포텐셜에서지부터 전기 쌍극자까지

1. 포텐셜에너지란의 개념

1.1 포텐셜에너지는 어디에서 오는가?

시작하기 전에, 일단 일과 운동에너지에 대해서 생각해봅시다.

```
우리가 어떤 물체를 밀면, 물체는 속도를 얻습니다.
Here:
- 일: 우리가 물체를 미는 것
- 운동에너지: 물체의 속도와 관련된 양
```

아니면, 그냥 다음과 같이 쓸 수도 있죠:

```
일 (나->물체) = 물체의 운동에너지 (의 변화량)
```

더 간단하게는, 이렇게 쓸 수도 있습니다:

$$W = \Delta K$$

일반물리학 1을 수강하셨다면, 일을 다음과 같이 쓸 수 있는 것도 아실겁니다:

$$W = \int_{initial}^{final} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

여기서 더 나아가기 전에 잠시 저 적분식을 생각해봅시다. 특히 부정적분에 대해서 생각해보죠. 위 적분의 부정적분을 조금 손보면 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$U \equiv -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} + C$$

여기서 C는 임의의 스칼라 값입니다.

음, 여기서 U는 아직 아무 이름이 없습니다. 그냥 일의 부정적분 비슷한 것이죠. 여러분은 이걸 '포텐셜 에너지'라고 부르고싶겠지만... 일단 아무것도 모르는 척을 해봅시다. 지금은 그저 '부정적분 비슷한 것'으로 남겨둡시다.

그럼 우리는 일과 운동에너지의 관계를 조금 손 볼 수 있습니다:

$$-(U(final) - U(initial)) = K(final) - K(initial)$$

더 직관적인 식으로 바꾸면 다음과 같습니다:

$$K(initial) + U(initial) = K(final) + U(final)$$

이 식을 보니, U는 K로 변환되면서 '잠재적인' 운동에너지처럼 행동하네요. 그러니 이제 U를 '포텐셜에너지' 라고 부르도록 합시다. 그러면 우리는 위 식을 에너지 보존식으로 해석할 수 있습니다. 이게 바로 에너지 보존 법칙입니다.

(아니면 K를 '잠재적인' 포텐셜 에너지라고 부를 수도 있죠.)

그러니 이 절 제목의 답은 다음과 같습니다: **포텐셜 에너지의 개념은 에너지 보존법칙에서 온다.**

(물론, 다르게 볼 수 있는 관점도 아주 많습니다. 아래에서 이에 대해 이야기해봅시다.)

1.2 C는 어떻게 해야하는가?

여기까지 오면, 아직 풀리지 않는 것이 하나 있습니다. 바로 C는 무엇인가에 대한 것입니다. C는 (제 생각에는) 순수하게 수학적인 양입니다. C가 어떤 값이 되던 상관 없죠. 부정적분의 상수는 정적분에서 사라지니까요. 이 말은, 포텐셜 에너지에서 중요한 것은 포텐셜 에너지 **변화량**이지 절대적인 포텐셜 에너지 값이 아니라는 뜻입니다.

어찌되었건 절대적인 포텐셜 에너지는 위와 같이 정의했는데, 그럼 항상 C를 달고 다닐 것인가? 그건 아닙니다. 귀찮잖아요. 다행히 C는 아무 상수값이나 되어도 상관 없기때문에, 대부분의 경우 C를 0으로 합니다. 아니면, 어떤 기준점에서 전체 포텐셜에너지가 0이 되는 C를 선택하는 경우도 많죠. 물론 0이 아닌 C를 잡는 경우도 가끔 있습니다. 그러나 걱정하지 마세요. 어떤 C를 잡아야하는지는 여러분이 문제를 보자마자 스스로 알게 될 것입니다. 여러분이 보기에 가장 간단해보이는 값으로 하시면 됩니다 (문제에서 정해주지 않으면 말이죠!).

그러니 이 절의 답은: **보통은 C를 0으로 잡는다.**

1.3 U를 이해하는 다른 방법이 있을까?

저 위에서는 포텐셜 에너지가 일과 운동에너지부터 시작해서 에너지 보존법칙으로 유도된다고 했죠. 그러나, 우리는 자연을 다양한 방식으로 이해할 수 있습니다. 그리고 모든 방식은 똑같은 결과를 내죠. 아래에서 에너지 보존법칙이 아닌 방식으로 U를 이해하는 방법 중 하나를 소개합니다.

수학적으로, 임의의 벡터 함수 v는 항상 대응하는 스칼라 함수 A를 찾을 수 있습니다. 두 함수의 관계는 다음과 같죠:

$$\vec{v} = \nabla A$$

여기서 볼 수 있듯이 A는 어떤 상수를 더하든 빼든 상관 없습니다. del-연산자는 미분을 의미하는데, 상수값는 미분에서 날아가버리거든요. 이는 수학적으로 다음과 같이 표현합니다:

$$A \rightarrow A + \lambda\,(constant)$$
$$\nabla(A + \lambda) = \nabla A$$

이제 우리 문제를 생각해봅시다. 우리는 '힘'이라는 벡터 함수가 있습니다. 그러면 이에 대응하는 스칼라 함수도 있어야겠죠? 우리가 알고 있는 지식을 조금 사용하면, 이 함수를 바로 찾을 수 있습니다:

$$\vec{F} = \nabla(-U) = -\nabla U$$

물론, 여기서도 U를 고를 때 상수값을 더하든 빼든 상관없습니다:

$$U \rightarrow U + \lambda\,(constant)$$
$$-\nabla(U + \lambda) = -\nabla U$$

이 방식은 "사실 우리가 힘이라고 생각했던 것은 포텐셜에너지의 경사면(미분값)이 나타난 결과였어!" 라는 의미입니다. 더 나아가 F=-∇U 라는 수식은: "모든 운동은 낮은 포텐셜에너지로 향한다"라는 의미가 됩니다.

그러니 이 절의 답은: **자연을 이해하는 방식에는 엄청 많은 관점이 있다.**

1.4 팁 모음

팁 1: 자연이 항상 낮은 포텐셜 에너지를 선호하는가?

이건 어느 정도는 틀리고, 어느 정도는 맞은 말이네요. 사실 포텐셜에너지 말고도 생각해야할 것들이 많습니다. 엔트로피, 혹은 엔탈피, 깁스에너지같은 자유에너지도 있죠. 그러나 제 경험상 여러분이 일반물리학 범위에서 쓸 것은 포텐셜에너지 정도밖에 없습니다.

팁 2: 에너지 개념이 꼭 필요한가?

여러분들이 문제를 풀다보면, 에너지를 사용하지 않으면 문제를 정말 어렵게 풀어야하는 경우가 있습니다. 힘과 가속도의 운동방정식은 2차 미분방정식인데, 에너지 식은 그냥 미분 없는 방정식이거든요. 그러니 실제 계산에서 에너지는 아주 유용하게 사용될 것입니다.

팁 3: 적분 계산에서 항상 부호를 신경써야할까?

숙제를 하거나 시험을 볼 때, 계산을 하다보면 플러스, 혹은 마이너스 부호때문에 멘탈이 깨질겁니다. 특히 적분 안에서 벡터간 내적을 계산하다보면 이것들이 평행한지, 반대방향인지 항상 헷갈리죠. 물론 엄청나게 집중해서 부호를 하나하나 따질 수 있다면 좋겠지만... 현실은 그렇게 하기 힘듭니다. 적분 어딘가에서 부호는 반대로 될 거고, 여러분은 마지막 계산 값이 나와서야 뭔가 잘못되었다는걸 알아챌것입니다. 그러면 계산을 거꾸로 따져보면서 어디서 부호가 잘못되었는지 확인하다보면... 산산조각난 멘탈을 볼 수 있죠.

그렇게 하는 대신, 실제로 문제에서 주어진 상황이 어떤 일인지 생각해봅시다. 사실 물리학은 실제 상황을 묘사하는 학문이니까요. 만약 부호가 잘못되었다고 생각하면, 이 부호가 어떻게 바뀌어야하는지 생각해보고, 슬며시 부호만 올바르게 바꿔줍시다. 예시를 살펴볼까요.

중력의 포텐셜에너지를 계산할겁니다. 그러나 여기서 저는 **의도적으로 틀린 부호를 집어넣고, 마지막에 부호를 올바르게 고쳐볼게요**:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F}_{gravity} \cdot d\vec{s} = \int_{\infty}^{r} -\frac{GMm}{s^2} ds = [\frac{GMm}{s}]_{\infty}^{r} = \frac{GMm}{r}$$

이 계산값이 괜찮을까요? 음, 계산값이 맞는지 아닌지는 값이 무엇을 의미하는지 생각해보면 알 수 있습니다. 이 결과는 중력원에 가까워질수록 (r->0) 포텐셜에너지가 증가하는 것을 의미하네요. 그런데 자연은 낮은 포텐셜에너지를 선호한다고 했으니, 물체는 중력원에 점점 멀어지는 방향으로 움직이겠네요. 즉, 중력원은 물체를 밀어냅니다.

어... 이게 우리가 알고있는 그 중력 맞나요? 제가 아는 중력은 물체를 잡아당기는데요. 부호가 어딘가 잘못되었네요. 처음부터 고칠까요? 음, 그러기에는 시간이 아까우니 부호만 반대로 해줍시다.

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

이제 포텐셜에너지는 중력원에 가까워질수록 낮아집니다. 그러면 중력원 주위의 물체들은 중력원에 가까워지는 방향으로 움직이겠네요. 이제야 우리가 알고있는 중력이 나왔습니다.

(아마 몇몇 분들은 U(r)이 사실은 무한대에서 r까지의 포텐셜 변화량, ΔU라는 것을 눈치채셨을겁니다. 그치만 U(∞) = 0라고 하면, ΔU = U(r) - U(∞) = U(r) 이니까 똑같아요.)

2. 전기 쌍극자의 포텐셜에너지

2.1 전기 쌍극자의 포텐셜에너지는 어떻게 계산하는가?

시작하기 전에

모든 일들이 x-y 평면에서 일어나고, 전기장이 x축 방향이라고 가정합니다.

일단 포텐셜에너지를 토크 방식으로 계산하는 법을 살펴봅시다:

$$\Delta U = U(\theta_f) - U(\theta_i) = -\int_{\vec{\theta_i}}^{\vec{\theta_f}} \vec{\tau} \cdot d\vec{\theta}$$

여기서 적분이 토크와 각도로 이루어진 것을 알 수 있습니다. 이 문제에는 양전하와 음전하가 있고, 각각의 토크를 계산해주어야 합니다. 가장 중요한 것은 바로 올바른 좌표계를 잡는 것입니다. 토크는 좌표계에 따라 달라지거든요. 많은 경우, 좌표계를 잘 잡는 것만으로 계산을 엄청나게 줄일 수 있습니다. 일단 잘못된 예가 얼마나 많은 계산을 요구하는지 살펴봅시다.

잘못된 예: 그냥 일반적인 좌표계

절망스럽게도, 여기서는 양전하와 음전하의 dθ가 같다고 이야기할 수 없네요. 그러니까 양전하와 음전하의 적분값이 똑같다고 할 수도 없으니... 정말로 적분을 따로따로 해줘야합니다.

$$\Delta U_p = -\int_{\vec{\theta_{p,i}}}^{\vec{\theta_{p,f}}} \vec{\tau_p} \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\vec{\theta_{p,i}}}^{\vec{\theta_{p,f}}} (\vec{r_p}(\theta) \times q\vec{E}) \cdot d\vec{\theta}$$
$$\Delta U_n = -\int_{\vec{\theta_{n,i}}}^{\vec{\theta_{n,f}}} \vec{\tau_n} \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\vec{\theta_{n,i}}}^{\vec{\theta_{n,f}}} (\vec{r_n}(\theta) \times (-q)\vec{E}) \cdot d\vec{\theta}$$

(여기서 p는 양전하, n은 음전하는 의미합니다.)

여기서 어떤 분들은 적분을 이렇게 하나로 합치고싶을수도 있습니다:

$$\Delta U = \Delta U_p + \Delta U_n = -\int (\vec{r_p} - \vec{r_n}) \times q\vec{E}) \cdot d\vec{\theta} \ \ (Wrong!)$$

이건 틀렸어요. 일반적으로, [θ(p,i), θ(p,f)] 가 [θ(n,i),θ(n,f)]와 같다고 할 수 없습니다. 게다가 위치벡터 r도 θ의 함수라서 하나로 묶을수도 없네요.

Q1. 그러면 어떻게 해야하나요?
A1. 모든 위치벡터와 각도의 관계를 알아내서 적분해야죠.

Q2. 그걸 할건가요?
A2. 아뇨. 너무 계산이 많고 복잡해요. 안할거에요.

좋은 예: 쌍극자 중심에 좌표 중심 두기.

이러면 이제 양전하와 음전하의 dθ가 거의 같습니다. 만약 양전하가 [θ(i),θ(f)]로 움직인다면, 음전하는 [π+θ(i),π+θ(f)]로 움직이죠. 게다가 이제 r_p 와 r_n 같은 크게의 반대 방향 벡터입니다. 이러면 두 개의 적분을 합칠 수 있죠.

$$\Delta U_p = -\int_{\vec{\theta_i}}^{\vec{\theta_f}} (\vec{r_p} \times q\vec{E}) \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\theta_i}^{\theta_f} q\, r_p\, E\, (-sin\theta) d\theta$$
$$\Delta U_n = -\int_{\vec{\pi}+\vec{\theta_i}}^{\vec{\pi}+\vec{\theta_f}} (\vec{r_n} \times (-q)\vec{E}) \cdot d\vec{\theta} = -\int_{\pi+\theta_i}^{\pi+\theta_f} (-q)\, r_n\, E\, sin\theta\, d\theta$$

(※ 외적의 부호:

- 양전하의 외적에서 부호는 마이너스인데, r_p 부터 E까지가 시계방향이라 그렇습니다.
- 음전하의 외적에서 부호는 플러스인데, r_n 부터 E까지가 반시계방향이라 그렇습니다.)

좌표계를 잘 잡은 덕에, r_n 과 r_p가 같은 크기네요. 적분을 합치려면, 일단 음전하의 적분을 조금 손봅시다:

$$\theta \equiv \pi + \theta'$$
$$d\theta = d(\pi + \theta') = d\theta'$$
$$then\ \theta' \in\ [\theta_i, \theta_f]$$

그러면 음전하의 적분은 다음과 같이 됩니다:

$$\Delta U_n = -\int_{\pi+\theta_i}^{\pi+\theta_f} (-q)\, r_n\, E\, sin\theta\, d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} q\, r_p\, E\, sin(\theta' - \pi)\, d\theta' = \int_{\theta_i}^{\theta_f} q\, r_p\, E\, sin\theta\, d\theta$$

이건 양전하의 적분과 똑같이 나오네요. 그러니, 이제 θ_i 부터 θ_f 까지 전기쌍극자의 포텐셜에너지 변화량은 다음과 같습니다.

$$\Delta U = \Delta U_p + \Delta U_n = \int_{\theta_i}^{\theta_f} 2\, q\, r_p\, E\, sin\theta\, d\theta = -2q\, r_p\, E\, (cos\,\theta_f - cos\,\theta_i) = -|\vec{p}||\vec{E}|(cos\,\theta_f - cos\,\theta_i)$$

음, 포텐셜 변화량은 이렇게 나오네요. 그러면 포텐셜에너지 그 자체는 어떻게 정의할까요? 위에서 이야기했듯이, 이건 여러분이 어떻게 C를 정하느냐에 따라 달렸습니다. 일반적으로는 다음과 같이 표현할 수 있죠:

$$U(\theta) = -|\vec{p}||\vec{E}|cos\theta + C = -\vec{p} \cdot \vec{E} + C$$
$$so\ that\ \Delta U = U(\theta_f) - U(\theta_i)$$

여기서 C는 임의의 스칼라 값입니다. 보통은 전기쌍극자의 포텐셜에서 C를 0으로 두는데, 그러면 다음과 같이 표현할 수 있습니다:

$$U(\theta) = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

끝!