

Linear Maps

Flower

Linear Algebra

A. The Vector Space of Linear Maps

Problem 3

假设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$, 其中 $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$, 使得

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都成立.

Proof. 对于任意的 $x \in \mathbb{F}^n$, 我们可以写

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$$

其中 e_1, \dots, e_n 是 \mathbb{F}^n 的标准基. 因为 T 是线性的, 我们有

$$Tx = T(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1Te_1 + \dots + x_nTe_n.$$

现在对于 $Te_k \in \mathbb{F}^m$, 其中 $k = 1, \dots, n$, 都存在 $A_{1,k}, \dots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \dots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \dots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_kTe_k = (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^n (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n A_{1,k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$, 其中 $j = 1, \dots, m$ 并且 $k = 1, \dots, n$ 使得等式成立. \square

Problem 4

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 并且 v_1, \dots, v_m 是 V 中的一组向量, 其使得 Tv_1, \dots, Tv_m 在 W 上的线性独立. 证明 v_1, \dots, v_m 线性独立.

Proof. 假设 v_1, \dots, v_m 不线性独立, 则有方程

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

有一组 a_j 不全为零的解, 接下来

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 T v_1 + \dots + a_m T v_m = 0$$

则存在一组不全为零的 a_j 使得上式成立。与条件矛盾, 故假设不成立。原命题正确。 \square

Problem 7

证明如果 $\dim V = 1$ 并且 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得对于任意的 $v \in V$ 都有 $Tv = \lambda v$.

Proof. 因为 $\dim V = 1$, 所以 V 的基为单向量, 设为 e 则存在 α, λ 使得下式成立

$$Tv = T(\alpha e) = \alpha Te = \alpha \lambda e = \lambda v$$

其中 λ 即为所需。原命题证明完毕 \square

Problem 8

找到一个 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 函数 φ , 且对于任意的 $a \in \mathbb{R}$ 和 $V \in \mathbb{R}^2$ 都满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

并且 φ 不是线性的.

Proof. 找到如下函数

$$\varphi = \ln(xy), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

则可有

$$\varphi(av) = \varphi[(ax, ay)] = a \ln(xy) = a\varphi(v)$$

但是 φ 不满足

$$\varphi(v + w) \neq \varphi(v) + \varphi(w)$$

故 φ 不是线性的。 \square

Problem 9

给出一个 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 的函数 φ , 对于所有的 $z, w \in \mathbb{C}$ 有

$$\varphi(w + z) = \varphi(w) + \varphi(z)$$

但是 φ 不是线性的.

Proof. 定义

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x + yi &\mapsto x - yi. \end{aligned}$$

然后对于 $x_1 + y_1i, x_2 + y_2i \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi((x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i)) &= \varphi((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \\ &= (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)i \\ &= (x_1 - y_1)i + (x_2 - y_2)i \\ &= \varphi(x_1 + y_1i) + \varphi(x_2 + y_2i)\end{aligned}$$

所以 φ 满足加法分配律. 然而

$$\varphi(i \cdot i) = \varphi(-1) = -1$$

此外

$$i \cdot \varphi(i) = i(-i) = 1$$

则 φ 不是线性的. □

Problem 10

设 U 是 V 的子集且 $U \neq V$. 设 $S \in \mathcal{L}(U, W)$ 且 $S \neq 0$. 定义 $T: V \rightarrow W$

$$Tv = \begin{cases} Sv, & \text{if } v \in U \\ 0, & \text{if } v \in V \text{ and } v \notin U \end{cases} \quad (1)$$

证明 T 不是 V 上的线性映射.

Proof. 令

$$v \in U, \omega \in V \text{ and } \omega \notin U$$

所以有

$$v + \omega \in V \text{ and } v + \omega \notin U$$

故下面不等式成立

$$T(v + \omega) \neq Tv + T\omega$$

故 T 不是 V 上的线性映射. □

Problem 11

Suppose V is finite-dimensional. Prove that every linear map on a subspace of V can be extended to a linear map on V . In other words, show that if U is a subspace of V and $S \in \mathcal{L}(U, W)$, then there exists $T \in \mathcal{L}(V, W)$ such that $Tu = Su$ for all $u \in U$.

Proof. 设 U 为 V 的子集, 则 U 存在一组基向量 v_1, \dots, v_m . 将该组基向量扩展为 $v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n$, 并且为 V 的一组基向量. 则易知对于任意的 $z \in V$, 都可以找到一组 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 使得 $z = \sum_{k=1}^n a_k v_k$.

我们设

$$\begin{aligned}T: V &\rightarrow W \\ \sum_{k=1}^n a_k v_k &\rightarrow \sum_{k=1}^m a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^n a_k v_k\end{aligned}$$

显然 $Tu = Su$, 仅需证明 T 是线性映射即可.

证明满足分配律设

$$z_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, \quad z_2 = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

则

$$\begin{aligned} T(z_1 + z_2) &= \sum_{k=1}^m (a_k + b_k)Sv_k + \sum_{k=m+1}^n (a_k + b_k)v_k \\ &= \sum_{k=1}^m a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^n a_kv_k + \sum_{k=1}^m b_kSv_k + \sum_{k=m+1}^n b_kv_k \\ &= Tz_1 + Tz_2 \end{aligned}$$

证明满足数量乘法, 设 $\lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned} T(\lambda z) &= \sum_{k=1}^m \lambda a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^n \lambda a_kv_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^m a_kSv_k + \lambda \sum_{k=m+1}^n a_kv_k \\ &= \lambda Tz \end{aligned}$$

□

Problem 12

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 0$, 并设 W 是无限维的向量空间. 证明 $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的向量空间.

Proof. 设 $v \in V$ 并且设 ω_1, \dots 是 W 的一组基. 则对于任意的 $m, \omega_1, \dots, \omega_m$ 都独立. (见 2a/14)

定义 $T_j(v) = \omega_j$, 显然 $T_j \in \mathcal{L}(V, W)$ 仅需证明数列 T_1, \dots 中, 任意的 m, T_1, \dots, T_m 都独立. 设

$$a_1T_1 + \cdots + a_nT_n = 0$$

仅需说明 a_j 全为零是唯一解.

$$a_1T_1v + \cdots + a_nT_nv = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n = 0$$

因为对于任意的 $m, \omega_1, \dots, \omega_m$ 都独立. 说明 a_j 全为零是唯一解. 证得 $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的向量空间. □

Problem 13

设 v_1, \dots, v_n 是 V 上的一组线性独立的数列. 同时设 $W \neq 0$. 证明存在 $\omega_1, \dots, \omega_m \in W$ 使得不存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k, (k = 1, \dots, m)$.

Proof. 假设对于所有的 $\omega_1, \dots, \omega_m \in W$ 使得存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k, (k = 1, \dots, m)$. 上面假设说明 ω_k 独立. 显然可以找到一组 $\omega_1, \dots, \omega_m \in W$, 且它们不相互独立. 故假设不成立, 所以原命题正确. □

Problem 14

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 2$, 证明存在 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $ST \neq TS$.

Proof. 显然只要找到两个矩阵 A, B , 使得 $AB \neq BA$ 即可. □

B. Null Space and Ranges

Problem 2

假设 V 是一个线性空间并且 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足

$$\text{range } S \subset \text{null } T.$$

证明 $(ST)^2 = 0$

Proof. 因为 $\text{range } S \subset \text{null } T$, 所以对于任意的 $v \in V$ 都有 $TSv = 0$. 所以对于任意的 $u \in V$ 都有

$$(ST)^2 u = S[(TS)Tu] = S0 = 0.$$

证得 $(ST)^2 = 0$ □

Problem 13

设 T 是一个 \mathbb{F}^4 到 \mathbb{F}^2 的线性映射, 且满足

$$\text{null } T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_1 = 5x_2 \text{ and } x_3 = 7x_4$$

证明 T 是满射的.

Proof. 显然 $\dim \text{null } T = 2$, 故

$$\dim \text{range } T = 2.$$

我们易证下面引理

Lemma 1. 设 U 是 V 的子空间, 若 $\dim U = \dim V$, 则 $U = V$.

故有

$$\text{range } T = \mathbb{F}^2$$

说明是满射的. □

Problem 20

设 W 是有限维的并且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明 T 是单射的当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 ST 为 V 上的恒等映射.

Proof. 定义

$$S = \begin{cases} v, & \text{if } u \in Tv \\ 0, & \text{if } u \in W \text{ and } u \notin Tv \end{cases}$$

这样就容易证明原命题成立 □

Problem 21

设 W 是有限维的并且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明 T 是满射的当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W, V)$ 使得 TS 为 W 上的恒等映射.

Proof. (\Rightarrow) Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ is surjective, so that W is necessarily finite-dimensional as well. Let v_1, \dots, v_m be a basis of V and let $n = \dim W$, where $m \geq n$ by surjectivity of T . Note that

$$Tv_1, \dots, Tv_m$$

span W . Thus we may reduce this list to a basis by removing some elements (possibly none, if $n = m$). Suppose this reduced list were $Tv_{i_1}, \dots, Tv_{i_n}$ for some $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$. We define $S \in \mathcal{L}(W, V)$ by its behavior on this basis

$$S(Tv_{i_k}) := v_{i_k} \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

Suppose $w \in W$. Then there exist $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ such that

$$w = a_1Tv_{i_1} + \dots + a_nTv_{i_n}$$

and thus

$$\begin{aligned} TS(w) &= TS(a_1Tv_{i_1} + \dots + a_nTv_{i_n}) \\ &= T(S(a_1Tv_{i_1} + \dots + a_nTv_{i_n})) \\ &= T(a_1S(Tv_{i_1}) + \dots + a_nS(Tv_{i_n})) \\ &= T(a_1v_{i_1} + \dots + a_nv_{i_n}) \\ &= a_1Tv_{i_1} + \dots + a_nTv_{i_n} \\ &= w, \end{aligned}$$

and so TS is the identity map on W .

(\Leftarrow) Suppose there exists $S \in \mathcal{L}(W, V)$ such that $TS \in \mathcal{L}(W, W)$ is the identity map, and suppose by way of contradiction that T is not surjective, so that $\dim \text{range } TS < \dim W$. By the Fundamental Theorem of Linear Maps, this implies

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim \text{null } TS + \dim \text{range } TS \\ &< \dim \text{null } TS + \dim W \end{aligned}$$

and hence $\dim \text{null } TS > 0$, a contradiction, since the identity map can only have trivial null space. Thus T is surjective, as desired. \square

C. Matrices

Problem 1

设 V 和 W 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明对于 V 和 W 的任意基, T 的矩阵都至少有 $\dim \text{range } T$ 个非零元.

Proof. 设 v_1, \dots, v_n 为 V 的基, w_1, \dots, w_m 为 W 的基, $r = \dim \text{range } T$ 和 $s = \dim \text{null } T$. 所以 V 的基中有 s 个映射到 0, r 个映射为非零. 若 $Tv_k \neq 0$, 则存在唯一一组不全为零 (最少有一个不为零) 的 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$Tv_k = \sum_{j=1}^m A_{j,k} w_j$$

能满足 $Tv_k \neq 0$ 的基向量有 $r = \dim \text{range } T$ 个. 故最少有 $\dim \text{range } T$ 个非零元. \square

Problem 3

设 V 和 W 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明存在一个 V 的基和 W 的基, 使得关于这些基, $\mathcal{M}(T)$ 除了第 j 行第 j 列 ($1 \leq j \leq \dim \text{range } T$) 的元素为 1, 其余均为 0.

Proof. 设 R 是 V 的子空间且满足

$$V = R \oplus \text{null } T,$$

设 r_1, \dots, r_m 为 R 的基 (其中 $m = \dim \text{range } T$), 并设 v_1, \dots, v_n 为 $\text{null } T$ 的基 (其中 $n = \dim \text{null } T$). 那么 $r_1, \dots, r_m, v_1, \dots, v_n$ 为 V 的基. 而且也易得 Tr_1, \dots, Tr_m 是 $\text{range } T$ 的基. 因此扩展上述的基使之成为 W 的基. 设 $Tr_1, \dots, Tr_m, w_1, \dots, w_p$ 是这样的基 (其中 $p = \dim W - m$). 那么对于 $j = 1, \dots, m$, 我们有

$$Tr_j = \left(\sum_{i=1}^m \delta_{i,j} \cdot Tr_i \right) + \left(\sum_{k=1}^p 0 \cdot w_k \right),$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克函数. 因此在 $\mathcal{M}(T)$ 的第 j 行中只有第 j 列为 1, 其中 j 取从 1 到 $m = \dim \text{range } T$ 任意值. 因此 $Tr_1 = \dots = Tr_m = 0$, $\mathcal{M}(T)$ 的剩余行全为零. 因此 $\mathcal{M}(T)$ 有所需的形式. \square

Problem 6

设 V 和 W 都是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明 $\dim \text{range } T = 1$ 当且仅当 V 和 W 各有一个基使得关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1.

Proof. 设 v_1, \dots, v_n 是 V 的基, w_1, \dots, w_m 是 W 的基. 关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1. 故

$$Tv_i = w_1 + \dots + w_m$$

因此 $\text{range } T = \text{span}(Tv_1, \dots, Tv_n) = \text{span}(w_1 + \dots + w_m)$, 故 $\dim \text{range } T = 1$

反过来, 若 $\dim \text{range } T = 1$, 则 $\dim \text{null } T = \dim V - 1$. 设 v_1, \dots, v_n 是 V 的基且 $v_2, \dots, v_n \in \text{null } T$. 显然我们可以使 Tv_1, \dots, w_m 为 W 的基. 使 $w_1 = Tv_1 - w_2 - \dots - w_m$ 和 $e_1 = v_1$, $e_i = v_i + v_1$ 其中 $i = 2, \dots, n$. 则有

$$Te_1 = Te_i = w_1 + \dots + w_m.$$

显然 e_1, \dots, e_n 是 V 的基, w_1, \dots, w_m 是 W 的基. 且关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1. \square