格林函数法の入门指南

Flowers for Tuesday

December 9, 2025

对于一个含源的线性 PDE，例如 $Lf = s$，倘若能找到一种逆运算直接求得 $f = L^{-1}s$，那多是一件美事。这可不是幻想，格林函数本质上就是在做这么一件事。

0.1 从点电荷说起

三维空间的电势分布满足泊松方程

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \tag{1}$$

根据电势的叠加原理（本质上是线性算子的叠加原理），我们可以将 $\rho(r)$ 视作很多点电荷的叠加

$$\nabla^2\varphi = -\frac{\sum \rho(r')\delta(r-r')}{\epsilon_0} \tag{2}$$

可以想到，如果我们对一个基本的点源 $\delta(r-r')$ 能求出线性算子的解 $G(r,r')$

$$\nabla^2 G(r,r') = -\frac{\delta(r-r')}{\epsilon_0} \tag{3}$$

那么根据可叠加性，总的电势解应该可以写作

$$\varphi(r) = \int \rho(r')G(r,r')d^3r' \tag{4}$$

以上就是格林函数法求解含源 PDE 的基本思想，这不仅仅是什么天马行空的数学游戏，因为 $G(r,r')$ 有时候真的是可以解出来的，例如上面这个很简单的例子，我们就可以试着解看看

简单起见不妨取 $r' = 0$，则式(3)化作

$$\nabla^2 G(r) = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta(r) \tag{5}$$

两边取 Fourier 变换

$$-|k|^2 G(k) = -\frac{1}{\epsilon_0} \tag{6}$$

$$G(k) = \frac{1}{\epsilon_0 |k|^2} \tag{7}$$

再进行逆变换，可得

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|} \tag{8}$$

由此三维空间的势分布应该可写成

$$\varphi(r)=\int\frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|}d^3r' \tag{9}$$

这正是我们熟悉的电势叠加方程。以上的求解方式虽然有绕弯路的槽点，但确实为我们提供了全新的思路，而且能很自然地推广到其他含源方程。例如对二维电势的泊松方程，可以解得

$$G(r)=\frac{1}{2\pi\epsilon_0}\ln(\frac{1}{r}) \tag{10}$$

之后的求解也是同理了。

0.2 看看一般的含源方程

考虑到一般性，我们同样选一个很简单的例子，一维下的含源泊松方程

$$-\frac{d^2u}{dx^2}=f(x)\ ,\ 0<x<L\ ,\ u(0)=u(L)=0 \tag{11}$$

老样子，先求解格林函数

$$-\frac{d^2G(x,s)}{dx^2}=\delta(x-s)\ ,\ 0<x<L\ ,\ G(0,s)=G(L,s)=0 \tag{12}$$

由于等式右侧在 $x\neq s$ 时为 0，可以猜测 $G(x,s)$ 理应具有分段一次函数的特点，且在 $x=s$ 处 $G'(x,s)$ 不连续，即

$$G(x,s)=\begin{cases}Ax, & 0\leq x\leq s,\\ B(L-x), & s<x\leq L.\end{cases} \tag{13}$$

代入连续性和积分条件不难求得 A 和 B

$$A=\frac{L-s}{L}\ ,\ B=\frac{s}{L} \tag{14}$$

则一般解可写作

$$u(x)=\int_0^L G(x,s)f(x)ds=\int_0^x\frac{s(L-x)}{L}f(s)ds+\int_x^L\frac{(L-s)x}{L}f(s)ds \tag{15}$$

具体解由 $f(x)$ 的形式而定。

0.3 Wait，边界条件呢？

以上的求解本质上可以看做是在寻找含源 PDE$Lf=s$ 的逆运算 L^{-1}（类似一种卷积运算），然后直接得到 $f=L^{-1}s$。但这样做是不是把边界条件完全丢开了，毕竟 L^{-1} 应该是一个与源和边界条件都无关，只与 L 本身有关的东西。上一个例子选择了零边界条件，那如果边界条件为零，这个方法不就完蛋了吗？其实并非如此，并不是方法有局限性，而是我们应该换个视角，把边界条件视作另一种“源”。

来看一个无源的一维扩散方程（线性算子 $L=\frac{\partial}{\partial t}-D^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-D^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\ ,\ -\infty<x<\infty\ ,\ t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\end{cases} \tag{16}$$

写成算子形式就是 $Lu=0$，难道我们能直接得到 $u=0$ 吗，显然不行，因为这里边值条件是非零的，因此零解不成立。但倘若我们换个角度，把边值条件 $u(x,0)=u_0(x)$ 视作一个瞬时的“源”，不难证明式(16)可等效为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0(x)\delta(t) \ , \ -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ \qquad u(x,0) = 0 \end{cases} \tag{17}$$

因此我们同样可以来求解其格林函数

$$\frac{\partial G(x,t,s)}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2 G(x,t,s)}{\partial x^2} = \delta(x-s) \tag{18}$$

可解出热核函数

$$G(x,t,s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} \tag{19}$$

则解自然是热核与源的卷积，即

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} u_0(s) ds \tag{20}$$

如果更更复杂一点，扩散方程式(16)本身带有源呢

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - D^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x,t) \ , \ -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ \qquad u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{21}$$

这时的解自然就是两个源（方程源加边界源）的共同卷积，即

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s,t) u_0(s) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x-s, t-\tau) S(s,\tau) ds d\tau \tag{22}$$

原本还想多写点应用，但打那么多数学公式还是有点累。那么，以上。