UNIVERSITY OF MARS
INSTITUTE OF INTERGALACTIC TRAVEL

Linear Maps

Flower

Linear Algebar

A. The Vector Space of Linear Maps

Problem 3

假设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. 证明存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$，其中 $j = 1, \dots, m$ $k = 1, \dots, n$，使得

$$T(x_1, \dots, x_n) = (A_{1,1}x_1 + \dots + A_{1,n}x_n, \dots, A_{m,1}x_1 + \dots + A_{m,n}x_n)$$

对于每一个 $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 都成立.

Proof. 对于任意的 $x \in \mathbb{F}^n$，我们可以写

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n,$$

其中 $e_1, \dots, e_n$ 是 $\mathbb{F}^n$ 的标准基. 因为 T 是线性的，我们有

$$Tx = T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 T e_1 + \dots + x_n T e_n.$$

现在对于 $Te_k \in \mathbb{F}^m$, 其中 $k = 1, \dots, n$, 都存在 $A_{1,k}, \dots, A_{m,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$\begin{aligned} Te_k &= A_{1,k}e_1 + \dots + A_{m,k}e_m \\ &= (A_{1,k}, \dots, A_{m,k}) \end{aligned}$$

因此

$$x_k T e_k = (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} Tx &= \sum_{k=1}^{n} (A_{1,k}x_k, \dots, A_{m,k}x_k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k, \dots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k \right), \end{aligned}$$

就证得存在 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$，其中 $j = 1, \dots, m$ 并且 $k = 1, \dots, n$ 使得等式成立. □

Problem 4

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 并且 $v_1, \dots, v_m$ 是 V 中的一组向量，其使得 $Tv_1, \dots, Tv_m$ 在 W 上的线性独立。证明 $v_1, \dots, v_m$ 线性独立.

Proof. 假设 $v_1, \ldots, v_m$ 不线性独立，则有方程

$$a_1v_1 + \cdots + a_mv_m = 0$$

有一组 a_j 不全为零的解，接下来

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m) = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m = 0$$

则存在一组不全为零的 a_j 使得上式成立。与条件矛盾，故假设不成立。原命题正确. □

Problem 7

证明如果 $\dim V = 1$ 并且 $T \in \mathcal{L}(V, V)$, 存在 $\lambda \in \mathbb{F}$ 使得对于任意的 $v \in V$ 都有 $Tv = \lambda v$.

Proof. 因为 $\dim V = 1$，所以 V 的基为单向量, 设为 e 则存在 α, λ 使得下式成立

$$Tv = T(\alpha e) = \alpha Te = \alpha\lambda e = \lambda v$$

其中 λ 即为所需。原命题证明完毕

□

Problem 8

找到一个 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 函数 φ, 且对于任意的 $a \in \mathbb{R}$ 和 $V \in \mathbb{R}^2$ 都满足

$$\varphi(av) = a\varphi(v)$$

并且 φ 不是线性的.

Proof. 找到如下函数

$$\varphi = \ln(xy),\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

则可有

$$\varphi(av) = \varphi[(ax, ay)] = a\ln(xy) = a\varphi(v)$$

但是 φ 不满足

$$\varphi(\nu + \omega) \neq \varphi(\nu) + \varphi(\omega)$$

故 φ 不是线性的.

□

Problem 9

给出一个 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 的函数 φ，对于所有的 $z, \omega \in \mathbb{C}$ 有

$$\varphi(\omega + z) = \varphi(\omega) + \varphi(z)$$

但是 φ 不是线性的.

Proof. 定义

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x + yi &\mapsto x - yi. \end{aligned}$$

然后对于 $x_1+y_1i, x_2+y_2i \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}\varphi((x_1+y_1i)+(x_2+y_2i)) &= \varphi((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)\\ &= (x_1+x_2)-(y_1+y_2)i\\ &= (x_1-y_1)i+(x_2-y_2)i\\ &= \varphi(x_1+y_1i)+\varphi(x_2+y_2i)\end{aligned}$$

所以 φ 满足加法分配律. 然而

$$\varphi(i\cdot i)=\varphi(-1)=-1$$

此外

$$i\cdot\varphi(i)=i(-i)=1$$

则 φ 不是线性的. □

Problem 10

设 U 是 V 的子集且 $U\neq V$. 设 $S\in\mathcal{L}(U,W)$ 且 $S\neq 0$. 定义 $T:V\to W$

$$Tv=\begin{cases} S\nu, & \text{if } v\in U\\ 0, & \text{if } v\in V \text{ and } v\notin U\end{cases} \tag{1}$$

证明 T 不是 V 上的线性映射.

Proof. 令

$$v\in U,\ \omega\in V \text{ and } \omega\notin U$$

所以有

$$v+\omega\in V \text{ and } v+\omega\notin U$$

故下面不等式成立

$$T(v+\omega)\neq Tv+T\omega$$

故 T 不是 V 上的线性映射. □

Problem 11

Suppose V is finite-dimensional. Prove that every linear map on a subspace of V can be extended to a linear map on V. In other words, show that if U is a suspace of V and $S\in\mathcal{L}(U,W)$, then there exists $T\in\mathcal{L}(V,W)$ such that $Tu=Su$ for all $u\in U$.

Proof. 设 U 为 V 的子集，则 U 存在一组基向量 $v_1,\dots,v_m$. 将该组基向量扩展为 $v+1,\dots,v_m,v_{m+1},\dots,v_n$, 并且为 V 的一组基向量. 则易知对于任意的 $z\in V$, 都可以找到一组 $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}$ 使得 $z=\sum_{k=1}^n a_kv_k$.

我们设

$$\begin{gathered}T:V\to w\\ \sum_{k=1}^n a_kv_k\to\sum_{k=1}^m a_kSv_k+\sum_{k=m+1}^n a_kv_k\end{gathered}$$

显然 $Tu=Su$, 仅需证明 T 是线性映射即可.

证明满足分配律设

$$z_1 = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n,\ z_2 = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

则

$$\begin{aligned} T(z_1+z_2) &= \sum_{k=1}^{m}(a_k+b_k)Sv_k + \sum_{k=m+1}^{n}(a_k+b_k)v_k \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k + \sum_{k=1}^{m} b_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} b_k v_k \\ &= Tz_1 + Tz_2 \end{aligned}$$

证明满足数量乘法, 设 $\lambda \in \mathbb{F}$, 则

$$\begin{aligned} T(\lambda z) &= \sum_{k=1}^{m} \lambda a_k S v_k + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda a_k v_k \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{m} a_k S v_k + \lambda \sum_{k=m+1}^{n} a_k v_k \\ &= \lambda T z \end{aligned}$$

□

Problem 12

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 0$, 并设 W 是无限维的向量空间。证明 $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的向量空间.

Proof. 设 $v \in V$ 并且设 $\omega_1, \ldots$ 是 W 的一组基. 则对于任意的 m,$\omega_1, \ldots, \omega_m$ 都独立.(见 2a/14)

定义 $T_j(v) = \omega_j$, 显然 $T_j \in \mathcal{L}(V, W)$ 仅需证明数列 $T_1, \ldots$ 中，任意的 m,$T_1, \ldots, T_m$ 都独立. 设

$$a_1 T_1 + \cdots + a_n T_n = 0$$

仅需说明 a_j 全为零是唯一解.

$$a_1 T_1 v + \cdots + a_n T_n v = a_1 \omega_1 + \cdots + a_n \omega_n = 0$$

因为对于任意的 m,$\omega_1, \ldots, \omega_m$ 都独立. 说明 a_j 全为零是唯一解. 证得 $\mathcal{L}(V, W)$ 是无限维的向量空间. □

Problem 13

设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 上的一组线性独立的数列. 同时设 $W \neq 0$. 证明存在 $\omega_1, \ldots, \omega_m \in W$ 使得不存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1, \ldots, m)$.

Proof. 假设对于所有的 $\omega_1, \ldots, \omega_m \in W$ 使得存在 $T \in \mathcal{L}(V, W)$ 满足 $Tv_k = \omega_k$, $(k = 1, \ldots, m)$. 上面假设说明 ω_k 独立。显然可以找到一组 $\omega_1, \ldots, \omega_m \in W$, 且它们不相互独立。故假设不成立，所以原命题正确. □

Problem 14

设 V 是有限维的向量空间且 $\dim V > 2$, 证明存在 $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ 满足 $ST \neq TS$.

Proof. 显然只要找到两个矩阵 A, B, 使得 $AB \neq BA$ 即可. □

B. Null Space and Ranges

Problem 2

假设 V 是一个线性空间并且 $S,T \in \mathcal{L}(V,V)$ 满足

$$\operatorname{range} S \subset \operatorname{null} T.$$

证明 $(ST)^2 = 0$

Proof. 因为 $\operatorname{range} S \subset \operatorname{null} T$，所以对于任意的 $v \in V$ 都有 $TSv = 0$. 所以对于任意的 $u \in V$ 都有

$$(ST)^2 u = S[(TS)Tu] = S0 = 0.$$

证得 $(ST)^2 = 0$ □

Problem 13

设 T 是一个 $\mathbb{F}^4$ 到 $\mathbb{F}^2$ 的线性映射，且满足

$$\operatorname{null} T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_1 = 5x_2 \text{ and } x_3 = 7x_4$$

证明 T 是满射的.

Proof. 显然 $\dim \operatorname{null} T = 2$，故

$$\dim \operatorname{range} T = 2.$$

我们易证下面引理

Lemma 1. *设 U 是 V 的子空间，若 $\dim U = \dim V$，则 $U = V$.*

故有

$$\operatorname{range} T = \mathbb{F}^2$$

说明是满射的. □

Problem 20

设 W 是有限维的并且 $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明 T 是单射的当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 使得 ST 为 V 上的恒等映射.

Proof. 定义

$$S = \begin{cases} v, & \text{if } u \in Tv \\ 0, & \text{if } u \in W \text{ and } u \notin Tv \end{cases}$$

这样就容易证明原命题成立 □

Problem 21

设 W 是有限维的并且 $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明 T 是满射的当且仅当存在 $S \in \mathcal{L}(W,V)$ 使得 TS 为 W 上的恒等映射.

Proof. ($\Rightarrow$) Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ is surjective, so that W is necessarily finite-dimensional as well. Let $v_1, \ldots, v_m$ be a basis of V and let $n = \dim W$, where $m \geq n$ by surjectivity of T. Note that

$$Tv_1, \ldots, Tv_m$$

span W. Thus we may reduce this list to a basis by removing some elements (possibly none, if $n = m$). Suppose this reduced list were $Tv_{i_1}, \ldots, Tv_{i_n}$ for some $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, m\}$. We define $S \in \mathcal{L}(W, V)$ by its behavior on this basis

$$S(Tv_{i_k}) := v_{i_k} \text{ for } k = 1, \ldots, n.$$

Suppose $w \in W$. Then there exist $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ such that

$$w = a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}$$

and thus

$$\begin{aligned}
TS(w) &= TS\left(a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}\right) \\
&= T\left(S\left(a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n}\right)\right) \\
&= T\left(a_1 S(Tv_{i_1}) + \cdots + a_n S(Tv_{i_n})\right) \\
&= T(a_1 v_{i_1} + \cdots + a_n v_{i_n}) \\
&= a_1 Tv_{i_1} + \cdots + a_n Tv_{i_n} \\
&= w,
\end{aligned}$$

and so TS is the identity map on W.

($\Leftarrow$) Suppose there exists $S \in \mathcal{L}(W, V)$ such that $TS \in \mathcal{L}(W, W)$ is the identity map, and suppose by way of contradiction that T is not surjective, so that $\dim \operatorname{range} TS < \dim W$. By the Fundamental Theorem of Linear Maps, this implies

$$\begin{aligned}
\dim W &= \dim \operatorname{null} TS + \dim \operatorname{range} TS \\
&< \dim \operatorname{null} TS + \dim W
\end{aligned}$$

and hence $\dim \operatorname{null} TS > 0$, a contradiction, since the identity map can only have trivial null space. Thus T is surjective, as desired. $\square$

C. Matrices

Problem 1

设 V 和 W 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明对于 V 和 W 的任意基，T 的矩阵都至少有 $\dim \operatorname{range} T$ 个非零元.

Proof. 设 $v_1, \ldots, V_n$ 为 V 的基，$w_1, \ldots, w_m$ 为 W 的基,$r = \dim \operatorname{range} T$ 和 $s = \dim \operatorname{null} T$. 所以 V 的基中有 s 个映射到 0, r 个映射为非零. 若 $Tv_k \neq 0$, 则存在唯一一组不不全为零 (最少有一个不为零) 的 $A_{j,k} \in \mathbb{F}$ 使得

$$Tv_k = \sum_{j=1}^{m} A_{j,k} w_j$$

能满足 $Tv_k \neq 0$ 的基向量有 $r = \dim \operatorname{range} T$ 个. 故最少有 $\dim \operatorname{range} T$ 个非零元.

$\square$

Problem 3

设 V 和 W 都是有限维的且 $T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明存在一个 V 的基和 W 的基，使得关于这些基，$\mathcal{M}(T)$ 除了第 j 行第 j 列 $(1 \le j \le \dim \operatorname{range} T)$ 的元素为 1，其余均为 0.

Proof. 设 R 是 V 的子空间且满足

$$V = R \oplus \operatorname{null} T,$$

设 $r_1, \ldots, r_m$ 为 R 的基 (其中 $m = \dim \operatorname{range} T$), 并设 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $\operatorname{null} T$ 的基 (其中 $n = \dim \operatorname{null} T$). 那么 $r_1, \ldots, r_m, v_1, \ldots, v_n$ 为 V 的基. 而且也易得 $Tr_1, \ldots, Tr_m$ 是 $\operatorname{range} T$ 的基. 因此扩展上述的基使之成为 W 的基. 设 $Tr_1, \ldots, Tr_m, w_1, \ldots, w_p$ 是这样的基 (其中 $p = \dim W - m$). 那么对于 $j = 1, \ldots m$, 我们有

$$Tr_j = \left(\sum_{i=1}^{m} \delta_{i,j} \cdot Tr_t \right) + \left(\sum_{k=1}^{p} 0 \cdot w_k \right),$$

其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克函数. 因此在 $\mathcal{M}(T)$ 的第 j 行中只有第 j 列为 0, 其中 j 取从 1 到 $m = \dim \operatorname{range} T$ 任意值. 因此 $Tv_1 = \cdots = Tv_n = 0$, $\mathcal{M}(T)$ 的剩余行全为零. 因此 $\mathcal{M}(T)$ 有所需的形式. □

Problem 6

设 V 和 W 都是有限维的，$T \in \mathcal{L}(V,W)$. 证明 $\dim \operatorname{range} T = 1$ 当且仅当 V 和 W 各有一个基使得关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1.

Proof. 设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的基，$w_1, \ldots, w_m$ 是 W 的基. 关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1. 故

$$Tv_i = w_1 +, \ldots, +w_m$$

因此 $\operatorname{range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \ldots, Tv_n) = \operatorname{span}(w_1 +, \ldots, +w_m)$, 故 $\dim \operatorname{range} T = 1$

反过来，若 $\dim \operatorname{range} T = 1$, 则 $\dim \operatorname{null} T = \dim V - 1$. 设 $v_1, \ldots, v_n$ 是 V 的基且 $v_2, \ldots, v_n \in \operatorname{null} V$. 显然我们可以使 $Tv_1, \ldots, w_m$ 为 W 的基. 使 $w_1 = Tv_1 - w_2 - \cdots - w_n$ 和 $e_1 = v_1$, $e_i = v_i + v_1$ 其中 $i = 2, \ldots, n$. 则有

$$Te_1 = Te_i = w_1 +, \ldots, +w_m.$$

显然 $e_1, \ldots, e_n$ 是 V 的基，$w_1, \ldots, w_m$ 是 W 的基. 且关于这些基 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都等于 1.

□

D. 可逆性与同构

Problem 1

Suppose $T \in \mathcal{L}(U,V)$ and $S \in \mathcal{L}(V,W)$ are both invertible liner maps. Prove that $ST \in \mathcal{L}(U,W)$ is invertible and $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Proof. 易知

$$SS^{-1} = I \quad TT^{-1} = I$$

仅需说明 $ST \cdot T^{-1}S^{-1} = I$ 即可. 显然

$$ST \cdot T^{-1}S^{-1} = SIS^{-1} = SS^{-1} = I$$

□

Problem 2

Suppose V is finite-dimensional and $\dim V > 1$. Prove that the set of noninvertible operators on V is not a subspace of $\mathcal{L}(V)$.

Proof.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

上面的例子说明两个不可逆的映射的和为可逆映射，故不可逆算子构成的集合不是 $\mathcal{L}(V)$ 的子空间. □

Problem 3

Suppose V is finite-dimensional, U is a subspace of V, and $S \in \mathcal{L}(U, V)$. Prove there exists an invertible operator $T \in \mathcal{L}(V)$ such that $Tu = Su$ for every $u \in U$ if and only if S is injective.

Proof. 先假设 $Tu = Su$，则有

$$T^{-1}Tu = u = T^{-1}Su$$

易知 T^{-1} 是单射的. 假设存在 u_1, u_2 使得 $Su_1 = Su_2$ 故:

$$T^{-1}Su_1 = T^{-1}Su_2.$$

可得

$$u_1 = u_2.$$

假设不成立. 所以 S 是单射的.

假设 S 是单射的. 设 $RSu = u$. 接下来仅需 R 是 V 上的可逆算子即可. 显然 $R \in \mathcal{L}(V, V)$, 仅需说明单射性. 因为

$$RSu = u$$

所以 R 在 $\operatorname{span} S$ 上是单射的。我们仅需定义一下 R 就可以使得其在 V 的其他部分单射。因此可以说明 $T = R^{-1}$. □