计算方法

Ch03 数值积分

程勇

buctcourse@163.com

http://www.buct.edu.cn

Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology

Sept. 19, 2019

提纲

本章提纲

传统求积方法

对于积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果知道 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$，则由 Newton-Leibniz 公式可求得：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\mid_a^b = F(b) - F(a)$$

但事实上，我们不难发现，微积分方法求积分也确有其局限性：

1. $f(x)$ 根本不存在，往往只是给出一张数据表来表示函数的关系；
2. 被积函数没有初等函数表示的原函数；
3. $f(x)$ 的表达式结构复杂，求原函数较困难；

数值积分求解方法

显然这些情况下将无法运用 Newton-Leibniz 来求积分，而需要建立定积分的近似计算公式。这类方法很多, 但最常用的一种方法是利用插值多项式来构造数值求积公式，具体步骤如下:

1. 构造一个多项式 $p(x)$ 逼近被积函数 $f(x)$;
2. 以 $p(x)$ 的积分近似代替 $f(x)$ 的积分；即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b p\,(x)\,\mathrm{d}x$$

多项式 $p(x)$ 的积分则是大家都会计算的，下面就根据这一想法构造计算定积分的各种近似计算公式。

机械求积

依据积分中值定理，对于连续函数 $f(x)$，在 $[a, b]$ 内存在一点 ξ，成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\,f(\xi)$$

即底为 $b-a$ 而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积恰恰等于所求曲边梯形的面积。称 $f(\xi)$ 为区间 $[a, b]$ 上的平均高度，而这一平均高度是很难计算的，但可以采用另一类办法来解决这一问题，就是对平均高度 $f(\xi)$ 提供一种近似算法。

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

一般地，在求积分时，取 $[a, b]$ 内若干个节点 x_i 处的高度 $f(x_i)$ ，通过加权平均的方法得出平均高度 $f(\xi)$ 的近似值，这类求积方法称机械求积，式中 x_i 称为求积节点，λ_i 称为求积系数。

梯形求积公式

过两点 a, b 作直线 (两点 Lagrange 插值)

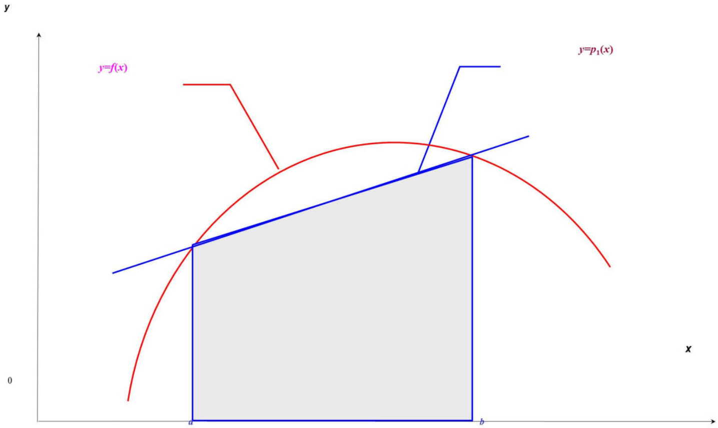
$$p_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

用 $p_1(x)$ 代替 $f(x)$ 得:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b p_1(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \left(\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right)\mathrm{d}x \\
&= (b-a)\left(\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right) \\
&= \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right)
\end{aligned}$$

称为梯形求积公式 (两点公式)。

梯形求积公式几何意义



梯形求积

梯形求积例子

例：利用梯形求积公式计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x$$

解：依梯形求积公式有：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x &\approx \frac{1-0.5}{2}(\sqrt{0.5}+\sqrt{1}) \\ &= 0.4267767\end{aligned}$$

积分准确值为：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{0.5}^{1} \\ &= 0.43096441\end{aligned}$$

求积公式的代数精度

机械求积公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

具有 m 阶 (代数) 精度，如果它对于任意次数不超过 m 次多项式 $f(x)=p_k(x)(0\le k\le m)$ 是准确的，但对于 $m+1$ 次多项式 $f(x)=p_{m+1}(x)$ 不准确。即有：

$$\int_a^b p_k(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i p_k(x_i) \quad k=0,1,2,\cdots,m$$

$$\int_a^b p_{m+1}(x)\,\mathrm{d}x \neq (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i p_{m+1}(x_i)$$

求积公式的代数精度 (续)

求积公式代数精度的判断可以简化如下：如果求积公式对于任意次数不超过 m 次的幂函数 $f(x)=x^k(0\leq k\leq m)$ 是准确的，但对于 $m+1$ 次幂函数 $f(x)=x^{m+1}$ 不准确，则可判定求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

具有 m 阶 (代数) 精度。

例：判断梯形求积公式的代数精度。

对梯形求积公式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

求积公式的代数精度 (续)

当 $f(x)=1$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b 1\,dx=b-a$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(1+1)=b-a$$

因此有：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

当 $f(x)=x$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))=\frac{b-a}{2}(a+b)=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

求积公式的代数精度 (续)

因此有:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

当 $f(x) = x^2$ 时

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) = \frac{b-a}{2}(a^2+b^2)$$

因此:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \neq \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$$

由定义可知，梯形求积公式具有 1 次代数精度。

Newton-Cotes 公式

Newton-Cotes 公式是指在等距节点下使用 Lagrange 插值多项式建立的数值求积公式。

设将求积区间 $[a, b]$ 划分为 n 等分，选取等分点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

作为求积节点构造求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

这种求积公式称为 Newton-Cotes 公式。

Simpson 求积公式

将求积区间 $[a,b]$ 两等分，过三点 $a,(a+b)/2,b$ 作抛物线 (三点 Lagrange 插值)

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \frac{2}{(b-a)^2}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,f(a) \\ &\quad - 2\frac{2}{(b-a)^2}(x-a)(x-b)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &\quad + \frac{2}{(b-a)^2}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(b) \end{aligned}$$

用 $p_2(x)$ 代替 $f(x)$ 得:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

称为 Simpson 公式，这是 Newton-Cotes 公式的一个特例。

Simpson 公式计算例子

例：利用 Simpson 公式计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx$$

解：由 Simpson 公式：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx \approx \frac{1-0.5}{6}(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+\sqrt{1})$$
$$= 0.43093403$$

积分准确值为：

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{0.5}^{1} = 0.43096441$$

同样可以证明 Simpson 求积公式具有三次代数精度。

Newton-Cotes 公式

将求积区间 $[a,b]$ 划分为 n 等分，选取等分点

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, i = 0, 1, 2, \cdots, n$$

构造 n 次 Lagrange 插值

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)$$

用 $L_n(x)$ 代替 $f(x)$ 得：

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &\approx \int_a^b L_n(x)\,dx \\ &= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) f(x_i)\,dx \end{aligned}$$

Newton-Cotes 公式 (续)

$$= \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = (b-a) \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

其中

$$A_i = \int_a^b \left(\prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) dx$$

称为 Newton-Cotes 公式。梯形求积公式和 Simpson 公式是 Newton-Cotes 公式当 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时的两个特例。

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \quad \text{梯形公式}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right) \quad \text{Simpson 公式}$$

Newton-Cotes 公式求积系数

n	求积系数					
1	1/2	1/2				
2	1/6	4/6	1/6			
3	1/8	3/8	3/8	1/8		
4	7/90	16/45	2/15	16/45	7/90	
5	19/288	25/96	25/144	25/144	25/96	19/288

Newton-Cotes 求积公式例子

例题：利用 Newton-Cotes 公式 (取 $n=4$，此时称为 Cotes 公式) 计算定积分：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx$$

解：根据 Newton-Cotes 公式：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}dx &\approx \frac{1-0.5}{90}(7\sqrt{0.5}+32\sqrt{0.625}\\ &+12\sqrt{0.75}+32\sqrt{0.875}+7)\\ &=0.43096407\end{aligned}$$

积分准确值为：

$$\begin{aligned}\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}|_{0.5}^{1}\\ &=0.43096441\end{aligned}$$

Newton-Cotes 公式代数精度

可以证明 Newton-Cotes 公式的代数精度至少为 n。且当 n 为偶数时，代数精度可达 $n+1$。如：

$n=1$ 时 (梯形公式)，代数精度为 1;

$n=2$ 时 (Simpson 公式)，代数精度为 $2+1=3$;

$n=4$ 时 (Cotes 公式)，代数精度为 $4+1=5$，以此类推。

复化求积公式

为了提高求积公式的精度，又使算法简单易行，往往使用复合方法，即将积分区间 $[a, b]$ 分成若干个子区间，然后在每个小区间上使用低阶 Newton-Cotes 公式，最后将每个小区间上的积分的近似值相加作为积分的近似值，这种方法称为复化求积法。

复化梯形公式

将求积区间 n 等分，步长 $(b-a)/n$，分点为 $x_i = a + ih(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ ，对每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用梯形求积公式，则

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

$$= \frac{b-a}{2n}(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)) = T_n$$

复化梯形求积例子

例题：已知 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ 由表给出

x	1	3/2	2	5/2	3
$f(x)$	0	11/8	5	93/8	22

用复化梯形公式近似计算定积分 $\int_1^3 f(x)\,dx$。
解：此时 $n = 4$

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right) \\ &= \frac{3-1}{2\cdot 4}\left(f(1) + 2(f(3/2) + f(2) + f(5/2)) + f(3)\right) \\ &= \frac{1}{4}(0 + 2(11/8 + 5 + 93/8) + 22) = 14.5 \end{aligned}$$

实际上 $\int_1^3 (x^3 - 2x + 1)\,dx = 14$

复化 Simpson 公式

将求积区间 n 等分的基础上，再将每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]2$ 等份，记内分点为 $x_{i+1/2}$
$x_i = a + ih, x_{i+1/2} = a + (i + 1/2)h, (i = 0, 1, 2, 3, \cdots, n)$。对小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用 Simpson 求积公式，得到：

$$\begin{aligned}
I = \int_a^b f(x)\,dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{6} \left(f(x_i) + 4f(x_{i+\frac{1}{2}}) + f(x_{i+1}) \right) \\
&= \frac{b-a}{6n} \left(f(a) + 4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b) \right) \\
&= S_n
\end{aligned}$$

复化 Cotes 公式

将求积区间 n 等分的基础上，再将每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分为 4 等分，记内分点为 $x_{i+1/4}, x_{i+1/2}, x_{i+3/4}$，即：

$$\begin{aligned} x_i &= a + ih \\ x_{i+\frac{1}{4}} &= a + (i + \frac{1}{4})h \\ x_{i+\frac{1}{2}} &= a + (i + \frac{1}{2})h \\ x_{i+\frac{3}{4}} &= a + (i + \frac{3}{4})h \\ x_{i+1} &= a + (i+1)h \quad (i = 0, 1, 2, \cdots, n) \end{aligned}$$

复化 Cotes 公式 (续)

对小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 使用 Cotes 求积公式，则

$$
\begin{aligned}
I &= \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \\
&\approx \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{90} \left(7f(x_i) + 32f\left(x_{i+\frac{1}{4}}\right)\right. \\
&\left. + 12f(x_{i+\frac{1}{2}}) + 32f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 7f(x_{i+1})\right) \\
&= \frac{b-a}{90n}\left(7f(a) + 32\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_{i+\frac{1}{4}}\right) + 12\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})\right. \\
&\left. + 32\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 7f(b)\right) = C_n
\end{aligned}
$$

复化求积例子

例题：用函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 的数据表计算积分 $I=\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$。

x	$f(x)$
0	1.0000000
1/8	0.9973978
2/8	0.9896158
3/8	0.9767267
4/8	0.9588510
5/8	0.9361556
6/8	0.9088516
7/8	0.8771925
1	0.8414709

复化求积例子 (续)

解：此时 $n=8$

$$
\begin{aligned}
T_8 &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= \frac{1-0}{2\cdot 8}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{8-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= 0.945690806
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{b-a}{6n}\left(f(a)+4\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= \frac{1-0}{6\cdot 4}\left(f(a)+4\sum_{i=0}^{4-1} f(x_{i+\frac{1}{2}})+2\sum_{i=1}^{4-1} f(x_i)+f(b)\right)\\
&= 0.946083254
\end{aligned}
$$

复化求积例子 (续)

同理，应用复合 Cotes 公式可求得 C_2 值如下：

$$C_2 = 0.94608307$$

该积分的“精确值”为

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 0.9460831$$

对上述三个结果进行比较可以看出，T_8 精度最低、S_4 精度次高，C_2 精度最高。上述积分都需要提供 9 个节点上的函数值，工作量基本相同，然而精度却相差很大，同积分的精确值比较，复化梯形法的结果有 3 位有效数值，而复化 Simpson 法和 Cotes 的结果有 8 位有效数值。

梯形法加速

复化梯形法的算法简单但精度低。能否加工梯形值来提高精度呢？考查二分前后的梯形公式：

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b)) \\
T_2 &= \frac{1}{2}T_1 + \frac{b-a}{2}f(\frac{a+b}{2}) \\
&= \frac{b-a}{4}(f(a)+2f(\frac{a+b}{2})+f(b)) \\
S_1 &= \frac{b-a}{6}(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b))
\end{aligned}
$$

因此，我们得到

$$S_1 = \frac{4}{3}T_2 - \frac{1}{3}T_1$$

Romberg 算法

推广到复合求积公式，有：

$$S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n$$

同理，我们可以得到：

$$C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n$$
$$R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n$$

此方法称为 Romberg 公式，它是由复化梯形公式、复化 Simpson 公式依次递推求得的，松弛因子是 $\omega = 1/63$。它能将粗糙的梯形公式逐步加工成高精度的 Romberg 公式，称这种算法为 Romberg 算法。综合表示如下：

Romberg 算法 (续)

$$\begin{cases} T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_{2n} = \frac{1}{2}T_n + \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+\frac{1}{2}}) \\ S_n = \frac{4}{3}T_{2n} - \frac{1}{3}T_n \\ C_n = \frac{16}{15}S_{2n} - \frac{1}{15}S_n \\ R_n = \frac{64}{63}C_{2n} - \frac{1}{63}C_n \end{cases}$$

$n = 2^k, k = 0, 1, 2, 3, \cdots$，以上整个过程称为 Romberg 算法。

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	T_1			
1	T_2	S_1		
2	T_4	S_2	C_1	
3	T_8	S_4	C_2	R_1
4	T_{16}	S_8	C_4	R_2

Romberg 算法例子

例题：利用 Romberg 算法计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

解：计算求得

k	T_{2^k}	$S_{2^{k-1}}$	$C_{2^{k-2}}$	$R_{2^{k-3}}$
0	0.9207355			
1	0.9397933	0.9461459		
2	0.9445135	0.9460869	0.9460830	
3	0.9456909	0.9460834	0.9460831	0.9460831

得到 $R_1 = 0.9460831$。

Gauss 公式

Newton-Cotes 公式在构造时，限定积分区间的等分点作为求积节点，这样做在简化处理的同时也限制了代数精度。如果求积节点也可自由选择，即机械求积公式：

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

中的 λ_i, x_i 共 $2n+2$ 个均为待定参数，适当选取这些参数可以使公式具有 $2n+1$ 次代数精度。这种高精度的求积公式称为 Gauss 公式。

积分区间变换

不失一般性，把积分区间取成 $[-1,1]$，这是因为利用变换：

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t$$

总可将区间 $[a,b]$ 变换成 $[-1,1]$，而积分变为：

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$$

其中

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)$$

一点 Gauss 公式

对于一点 Gauss 公式 ($n=0$，具有一次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{0} \lambda_i f(x_i) = 2\lambda_0 f(x_0)$$

因此当 $f(x)=1, f(x)=x$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases} 2\lambda_0 = 2 \\ 2\lambda_0 x_0 = 0 \end{cases}$$

解得：$\lambda_0 = 1, x_0 = 0$，因此得到：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_1 = 2f(0)$$

两点 Gauss 公式

对于两点 Gauss 公式 ($n=1$，具有三次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{1} \lambda_i f(x_i) = 2(\lambda_0 f(x_0) + \lambda_1 f(x_1))$$

因此当 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = 1 \\ \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_0 x_0^2 + \lambda_1 x_1^2 = \frac{1}{3} \\ \lambda_0 x_0^3 + \lambda_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

解得：$\lambda_0 = \lambda_1 = \frac{1}{2}, x_1 = -x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$，因此得到：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_2 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

三点 Gauss 公式

对于三点 Gauss 公式 ($n=2$，具有五次代数精度)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{2}\lambda_i f(x_i) = 2(\lambda_0 f(x_0)+\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2))$$

因此当 $f(x)=1,x,x^2,x^3,x^4,x^5$ 时上式精确成立，有：

$$\begin{cases} \lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=1 \\ \lambda_0x_0+\lambda_1x_1+\lambda_2x_2=0 \\ \lambda_0x_0^2+\lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2=\frac{1}{3} \\ \lambda_0x_0^3+\lambda_1x_1^3+\lambda_2x_2^3=0 \\ \lambda_0x_0^4+\lambda_1x_1^4+\lambda_2x_2^4=\frac{1}{5} \\ \lambda_0x_0^5+\lambda_1x_1^5+\lambda_2x_2^5=0 \end{cases}$$

三点 Gauss 公式 (续)

解得:

$$\begin{cases} \lambda_0 = \frac{5}{18} \\ \lambda_1 = \frac{4}{9} \\ \lambda_2 = \frac{5}{18} \\ x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

因此得到:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

一般高斯求积公式

取积分区间为 $[-1,1]$，考察如下形式的求积公式：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

使其成为 Gauss 型的，具有 $2n+1$ 次代数精度。即满足：

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1} 1\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot 1 \\ \int_{-1}^{1} x dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i \\ \int_{-1}^{1} x^2\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 \\ \cdots \\ \int_{-1}^{1} x^{2n+1}\,dx = 2\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^{2n+1} \end{cases}$$

一般高斯求积公式 (续)

对上述积分计算可得如下的 $2n+2$ 个方程组：

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^2 = \frac{1}{3} \\ \cdots \\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i \cdot x_i^{2n+1} = 0 \end{cases}$$

其中，

$$\int_{-1}^{1} x^k dx = 0, \quad k = 1, 3, \cdots, 2n+1$$

因此，可解出 λ_i 和 x_i 共 $2n+2$ 个未知数。

一般积分区间的高斯公式

一般情况下，对于积分区间 $[a, b]$，则可由

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

得：

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_1 = 2f(0)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx G_1 = (b-a)f(\frac{a+b}{2})$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_2 = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx G_2 = \frac{b-a}{2}\left(f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}})\right)$$

一般积分区间的高斯公式 (续)

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \approx G_3 = \frac{b-a}{2}\Bigg(&\frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2}) \\ &+ \frac{8}{9}f(\frac{a+b}{2}) + \frac{5}{9}f(\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{3}{5}}\frac{b-a}{2})\Bigg)\end{aligned}$$

例题：试构造如下形式的 Gauss 型求积公式：

$$\int_{0}^{1} \sqrt{x} f(x)\,dx \approx A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$$

高斯公式例子

解：此时 $n=1$，另它对于 $f(x)=1,x,x^2,x^3$ 精确成立，得到如下方程组：

$$\begin{cases} A_0+A_1=\frac{2}{3} \\ A_0x_0+A_1x_1=\frac{2}{5} \\ A_0x_0^2+A_1x_1^2=\frac{2}{7} \\ A_0x_0^3+A_1x_1^3=\frac{2}{9} \end{cases}$$

求得：

$$x_0=0.821163, x_1=0.289949,$$
$$A_0=0.389111, A_1=0.277556$$

因此，求得的高斯积分公式为：

$$\int_0^1 \sqrt{x}f(x)\,dx \approx 0.389111\cdot f(0.821163)+0.277556\cdot f(0.289949)$$

本章小结

- 机械求积;
- Newton-Cotes 公式;
- 复化求积公式;
- 龙贝格算法;
- Gauss 公式;

练习题

1. 编程实现 Newton-Cotes 求积算法。
2. 编程实现 Simpson 复化求积公式。
3. 编程实现 Gauss 求积算法。

谢谢!

AUTHOR: Cheng Yong
ADDRESS: Dept. of Computer
Beijing University of Chemical Technology
Beijing, 100029, China
EMAIL: buctcourse@163.com