mathbf{dx}\,\hat{f}(\mathbf{q})e^{i\mathbf{qx}}$$

傅里叶变换是一个同构映射，因此变换之后， $\hat{f}(\mathbf{q})$ 与原函数 $f(\mathbf{x})$ 包含的信息完全相同。傅里叶变换在图像处理与信号处理中具有非常重要的用途。因为图像或信号中噪音是局部的扰动，没有长距离的关联；而有规律的图像和信号则是大尺度关联的。因此在信号、图像处理中，可以通过去掉傅里叶变换之后，去掉 $\hat{f}(\mathbf{q})$ 中的高频部分，也就是对应空间关联尺度比较小的一部分信息，达到降噪的效果。

广义函数傅里叶变换的定义

$$<F[f],\varphi>=<f,F[\varphi]>$$
$$<F[\hat{f}],\varphi>=<\hat{f},F^{-1}[\varphi]>$$

这么定义的原因，

$$<F[f],\varphi> = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx(\int dy f(y)e^{-ixy})\varphi(x)$$
$$= \int dy f(y)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\varphi(x)e^{-ixy} = \int dy f(y)\hat{\varphi}(y)$$
$$= <f, F[\varphi]>$$

例1， Dirac delta 函数的傅里叶变换

$$<F[\delta(x-x_0)],\varphi> = <\delta(x-x_0), F[\varphi]>$$
$$= \hat{\varphi}(x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dye^{-ix_0y}\varphi(y) = <\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0y}, \varphi(y)>$$

$$F[\delta(x-x_0)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0y}$$

因此我们得到，$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-x_0)e^{-ixy} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix_0y}$

当 $x_0 = 0$，得到 $F[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

由逆变换的定义，$F^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}] = \delta(x)$

得到 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dye^{ixy} = \delta(x)$（非常重要）。

用广义函数弱收敛的性质证明该公式，见教材 P86

广义函数傅里叶变换的性质

1. 线性 $F[a_1f_1 + a_2f_2] = a_1F[f_1] + a_2F[f_2]$

2. 微分 $F[f'(x)](q) = iqF[f(x)](q) = iq\hat{f}(q)$

$$<F[f'],\varphi> = <f', F[\varphi]>$$
$$= -<f, F'[\varphi]>$$
$$= -\int dx f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dq\ \text{-}iqe^{-iqx}\varphi(q)$$
$$= -\int dq\ \text{-}iq\varphi(q)\int dx f(x)e^{-iqx}$$
$$= <\mathrm{iq}F(f), \varphi>$$

3. 平移 $F[f(x-a)] = e^{-iqa}F[f(x)]$

$$
\begin{aligned}
&< F[f(x-a)],\varphi> = < f(x-a),F[\varphi]> \\
&= < f(x),F[\varphi](x+a)> \\
&= \int dx\, f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq \text{ -}iqe^{-iq(x+a)}\varphi(q) \\
&= \int dq \text{ -}iq\varphi(q)e^{-iqa}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int dx\, f(x)e^{-iqx} \\
&= < e^{-iqa}f,\varphi>
\end{aligned}
$$

4. 卷积 F[f*g]=F[f]F[g]

$$
\begin{aligned}
&< F[f*g],\varphi> = < f*g,F[\varphi]> \\
&= < f(x),< g(y),F[\varphi](x+y)>> \\
&= < f(x),< e^{-ixy}F[g](y),\varphi(y)>> \\
&= << f,e^{-ixy}> F[g](y),\varphi(y)> \\
&= < F[f]F[g],\varphi>
\end{aligned}
$$

5. 定义积分 F[$\int\limits_{-\infty}^{x} f(y)dy$]=$\dfrac{\widehat{f}(q)}{iq}+\pi\widehat{f}(0)\delta(q)$

例. 求广义函数$H(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$的广义傅里叶变换

$$H(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\delta(y)dy$$

由定义 5，得到

$F[H(x)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}[\dfrac{1}{iq}+\pi\delta(q)]$，从而$\int\limits_{0}^{\infty}dxe^{-iqx}=\dfrac{1}{iq}+\pi\delta(q)$ **（非常重要）**

参见书 P88，用广义函数弱收敛解释$H(x)$傅里叶变换为$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}[\dfrac{1}{iq}+\pi\delta(q)]$。