# 数学物理方程的建立

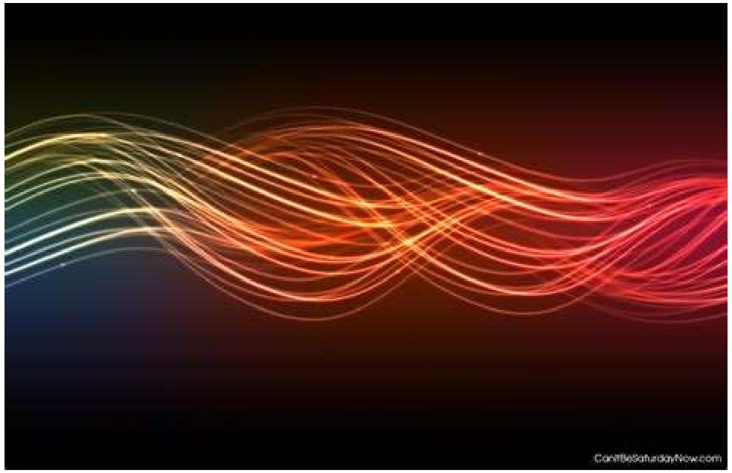
猜测物理图像

根据物理图像去预言新现象（计算）

发现新的现象

实验验证

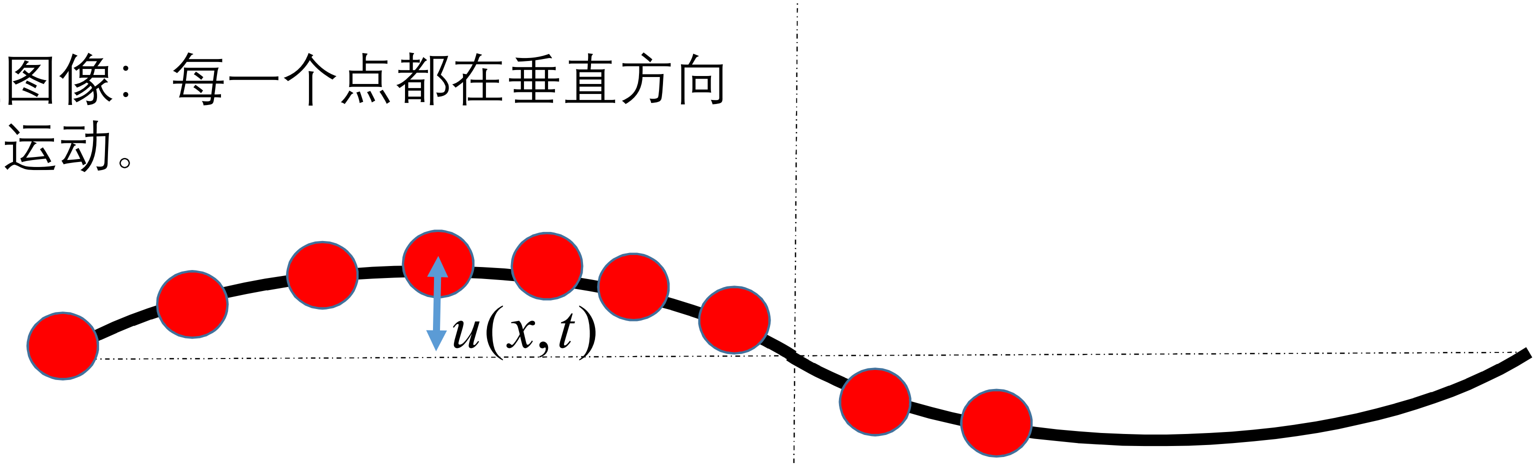
# 1.弦振动问题



$$
\begin{cases}
u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0 \\
u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0, & t > 0 \\
u\big|_{t=0} = \phi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), & 0 \le x \le l
\end{cases}
$$

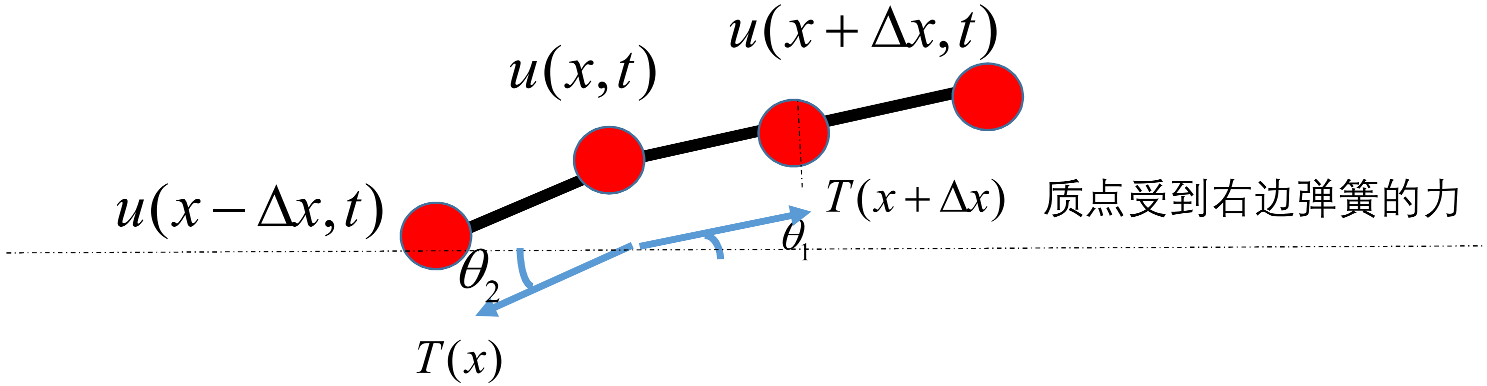
# 弦振动问题的数学模型

物理图像：每一个点都在垂直方向上下运动。




$u(x,t)$ 描述t时刻小球偏离水平方向的距离

# 模型的数学推导




物理图像

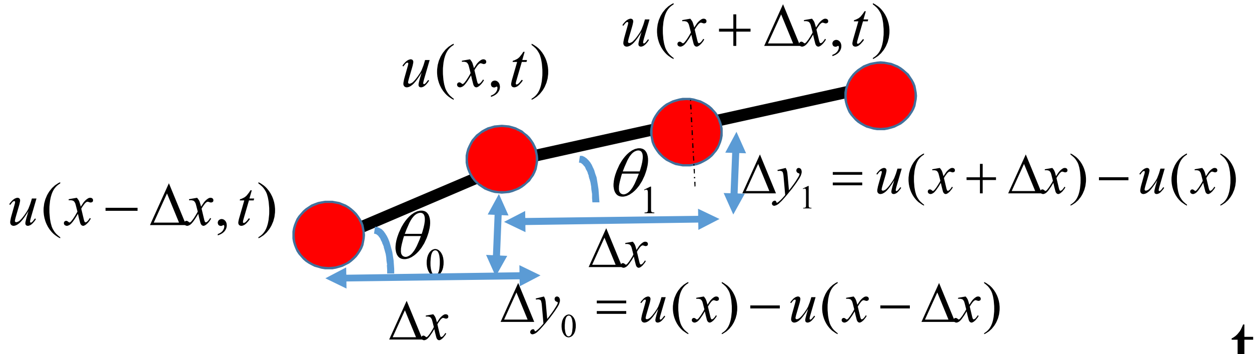
- **质点受力指向近邻质点。（牛顿第三定律）**
- **水平方向不运动，所以水平方向受合力为0。**

水平方向 $T(x)\cos(\theta_0)-T(x+\Delta x)\cos(\theta_1)=0$

垂直方向 $T(x+\Delta x)\sin(\theta_2)-T(x)\sin(\theta_1)=\Delta m\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$

假定弦的质量分布均匀 $\Delta m=m/(L/\Delta x)$

# 模型的数学推导




$$\tan(\theta_0) = \frac{\Delta y_0}{\Delta x}$$

$$\cos(\theta_1) = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_1{}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\Delta y_1/\Delta x)^2}} \qquad \cos(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{1+(\Delta y_0/\Delta x)^2}}$$

$$\sin(\theta_1) = \frac{\Delta y_1}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_1{}^2}} \qquad \tan(\theta_1) = \frac{\Delta y_1}{\Delta x} \qquad \sin(\theta_0) = \frac{\Delta y_0}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_0{}^2}}$$

# 模型的数学推导

$$T(x)\cos(\theta_0)=T(x+\Delta x)\cos(\theta_1)$$

$$T(x)\frac{\Delta y_1/\Delta x}{\sqrt{1+(\Delta y_1/\Delta x)^2}}-T(x)\frac{\Delta y_0/\Delta x}{\sqrt{1+(\Delta y_0/\Delta x)^2}}=\Delta m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

**T(x)如果不随x变化将极大的简化问题，这就要求theta取值非常小。**

假定弦振动的空间变化很小

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}\ll 1$$

$$T\frac{\Delta y_1}{\Delta x}-T\frac{\Delta y_0}{\Delta x}=\Delta m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

# 模型的数学推导

$$T\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - T\frac{\Delta y_0}{\Delta x} = \Delta m\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta m = m/(L/\Delta x)$$

$$\frac{T}{\Delta x}\left(\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y_0}{\Delta x}\right) = \frac{m}{L}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Delta x \to 0$$

$$Tu_{xx} = \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

# 模型的数学推导

用到的假设

- **弦上每一点受力沿切线方向**
- **弦上的点不在水平方向运动**

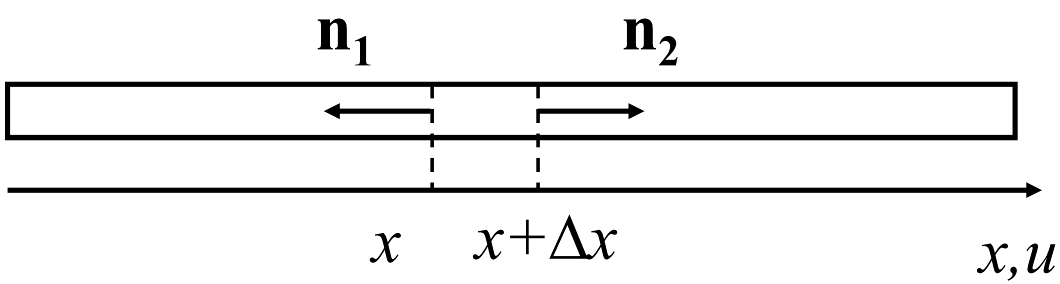
描述物理图像需要的假设

- 假定弦振动的空间变化很小
- 假定弦的质量分布均匀

为方便解决问题建立的假设

根据物理图像建立模型 $\xrightarrow{\text{离散}}$ 受力分析、牛顿力学定律 $\xrightarrow{\text{连续}}$ 微分方程

# 2.弦振动问题（纵振动）



# 建立图像

$u(x,t)$

材料被压缩后的弹性力正比于材料被压缩的长度。

$$k = \frac{Y}{\Delta x}$$

每一个质点之间用一根弹簧连接起来，正常状态下，质点处于平衡位置。

$u(x,t)$ 质点x偏离平衡位置的距离或者大小

# 受力分析

$u(x,t)$

质点右边
弹簧形变

$$u(x+\Delta x,t)-u(x,t)$$

质点左边
弹簧形变

$$u(x,t)-u(x-\Delta x,t)$$

质点右边受力 $\dfrac{Y}{\Delta x}(u(x+\Delta x,t)-u(x,t))$

质点左边受力 $\dfrac{Y}{\Delta x}(u(x,t)-u(x-\Delta x,t))$

假定质量均匀分布

$$\Delta m = m/(L/\Delta x)$$

质点的牛顿第二定律方程

$$\frac{Y}{\Delta x}(u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)-2u(x,t)) = \Delta m u''(x,t)$$

# 导出模型

$$\frac{Y}{\Delta x}(u(x+\Delta x,t)+u(x-\Delta x,t)-2u(x,t))=\Delta m u''(x,t)$$

$$\Delta x \to 0$$

$$Y u_{xx} = \rho u_{tt}$$