Beijing University of Chemical Technology

Course Homeworks

矩阵的谱半径

计科 1703 张俊峰 2017040330

目录

第 1 章 矩阵的谱半径 **1**

1.1 简介 1

1.2 理论分析 1

1.3 算法描述 2

1.4 实例分析 3

1.5 总结 11

创建日期：2019 年 11 月 19 日

更新日期：2019 年 11 月 20 日

第 1 章　矩阵的谱半径

1.1　简介

设 A 是 $n \times n$ 矩阵，$\lambda_1, ..., \lambda_n$ 是其特征值，则 A 的谱半径 $\rho(A) = \max\{|\rho_1|, ..., |\rho_n|\}$.

(1) 矩阵的谱半径等于矩阵的特征值绝对值的最大值。

(2) 在数学中，矩阵的谱半径是指其特征值绝对值集合的上确界。

1.2　理论分析

定理 1. 设 $A \in R^{n \times n}$ 为 n 阶方阵， 则对任意矩阵范数 $||\cdot||$ 都有 $\rho(A) \leq ||\cdot||$.

定理 2. 若 A 为 n 阶正规矩阵， 则 $\rho(A) \leq ||A||_2$.

证明. 因 A 是正规矩阵， 故存在幺正矩阵 P， 使得

$$P^H A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & ... & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

□

由此可得：

$$P^H A^H P = \begin{bmatrix} \bar{\lambda_1} & & \\ & ... & \\ & & \bar{\lambda_n} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

从而：

$$P^H A^H A P = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & ... & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

又显然有：

$$\lambda_A H_A \;=\; \max\{|\lambda_1|^2\;,\;|\lambda_2|^2\;,...,\;|\lambda_n|^2\} \;=\; |\lambda_t|^2.$$

这里 t 是 $\{1, 2, ..., n\}$ 中的某一值，因此有：

$$||A||_2 \;=\; \sqrt{\lambda_A H_A} \;=\; |\lambda_t|.$$

又因为：

$$\rho(A) \;=\; \max\{|\lambda_1|\;,\;|\lambda_2|\;,...,\;|\lambda_n|\} \;=\; |\lambda_t|$$

所以，可以证明：

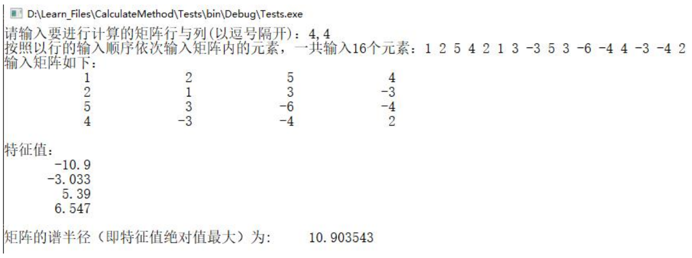
$$\rho(A) \leq ||A||_2$$

1.3 算法描述

Algorithm 1: 算法

```
Input: 要进行计算你的矩阵的行与列，并且按照行的顺序依次输入矩阵元素;
Output: 该矩阵的所有特征值和矩阵的谱半径 (绝对值最大的特征值);
输入矩阵的行与列以及矩阵内的元素;
$bool\ \ InitMatrix(Matrix\ \ *matrix,\ \ int\ \ row,\ \ int\ \ column)$
定义一个结构体, 用来表示二维矩阵;
$typedef\ \ struct$
$\{$
  $int\ \ row;$
  $int\ \ column;$
  $double\ \ *data;$
$\}Matrix;$
使用 QR 分解求矩阵特征值
$for\ \ k\ = \ 0 \rightarrow NUM$
$\{$
$QR(temp,\ \ temp_Q,\ \ temp_R);$
$MatrixMulMatrix(temp,\ \ temp_R,\ \ temp_Q);$ 分解后两个矩阵相乘
$\}$
获取特征值，将特征值存储在 $eValue$ 中
$for\ \ k\ = \ 0 \rightarrow temp.column$
$\{$
$eValue.data[k]\ = \ temp.data[k\ *\ temp.column\ +\ k];$
$result[k]\ = \ fabs(temp.data[k\ *\ temp.column\ +\ k]);$
$\}$
输出特征值以及矩阵的谱半径
$float\ \ maxn\ = \ -1$
$for\ \ k\ = \ 0 \rightarrow temp.column$
$\{$
$if\ \ (result[k]\ >\ maxn)$
$maxn\ = \ result[k];$
$\}$
$PrintMatrix(eValue);$
$printf$ 矩阵的谱半径（即特征值绝对值最大）为：$maxn;$
```

1.4 实例分析



```
请输入要进行计算的矩阵行与列(以逗号隔开)：4,4
按照以行的输入顺序依次输入矩阵内的元素，一共输入16个元素：1 2 5 4 2 1 3 -3 5 3 -6 -4 4 -3 -4 2
输入矩阵如下：
           1            2            5            4
           2            1            3           -3
           5            3           -6           -4
           4           -3           -4            2

特征值：
      -10.9
     -3.033
       5.39
      6.547

矩阵的谱半径（即特征值绝对值最大）为：      10.903543
```

图 1.1: sample

```c
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include <math.h>
#include <stdbool.h>

//定义一个结构体，用来表示一个二维的矩阵
typedef struct
{
    int row;
    int column;
    double *data;//用来存放矩阵的元素
}Matrix;

/*******************************************************************
函数功能：初始化一个矩阵
输入：要初始化的矩阵matrix、矩阵的行row、矩阵的列column
输出：初始化成功：true；初始化失败：false
*******************************************************************/
bool InitMatrix(Matrix *matrix, int row, int column)
{
    int matrix_size = row*column*sizeof(double);
    if (matrix_size <= 0)
        return false;
    matrix->data = (double*)malloc(matrix_size);//给矩阵分配空间
    if (matrix->data)
    {
        matrix->row = row;
        matrix->column = column;
        return true;
    }
    else
    {
        matrix->row = 0;
        matrix->column = 0;
        return false;
    }
}

/*************************************************************************
函数功能：打印出一个矩阵
输入：一个矩阵matrix
输出：无
*************************************************************************/
void PrintMatrix(Matrix *matrix)
{
    int matrix_num = matrix->row*matrix->column;
    for (int i = 0; i < matrix_num; i++)
    {
        printf("%12.4g ", matrix->data[i]);
        if ((i + 1) % (matrix->column) == 0)
            printf("\n");
    }
    printf("\n");
}

/*************************************************************************
函数功能：获取一个矩阵的大小
输入：一个矩阵matrix
输出：矩阵的大小size
*************************************************************************/
int GetMatrixSize(Matrix *matrix)
{
    return matrix->row*matrix->column;
}

/*************************************************************************
函数功能：清零，使矩阵每个元素为0
输入：需要清零的矩阵matrix
输出：无
*************************************************************************/
void SetMatrixZeros(Matrix *matrix)
{
    int matrix_num = GetMatrixSize(matrix);
    for (int i = 0; i < matrix_num; i++)
        matrix->data[i] = 0;
}

```

```
/************************************************************************
函数功能：判断一个矩阵是否为空
输入：一个矩阵matrix
输出：为空则true，否则为false
************************************************************************/
bool IsNullMatrix(Matrix *matrix)
{
    int matrix_num =GetMatrixSize(matrix);
    if ((matrix_num <= 0) || (matrix->data == NULL))
        return true;
    else
        return false;
}

/************************************************************************
函数功能：释放掉一个矩阵
输入：一个矩阵matrix
输出：无
************************************************************************/
void DestroyMatrix(Matrix *matrix)
{
    if (!IsNullMatrix(matrix))
    {
        matrix->data = NULL;
        matrix->row = 0;
        matrix->column = 0;
        free(matrix->data);
    }
}

/************************************************************************
函数功能：计算一个矩阵的2范数，即求模
输入：一个矩阵matrix
输出：所求的范数结果norm2_ans
************************************************************************/
double MatrixNorm2(Matrix *matrix)
{
    double norm2_ans = 0.0;
    int matrix_num = GetMatrixSize(matrix);
    for (int i = 0; i < matrix_num; i++)
        norm2_ans+=(matrix->data[i]) * (matrix->data[i]);
    norm2_ans = (double)sqrt(norm2_ans);
    return norm2_ans;
}

/************************************************************************
函数功能：把一个矩阵复制
输入：需要进行复制的矩阵matrix_A，复制得到的一个矩阵matrix_B
```

```
输出：无
***************************************************************************/
void CopyMatrix(Matrix *matrix_A, Matrix *matrix_B)
{
    if (matrix_B->row != matrix_A->row)
        matrix_B->row = matrix_A->row;
    if (matrix_B->column != matrix_A->column)
        matrix_B->column = matrix_A->column;
    int size_A = GetMatrixSize(matrix_A);
    for (int i = 0; i < size_A; i++)
        matrix_B->data[i] = matrix_A->data[i];
}

/***************************************************************************
函数功能：对一个方阵A进行QR分解
输入：需要分解的矩阵A、分解后的正交矩阵Q和上三角矩阵R
输出：无
***************************************************************************/
void QR(Matrix *A, Matrix *Q, Matrix *R)
{
    Matrix col_A, col_Q;
    InitMatrix(&col_A, A->row, 1);
    SetMatrixZeros(&col_A); //用来存A的每一列
    InitMatrix(&col_Q, A->row, 1);
    SetMatrixZeros(&col_Q); //用来存Q的每一列

    if (A->row != A->column)
        printf(”A is not a square matrix!”);

    int A_size = GetMatrixSize(A);
    int Q_size = GetMatrixSize(Q);
    int R_size = GetMatrixSize(R);

    if (Q_size != A_size)
    {
        DestroyMatrix(Q);
        InitMatrix(Q, A->row, A->column);
        SetMatrixZeros(Q);
    }
    else
    {
        Q->row = A->row;
        Q->column = A->column;
        SetMatrixZeros(Q);
    }

    if (R_size != A_size)
    {
        DestroyMatrix(R);
        InitMatrix(R, A->row, A->column);
        SetMatrixZeros(R);
    }
    else
    {
        R->row = A->row;
        R->column = R->column;
        SetMatrixZeros(R);
    }

    //施密特正交化
    for (int j = 0; j < A->column; j++)
    {
        for (int i = 0; i < A->column; i++)//把A的第j列存入col_A中
        {
            col_A.data[i] = A->data[i * A->column + j];
            col_Q.data[i] = A->data[i * A->column + j];
        }
        for (int k = 0; k < j; k++)//计算第j列以前
        {
            R->data[k * R->column + j] = 0;
            for (int i1 = 0; i1 < col_A.row; i1++)
            {//R=Q'A(Q'即Q的转置) 即Q的第k列和A的第j列做内积
                R->data[k * R->column + j] += col_A.data[i1] * Q->data[i1 * Q->column + k];//Q的第k列
            }
            for (int i2 = 0; i2 < A->column; i2++)
            {
                col_Q.data[i2] -= R->data[k * R->column + j] * Q->data[i2 * Q->column + k];
            }
        }

        double temp = MatrixNorm2(&col_Q);
        R->data[j * R->column + j] = temp;
        for (int i3 = 0; i3 < Q->column; i3++)
        {
            //单位化Q
            Q->data[i3 * Q->column + j] = col_Q.data[i3] / temp;
        }
    }

    DestroyMatrix(&col_A);
    DestroyMatrix(&col_Q);
}

/***********************************************************************
```

```
函数功能：给特征值排序，当flag=1时，则升序，当flag=0，则降序
输入：需要排序的序列eValue，升序还是降序的选择flag
输出：排序成功则返回true，否则返回false
*************************************************************************/
bool SortEigenValues(Matrix *eValue, int flag)
{
    int size = GetMatrixSize(eValue);

    for (int i = 0; i < size - 1; i++)
    {
        int k = i;
        for (int j = i + 1; j < size; j++)
        {
            if (flag == 1)
            {
                if (eValue->data[k] > eValue->data[j])
                {
                    k = j;
                }
            }
            else if (flag == 0)
            {
                if (eValue->data[k] < eValue->data[j])
                {
                    k = j;
                }
            }
            else
                return false;
        }
        if (k != i)
        {
            double temp;
            temp = eValue->data[i];
            eValue->data[i] = eValue->data[k];
            eValue->data[k] = temp;
        }
    }
    return true;
}

/*************************************************************************
函数功能：计算两个矩阵相乘C=A*B
输入：用来存计算结果的矩阵C、需要进行乘法计算的两个矩阵A和B
输出：计算成功则输出true，失败则false
*************************************************************************/
bool MatrixMulMatrix(Matrix *C, Matrix *A, Matrix *B)
{
```

```c
    if ((IsNullMatrix(A)) || (IsNullMatrix(B)))
        return false;

    int A_col = A->column;
    int B_row = B->row;
    InitMatrix(C, A->row, B->column);
    SetMatrixZeros(C);

    if (A_col != B_row)
    {
        printf("A_col!=B_row!");
        return false;
    }

    for (int i = 0; i < A->row; i++)
    {
        for (int j = 0; j < B->column; j++)
        {
            for (int k = 0; k < A->column; k++)
                C->data[i*C->row + j] += A->data[i*A->row + k] * B->data[k*B->column + j];
        }
    }

    return true;
}

int main()
{
    const unsigned NUM = 50; //最大迭代次数，让数据更准确
    Matrix mymatrix,temp,temp_Q,temp_R, eValue;
    int row,col;
    while (1)
    {
        printf("请输入要进行计算的矩阵行与列(以逗号隔开)： ");
        scanf("%d,%d", &row, &col);

        InitMatrix(&mymatrix, row, col);
        InitMatrix(&temp, row, col);
        SetMatrixZeros(&temp);
        SetMatrixZeros(&mymatrix);

        int num = row*col;
        printf("按照以行的输入顺序依次输入矩阵内的元素，一共输入%d个元素： ", num);
        int data;
        for (int i = 0; i < num; i++)
        {
            scanf("%d", &data);
            mymatrix.data[i] = data;
        }
        printf(”输入矩阵如下：\n”);
        PrintMatrix(&mymatrix);

        CopyMatrix(&mymatrix, &temp);

        InitMatrix(&temp_Q, mymatrix.row, mymatrix.column);
        InitMatrix(&temp_R, mymatrix.row, mymatrix.column);
        InitMatrix(&eValue, mymatrix.row, 1);

        //使用QR分解求矩阵特征值
        for (int k = 0; k < NUM; ++k)
        {
            QR(&temp, &temp_Q, &temp_R);
            MatrixMulMatrix(&temp, &temp_R, &temp_Q);//R∗Q
        }

        float result[temp.column];
        //获取特征值，将之存储于eValue
        for (int k = 0; k < temp.column; ++k)
        {
            eValue.data[k] = temp.data[k ∗ temp.column + k];
            result[k] = fabs(temp.data[k ∗ temp.column + k]);
        }

        SortEigenValues(&eValue, 1);//给特征值排序，1为升序，0为降序
        printf(”特征值：\n”);
        PrintMatrix(&eValue);

        float maxn = −1;
        for (int k = 0; k < temp.column; ++k)
        {
            if (result[k] > maxn)
                maxn = result[k];
        }
        printf(”矩阵的谱半径（即特征值绝对值最大）为: %lf\n\n”, maxn);

        DestroyMatrix(&eValue);
        DestroyMatrix(&mymatrix);
        DestroyMatrix(&temp);
        DestroyMatrix(&temp_Q);
        DestroyMatrix(&temp_R);
    }
    return 0;
}
```

1.5 总结

经过这次文章的撰写，我学到了很多知识。首先，对于题目而言，我学到了矩阵的特征值的计算，以及之后得到矩阵的谱半径，这让我又回忆起来线性代数的知识。其次，通过写文章，我对矩阵的谱半径有了更深的认识，而且，经过程序的编写, 我又掌握了矩阵特征值的求法，这个看着简单，但实际写程序是很困难的。最后，我学习了怎么运用 TeXworks 软件写出漂亮的文章，它的排版和对数学公式的美化真的让我很喜欢。

参考文献

[1] Author. *Wiki*. https://zh.wikipedia.org/wiki/%E8%B0%B1%E5%8D%8A%E5%BE%84, 2019.

[2] Author. 百度百科. https://baike.baidu.com/item/%E8%B0%B1%E5%8D%8A%E5%BE%84, 2019.

[3] Author. *CSDN*. https://blog.csdn.net/qq_36417014/article/details/83901715, 2019.

[4] Author. *CSDN*. https://blog.csdn.net/gsww404/article/details/78684278, 2019.