

# Linear Maps

Flower

Linear Algebra

## A. The Vector Space of Linear Maps

### Problem 3

假设  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ . 证明存在  $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ , 其中  $j = 1, \dots, m$   $k = 1, \dots, n$ , 使得

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$  都成立.

*Proof.* 对于任意的  $x \in \mathbb{F}^n$ , 我们可以写

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n,$$

其中  $e_1, \dots, e_n$  是  $\mathbb{F}^n$  的标准基. 因为  $T$  是线性的, 我们有

$$Tx = T(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1Te_1 + \dots + x_nTe_n.$$

现在对于  $Te_k \in \mathbb{F}^m$ , 其中  $k = 1, \dots, n$ , 都存在  $A_{1,k}, \dots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$  使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \dots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \dots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_kTe_k = (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^n (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n A_{1,k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^n A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在  $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ , 其中  $j = 1, \dots, m$  并且  $k = 1, \dots, n$  使得等式成立.  $\square$

### Problem 4

设  $T \in \mathcal{L}(V, W)$  并且  $v_1, \dots, v_m$  是  $V$  中的一组向量, 其使得  $Tv_1, \dots, Tv_m$  在  $W$  上的线性独立. 证明  $v_1, \dots, v_m$  线性独立.

*Proof.* 假设  $v_1, \dots, v_m$  不线性独立, 则有方程

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

有一组  $a_j$  不全为零的解, 接下来

$$T(a_1 v_1 + \dots + a_m v_m) = a_1 T v_1 + \dots + a_m T v_m = 0$$

则存在一组不全为零的  $a_j$  使得上式成立。与条件矛盾, 故假设不成立。原命题正确。  $\square$

#### Problem 7

证明如果  $\dim V = 1$  并且  $T \in \mathcal{L}(V, V)$ , 存在  $\lambda \in \mathbb{F}$  使得对于任意的  $v \in V$  都有  $Tv = \lambda v$ .

*Proof.* 因为  $\dim V = 1$ , 所以  $V$  的基为单向量, 设为  $e$  则存在  $\alpha, \lambda$  使得下式成立

$$Tv = T(\alpha e) = \alpha Te = \alpha \lambda e = \lambda v$$

其中  $\lambda$  即为所需。原命题证明完毕  $\square$

#### Problem 8

找到一个  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  函数  $\varphi$ , 且对于任意的  $a \in \mathbb{R}$  和  $V \in \mathbb{R}^2$  都满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

并且  $\varphi$  不是线性的.

*Proof.* 找到如下函数

$$\varphi = \ln(xy), (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

则可有

$$\varphi(av) = \varphi[(ax, ay)] = a \ln(xy) = a\varphi(v)$$

但是  $\varphi$  不满足

$$\varphi(v + \omega) \neq \varphi(v) + \varphi(\omega)$$

故  $\varphi$  不是线性的.  $\square$