技巧性问题选讲

Orchidany

Li Cheng No.2 School

January 14, 2020

目录

Q&A

Q: 你是哪个弱菜？

A: 我是来此历城二中的 pks，确实是个弱菜。

Q: 你要讲什么？为什么讲的这么简单

A: 嗯，主要是讲一下 OI 方面的一些基础。不过由于自身水平太低，内容难免很水，不过还是有一些亮点的。

Q: 我理解不了你讲的怎么办啊？

A: 没关系，大家都是这么一步一步慢慢走过来的。

Q:ZZZZZ......(sleeping)

A:⋯⋯睡好。

一般用来骗分

一般用来骗分
比较重要的就是随机化贪心思想，比如函数
$\mathrm{random\_shuffle(st, ed)}$

比如以下例题:

LuoguP1060 开心的金明

给定 n 个物品，每个物品有一个价值 v_i、有一个重量 w_i。你有一个背包，容积为 M，可以不装满。每选择一个物品，可以得到 $v_i \cdot w_i$ 的分数。最大化总分数。
$n \leq 300, M \leq 50000$

请各位先写一下 dp 的式子。

请各位先写一下 dp 的式子。
怎么骗分？

请各位先写一下 dp 的式子。
怎么骗分？
那当然是贪心啊

请各位先写一下 dp 的式子。
怎么骗分？
那当然是贪心啊
贪不得分怎么办？

请各位先写一下 dp 的式子。
怎么骗分？
那当然是贪心啊
贪不得分怎么办？
用 random_shuffle 随机化啊。

请各位先写一下 dp 的式子。
怎么骗分？
那当然是贪心啊
贪不得分怎么办？
用 random_shuffle 随机化啊。
复杂度 $O(20 \cdot nlogn + 50000 \cdot n)$，然而我自己没写过，大家感兴趣可以自己写一下。

P2503 [HAOI2006] 均分数据

给定 n 个整数 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$. 把他们均匀的分成 m 组，使得各组分的最平均，即各组的均方差最小。均方差公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x} - x_i)^2}\,, \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

其中 σ 表示均方差（所求），x_i 为第 i 组的数据的值的和。

$$n, m \leq 20, a_i \leq 50$$

发现不好做。
其实可以一眼看出是模拟退火，但大家肯定都不会。

发现不好做。
其实可以一眼看出是模拟退火，但大家肯定都不会。
考虑怎么乱搞：随机分的话，我们目前假设有 m 组，遇到一个新的肯定是要放到当前最小的那一组里面。所以考虑贪心着放。

发现不好做。
其实可以一眼看出是模拟退火，但大家肯定都不会。
考虑怎么乱搞：随机分的话，我们目前假设有 m 组，遇到一个新的肯定是要放到当前最小的那一组里面。所以考虑贪心着放。
于是用 random_shuffle 随上几百万次，然后看脸即可。

下面这道题跟贪心没啥关系

【2018Luogu 五月月赛】偷上网

Alice 和 *Bob* 生活在一个 $l \times l$ 的正方形房子里，由于 *Bob* 最近沉迷隔膜，*Alice* 决定要限制 *Bob* 上网的频率。
Alice 建造了 n 个无线信号屏蔽器，第 i 个位于 (x_i, y_i) ，屏蔽范围为 $\frac{l}{n}$。
Bob 网瘾发作按捺不住上网的冲动，找到了你，帮他找到一个位置 (x, y) ，使得没有被 *Alice* 的无线信号屏蔽器覆盖.
$n \leq 10, l \leq 100,000$

考虑随机撒点。
考虑面积，总面积 l^2，每个屏蔽面积是 $\frac{\pi l^2}{n^2}$，n 个最多覆盖 $\frac{\pi l^2}{n}$，
那么撒点撒到不能放的点的概率就是

$$\frac{\frac{\pi l^2}{n}}{l^2} = \frac{\pi}{n}$$

然后就是随就完了。

然而普通贪心题目太多了，于是打算只讲两道。

Codeforces Global Round 1 B

给定一条网格纸，n, m, k, 分别表示点数，总长度，胶带的数量。对于输入的 n 个点，保证位置递增，求覆盖所有的点所需的最小胶带长度（胶带数量 $\leq k$)。
$n, m, k \leq 100,000$

其实是个制杖题。

其实是个制杖题。
我们考虑如果 k 是无限大，那么最优的方式一定是单点覆盖。所以如果胶带不够的话，就是要去额外多粘 $N-k$ 个空白的区间。所以我们就可以排个序，求出 $N-k$ 个空白区间的长度，再加上单点的长度和 n，得到答案。注意空白区间的两头开的。

Educational CodeForces Round 70 A

给你两个 01 串 x 和 y，将 y 左移 k 位，再与 x 相加，得到字符串 s_k，最后将其反转得到 rev_k。求当 rev_k 字典序最小时的 k。

$n, m, k \leq 100,000$

保证 $x > y$

其实就是转化的思想。

其实就是转化的思想。
求反串的字典序最小，就是要把正串里面的低位 1 们尽量消掉。
又因为题目里面限制了 $x > y$，所以一定存在 x 的二进制表示中至少一个 1 比 y 的最低位 1 靠左。

其实就是转化的思想。
求反串的字典序最小，就是要把正串里面的低位 1 们尽量消掉。
又因为题目里面限制了 $x > y$，所以一定存在 x 的二进制表示中至少一个 1 比 y 的最低位 1 靠左。
考虑贪心的思想，x 被消掉的 1 越靠右，反串字典序就越小。所以说我们要找的就是 $\boldsymbol{x}$ 中能被 $\boldsymbol{y}$ 消掉的最靠右的那个 $\mathbf{1}$ 的位置。

就是悔着做。

[CTSC2007] Backup Files

你在一家 IT 公司为大型写字楼或办公楼 (offices) 的计算机数据做备份。
已知办公楼都位于同一条街上。你决定给这些办公楼配对 (两个一组)。每一对办公楼可以通过在这两个建筑物之间铺设网络电缆使得它们可以互相备份。
然而，网络电缆的费用很高。当地电信公司仅能为你提供 K 条网络电缆，这意味着你仅能为 K 对办公楼 (或总计 2K 个办公楼) 安排备份。任一个办公楼都属于唯一的配对组 (换句话说，这 2K 个办公楼一定是相异的)。
此外，电信公司需按网络电缆的长度 (公里数) 收费。因而，你需要选择这 K 对办公楼使得电缆的总长度尽可能短。换句话说，你需要选择这 K 对办公楼，使得每一对办公楼之间的距离之和 (总距离) 尽可能小。
$n \leq 100,000$

差分一下就变成了简单种树题。

LG3045 [USACO12FEB] 牛券

FJ 准备买一些新奶牛，市场上有 N 头奶牛 $(1 \le N \le 50000)$，第 i 头奶牛价格为 P_i $(1 \le P_i \le 10^9)$。FJ 有 K 张优惠券，使用优惠券购买第 i 头奶牛时价格会降为 C_i $(1 \le C_i \le P_i)$，每头奶牛只能使用一次优惠券。FJ 想知道花不超过 M $(1 \le M \le 10^{14})$ 的钱最多可以买多少奶牛？

一般这种东西都是先假定一个看起来有点合理的顺序大力贪心，比如可以按照 C_i 排序去选小的。但这个贪心显然不对，比如这个样例：

$$K = 1, N = 2, M = 12, P_1 = 10, C_1 = 1, P_2 = 2^{63} - 1, C_2 = 2$$

那就显然应该对第二个用，但贪心会去用掉第一个。

所以考虑怎么反悔。

所以考虑怎么反悔。
观察到选完 C_i 之后，要么选一个最小的 P_j，要么换出来一张优惠券去选 C_j。

所以考虑怎么反悔。
观察到选完 C_i 之后，要么选一个最小的 P_j，要么换出来一张优惠券去选 C_j。
于是考虑维护两个堆，一个维护没用过 Coupon 的 $\{P\}$ 的最小值，一个维护用过了 Coupon 的 $\{P-C\}$ 的最小值了。

然后还有两道题目也是这种贪心，留作课下作业（雾
[JSOI2007] 建筑抢修
CF865D Buy Low Sell High

现在是闲扯以及 $Q\&A$ 时间。
主要想讲一下怎么写博客？

大概就是构造问题的一组可行解。
属于智商题的范畴

一道弱菜题

不知名题目

设 f_A 表示 A 的本质不同子串个数给出 x, y，要求构造出两个字符串 A, B 满足：$f_A = x, f_B = y, f_{A+B} = x + y$
$x, y \leq 5000$

x 个 A，y 个 A 拼起来就完了。

又一道弱菜题

Codeforces 743C

给出 n，构造出 x，y，z，满足：

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

$$x \neq y, x \neq z, y \neq z$$

无解输出 -1

$n \leq 10^4$

考虑通分（分时裂项），即

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}&=\frac{1}{n(n+1)}\\ \frac{1}{n}&=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\\ \frac{2}{n}&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}\end{aligned}$$

然后就做完了。
注意 1 要特判。

Educational Codeforces Round 70 D

定义子序列是能通过删除原序列一些元素并不更改原序列元素位置得到的序列。
给你一个数 n，求出一个有 n 个 1337 子序列的序列，序列长度不能大于 10^5 。
$n \leq 10^9$

第一步考虑简化构造方案，尝试构造出 13333...33337 这种字符串。

第一步考虑简化构造方案，尝试构造出 13333...33337 这种字符串。
但发现不行，原因在于并不是所有的 n 都可以写成 $\binom{n}{2}$ 的形式。

第一步考虑简化构造方案，尝试构造出 13333...33337 这种字符串。
但发现不行，原因在于并不是所有的 n 都可以写成 $\binom{n}{2}$ 的形式。
然而可以这么构造：133777...73333...33337。

第一步考虑简化构造方案，尝试构造出 13333...33337 这种字符串。
但发现不行，原因在于并不是所有的 n 都可以写成 $\binom{n}{2}$ 的形式。
然而可以这么构造：133777...73333...33337。
发现如果这么构造，长度不会超过 $2\sqrt{n}$，证明很简单。

状态和转移

状态和转移

如何学呢？其实就是不断地涨经验而已，因为大家一开始都不会。

状态和转移
如何学呢？其实就是不断地涨经验而已，因为大家一开始都不会。
主要是看谁能更好地总结经验教训而已。

先简单讲一下几种背包

先简单讲一下几种背包

背包问题 1

给定 n 个物品，每个物品有一个价值 v_i、有一个重量 w_i。你有一个背包，容积为 M，可以不装满。每选择一个物品，可以得到 v_i 的分数。最大化总分数。
$n \times m \leq 10^7$

先简单讲一下几种背包

先简单讲一下几种背包

背包问题 2

给定 n 个物品，每个物品有一个价值 v_i、有一个重量 w_i，有一个花费 c_i。你有一个背包，容积为 M，可以不装满。同时你也有一笔钱，数量为 S ，可以不用完。每选择一个物品，可以得到 v_i 的分数。最大化总分数。

$n \times m \times s \leq 10^7$

先简单讲一下几种背包

先简单讲一下几种背包

背包问题 3

给定 n 种物品，每种物品有一个价值 v_i、有一个重量 w_i，共有 c_i 个。你有一个背包，容积为 M，可以不装满。每选择一个物品，可以得到 v_i 的分数。最大化总分数。
$(\sum c_i) \times m \leq 10^7$

先简单讲一下几种背包

先简单讲一下几种背包

背包问题 4

给定 n 个物品，每种物品有一个价值 v_i、有一个重量 w_i，属于一个组 g_i。你有一个背包，容积为 M，可以不装满。每选择一个物品，可以得到 v_i 的分数，但每组只能选一个。最大化总分数。$(\sum c_i) \times m \leq 10^7$

以上是用来搞笑的。
接下来进入正题。

Luogu1858 多人背包

求 01 背包前 k 优解的价值和

$K \leq 50, V \leq 5000, N \leq 200$

设计状态 $f_{i,v,k}$ 表示考虑前 i 个物品，现在装了 v，排名 k 的解。我们考虑这个解一定是可以从 $f_{i-1,v,1\to K}$ 或者 $f_{i-1,v-cost_i,1\to K}+val_i$ 转移过来的，并且随着 k 递增，f 递减.
所以转移的时候就可以从两个状态集各拉一个指针过来，单调转移一下即可。

Luogu1537 弹珠

玛莎和比尔各自有自己的弹珠收藏。如果所有的弹珠的价值相同，那么他们就可以平分。玛莎和比尔给每个弹珠一个 1 到 6 的价值。现在他们想平分这些弹珠，使每个人得到的总价值相同。他们想要你写一个程序，告诉他们是否能将所有弹珠分成价值相等的两部分。

Luogu1537 弹珠

玛莎和比尔各自有自己的弹珠收藏。如果所有的弹珠的价值相同，那么他们就可以平分。玛莎和比尔给每个弹珠一个 1 到 6 的价值。现在他们想平分这些弹珠，使每个人得到的总价值相同。他们想要你写一个程序，告诉他们是否能将所有弹珠分成价值相等的两部分。

这种弱智题就不写题解了吧？

NOIp2018 D1T2 货币系统

给你 n 种货币的面值，称为 A 货币系统，让你求出一个货币系统 B，使得 B 系统的货币种类不超过 A 系统，并且 A 系统能凑出的面值 B 系统也能凑出，A 系统不能凑出的面值 B 系统也不能凑出。

$n \leq 100, a_i \leq 25000$

发现其实，如果一种面值能被另几种面值表示出来，那么就可以删掉。

发现其实，如果一种面值能被另几种面值表示出来，那么就可以删掉。
于是考虑枚举不用哪个面值，dp 即可

发现其实，如果一种面值能被另几种面值表示出来，那么就可以删掉。
于是考虑枚举不用哪个面值，dp 即可
还有一个问题，如果我钦定了不用面值 s，但是最后我必须要用了怎么办？

发现其实，如果一种面值能被另几种面值表示出来，那么就可以删掉。
于是考虑枚举不用哪个面值，dp 即可
还有一个问题，如果我钦定了不用面值 s，但是最后我必须要用了怎么办？
发现排个序即可。

UVa1638

有高为 $1, 2, 3, \ldots, n$ 的杆子排成一行，从左边可以看到 m_1 根，从右边可以看到 m_2 根，求有多少种可能的排列方案。
$n \leq 200$

考察选手设计状态的能力。

考察选手设计状态的能力。
令 $f_{i,j,k}$ 表示从左边看到 j 根，从右边看到 k 根的方案数。

考察选手设计状态的能力。
令 $f_{i,j,k}$ 表示从左边看到 j 根，从右边看到 k 根的方案数。
考虑转移，我们思考怎么走新的一步。

考察选手设计状态的能力。
令 $f_{i,j,k}$ 表示从左边看到 j 根，从右边看到 k 根的方案数。
考虑转移，我们思考怎么走新的一步。
发现可以以插入一根长度为 1 的杆子为转移。放在最左边，右边看不见；放在最右边，左边看不见；放在里面，左边右边都看不见。

考察选手设计状态的能力。
令 $f_{i,j,k}$ 表示从左边看到 j 根，从右边看到 k 根的方案数。
考虑转移，我们思考怎么走新的一步。
发现可以以插入一根长度为 1 的杆子为转移。放在最左边，右边看不见；放在最右边，左边看不见；放在里面，左边右边都看不见。
于是转移呼之欲出：

$$f_{i,j,k} = f_{i-1,j-1,k} + f_{i-1,j,k-1} + (i-2) \cdot f_{i-1,j,k}$$

CodeForces 626F

有 n 个学生，每个学生有一个能力值 a_i。现在要把这些学生分成一些（任意数量的）组，每一组的“不和谐度”是该组能力值最大的学生与能力值最小的学生的能力值的差。求所有不和谐度之和不超过 k 的分组方案总数。

$n \leq 200, k \leq 1000, a_i \leq 500$

发现似乎只跟最大值和最小值有关，也就是对每个集合我们只关心其最大值和最小值

发现似乎只跟最大值和最小值有关，也就是对每个集合我们只关心其最大值和最小值
于是比较自然地想出，要从小到大排一遍序。

发现似乎只跟最大值和最小值有关，也就是对每个集合我们只关心其最大值和最小值
于是比较自然地想出，要从小到大排一遍序。
定义一个集合为「未闭合」的意思是只安排了最小值，还没安排最大值。

发现似乎只跟最大值和最小值有关，也就是对每个集合我们只关心其最大值和最小值
于是比较自然地想出，要从小到大排一遍序。
定义一个集合为「未闭合」的意思是只安排了最小值，还没安排最大值。
发现似乎这么枚举，新的一个必然是当前的最大值。

那么考虑 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 小的数，有 j 个未开放的集合，当前总代价为 k 的方案数。

那么考虑 $f_{i,j,k}$ 表示前 i 小的数，有 j 个未开放的集合，当前总代价为 k 的方案数。
于是发现一共有四种决策
1. 将 a[i] 加入一个开放的集合，不闭合
2. 将 a[i] 加入一个开放的集合并闭合它
3. 用 a[i] 新开一个集合，不闭合
4. 用 a[i] 新开一个集合并闭合它

发现这样似乎第三维会很大？

发现这样似乎第三维会很大？
发现一个关系，$(a-b)-(b-c)=a-c$。所以每次转移的增加量就可以控制在 $j\cdot(a_{i+1}-a_i)$

发现这样似乎第三维会很大？
发现一个关系，$(a-b)-(b-c)=a-c$。所以每次转移的增加量就可以控制在 $j\cdot(a_{i+1}-a_i)$
于是最后的转移如下：

$$f[i][j][k]+=f[i-1][j-1][k-(j-1)*(a[i]-a[i-1])]$$
$$f[i][j][k]+=f[i-1][j+1][k-(j+1)*(a[i]-a[i-1])]*(j+1)$$
$$f[i][j][k]+=f[i-1][j][k-j*(a[i]-a[i-1])]*j$$
$$f[i][j][k]+=f[i-1][j][k-j*(a[i]-a[i-1])]$$

你们排列组合一点没学，我就没法讲 QAQ
自认为还是很擅长初级排列组合的.jpg（嚣张

然后就没啦，随便讲了一点东西，不知道大家感觉怎么样。
欢迎来 Flower233pks.github.io 找我玩！