

Linear Maps

Flower

Linear Algebra

A. The Vector Space of Linear Maps

Problem 3

假设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$, 其中 $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$, 使得

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都成立.

Proof. 对于任意的 $x \in \mathbb{F}^n$, 我们可以写

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$$

其中 e_1, \dots, e_n 是 \mathbb{F}^n 的标准基. 因为 T 是线性的, 我们有

$$Tx = T(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1Te_1 + \dots + x_nTe_n.$$

现在对于 $Te_k \in \mathbb{F}^m$, 其中 $k = 1, \dots, n$, 都存在 $A_{1,k}, \dots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \dots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \dots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_kTe_k = (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^n (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n A_{1,k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$, 其中 $j = 1, \dots, m$ 并且 $k = 1, \dots, n$ 使得等式成立. \square