

格林函数法の入门指南

Flowers for Tuesday

December 9, 2025

对于一个含源的线性 PDE，例如 $Lf = s$ ，倘若能找到一种逆运算直接求得 $f = L^{-1}s$ ，那多是一件美事。这可不是幻想，格林函数本质上就是在做这么一件事。

0.1 从点电荷说起

三维空间的电势分布满足泊松方程

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \quad (1)$$

根据电势的叠加原理（本质上是线性算子的叠加原理），我们可以将 $\rho(r)$ 视作很多点电荷的叠加

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\sum \rho(r') \delta(r - r')}{\epsilon_0} \quad (2)$$

可以想到，如果我们对一个基本的点源 $\delta(r - r')$ 能求出线性算子的解 $G(r, r')$

$$\nabla^2 G(r, r') = -\frac{\delta(r - r')}{\epsilon_0} \quad (3)$$

那么根据可叠加性，总的电势解应该可以写作

$$\varphi(r) = \int \rho(r') G(r, r') d^3 r' \quad (4)$$

以上就是格林函数法求解含源 PDE 的基本思想，这不仅仅是什么天马行空的数学游戏，因为 $G(r, r')$ 有时候真的是可以解出来的，例如上面这个很简单的例子，我们就可以试着解看看

简单起见不妨取 $r' = 0$ ，则式(3)化作

$$\nabla^2 G(r) = -\frac{1}{\epsilon_0} \delta(r) \quad (5)$$

两边取 Fourier 变换

$$-|k|^2 G(k) = -\frac{1}{\epsilon_0} \quad (6)$$

$$G(k) = \frac{1}{\epsilon_0 |k|^2} \quad (7)$$

再进行逆变换，可得

$$G(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|} \quad (8)$$

由此三维空间的势分布应该可写成

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho(r')}{4\pi\epsilon_0|r-r'|} d^3r' \quad (9)$$

这正是我们熟悉的电势叠加方程。以上的求解方式虽然有绕弯路的槽点，但确实为我们提供了全新的思路，而且能很自然地推广到其他含源方程。例如对二维电势的泊松方程，可以解得

$$G(r) = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (10)$$

之后的求解也是同理了。

0.2 看看一般的含源方程

考虑到一般性，我们同样选一个很简单的例子，一维下的含源泊松方程

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x), \quad 0 < x < L, \quad u(0) = u(L) = 0 \quad (11)$$

老样子，先求解格林函数

$$-\frac{d^2G(x,s)}{dx^2} = \delta(x-s), \quad 0 < x < L, \quad G(0,s) = G(L,s) = 0 \quad (12)$$

由于等式右侧在 $x \neq s$ 时为 0，可以猜测 $G(x,s)$ 理应具有分段一次函数的特点，且在 $x = s$ 处 $G'(x,s)$ 不连续，即

$$G(x,s) = \begin{cases} Ax, & 0 \leq x \leq s, \\ B(L-x), & s < x \leq L. \end{cases} \quad (13)$$

代入连续性和积分条件不难求得 A 和 B

$$A = \frac{L-s}{L}, \quad B = \frac{s}{L} \quad (14)$$

则一般解可写作

$$u(x) = \int_0^L G(x,s)f(s)ds = \int_0^x \frac{s(L-x)}{L} f(s)ds + \int_x^L \frac{(L-s)x}{L} f(s)ds \quad (15)$$

具体解由 $f(x)$ 的形式而定。

0.3 Wait, 边界条件呢？

以上的求解本质上可以看做是在寻找含源 $\text{PDEL}f = s$ 的逆运算 L^{-1} （类似一种卷积运算），然后直接得到 $f = L^{-1}s$ 。但这样做是不是把边界条件完全丢了，毕竟 L^{-1} 应该是一个与源和边界条件都无关，只与 L 本身有关的东西。上一个例子选择了零边界条件，那如果边界条件为零，这个方法不就完蛋了吗？其实并非如此，并不是方法有局限性，而是我们应该换个视角，把边界条件视作另一种“源”。

来看一个无源的一维扩散方程（线性算子 $L = \frac{\partial}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ）

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \quad (16)$$

写成算子形式就是 $Lu = 0$, 难道我们能直接得到 $u = 0$ 吗, 显然不行, 因为这里边值条件是非零的, 因此零解不成立。但倘若我们换个角度, 把边值条件 $u(x, 0) = u_0(x)$ 视作一个瞬时的“源”, 不难证明式(21)可等效为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0(x)\delta(t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

因此我们同样可以来求解其格林函数

$$\frac{\partial G(x, t, s)}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2 G(x, t, s)}{\partial x^2} = \delta(x - s) \quad (18)$$

可解出热核函数

$$G(x, t, s) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} \quad (19)$$

则解自然是热核与源的卷积, 即

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4Dt}} u_0(s) ds \quad (20)$$

如果更复杂一点, 扩散方程式(21)本身带有源呢

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = S(x, t), & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (21)$$

这时的解自然就是两个源 (方程源加边界源) 的共同卷积, 即

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t) u_0(s) ds + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} G(x - s, t - \tau) S(s, \tau) ds d\tau \quad (22)$$

原本还想多写点应用, 但打那么多数学公式还是有点累。那么, 以上。