University of Mars
Institute of Intergalactic Travel

# Linear Maps

*Flower*

Linear Algebar

## A. The Vector Space of Linear Maps

**Problem 3**

假设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ ，其中 $j = 1, \ldots, m$ $k = 1, \ldots, n$，使得

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \cdots + A_{1,n}x_n, \ldots, A_{m,1}x_1 + \cdots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个 $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都成立.

*Proof.* 对于任意的 $x \in \mathbb{F}^n$，我们可以写

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n,$$

其中 $e_1, \ldots, e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的标准基. 因为 $T$ 是线性的，我们有

$$Tx = T(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 Te_1 + \cdots + x_n Te_n.$$

现在对于 $Te_k \in \mathbb{F}^m$, 其中 $k = 1, \ldots, n$, 都存在 $A_{1,k}, \ldots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \cdots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \ldots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_k Te_k = (A_{1,k}x_k, \ldots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^{n} (A_{1,k}x_k, \ldots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left( \sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ ，其中 $j = 1, \ldots, m$ 并且 $k = 1, \ldots, n$ 使得等式成立. □

**Problem 4**

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 并且 $v_1, \ldots, v_m$ 是 $V$ 中的一组向量，其使得 $Tv_1, \ldots, Tv_m$ 在 W 上的线性独立。证明 $v_1, \ldots, v_m$ 线性独立.

*Proof.* 假设 $v_1, \ldots, v_m$ 不线性独立，则有方程

$$a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m = 0$$

有一组 $a_j$ 不全为零的解，接下来

$$T(a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m) = a_1 T v_1 + \cdots + a_m T v_m = 0$$

则存在一组不全为零的 $a_j$ 使得上式成立。与条件矛盾，故假设不成立。原命题正确. □

**Problem 7**

证明如果 $\dim V = 1$ 并且 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得对于任意的 $v \in V$ 都有 $Tv = \lambda v$.

*Proof.* 因为 $\dim V = 1$，所以 $V$ 的基为单向量, 设为 $e$ 则存在 $\alpha, \lambda$ 使得下式成立

$$Tv = T(\alpha e) = \alpha T e = \alpha \lambda e = \lambda v$$

其中 $\lambda$ 即为所需。原命题证明完毕

□

**Problem 8**

找到一个 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 函数 $\varphi$, 且对于任意的 $a \in \mathbb{R}$ 和 $V \in \mathbb{R}^2$ 都满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

并且 $\varphi$ 不是线性的.

*Proof.* 找到如下函数

$$\varphi = \ln(xy), \ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

则可有

$$\varphi(av) = \varphi[(ax, ay)] = a \ln(xy) = a\varphi(v)$$

但是 $\varphi$ 不满足

$$\varphi(\nu + \omega) \neq \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$$

故 $\varphi$ 不是线性的.

□

**Problem 9**

给出一个 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的函数 $\varphi$，对于所有的 $z, \omega \in \mathbb{C}$ 有

$$\varphi(\omega + z) = \varphi(\omega) + \varphi(z)$$

但是 $\varphi$ 不是线性的.

*Proof.* 定义

$$\begin{gathered} \varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ x + yi \mapsto x - yi. \end{gathered}$$

然后对于 $x_1+y_1i, x_2+y_2i \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)) &= \varphi((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)\\ &= (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i\\ &= (x_1-y_1)i+(x_2-y_2)i\\ &= \varphi(x_1+y_1i)+\varphi(x_2+y_2i)\end{aligned}$$

所以 $\varphi$ 满足加法分配律. 然而

$$\varphi(i\cdot i)=\varphi(-1)=-1$$

此外

$$i\cdot\varphi(i)=i(-i)=1$$

则 $\varphi$ 不是线性的. □

**Problem 10**

设 $U$ 是 $V$ 的子集且 $U \neq V$. 设 $S \in \mathcal{L}(U,W)$ 且 $S \neq 0$. 定义 $T: V \to W$

$$Tv = \begin{cases} S\nu, & \text{if } v \in U \\ 0, & \text{if } v \in V \text{ and } v \notin U \end{cases} \tag{1}$$

证明 $T$ 不是 $V$ 上的线性映射.

*Proof.* 令

$$v \in U,\ \omega \in V \text{ and } \omega \notin U$$

所以有

$$v+\omega \in V \text{ and } v+\omega \notin U$$

故下面不等式成立

$$T(v+\omega) \neq Tv + T\omega$$

故 $T$ 不是 $V$ 上的线性映射. □

**Problem 11**

Suppose $V$ is finite-dimensional. Prove that every linear map on a subspace of $V$ can be extended to a linear map on $V$. In other words, show that if U is a suspace of $V$ and $S \in \mathcal{L}(U,W)$, then there exists $T \in \mathcal{L}(V,W)$ such that $Tu = Su$ for all $u \in U$.

*Proof.* 设 $U$ 为 $V$ 的子集，则 $U$ 存在一组基向量 $v_1,\dots,v_m$. 将该组基向量扩展为 $v+1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n$, 并且为 $V$ 的一组基向量. 则易知对于任意的 $z \in V$, 都可以找到一组 $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$ 使得 $z=\sum_{k=1}^n a_k v_k$.

我们设

$$\begin{gathered}T: V \to w\\ \sum_{k=1}^n a_k v_k \to \sum_{k=1}^m a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^n a_k v_k\end{gathered}$$

显然 $Tu = Su$, 仅需证明 $T$ 是线性映射即可.

证明满足分配律设

$$z_1 = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n,\ z_2 = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

则

$$\begin{aligned} T(z_1+z_2) &= \sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)Sv_k + \sum_{k=m+1}^{n}(a_k+b_k)v_k \\ &= \sum_{k=1}^{m}a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}a_kv_k + \sum_{k=1}^{m}b_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}b_kv_k \\ &= Tz_1 + Tz_2 \end{aligned}$$

证明满足数量乘法, 设 $\lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned} T(\lambda z) &= \sum_{k=1}^{m}\lambda a_kSv_k + \sum_{k=m+1}^{n}\lambda a_kv_k \\ &= \lambda\sum_{k=1}^{m}a_kSv_k + \lambda\sum_{k=m+1}^{n}a_kv_k \\ &= \lambda Tz \end{aligned}$$

□

**Problem 12**

设 $V$ 是有限维的向量空间且 $\dim V > 0$, 并设 $W$ 是无限维的向量空间。证明 $\mathcal{L}(V,W)$ 是无限维的向量空间.

*Proof.* 设 $v \in V$ 并且设 $\omega_1,\ldots$ 是 $W$ 的一组基. 则对于任意的 $m$,$\omega_1,\ldots,\omega_m$ 都独立.(见 2a/14)

定义 $T_j(v) = \omega_j$, 显然 $T_j \in \mathcal{L}(V,W)$ 仅需证明数列 $T_1,\ldots$ 中，任意的 $m$,$T_1,\ldots,T_m$ 都独立. 设

$$a_1T_1 + \cdots + a_nT_n = 0$$

仅需说明 $a_j$ 全为零是唯一解.

$$a_1T_1v + \cdots + a_nT_nv = a_1\omega_1 + \cdots + a_n\omega_n = 0$$

因为对于任意的 $m$,$\omega_1,\ldots,\omega_m$ 都独立. 说明 $a_j$ 全为零是唯一解. 证得 $\mathcal{L}(V,W)$ 是无限维的向量空间. □

**Problem 13**

设 $v_1,\ldots,v_n$ 是 $V$ 上的一组线性独立的数列. 同时设 $W \neq 0$. 证明存在 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$ 使得不存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1,\ldots,m)$.

*Proof.* 假设对于所有的 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$ 使得存在 $T \in \mathcal{L}(V,W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1,\ldots,m)$. 上面假设说明 $\omega_k$ 独立。显然可以找到一组 $\omega_1,\ldots,\omega_m \in W$, 且它们不相互独立。故假设不成立，所以原命题正确. □

**Problem 14**

设 $V$ 是有限维的向量空间且 $\dim V > 2$, 证明存在 $S,T \in \mathcal{L}(V,V)$ 满足 $ST \neq TS$.

*Proof.* 显然只要找到两个矩阵 $A,B$, 使得 $AB \neq BA$ 即可. □

## B. Null Space and Ranges

**Problem 2**

假设 $V$ 是一个线性空间并且 $S,T\in\mathcal{L}(V,V)$ 满足

$$\operatorname{range}S\subset\operatorname{null}T.$$

证明 $(ST)^2=0$

*Proof.* 因为 $\operatorname{range}S\subset\operatorname{null}T$，所以对于任意的 $v\in V$ 都有 $TSv=0$. 所以对于任意的 $u\in V$ 都有

$$(ST)^2u=S[(TS)Tu]=S0=0.$$

证得 $(ST)^2=0$ □

**Problem 13**

设 $T$ 是一个 $\mathbb{F}^4$ 到 $\mathbb{F}^2$ 的线性映射，且满足

$$\operatorname{null}T=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{F}^4:x_1=5x_2\text{ and }x_3=7x_4$$

证明 T 是满射的.

*Proof.* 显然 $\dim\operatorname{null}T=2$，故

$$\dim\operatorname{range}T=2.$$

我们易证下面引理

**Lemma 1.** *设 $U$ 是 $V$ 的子空间，若 $\dim U=\dim V$，则 $U=V$.*

故有

$$\operatorname{range}T=\mathbb{F}^2$$

说明是满射的. □

**Problem 20**

设 $W$ 是有限维的并且 $T\in\mathcal{L}(V,W)$. 证明 $T$ 是单射的当且仅当存在 $S\in\mathcal{L}(W,V)$ 使得 $ST$ 为 $V$ 上的恒等映射.

*Proof.* 定义

$$S=\begin{cases}v, & \text{if } u\in Tv\\ 0, & \text{if } u\in W\text{ and }u\notin Tv\end{cases}$$

这样就容易证明原命题成立 □

**Problem 21**

设 $W$ 是有限维的并且 $T\in\mathcal{L}(V,W)$. 证明 $T$ 是满射的当且仅当存在 $S\in\mathcal{L}(W,V)$ 使得 $TS$ 为 $W$ 上的恒等映射.

*Proof.* ($\Rightarrow$) Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ is surjective, so that $W$ is necessarily finite-dimensional as well. Let $v_1, \dots, v_m$ be a basis of $V$ and let $n = \dim W$, where $m \geq n$ by surjectivity of $T$. Note that

$$Tv_1, \dots, Tv_m$$

span $W$. Thus we may reduce this list to a basis by removing some elements (possibly none, if $n = m$). Suppose this reduced list were $Tv_{i_1}, \dots, Tv_{i_n}$ for some $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, m\}$. We define $S \in \mathcal{L}(W, V)$ by its behavior on this basis

$$S(Tv_{i_k}) := v_{i_k} \text{ for } k = 1, \dots, n.$$

Suppose $w \in W$. Then there exist $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ such that

$$w = a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}$$

and thus

$$\begin{aligned} TS(w) &= TS\left(a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}\right) \\ &= T\left(S\left(a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}\right)\right) \\ &= T\left(a_1 S(Tv_{i_1}) + \cdots + a_n S(Tv_{i_n})\right) \\ &= T(a_1 v_{i_1} + \cdots + a_n v_{i_n}) \\ &= a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n} \\ &= w, \end{aligned}$$

and so $TS$ is the identity map on $W$.

($\Leftarrow$) Suppose there exists $S \in \mathcal{L}(W, V)$ such that $TS \in \mathcal{L}(W, W)$ is the identity map, and suppose by way of contradiction that $T$ is not surjective, so that $\dim \operatorname{range} TS < \dim W$. By the Fundamental Theorem of Linear Maps, this implies

$$\begin{aligned} \dim W &= \dim \operatorname{null} TS + \dim \operatorname{range} TS \\ &< \dim \operatorname{null} TS + \dim W \end{aligned}$$

and hence $\dim \operatorname{null} TS > 0$, a contradiction, since the identity map can only have trivial null space. Thus $T$ is surjective, as desired. □

## C. Matrices

**Problem 1**

设 $V$ 和 $W$ 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明对于 $V$ 和 $W$ 的任意基，$T$ 的矩阵都至少有 $\dim \operatorname{range} T$ 个非零元.

*Proof.* 设 $v_1, \dots, V_n$ 为 $V$ 的基，$w_1, \dots, w_m$ 为 $W$ 的基,$r = \dim \operatorname{range} T$ 和 $s = \dim \operatorname{null} T$. 所以 $V$ 的基中有 $s$ 个映射到 0, $r$ 个映射为非零. 若 $Tv_k \neq 0$, 则存在唯一一组不不全为零 (最少有一个不为零) 的 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$Tv_k = \sum_{j=1}^{m} A_{j,k} w_j$$

能满足 $Tv_k \neq 0$ 的基向量有 $r = \dim \operatorname{range} T$ 个. 故最少有 $\dim \operatorname{range} T$ 个非零元.

□

**Problem 3**

设 $V$ 和 $W$ 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明存在一个 $V$ 的基和 $W$ 的基，使得关于这些基，$\mathcal{M}(T)$ 除了第 $j$ 行第 $j$ 列 $(1 \leq j \leq \dim \operatorname{range} T)$ 的元素为 1，其余均为 0.

*Proof.* 设 $R$ 是 $V$ 的子空间且满足

$$V = R \oplus \operatorname{null} T,$$

设 $r_1, \ldots, r_m$ 为 $R$ 的基 (其中 $m = \dim \operatorname{range} T$), 并设 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $\operatorname{null} T$ 的基 (其中 $n = \dim \operatorname{null} T$). 那么 $r_1, \ldots, r_m, v_1, \ldots, v_n$ 为 $V$ 的基. 而且也易得 $Tr_1, \ldots, Tr_m$ 是 $\operatorname{range} T$ 的基. 因此扩展上述的基使之成为 $W$ 的基. 设 $Tr_1, \ldots, Tr_m, w_1, \ldots, w_p$ 是这样的基 (其中 $p = \dim W - m$). 那么对于 $j = 1, \ldots m$, 我们有

$$Tr_j = \left( \sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} \cdot Tr_t \right) + \left( \sum_{k=1}^{p} 0 \cdot w_k \right),$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克函数. 因此在 $\mathcal{M}(T)$ 的第 $j$ 行中只有第 $j$ 列为 0, 其中 $j$ 取从 1 到 $m = \dim \operatorname{range} T$ 任意值. 因此 $Tv_1 = \cdots = Tv_n = 0$, $\mathcal{M}(T)$ 的剩余行全为零. 因此 $\mathcal{M}(T)$ 有所需的形式. $\square$