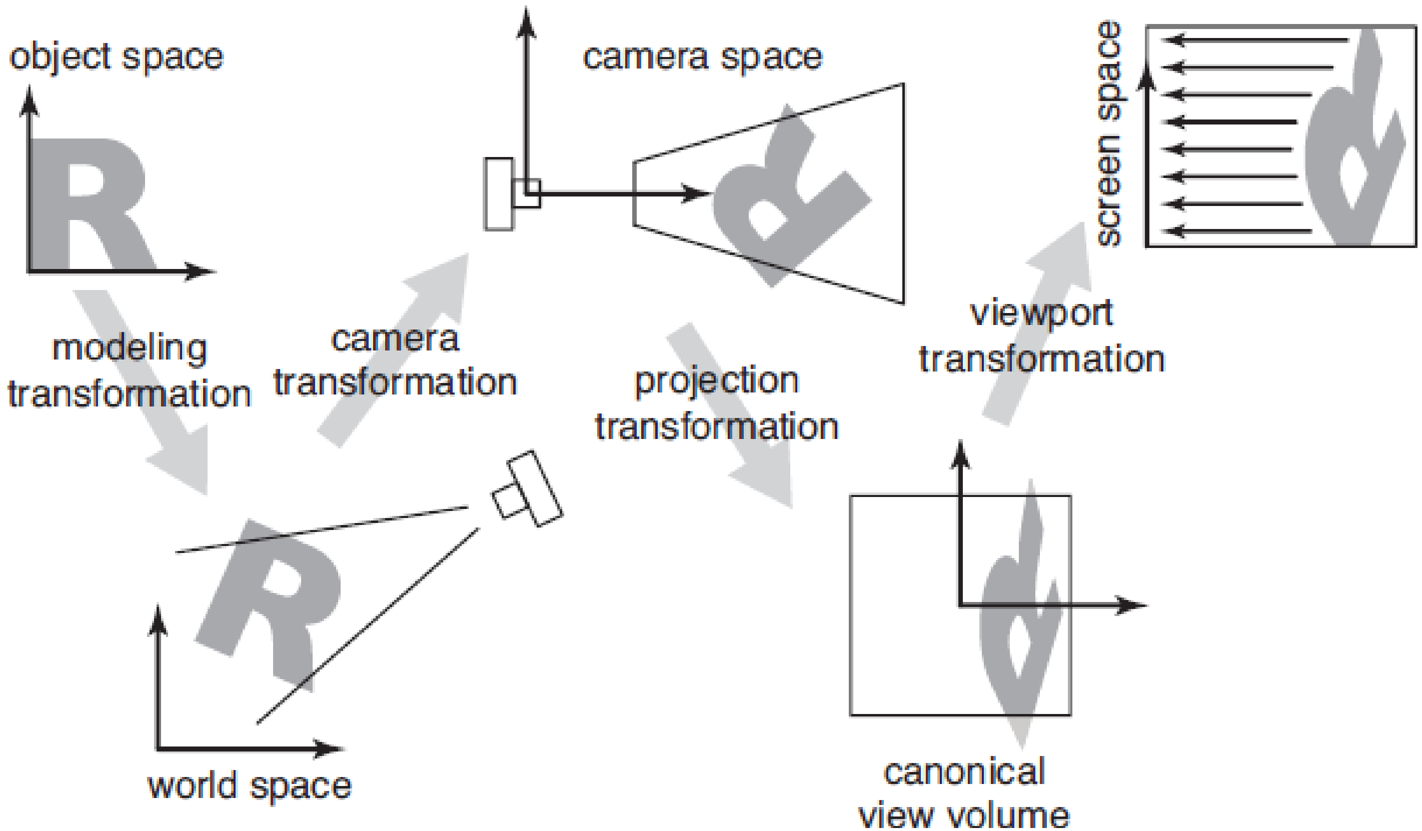
图形变换

Ray
ray@mail.buct.edu.cn

内 容

- 图形输出流水线
- 图形变换的数学基础
- 窗口视窗变换
- 图形的几何变换
- 形体的投影变换

图形输出流水线



object space
camera space
screen space
modeling
transformation
camera
transformation
projection
transformation
viewport
transformation
world space
canonical
view volume

流水线中的三个变换

- *Viewport(windowing) transformation*
  – Affine Transformation
- *Projection transformation*
  – Orthographic Projection Transformation
- *Camera(eye) transformation*
  – Affine Transformation
  – Complicated

图形变换的数学基础

- 矢量运算
- 矩阵运算
- 齐次坐标

矢量运算

和 $$V_1 + V_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

点积 $$V_1 \cdot V_2 = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2$$

长度 $$|V_1| = (V_1 \cdot V_1)^{1/2} = (x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2 + z_1 \times z_2)^{1/2}$$

叉积 $$V_1 \times V_2 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1 \quad z_1 x_2 - z_2 x_1 \quad x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

矩阵运算

加

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mm}+b_{mm} \end{bmatrix}$$

数乘

$$kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mm} \end{bmatrix}$$

矩阵乘

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

零矩阵 $0_{m\times n}$

单位阵 I_n $A\cdot I = I\cdot A = A$

逆矩阵 A^{-1} $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

转置矩阵

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

转置矩阵的性质

(1) $$(A^T)^T = A$$

(2) $$(A+B)^T = A^T + B^T$$

(3) $$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

(4) $$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

对称矩阵 $$A = A^T$$

矩阵运算的基本性质

加法交换律 $A+B=B+A$

加法结合律 $A+(B+C)=(A+B)+C$

数乘结合律 $\alpha(A\cdot B)=(\alpha A)\cdot B$

$$\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$$

数乘分配律 $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

乘法结合律 $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$

乘对加分配律 $(A+B)C=AB+AC$

乘法交换律 $A\cdot B=B\cdot A$

不满足!

齐次坐标

所谓齐次坐标表示法就是用n+1维向量表示一个n维向量。

$(x,y) \rightarrow (hx,hy,h)$

使用齐次坐标表示法的优点：

- 可用矩阵运算实现坐标变换
- 可以表示无穷远点

  例：n+1维中，h=0的齐次坐标实际上表示了一个n维无穷远点。

图形的几何变换

- 二维图形的几何变换
- 三维图形的几何变换
- 参数图形的几何变换

二维图形的几何变换

$$T_{2D} = \left[\begin{array}{cc|c} a & d & g \\ b & e & h \\ \hline c & f & i \end{array}\right]$$

$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \end{bmatrix}$ 缩放、旋转
对称、错切

$\begin{bmatrix} c & f \end{bmatrix}$ 平移

$\begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} i \end{bmatrix}$ 整体缩放

平移变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x + T_x \quad y + T_y \quad 1]$$

比例变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$s_x = s_y$$

$$s_x = s_y = 1$$

$$s_x \neq s_y$$

对称变换

$$[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1]\begin{bmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = d = 0 \qquad a = -1 \qquad e = 1$$

$$b = d = 0 \qquad a = 1 \qquad e = -1$$

$$b = d = 0 \qquad a = -1 \qquad e = -1$$

$$b = d = 1 \qquad a = e = 0$$

$$b = d = -1 \qquad a = e = 0$$

旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

错切变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d = 0$$

$$b = 0$$

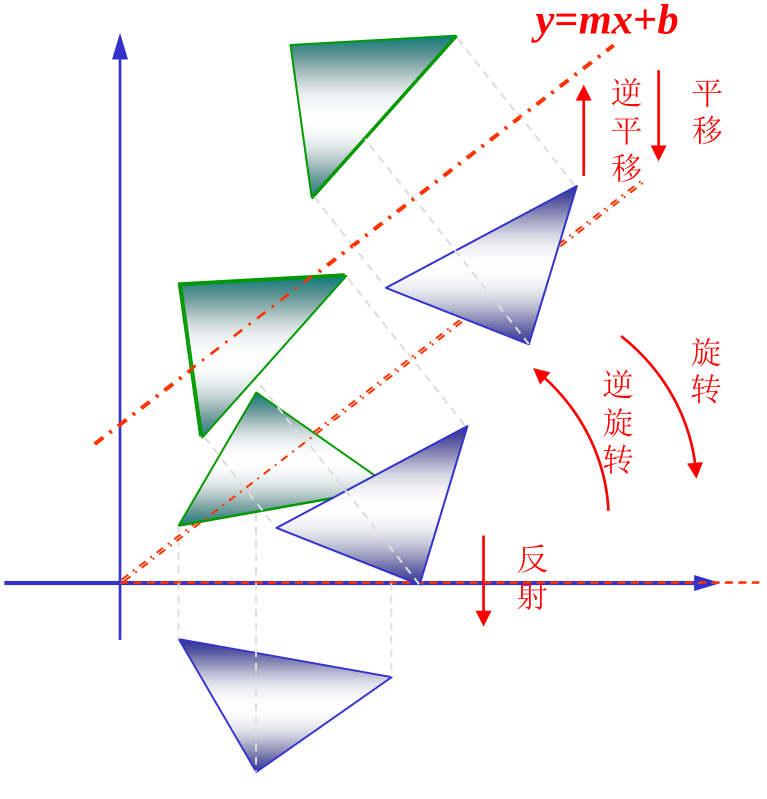
$$d \neq 0 \qquad b \neq 0$$

复合变换

$$T_t = T_{t1} T_{t2}$$

- 复合平移
- 复合比例
- 复合旋转
- 相对于点的比例变换
- 相对于点的旋转变换

复合变换



复合变换

- 相对于点的旋转变换

$$T_{rf}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-x_f&-y_f&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta&0\\-\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\x_f&y_f&1\end{bmatrix}$$

三维图形的几何变换

$$T_{3D} = \left[\begin{array}{ccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hdashline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

缩放、旋转
对称、错切

$$\begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

平移

$$\begin{bmatrix} a_{44} \end{bmatrix}$$

整体缩放

平移变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

比例变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

绕坐标轴旋转变换

$$\begin{bmatrix} x' & y' & z' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

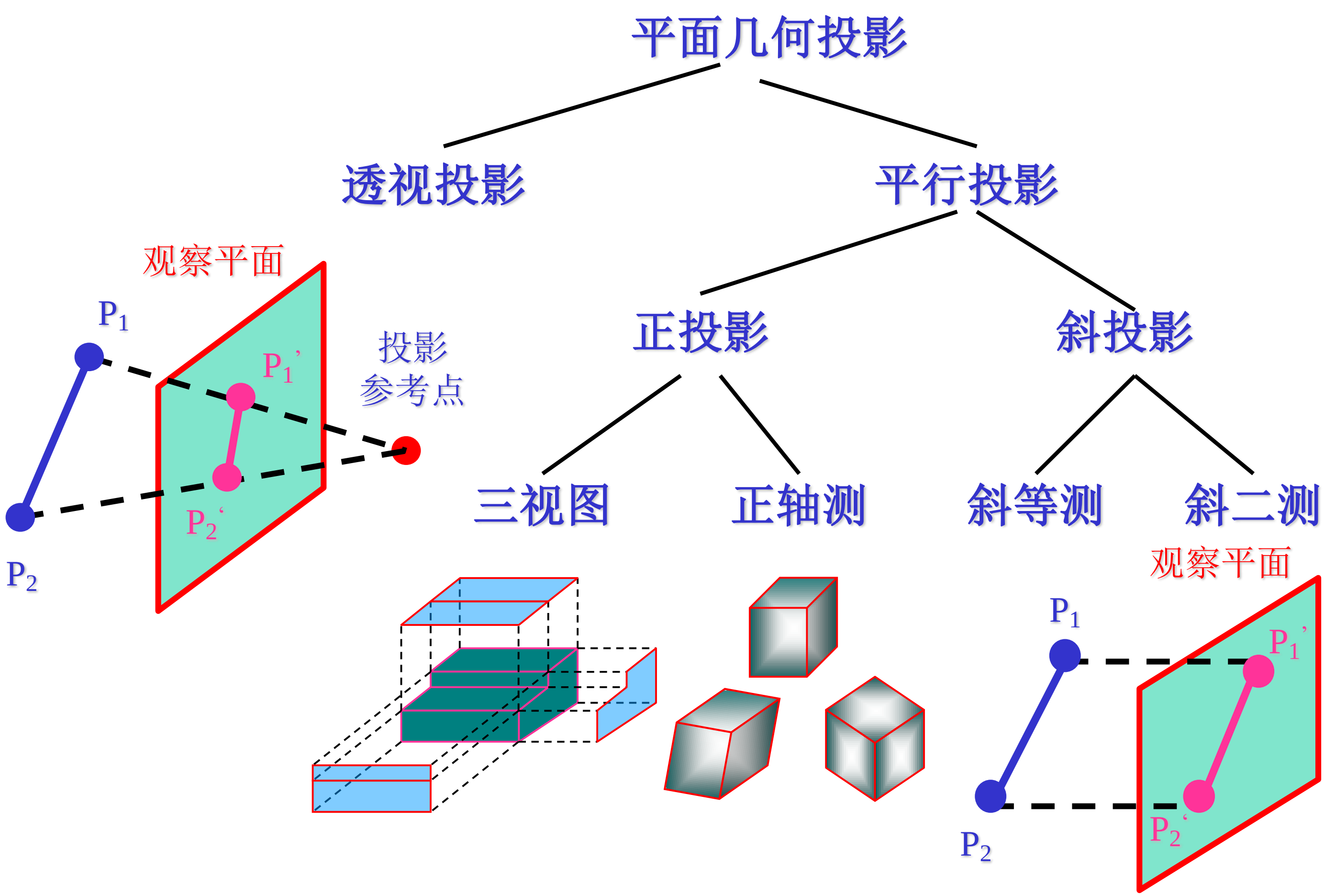
绕任意轴旋转变换

$$R_{ab} = T_A R_x R_y R_z R_y^{-1} R_x^{-1} T_A^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x^{-1} \qquad\qquad R_y^{-1} \qquad\qquad R_z$$

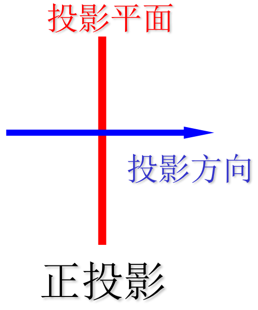
投影变换分类

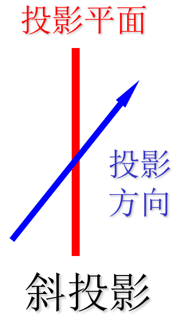


平面几何投影
透视投影
平行投影
正投影
斜投影
三视图
正轴测
斜等测
斜二测
观察平面
P1
P1'
P2
P2'
投影
参考点
观察平面
P1
P1'
P2
P2'

平行投影

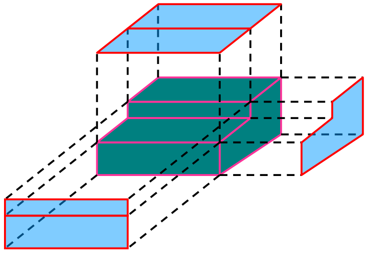
- 用定义投影线方向的投影向量给出一个平行投影。
  - 当投影(向量)垂直于观察平面时，得到正平行投影(正投影)。
  - 否则，为斜平行投影(斜投影)。

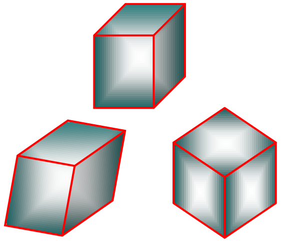




正平行投影（三视图）

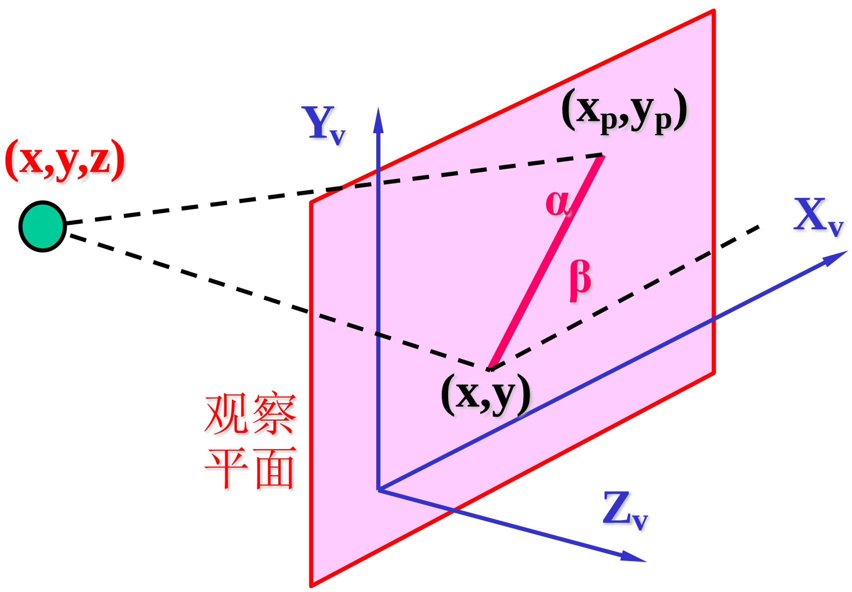
- 依据投影平面法矢量方向，正投影分为三视图和正轴侧图两种。
  - 当投影平面与某一坐标轴垂直时，得到的投影称为三视图(包括前视图、侧视图和顶(俯)视图) 。
  - 当投影平面不与某一坐标轴垂直时，形成的投影称为正轴侧图，用来显示物体多个侧面。
- 正轴侧图
  - 投影平面三个法向量模|nx|、|ny|和|nz|全相等时，正轴侧图为等轴侧；
  - 其中两个相等时为正二侧；
  - 各不相同时为正三侧。
  - 最常用的是等轴测投影。



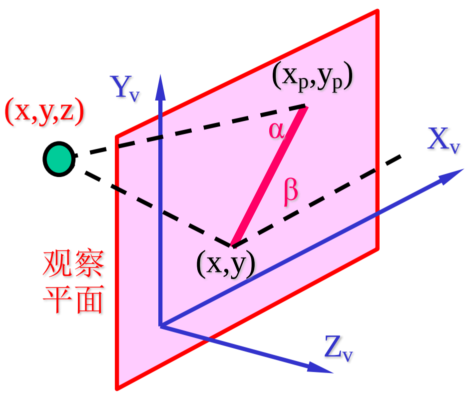


斜投影

- 斜投影向量由两个角α和β给定。
  - 点(x,y,z)投影到观察平面的(xp,yp)位置；
  - 平面上正投影坐标是(x,y)；
  - 从(x,y,z)到(xp,yp)的斜投影线与投影平面中的点(xp,yp)和(x,y)的连线交成角α；
  - 点(xp,yp)和(x,y)的连线与观察平面x轴的夹角为β。



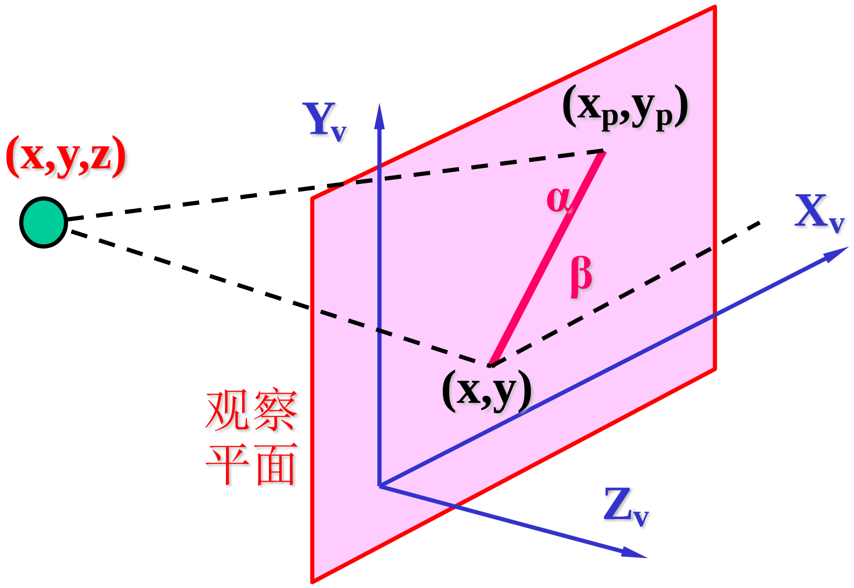
- L1=0 (投射角α为90°)时得正投影；
- L1为非零值时产生斜投影。
- α通常的值为tanα=1，且所得视图称为斜等测投影。
- 所有与投影平面垂直的直线在投影中长度不变。
- 投影角α满足tanα=2时，所生成视图称斜二测投影。
- 对于这样的角(≈63.4°)，与观察面垂直的线投影成一半长度。
- β通常选择为30°或45°，这将显示出一物体的前面、侧面和顶面(或底面)的联合视图。



斜投影

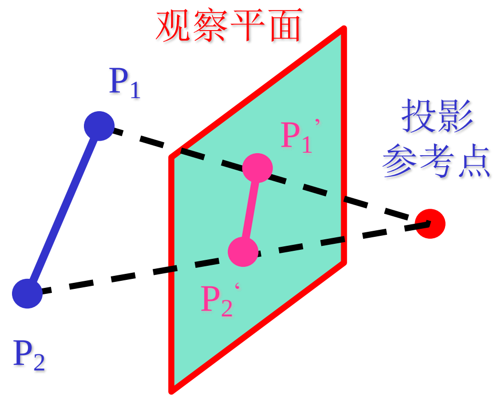
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & L_1\cos\beta & 0 \\ 0 & 1 & L_1\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \frac{1}{\tan\alpha}$$



透视投影

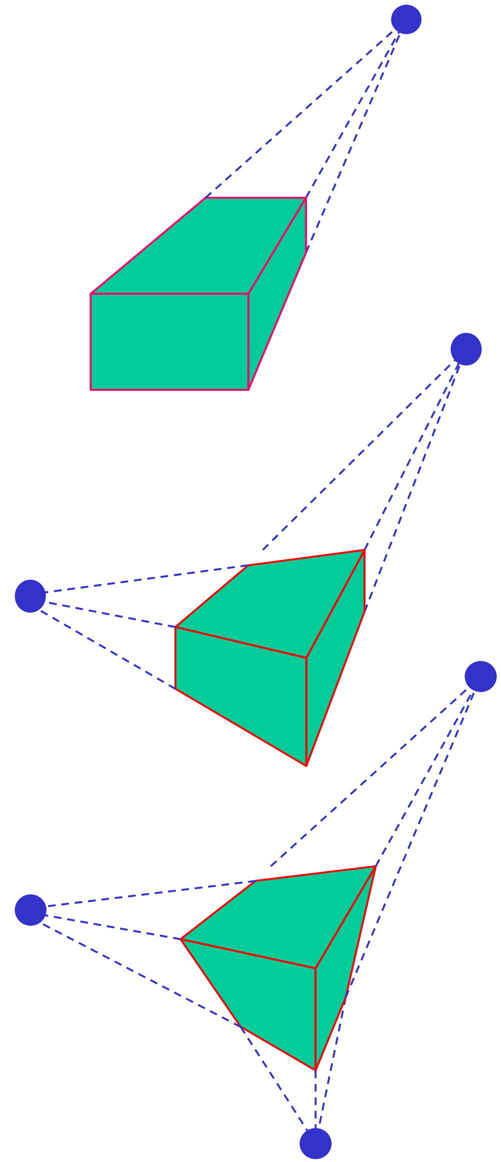
- 对透视投影，物体位置沿收敛于某一点的直线变换到观察平面上，此点称为投影参考点(或投影中心)。
- 物体的投影视图由计算投影线与观察平面之交点而得。
- 透视投影生成真实感视图但不保持相关比例。
- 对同样大小的物体，离开投影平面较远的物体其投影图像比较近物体的图像要小。



透视投影

灭点

- 当物体用透视变换方程投影到观察平面上时，物体中不与观察平面平行的任一族平行线经过透视投影后收敛于一点，此点称为灭点。
  - 三维空间中存在无数簇平行线，从而灭点也有无数个。
- 平行于某一坐标轴的平行线的灭点称为主灭点。
  - 用投影平面的方向控制主灭点数目(一个、二个或三个)，且据此将透视投影分类为一点、二点或三点投影。
  - 投影中主灭点数目由与观察平面相交的主轴数目来决定，主灭点数最多为三个。

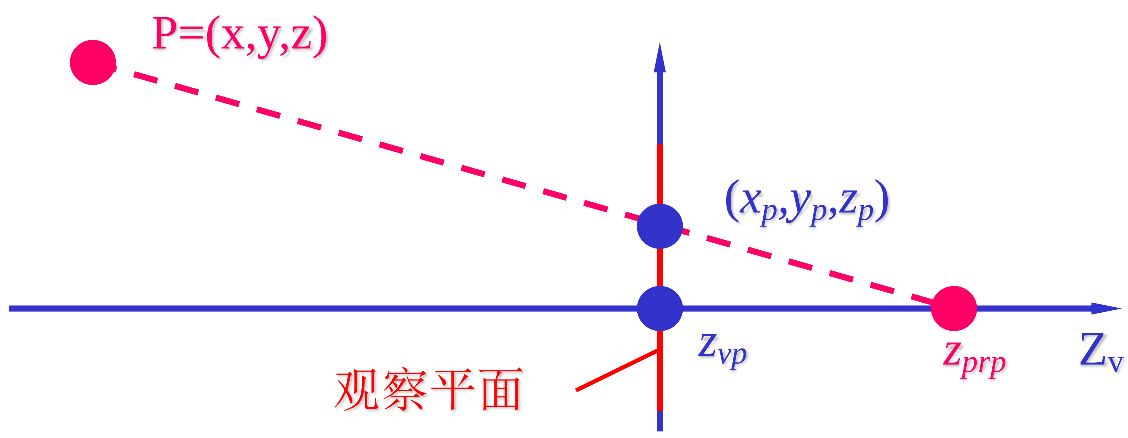


透视投影

假设投影参考点在沿z_r轴的位置z_{prp}处，且设置观察平面在z_{vp}处，可以写出透视变换方程：

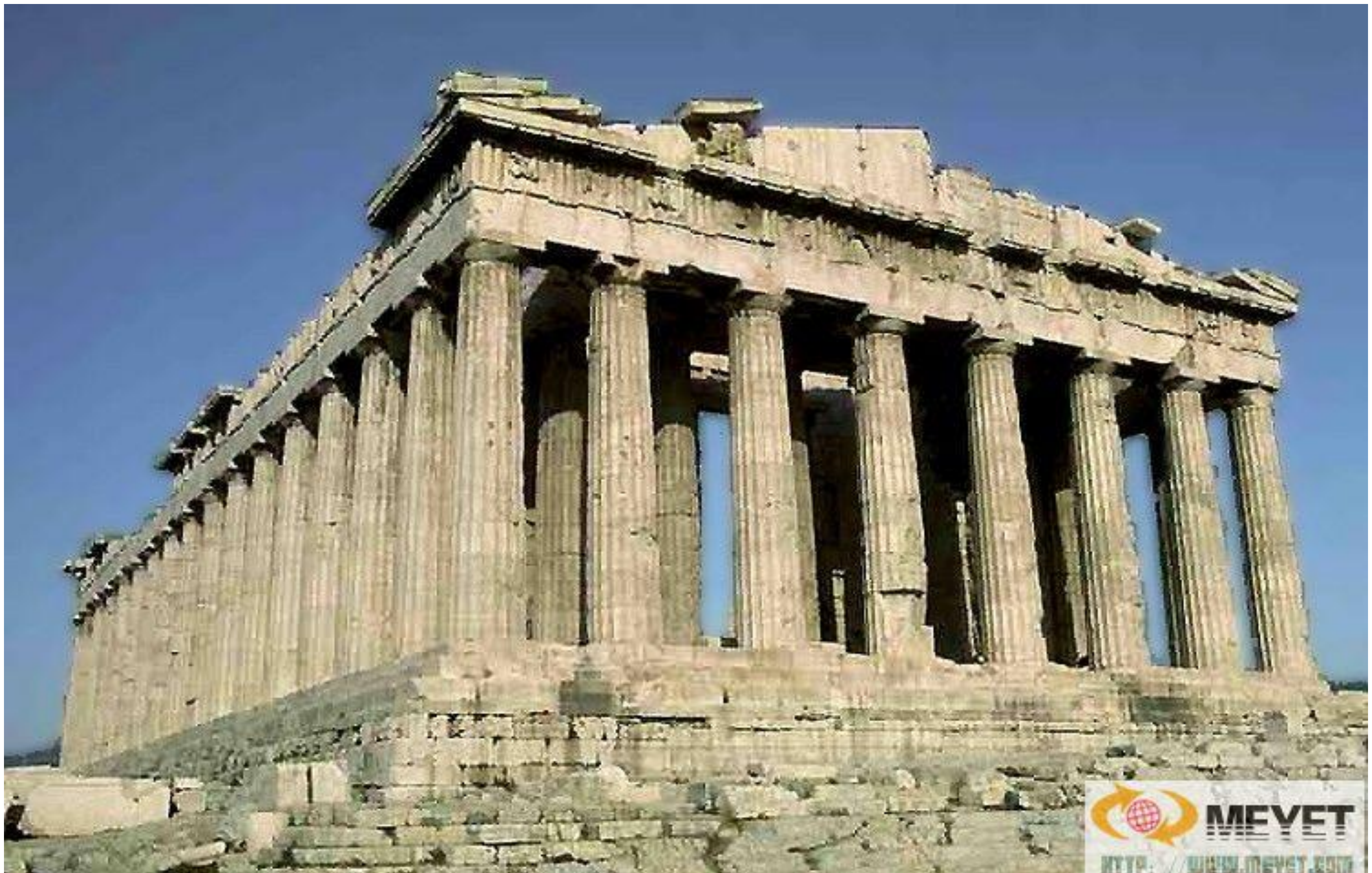
$$\begin{cases} x_p = x\left[(z_{prp} - z_{vp})/(z_{prp} - z)\right] = x\left[d_p/(z_{prp} - z)\right] \\ y_p = y\left[(z_{prp} - z_{vp})/(z_{prp} - z)\right] = y\left[d_p/(z_{prp} - z)\right] \end{cases}$$

其中：*dp=zprp-zvp*是投影参考点到观察平面的距离。



$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z_{vp}/d_p & z_{vp}(z_{prp}/d_p) \\ 0 & 0 & -1/d_p & z_{prp}/d_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$


一药业


MEYET