



参数曲线和曲面基础

Ray

ray@mail.buct.edu.cn

2017/11/22

李辉 副教授



内容

- 曲线曲面参数表示
- 位置矢量、切矢量、法矢量、曲率和挠率
- 插值、拟合、逼近和光顺
- 参数曲线的代数和几何形式
- 连续性
- 参数曲面基本概念



曲线曲面参数表示

- 表示方法
 - 显式表示
 - 隐式表示
 - 参数表示

$$y=f(x)$$

$$f(x,y)=0$$

$$P(t)=[x(t), y(t)]$$

$$P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$$

- 显式或隐式表示存在下述问题：
 1. 与坐标轴相关；
 2. 可能出现斜率为无穷大的情形(如垂线)；
 3. 不便于计算机编程。



参数表示实例

■ 直线

$$P(t) = P_1 + (P_2 - P_1)t \quad t \in [0,1]$$

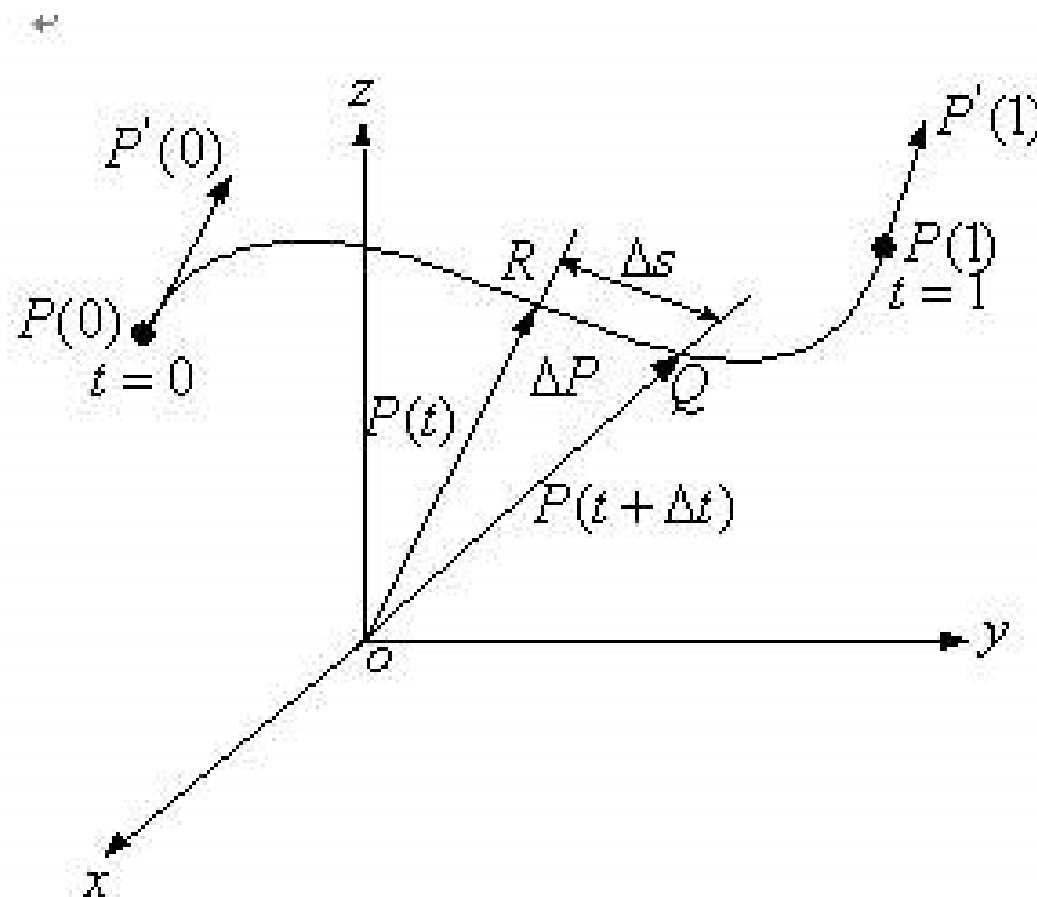
■ 圆

$$P(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right] \quad t \in [0,1]$$

■ 参数表示的优点

1. 便于处理斜率无穷大的情形，不会因此而中断计算。
2. 规格化的参数变量 $t \in [0, 1]$ ，使其相应的几何分量是有界的，而不必考虑边界问题。
3. 对曲线、曲面进行变换，可对其参数方程直接进行几何变换。
4. 便于把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间。
5. 易于用矢量和矩阵表示几何分量，简化了计算。
6. 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状

位置矢量、切矢量、法矢量



■ 位置矢量

$$P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$$

■ 切矢量(切向量)

– 将弧长 s 作为参数, 则 $T = \frac{dP}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta s}$ 是单位切矢量

– 单位切矢量的计算

• 根据弧长微分公式有: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$

$$(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = |P'(t)|^2$$

$$\frac{ds}{dt} = |P'(t)| \geq 0$$

– 于是有

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{P'(t)}{|P'(t)|}$$

即为单位切矢量。

■ 法矢量

- 与 $\frac{dT}{ds}$ 平行的法矢称为曲线在该点的主法矢量N
- 矢量积 $B=T \times N$ 是第三个单位矢量，它垂直于T和N。
把平行于矢量B的法矢称为曲线的副法矢量

$$B = \frac{P'(t) \times P''(t)}{|P'(t) \times P''(t)|}$$

$$N = B \times T = \frac{(P'(t) \times P''(t)) \times P'(t)}{|(P'(t) \times P''(t)) \times P'(t)|}$$

- T 、 N 和 B 构成了曲线上的活动坐标架
- N 、 B 构成的平面称为法平面
- N 、 T 构成的平面称为密切平面
- B 、 T 构成的平面称为从切平面

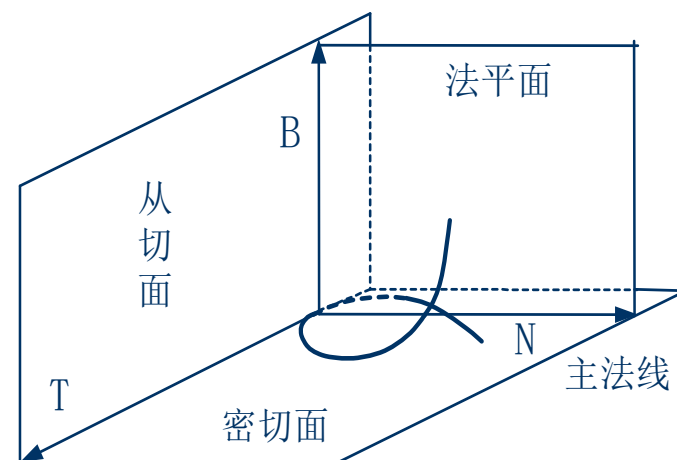


图3.1.2 曲线的法矢



曲率和挠率

■ 曲率

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$$

$$\left| \frac{dT}{ds} \right|$$

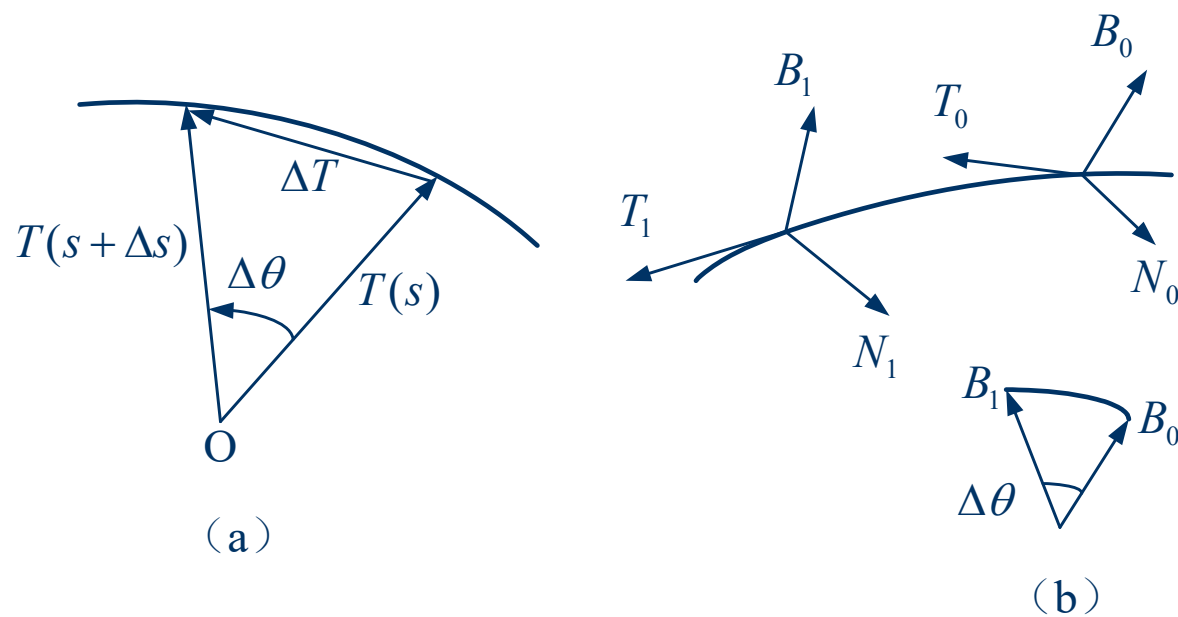
- 其几何意义是曲线的单位切矢对弧长的转动率
- 曲率 κ 的倒数 $\rho = \frac{1}{\kappa}$ 称为曲率半径

■ 挠率

- 挠率 τ 的绝对值等于副法线方向(或密切平面)对于弧长的转动率

$$|\tau| = \lim_{\Delta s} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

$$\left| \frac{dB}{ds} \right|$$



$$\kappa = \frac{|P'(t) \times P''(t)|}{|P'(t)|^3}$$

$$\tau = \frac{(P'(t), P''(t), P'''(t))}{(P'(t) \times P''(t))^2}$$



插值、拟合、逼近和光顺

■ 插值

- 给定一组有序的数据点 P_i , $i=0, 1, \dots, n$, 构造一条曲线顺序通过这些数据点, 称为对这些数据点进行插值, 所构造的曲线称为插值曲线。

■ 线性插值

- 假设给定函数 $f(x)$ 在两个不同点 x_1 和 x_2 的值, 用一个线形函数

$$y=ax+b$$

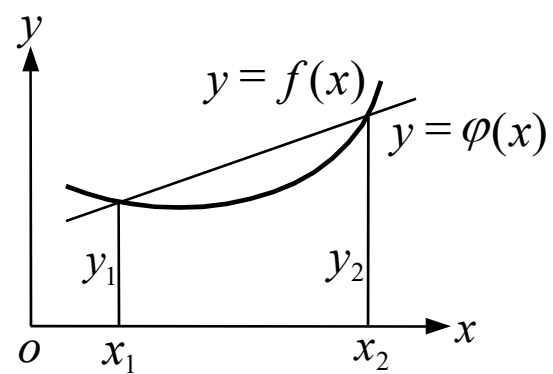
近似代替, 称为的线性插值函数。

■ 抛物线插值

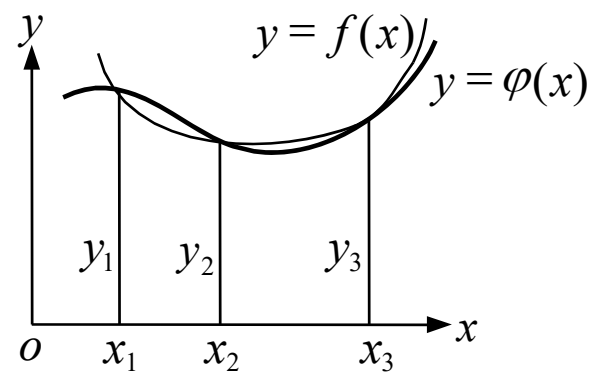
- 已知在三个互异点 x_1, x_2, x_3 , 的函数值为 y_1, y_2, y_3 , 要求构造一个函数

$$\varphi(x)=ax^2+bx+c$$

使抛物线 $\varphi(x)$ 在结点 x_1, x_2, x_3 处与 $f(x)$ 在 x_1, x_2, x_3 处的值相等。



(a)



(b)

■ 拟合

- 构造一条曲线使之在某种意义下最接近给定的数据点(但未必通过这些点)，所构造的曲线为拟合曲线。

■ 逼近

- 在计算数学中，逼近通常指用一些性质较好的函数近似表示一些性质不好的函数。在计算机图形学中，逼近继承了这方面的含义，因此插值和拟合都可以视为逼近。

■ 光顺

- 光顺(*Firing*)指曲线的拐点不能太多。
- 对平面曲线而言，相对光顺的条件是：
 1. 具有二阶几何连续性(G^2);
 2. 不存在多余拐点和奇异点;
 3. 曲率变化较小。



参数曲线的代数和几何形式

■ 代数形式(3次)

$$\begin{cases} x(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x} \\ y(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y} \\ z(t) = a_{3z}t^3 + a_{2z}t^2 + a_{1z}t + a_{0z} \end{cases} \quad t \in [0,1]$$

■ 矢量形式

$$P(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \quad t \in [0,1]$$

■ 几何形式

- 将 $P(0)$ 、 $P(1)$ 、 $P'(0)$ 和 $P'(1)$ 简记为 P_0 、 P_1 、 P'_0 和 P'_1 代入

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad t \in [0,1]$$

得

$$\begin{cases} a_0 = P_0 \\ a_1 = P'_0 \\ a_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P'_0 - P'_1 \\ a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P'_0 + P'_1 \end{cases}$$

$$P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P'_0 + (t^3 - t^2)P'_1 \quad t \in [0,1]$$

– 令 $F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$

$$F_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

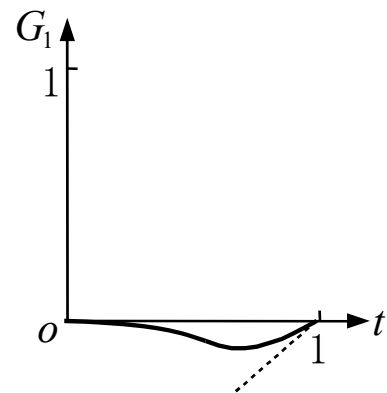
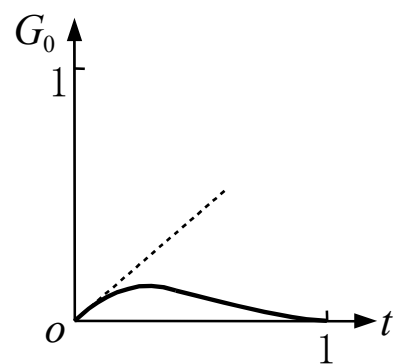
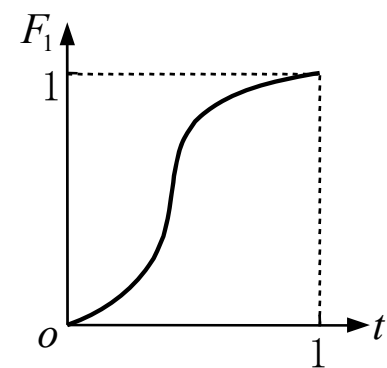
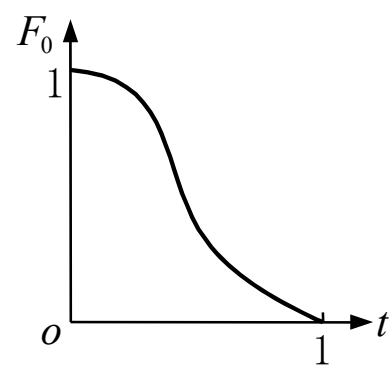
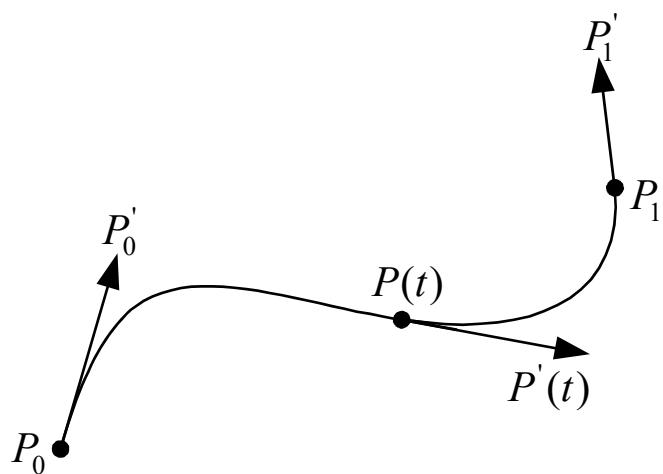
– 于是 $G_1(t) = t^3 - t^2$

$$P(t) = F_0P_0 + F_1P_1 + G_0P'_0 + G_1P'_1 \quad t \in [0,1]$$

– 上式是三次*Hermite(Ferguson)*曲线的几何形式.

– P_0 、 P_1 、 P'_0 和 P'_1 是几何系数

– F_0 、 F_1 、 G_0 和 G_1 称为调和函数





四点式曲线

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad t \in [0,1]$$

$$\begin{cases} a_0 = P_1 \\ \frac{1}{27}a_3 + \frac{1}{9}a_2 + \frac{1}{3}a_1 + a_0 = P_2 \\ \frac{8}{27}a_3 + \frac{4}{9}a_2 + \frac{2}{3}a_1 + a_0 = P_3 \\ a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = P_4 \end{cases}$$

$$P(t) = G_1 P_1 + G_2 P_2 + G_3 P_3 + G_4 P_4 \quad t \in [0,1]$$



连续性

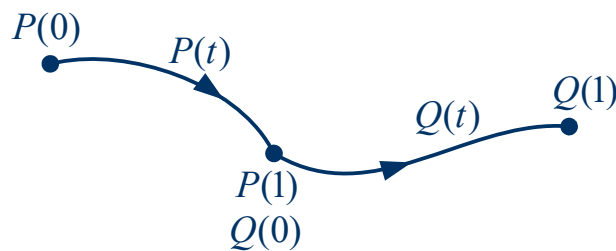
- 曲线间连接的光滑度有两种度量：
 1. 参数连续性
 - 组合参数曲线在连接处具有直到 n 阶连续导矢，即 n 阶连续可微，这类光滑度称之为 C^n 或 n 阶参数连续性。
 2. 几何连续性
 - 组合曲线在连接处不满足 C^n 的某一组约束条件，称为具有 n 阶几何连续性，简记为 G^n 。

■ 结论

- 若要求在结合处达到 G^0 连续或 C^0 连续，即两曲线在结合处位置连续。
- 若要求在结合处达到 G^1 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下，并有公共的切矢量。

$$Q'(0) = \alpha P'(1)$$

- 当 $\alpha = 1$ 时， G^1 连续就成为 C^1 连续。



$$\Phi(t) = \begin{cases} V_0 + \frac{V_1 - V_0}{3}t, & 0 \leq t \leq 1 \\ V_0 + \frac{V_1 - V_0}{3} + (t-1)\frac{2(V_1 - V_0)}{3}, & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$
$$\Phi'(1^-) = \frac{1}{3}(V_1 - V_0)$$
$$\Phi'(1^+) = \frac{2}{3}(V_1 - V_0)$$

- 若要求在结合处达到 C^2 连续，就是说两条曲线在结合处在满足 G^2 连续的条件下，并有相同的曲率。
- C^1 连续保证 G^1 连续， C^2 连续能保证 G^2 连续，但反过来不行。
- 也就是说 C^n 连续的条件比 G^n 连续的条件要苛刻。



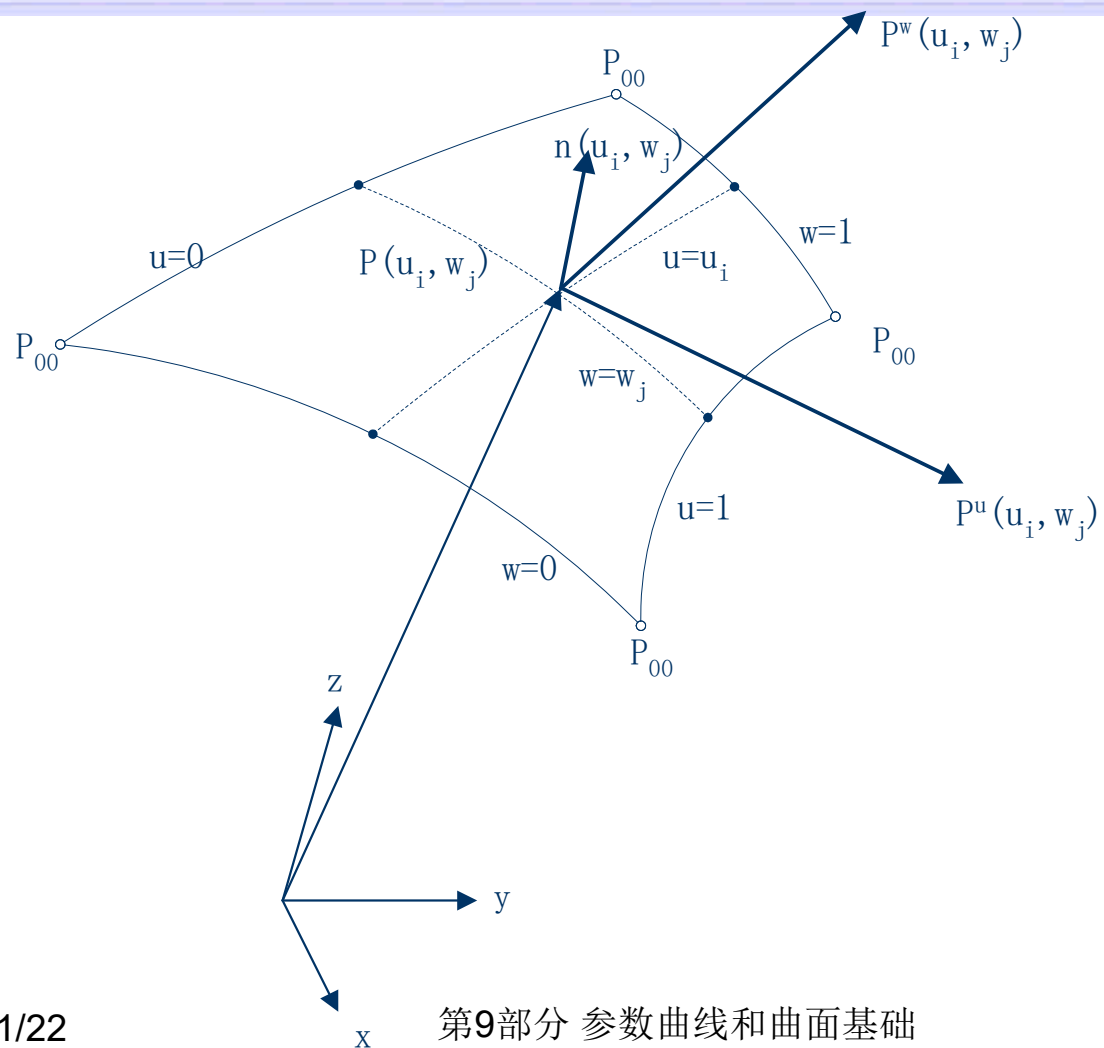
参数曲面

一张定义在矩形域上的参数曲面可以表示为

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

可记为

$$P(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$



- 参数曲面上的点

$$P(u_0, v_0)$$

- 参数曲面上一点的切向量

$$\frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \quad \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$

- 参数曲面上一点的法向量

$$\frac{\partial P(u, v)}{\partial u} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}} \times \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \Big|_{\substack{u=u_0 \\ v=v_0}}$$