University of Mars
Institute of Intergalactic Travel

Linear Maps

Flower

Linear Algebar

A. The Vector Space of Linear Maps

Problem 3

假设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$，其中 $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$，使得

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都成立.

Proof. 对于任意的 $x \in \mathbb{F}^n$，我们可以写

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n,$$

其中 $e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的标准基. 因为 T 是线性的，我们有

$$Tx = T(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1Te_1 + \cdots + x_nTe_n.$$

现在对于 $Te_k \in \mathbb{F}^m$, 其中 $k = 1, \dots, n$, 都存在 $A_{1,k}, \dots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \cdots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \dots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_kTe_k = (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^{n} (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$，其中 $j = 1, \dots, m$ 并且 $k = 1, \dots, n$ 使得等式成立. $\square$

Problem 4

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 并且 $v_1, \dots, v_m$ 是 V 中的一组向量，其使得 $Tv_1, \dots, Tv_m$ 在 W 上的线性独立。证明 $v_1, \dots, v_m$ 线性独立.

Proof. 假设 $v_1, \ldots, v_m$ 不线性独立，则有方程

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$$

有一组 a_j 不全为零的解，接下来

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_1 T v_1 + \cdots + a_m T v_m = 0$$

则存在一组不全为零的 a_j 使得上式成立。与条件矛盾，故假设不成立。原命题正确. □

Problem 7

证明如果 $\dim V = 1$ 并且 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得对于任意的 $v \in V$ 都有 $Tv = \lambda v$.

Proof. 因为 $\dim V = 1$，所以 V 的基为单向量, 设为 e 则存在 α, λ 使得下式成立

$$Tv = T(\alpha e) = \alpha T e = \alpha \lambda e = \lambda v$$

其中 λ 即为所需。原命题证明完毕

□

Problem 8

找到一个 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 函数 φ, 且对于任意的 $a \in \mathbb{R}$ 和 $V \in \mathbb{R}^2$ 都满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

并且 φ 不是线性的.

Proof. 找到如下函数

$$\varphi = \ln(xy), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

则可有

$$\varphi(av) = \varphi[(ax, ay)] = a \ln(xy) = a\varphi(v)$$

但是 φ 不满足

$$\varphi(\nu + \omega) \neq \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$$

故 φ 不是线性的.

□

Problem 9

给出一个 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的函数 φ，对于所有的 $z, \omega \in \mathbb{C}$ 有

$$\varphi(\omega + z) = \varphi(\omega) + \varphi(z)$$

但是 φ 不是线性的.

Proof. 定义

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x + yi \mapsto x - yi. \end{gathered}$$

然后对于 $x_1+y_1i, x_2+y_2i\in\mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)) &= \varphi((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)\\ &= (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i\\ &= (x_1-y_1)i+(x_2-y_2)i\\ &= \varphi(x_1+y_1i)+\varphi(x_2+y_2i)\end{aligned}$$

所以 φ 满足加法分配律. 然而

$$\varphi(i\cdot i)=\varphi(-1)=-1$$

此外

$$i\cdot\varphi(i)=i(-i)=1$$

则 φ 不是线性的. $\square$

Problem 10

设 U 是 V 的子集且 $U\neq V$. 设 $S\in\mathcal{L}(U,W)$ 且 $S\neq 0$. 定义 $T:V\to W$

$$Tv=\begin{cases}S\nu, & \text{if } v\in U\\ 0, & \text{if } v\in V \text{ and } v\notin U\end{cases}\tag{1}$$

证明 T 不是 V 上的线性映射.

Proof. 令

$$v\in U,\ \omega\in V \text{ and } \omega\notin U$$

所以有

$$v+\omega\in V \text{ and } v+\omega\notin U$$

故下面不等式成立

$$T(v+\omega)\neq Tv+T\omega$$

故 T 不是 V 上的线性映射. $\square$

Problem 11

Suppose V is finite-dimensional. Prove that every linear map on a subspace of V can be extended to a linear map on V. In other words, show that if U is a suspace of V and $S\in\mathcal{L}(U,W)$, then there exists $T\in\mathcal{L}(V,W)$ such that $Tu=Su$ for all $u\in U$.

Proof. 设 U 为 V 的子集, 则 U 存在一组基向量 $v_1,\dots,v_m$. 将该组基向量扩展为 $v+1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n$, 并且为 V 的一组基向量. 则易知对于任意的 $z\in V$, 都可以找到一组 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ 使得 $z=\sum_{k=1}^n a_kv_k$.

我们设

$$\begin{aligned}T:V&\to w\\ \sum_{k=1}^n a_kv_k&\to\sum_{k=1}^m a_kSv_k+\sum_{k=m+1}^n a_kv_k\end{aligned}$$

显然 $Tu=Su$, 仅需证明 T 是线性映射即可.

证明满足分配律设

$$z_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n,\ z_2 = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

则

$$\begin{aligned} T(z_1+z_2) &= \sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)Sv_k + \sum_{k=m+1}^{n}(a_k+b_k)v_k \\ &= \sum_{k=1}^{m}a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}a_kv_k + \sum_{k=1}^{m}b_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}b_kv_k \\ &= Tz_1 + Tz_2 \end{aligned}$$

证明满足数量乘法, 设 $\lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned} T(\lambda z) &= \sum_{k=1}^{m}\lambda a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}\lambda a_kv_k \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{m}a_kSv_k + \lambda\sum_{k=m+1}^{n}a_kv_k \\ &= \lambda Tz \end{aligned}$$

□

Problem 12

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 0$, 并设 W 是无限维的向量空间。证明 $\mathcal{L}(V,W)$ 是无限维的向量空间.

Proof. 设 $v \in V$ 并且设 $\omega_1,\ldots$ 是 W 的一组基. 则对于任意的 m,$\omega_1,\ldots,\omega_m$ 都独立.(见 2a/14)

定义 $T_j(v) = \omega_j$, 显然 $T_j \in \mathcal{L}(V,W)$ 仅需证明数列 $T_1,\ldots$ 中，任意的 m,$T_1,\ldots,T_m$ 都独立. 设

$$a_1T_1 + \cdots + a_nT_n = 0$$

仅需说明 a_j 全为零是唯一解.

$$a_1T_1v + \cdots + a_nT_nv = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n = 0$$

因为对于任意的 m,$\omega_1,\ldots,\omega_m$ 都独立. 说明 a_j 全为零是唯一解. 证得 $\mathcal{L}(V,W)$ 是无限维的向量空间. □

Problem 13

设 $v_1,\ldots,v_n$ 是 V 上的一组线性独立的数列. 同时设 $W \neq 0$. 证明存在 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$ 使得不存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1,\ldots,m)$.

Proof. 假设对于所有的 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$ 使得存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1,\ldots,m)$. 上面假设说明 ω_k 独立。显然可以找到一组 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$, 且它们不相互独立。故假设不成立，所以原命题正确. □

Problem 14

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 2$, 证明存在 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $ST \neq TS$.

Proof. 显然只要找到两个矩阵 A, B, 使得 $AB \neq BA$ 即可. □