

SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

Instrucciones Generales

- Este segundo examen parcial estará activo el **lunes 21 de junio del 2021, de 1:00 pm hasta las 5:00 pm**. No se aceptarán exámenes enviados después de las 5:00 pm.
- Este examen contiene 4 preguntas: 2 preguntas teóricas y 2 preguntas de programación.
- **Preguntas de Programación**
 - Todas las implementaciones computacionales de las dos preguntas de programación se den realizar en un único lenguaje de programación: GNU Octave o en Python. **No se calificará esta parte del examen si se realizan en otro lenguaje de programación a los mencionados anteriormente o si se utiliza dos lenguajes de programación, uno diferente en cada pregunta.**
 - El encabezado de este archivo debe tener el nombre completo y el número de carnet. Cada una de las preguntas de programación deben estar bien identificadas en dicho documento. **En caso de no cumplir estas indicaciones, se restarán 5 puntos de la nota final.**
- **Preguntas Teóricas**
 - En esta parte deben presentar todos los pasos necesarios o procedimientos que le permitieron obtener cada una de las respuestas. Trabaje en forma ordenada y clara para resolver el examen.
 - Esta parte debe ser resuelto en hojas de color blanco o con renglones, utilizando un lápiz o un lapicero que marque bien oscuro. No se calificará el examen si está desarrollado en algún editor computacional (por ejemplo, Word, Latex, entre otros).
 - Luego, las hojas deberán ser escaneadas en un solo archivo con extensión **pdf**, el cual puede tener varias páginas. Para esto puede utilizar alguna de las siguientes aplicaciones para *smartphone*: Adobe Scan, CamScanner, Scanbot, o alguna similar. El nombre del archivo debe seguir el siguiente formato: **Apellido1_Nombre_e2_teorico.pdf**. No se calificará el esta parte si no viene en un solo archivo con extensión **pdf**.
- Deben enviar los dos archivos al correo **jusoto@tec.ac.cr**. El asunto del correo debe seguir el siguiente formato: **Apellido1 - Apellido2 - Nombre - ANPI - Parcial 2**.
- **POR FAVOR, ADJUNTAR LOS ARCHIVOS POR SEPARADOS. NO ENVIAR ARCHIVOS COMPRIMIDOS**

Preguntas

Parte 1 - Preguntas de Programación

1. [Valor 20 puntos]: Implemente computacionalmente una función para aproximar la solución al problema

$$y' = \frac{x+y}{x},$$

con valor inicial $y(2) = 4$, en el intervalo $[2, 10]$ y utilizando el método de **Runge-Kutta de orden 3**. Para eso, elabore una función

$$[x_v, y_v] = \text{runge_kutta_3}(a, b, y_0, m),$$

donde a, b son los valores del intervalo $[a, b]$, y_0 es el valor inicial, m el número de puntos a utilizar en el intervalo $[a, b]$ (igualmente espaciados), x_v el vector de puntos en el intervalo $[a, b]$, y_v los valores de las imágenes que aproximan la solución del problema de valor inicial. La función debe presentar una gráfica del comportamiento de los puntos, los cuales aproximan al comportamiento de la solución exacta del problema. Ejecute esta función, utilizando $m = 50$. El nombre del archivo donde se implemente lo anterior es **e2_p1_anpi**.

2. Considere las siguientes preguntas

- (a) [Valor 20 puntos]: Implemente la función

$$I = \text{NCA4}(f, a, b)$$

la cual aproxima el valor de la integral $\int_a^b f(x) dx$, utilizando la fórmula abierta de Newton-Cotes de orden 4. Dicha fórmula está dada por

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{5h}{24} [11f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + 11f(x_4)],$$

donde $h = \frac{b-a}{5}$ y $x_j = a + jh$, para $j = 1, 2, 3, 4$. Acá, f es la función a integrar; a , b son los valores del intervalo y I es la aproximación de la integral definida. Use la función $f(x) = x^2 e^{x^2}$ para aproximar la integral de dicha función en el intervalo $[0, 2]$. El nombre del archivo donde se implemente lo anterior es **e2_p2a_anpi**.

- (b) [Valor 20 puntos]: Implemente la función

$$I = \text{NCA4_compuesto}(a, b, n)$$

el cual aproxima una solución de la integral $\int_a^b f(x) dx$ la fórmula abierta de Newton-Cotes de orden 4 en su versión compuesta. Para este caso, el intervalo $[a, b]$ se divide en n intervalos, y en cada intervalo se aplica el método NCA4 implementado en la pregunta anterior (Ver Figura 1). Además, a , b son los valores del intervalo y I es la aproximación de la integral definida. Use la función $f(x) = x^2 e^{x^2}$ para aproximar la integral de dicha función en el intervalo $[0, 2]$, con $n = 50$. El nombre del archivo donde se implemente lo anterior es **e2_p2b_anpi**.

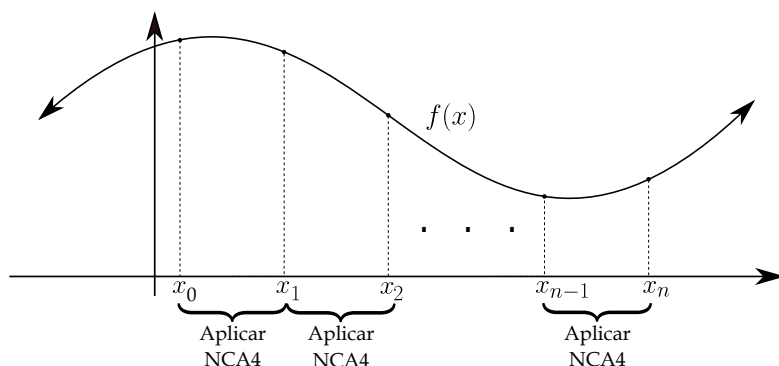


Figura 1: Imagen ilustrativa para implementar la función `NCA4_compuesto`.

Parte 2 - Preguntas Teóricas

1. Considere la función continua f definida por $f(x) = \frac{2 - 3^{0.25x+1}}{3}$.
 - (a) **[8 puntos]** Calcule el polinomio de interpolación $p_4(x)$ que aproxime la función f en el intervalo $[0, 16]$, utilizando como conjunto soporte $\mathcal{S}_1 = \{0, 4, 8, 12, 16\}$. **Nota:** No es necesario simplificar el polinomio.
 - (b) **[12 puntos]** Calcule una cota del error del polinomio de interpolación $p_2(x)$, en el intervalo $[1, 2]$, utilizando el conjunto $\mathcal{S}_2 = \{1, 1.5, 2\}$. **Nota:** No debe calcular el polinomio de interpolación.
2. Considere la función $f(x) = 2^x$.
 - (a) **[5 puntos]** Aproxime el valor de la integral $\int_0^1 f(x) dx$, usando la regla compuesta de Simpson, con 9 puntos.
 - (b) **[15 puntos]** ¿En cuántos subintervalos se debe dividir el intervalo $[0, 1]$ para aproximar la integral $\int_0^1 f(x) dx$, usando la regla compuesta del trapecio, tal que su cota de error sea menor a 10^{-10} ?