Laboratorio 1
Conceptos básicos sobre Álgebra y Probabilidades

Fecha de asignación:	1 de Marzo, 2023	Fecha de entrega:	10 de Marzo, 2023
Grupos:	Individual	Profesor:	Jason Leitón Jiménez

Estudiante: Shakime Richards Sparks

Carne: 2018170667

3. Teoría

1. Indique cuáles son las condiciones para que un sistema sea considerado como lineal.

Un sistema se considera lineal si cumple con dos condiciones fundamentales: La propiedad de aditividad o superposición y la propiedad de homogeneidad o escalamiento.

- **La propiedad de superposición:** Si se aplican dos o más entradas a un sistema al mismo tiempo, la respuesta del sistema es la suma de las respuestas individuales a cada entrada. En otras palabras, si $\boldsymbol{f(x1)}$ es la respuesta del sistema a una señal de entrada $\boldsymbol{x1}$, y $\boldsymbol{f(x2)}$ es la respuesta del sistema a otra señal de entrada $\boldsymbol{x2}$, entonces la respuesta del sistema a una señal de entrada que es una combinación lineal $\boldsymbol{(ax1+bx2)}$ de x1 y x2, se observa como:

$$\boldsymbol{f(ax + by) = af(x) + bf(y)}$$

- **La propiedad de escalamiento:** Si la entrada del sistema se escala por un factor constante, la salida también se escala por el mismo factor. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$\boldsymbol{f(cx) = cf(x)}$$

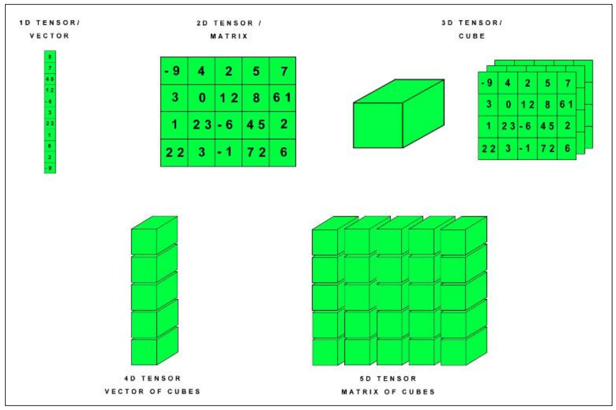
Estas dos propiedades son las condiciones básicas que estrictamente un sistema debe cumplir para ser considerado lineal. Si un sistema no cumple con una o ambas de estas propiedades, entonces se considera un sistema no lineal.

2. Investigue por qué es conveniente modelar los problemas con sistemas lineales.

Sucede que en la actualidad los sistemas lineales tienen una solución analítica bien conocida y establecida. Lo cual implica que una vez que se ha formulado un problema como un sistema de ecuaciones lineales, se pueden utilizar técnicas matemáticas ya definidas para obtener una solución exacta y única. Además de obtener una solución precisa, estos sistemas permiten la interpretación de un problema de manera intuitiva en términos de la relación lineal entre las variables descritas, razón por la cual se aplican en una amplia variedad de campos, como la física, la ingeniería, la economía, la estadística, entre otros. Por lo tanto, es probable que un problema dado se pueda modelar como un sistema lineal o se pueda reducir a uno, pues es un campo ampliamente estudiado.

Los sistemas de ecuaciones: Nota histórica (no date) *Solución de Problemas por medio de sistemas de ecuaciones*. http://campusvirtual.cua.uam.mx/material/tallerm/18_Problemas_De_Sistemas_De_Ecuaciones_html/index.html.

3. Indique qué es un tensor y cómo se relaciona con los vectores.



Los tensores son objetos matemáticos que almacenan valores numéricos y que pueden tener distintas dimensiones, es un objeto que generaliza el concepto de vector. Por ejemplo, un tensor de 1D es un vector, de 2D una matriz, o uno de 3D es un cubo.

En el área de machine learning, los tensores se emplean en particular para representar los datos de entrada y salida de los modelos de aprendizaje automático, así como los parámetros del modelo. En general para representar y procesar datos multidimensionales, como imágenes, videos y datos de series temporales.

Paloma Recuero de los Santos Especialista en generación de contenidos tecnológicos para los canales digitales de Telefónica Tech AI of Things. Licenciada en Ciencias Físicas y Máster en Tecnología Educativa. Apasionada por las "tecnologías para la , las que nos hacen la vida más fácil (que no son todas) y por la pedagogía. (2023) Deep learning para todos los públicos: ¿Qué son los tensores? ¿Qué es tensorflow?, Think Big. https://empresas.blogthinkbig.com/deep-learning-para-todos-los-publicos.

4. Investigue la utilidad de la norma de Frobenius en Machine Learning .

Es básicamente una medida de similitud para matrices o bien de la magnitud de una matriz. Existen múltiples usos para la norma de Frobenius, algunos ejemplos podrían ser la clasificación de matrices de covarianza para el reconocimiento de acciones y la agrupación bilineal de bajo rango, además de la regularización, la evaluación de la calidad del modelo y la reducción de la dimensionalidad.

- **Regularización:** se utiliza como una penalización en los modelos de aprendizaje automático para prevenir el sobreajuste.
- **Evaluación de la calidad del modelo:** se utiliza a menudo para evaluar la calidad de los modelos de aprendizaje automático. Una norma de Frobenius baja indica que el modelo tiene una buena precisión, se compara la norma de Frobenius de la diferencia entre las predicciones del modelo y las etiquetas reales.
- **Reducción de la dimensionalidad:** se utiliza como una medida de la distancia entre dos matrices, lo que permite identificar los patrones de variabilidad en los datos y reducir la dimensionalidad de los mismos.

Kong, S., & Fowlkes, C. (2016, November 30). Low-rank bilinear pooling for fine-grained classification. arXiv.org. https://arxiv.org/abs/1611.05109

Cavazza, J., Morerio, P., & Murino, V. (n.d.). A compact kernel approximation for 3D action recognition. A Compact Kernel Approximation for 3D Action Recognition – arXiv Vanity. https://www.arxiv-vanity.com/papers/1709.01695/

Christopher M Bishop y Nasser M Nasrabadi. Pattern recognition and machine learning. Springer, 2006. https://cis.temple.edu/~latecki/Courses/RobotFall08/BishopBook/Pages_from_PatternRecognitionAndMachineLearning1.pdf

5. Indique cómo se puede interpretar una matriz en términos de vectores, refiérase a la linealidad.

Podemos interpretar la multiplicación de matrices como una composición de operadores lineales que transforman vectores en diferentes dimensiones. En particular, la multiplicación de una matriz A de dimensión mxn por un vector x de dimensión n resulta en un vector y de dimensión m, donde cada elemento de y se calcula como una combinación lineal de las columnas de A, ponderadas por los elementos de x. Por ejemplo:

$$Ax = y \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 0 + 1\cdot 7 \\ 5\cdot 0 + 2\cdot 7 \\ 6\cdot 0 + 3\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 14 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Cada columna de la matriz A representa un vector de dimensión 3, es decir, la primera columna corresponde al vector [4, 5, 6], y la segunda columna corresponde al vector [1, 2, 3]. Estos vectores pueden ser interpretados como operadores lineales que transforman vectores de dimensión 2 en vectores de dimensión 3. Pues si vemos el vector x [0, 7], al realizarse la operación, el vector resultante es de dimensión 3. Asimismo, la multiplicación Ax resulta en un nuevo vector y de dimensión 3, [7, 14, 21]. Este también puede ser interpretado como un operador lineal que transforma vectores de dimensión 2 en vectores de dimensión 3.

Esta interpretación de A en términos de vectores permite entender la relación entre las columnas de la matriz y la transformación lineal que A realiza. Cada columna de A representa un vector que indica cómo A transforma una base canónica de vectores de dimensión 2, la primera columna de A representa la transformación de la base canónica [1,0], y la segunda columna de A representa la transformación de la base canónica [0,1].

Gómez, I. P. y F. (2020, March 30). Matriz Asociada a una transformación lineal - [ejemplos y videos]. Álgebra y Geometría Analítica. https://aga.frba.utn.edu.ar/matriz-asociada-a-una-transformacion-lineal/

4. Analizando propiedades de los sistemas

4.1. Sistemas lineales

1. Demuestre analíticamente si los siguientes sistemas son lineales o no lineales (Muestre todos los pasos). Considere a $u(t)$ como la entrada del sistema, mientras que $g(t)$ es la salida.

Para todos los ejercicios se asumen dos señales de entrada $\boldsymbol{u1(t)}$ y $\boldsymbol{u2(t)}$.

$a)\ \ g(t) = u(t)^2$

Propiedad de superposición:

Calculando la salida correspondiente con las dos entradas asumidas. Se obtiene:

$$g(t) \ = \ [u1(t) \ + \ u2(t)]^2$$

$$g(t) \ = \ u1^2(t) \ + \ 2 \cdot u1(t) \cdot u2(t) \ + \ u2^2(t)$$

Esta expresión no se puede simplificar en términos de $g(t) \ = \ u(t)^2$, por lo que la propiedad de superposición no se cumple. Por lo tanto, esta función **no es lineal**.

$b)\ \ g(t) = u(t^2)$

Propiedad de superposición:

Calculando la salida correspondiente con las dos entradas asumidas. Se obtiene:

$$g(t) = u1(t^2) + u2(t^2)$$

Esta expresión se puede simplificar en términos de $g(t) = u(t^2)$, por lo que la propiedad de superposición se cumple.

Propiedad de homogeneidad:

Calculando la propiedad con la entrada u(t). Se obtiene:

$$g(t) = ku(t^2) \qquad g(t)' = kg(t) \qquad ku(t^2) = ku(t^2)$$

Se cumple que, al escalar la entrada por k, la salida será escalada por el factor k. Por lo tanto, la propiedad de homogeneidad se cumple. Por ende, esta función **es lineal**.

$c)\ \ g(t) = u(t)\sin(5t)$

Propiedad de superposición:

Calculando la salida correspondiente con las dos entradas asumidas. Se obtiene:

$$g(t) = [u1(t) + u2(t)]\sin(5t) = u1(t)\sin(5t) + u2(t)\sin(5t)$$

Esta expresión se puede simplificar en términos de $g(t) = u(t)\sin(5t)$, por lo que la propiedad de superposición se cumple.

Propiedad de homogeneidad:

Calculando la propiedad con la entrada u(t). Se obtiene:

$$\boldsymbol{g(t) = ku(t)\sin(5t)} \qquad \boldsymbol{g(t)' = kg(t)} \qquad \boldsymbol{ku(t)\sin(5t) = ku(t)\sin(5t)}$$

Se cumple que, al escalar la entrada por k, la salida será escalada por el factor k. Por lo tanto, la propiedad de homogeneidad se cumple. Por ende, esta función **es lineal**.

$$d)\ \ g(t) = 5u(t) + 6$$

Calculando la salida correspondiente con las dos entradas asumidas. Se obtiene:

$$\boldsymbol{g(t) = 5[u1(t) + u2(t)] + 6 = 5u1(t) + 5u2(t) + 6}$$

Esta expresión no se puede simplificar en términos de $g(t) = 5u(t) + 6$, por lo que la propiedad de superposición no se cumple. Por lo tanto, esta función **no es lineal**.

$$e)\ \ g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)$$

Propiedad de superposición:

Calculando la salida correspondiente con las dos entradas asumidas. Se obtiene:

$$\boldsymbol{g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u1(t) + u2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u1(t) + \int_{-\infty}^{\infty} u2(t)}$$

Esta expresión se puede simplificar en términos de $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)$, por lo que la propiedad de superposición se cumple.

Propiedad de homogeneidad:

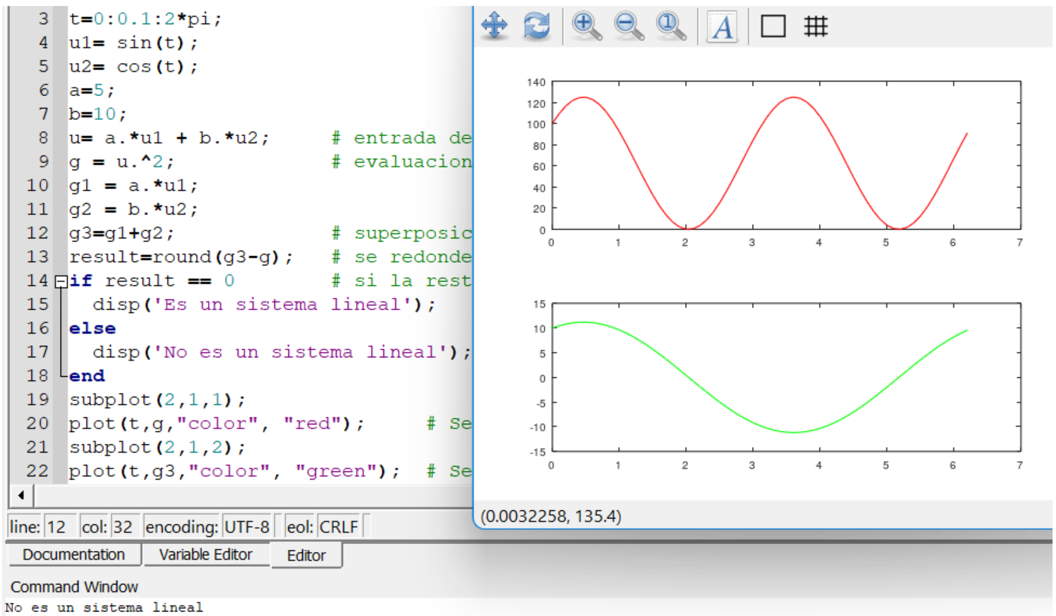
Calculando la propiedad con la entrada u(t). Se obtiene:

$$\boldsymbol{g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} ku(t) = k\int_{-\infty}^{\infty} u(t)} \qquad \boldsymbol{g(t)' = kg(t)} \qquad \boldsymbol{k\int_{-\infty}^{\infty} u(t) = k\int_{-\infty}^{\infty} u(t)}$$

Se cumple que, al escalar la entrada por k, la salida será escalada por el factor k. Por lo tanto, la propiedad de homogeneidad se cumple. Por ende, esta función **es lineal**.

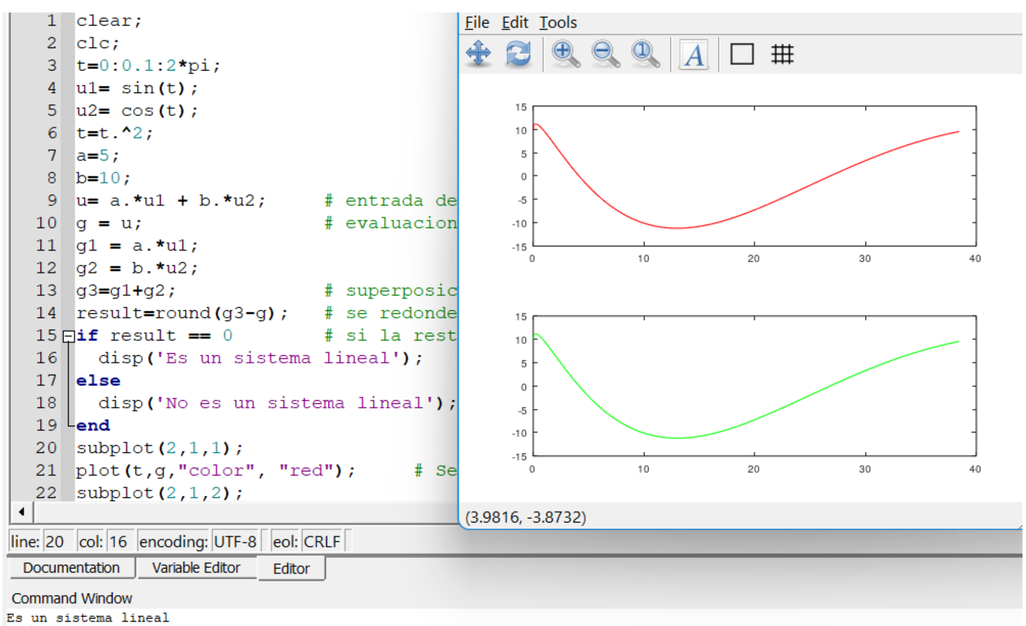
2. Considere como base el código en Octave que se muestra en el listing 1, el cual realiza una comprobación sobre si un sistema es lineal o no. Verifique cada uno de los sistemas del punto anterior y compare el resultado con la demostración realizada en dicho punto (1). Además, grafique los resultados para observar el comportamiento de cada sistema y cual es el efecto de la escalación y superposición (Se desea obtener dos gráficas g y g3, según el código).

a) $g(t) = u(t)^2$



El resultado obtenido analíticamente corresponde a la simulación.

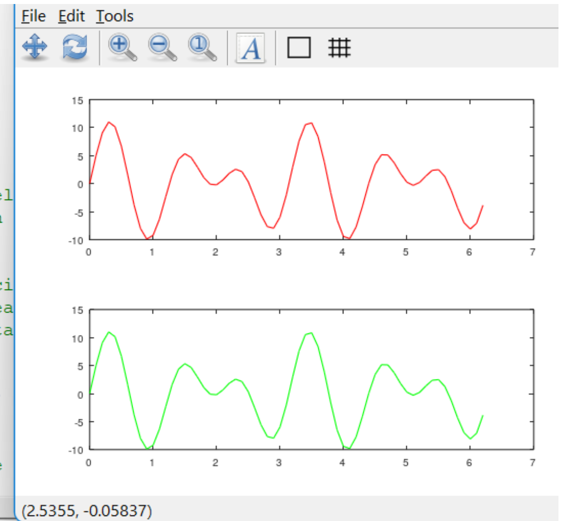
b) $g(t) = u(t^2)$



El resultado obtenido analíticamente corresponde a la simulación.

c) $g(t) = u(t)\sin(5t)$

```
clear;
clc;
t=0:0.1:2*pi;
u1= sin(t);
u2= cos(t);
##t=t.^2;
a=5;
b=10;
u= a.*u1 + b.*u2;      # entrada del
g = u.*sin(5*t);       # evaluacion
g1 = a.*u1.*sin(5*t);
g2 = b.*u2.*sin(5*t);
g3=g1+g2;              # superposici
result=round(g3-g);    # se redondea
if result == 0         # si la resta
  disp('Es un sistema lineal');
else
  disp('No es un sistema lineal');
end
subplot(2,1,1);
plot(t,g,"color", "red");      # Se
subplot(2,1,2);
```



line: 10 col: 22 encoding: UTF-8 eol: CRLF

Documentation | Variable Editor | Editor

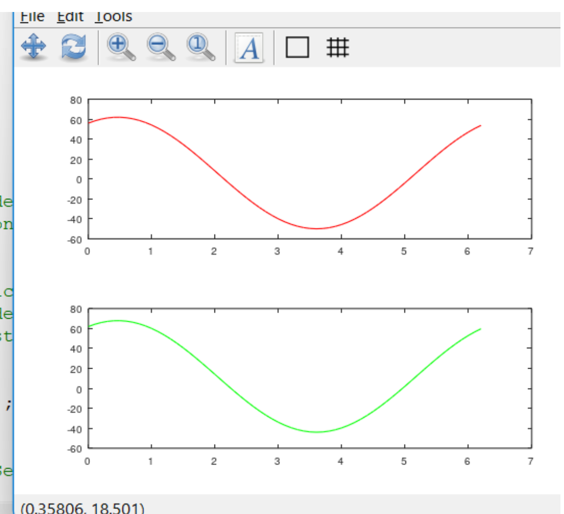
Command Window

```
Es un sistema lineal
```

El resultado obtenido analíticamente corresponde a la simulación.

d) $g(t) = 5u(t) + 6$

```
clear;
clc;
t=0:0.1:2*pi;
u1= sin(t);
u2= cos(t);
##t=t.^2;
a=5;
b=10;
u= a.*u1 + b.*u2;      # entrada de
g = u.*5+6;            # evaluacion
g1 = a.*5.*u1+6;
g2 = b.*5.*u2+6;
g3=g1+g2;              # superposic
result=round(g3-g);    # se redonde
if result == 0         # si la rest
  disp('Es un sistema lineal');
else
  disp('No es un sistema lineal');
end
subplot(2,1,1);
plot(t,g,"color", "red");      # Se
subplot(2,1,2);
```



line: 7 col: 5 encoding: UTF-8 eol: CRLF

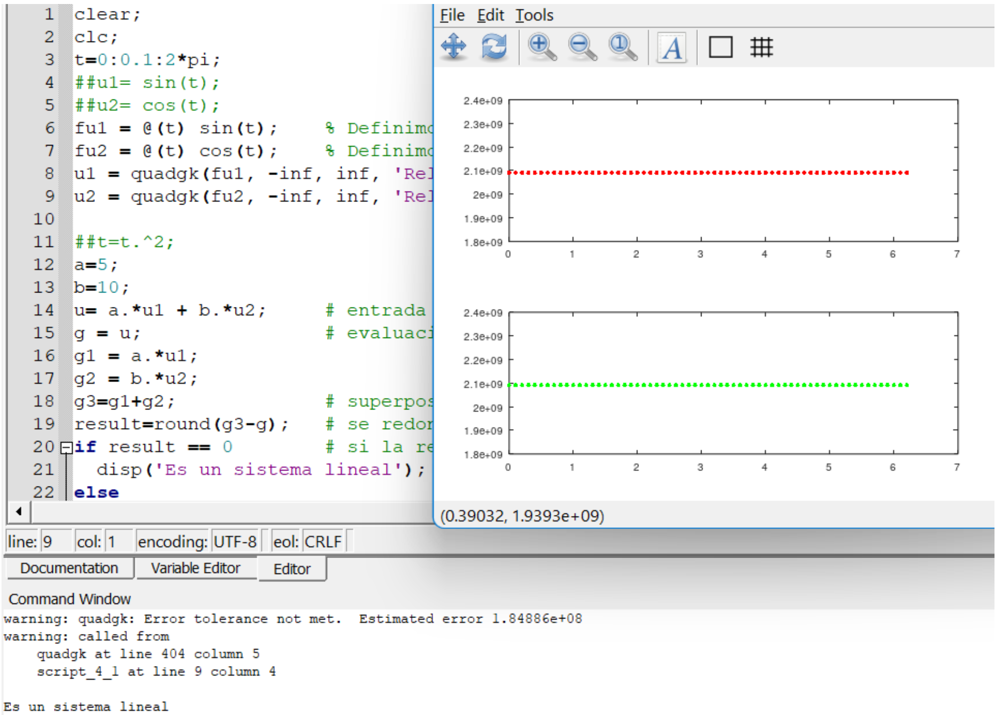
Documentation | Variable Editor | Editor

Command Window

```
No es un sistema lineal
```

El resultado obtenido analíticamente corresponde a la simulación.

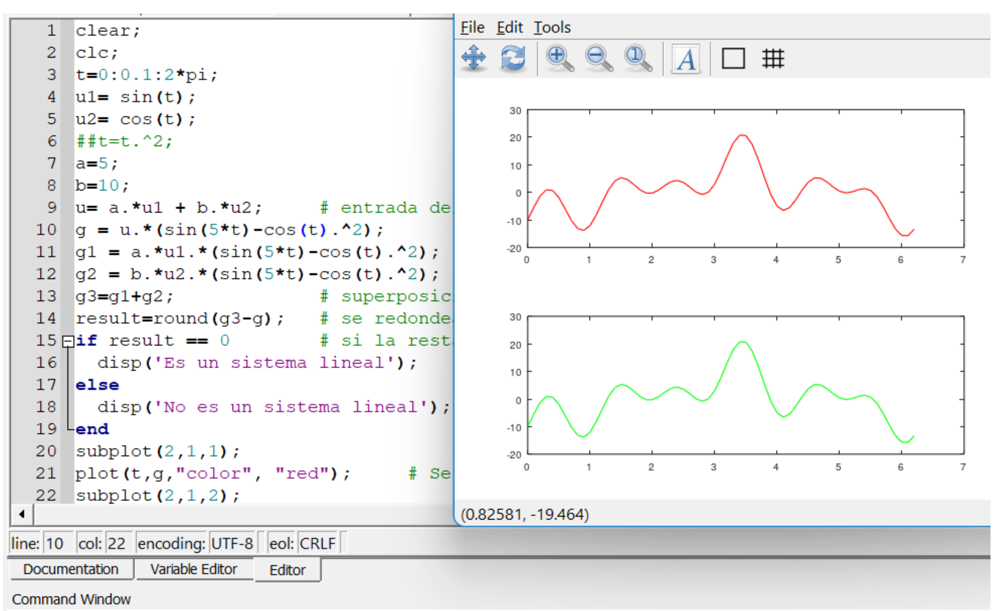
e) $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)$



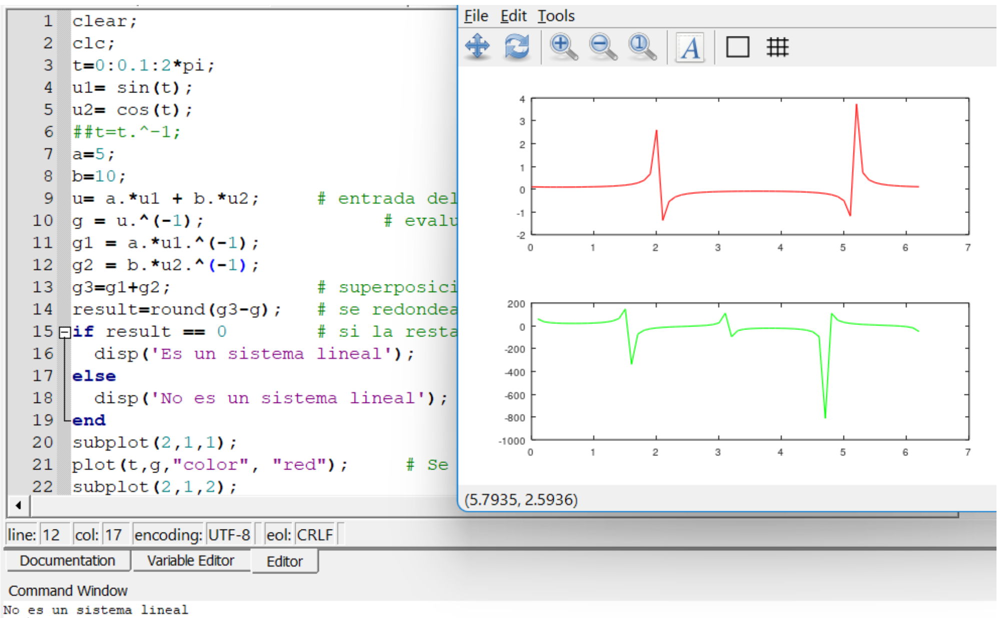
El resultado obtenido analíticamente corresponde a la simulación.

3. Proponga dos sistemas diferentes al punto 1, tales que el primero sea lineal y el segundo no lo sea. Utilice el código anterior para demostrar la linealidad, además de las gráficas (similar al punto anterior).

- $g(t) = u(t) \cdot [\sin(5t) - \cos^2(t)]$



- $\boldsymbol{g(t) = u(t)^{-1}}$]



4.2. Vectores

1. Demuestre que si dos vectores $\vec{x}, \vec{y}$ son paralelos, entonces se cumple $\vec{x} = k\vec{y}, k \in \mathbb{R}$

Si dos vectores son paralelos, entonces tienen la misma u opuesta dirección, lo que significa que son vectores múltiplos uno del otro.

Para demostrar que se cumple. Tomamos la relación y ambos vectores con sus componentes:

$$x = ky \quad \Rightarrow \quad (x_1, x_2, x_3) = k(y_1, y_2, y_3)$$

Despejando k de la primera componente:

$$k = \frac{x_1}{y_1}$$

Así, si dos vectores son paralelos, podemos encontrar un número escalar k tal que cada componente del primer vector sea k veces la componente correspondiente del segundo vector.

$$x_1 = ky_1, \quad x_2 = ky_2, \quad x_3 = ky_3$$

2. Dado los vectores $\vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}$, encuentre de manera analítica el ángulo de separación, distancia l_2 y el vector unitario para cada uno de ellos

Ángulo de separación:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\left\|\vec{x}\right\| \cdot \left\|\vec{y}\right\|} = \frac{(-9)(3)\ +\ (3)(0)\ +\ (5)(-11)}{\left(\sqrt{(-9)^2 + 3^2 + 5^2}\right)\left(\sqrt{3^2 + 0^2 + (-11)^2}\right)} = \frac{-82}{\sqrt{115} \times \sqrt{130}} =$$

$$\boldsymbol{\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-82}{\sqrt{115} \times \sqrt{130}}\right) = \ 132.1169\,°}$$

Distancia l_2:

$$d\ =\ \left\||x\ -\ y|\right\|\ =\ \left\|\left(-9 - 3, 3 - 0, 5 - (-11)\right)\right\|\ =\ \|(-12, 3, 16)\|$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(-12)^2 + 3^2 + 16^2} = \sqrt{409}}$$

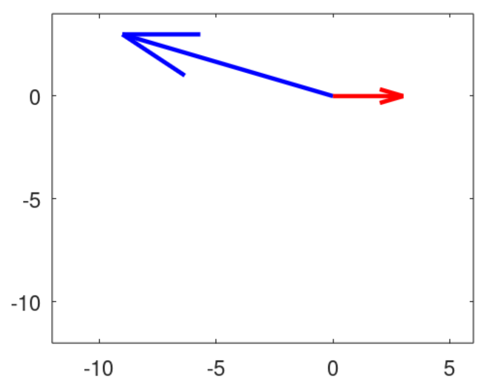
Vector Unitario:

$$\hat{x} = \frac{\vec{x}}{\left\|\vec{x}\right\|} = \frac{(-9, 3, 5)}{\sqrt{115}} = \left(\frac{-9}{\sqrt{115}}, \frac{3}{\sqrt{115}}, \sqrt{\frac{5}{23}}\right)$$

$$\hat{y} = \frac{\vec{y}}{\left\|\vec{y}\right\|} = \frac{(3, 0, -11)}{\sqrt{130}} = \left(\frac{3}{\sqrt{130}}, 0, -\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$$

3. Grafique en Octave o Python en un solo gráfico ambos vectores.

```
x = [-9, 3, 5];
y = [3, 0, -11];
quiver(0, 0, x(1), x(2), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
quiver(0, 0, y(1), y(2), 'r', 'LineWidth', 2); hold off;
axis([-12 6 -12 4]);
```



4. Obtenga la ecuación de un plano f, cuyo vector normal sea perpendicular a los vectores del puntos 2 (utilice producto X), además dicho plano contiene los puntos $(3,2,6),(1,2,5)$.

La ecuación del plano es: $ax + by + cz = d$, donde (a,b,c) es el vector normal al plano y d es una constante.

Primero se obtiene el vector director del plano:

$$v = p_2 - p_1 = (3{,}2{,}6) - (1{,}2{,}5) = (2{,}0{,}1)$$

Segundo se obtiene el vector normal plano, utilizando el producto cruz entre los vectores:

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -11 \end{vmatrix} = \mathrm{i}(3 \cdot (-11) - 5 \cdot 0) - \mathrm{j}\big((-9) \cdot (-11) - 5 \cdot 3\big) + \mathrm{k}\big((-9) \cdot 0 - 3 \cdot 3\big)$$

$$\vec{n} = \vec{x} \times \vec{y} = (-33, -84, -9)$$

Tercero, se obtiene el vector director del plano:

$$\vec{\mathrm{d}} = \vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ -33 & -84 & -9 \end{vmatrix} = (84\,, -15, -168)$$

Cuarto se encuentra la constante d, utilizando uno de los dos puntos:

$$84x - 15y - 168z + \mathrm{d} = 0$$

$$-84(3) - 15(2) - 168(6) = -d$$

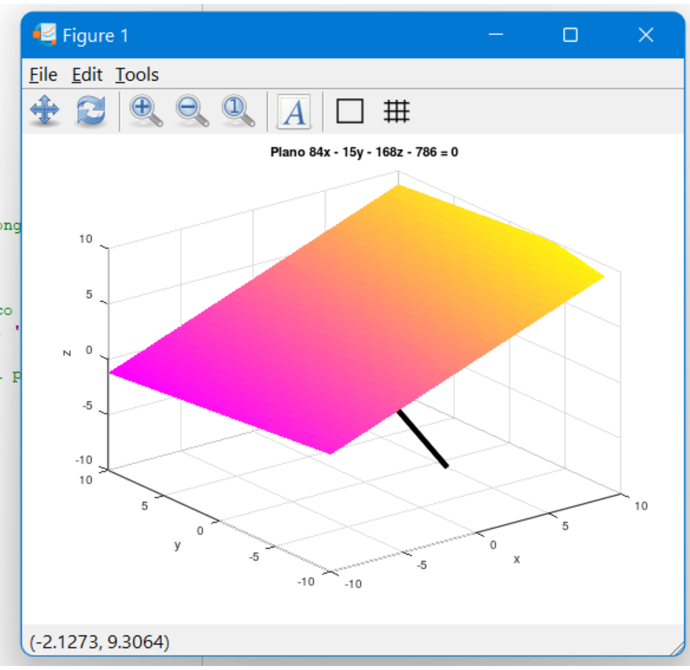
$$d = 786$$

Finalmente se sustituye para obtener la ecuación del plano:

$$\boxed{\mathrm{f}\!: \quad 84x - 15y - 168z + 786 = 0}$$

5. Grafique el plano del punto anterior junto con su vector normal (en una misma gráfica).

```
% Definir la cuadrícula de valores x e y
[x, y] = meshgrid(-10:0.5:10);

% Calcular el valor de z para cada par de valores (x,y)
z = (84*x - 15*y + 786)/168;

% Graficar el plano con un colormap distinto
surf(x, y, z, 'EdgeColor', 'none');
colormap(spring);

% Dividir el vector (84,-15,-168) por 10 para reducir su long
v = [84, -15, -168]/10;

% Agregar el vector (84,-15,-168)/10 al gráfico
hold on;  % para que el vector se dibuje en el mismo gráfico
quiver3(0, 0, 0, v(1), v(2), v(3), 'LineWidth', 2, 'Color', '

% Definir los límites de los ejes para ampliar la vista del p
xlim([-10, 10]);
ylim([-10, 10]);
zlim([-10, 10]);


% agregar etiquetas a los ejes y título al gráfico
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('z');
title('Plano 84x - 15y - 168z - 786 = 0');
```



6. Calcule el vector gradiente del plano y evalúelo en el punto (3,3).

$$z = \nabla f(x, y)$$

$$z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{11x + 28y - 107}{3}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{11x + 28y - 107}{3}\right)\right)$$

$$z = \left(-\frac{11}{3}, -\frac{28}{3}\right)$$

No hay variables en el gradiente así que evaluarlo en cualquier punto daría el mismo valor.

4.3. Funciones multivariable

1. Para cada una de las siguientes funciones, grafique su superficie, calcule el vector gradiente de manera analítica, evalúelo en el punto que se solicita, además grafique dicho vector junto a la gráfica de superficie.

a) $z = f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$, evalúe el gradiente en $(-6, 1)$ y $(4, -2)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(In(x^2 - y^2)) = \frac{2x}{x^2 - y^2} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(In(x^2 - y^2)) = -\frac{2y}{x^2 - y^2} \qquad \boldsymbol{\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 - y^2}, \ -\frac{2y}{x^2 - y^2}\right)}$$

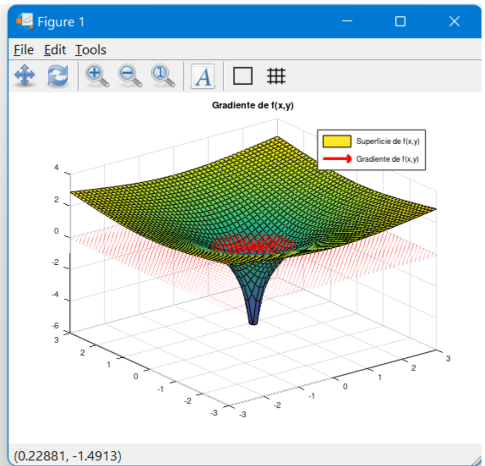
Evaluando en (-6,1):

$$\boldsymbol{\nabla f(x, y) = \left(-\frac{12}{35}, \ \frac{12}{35}\right)}$$

Evaluando en (4, -2):

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{2}{3}, \quad -\frac{2}{3}\right)$$

```
% Definir la función
f = @(x,y) log(x.^2 + y.^2);

% Definir los límites de la malla
x = linspace(-3,3,50);
y = linspace(-3,3,50);
[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Calcular el gradiente
[Gx, Gy] = gradient(f(X,Y), x, y);

% Graficar la superficie
figure;
surf(X,Y,f(X,Y));
title('Superficie de f(x,y)');

% Graficar el vector
hold on;
quiver(X,Y,-Gx,-Gy, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
hold off;
title('Gradiente de f(x,y)');
legend('Superficie de f(x,y)', 'Gradiente de f(x,y)');
```



$b)$ $z = f(x,y) = e^{2x} + 3(y^2 - 9)$, evalúe el gradiente en $(0,0)$ y $(5,-5)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2x} + 3(y^2 - 9)\right) = 2e^{2x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2x} + 3(y^2 - 9)\right) = 6y$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2e^{2x}, \quad 6y\right)$$

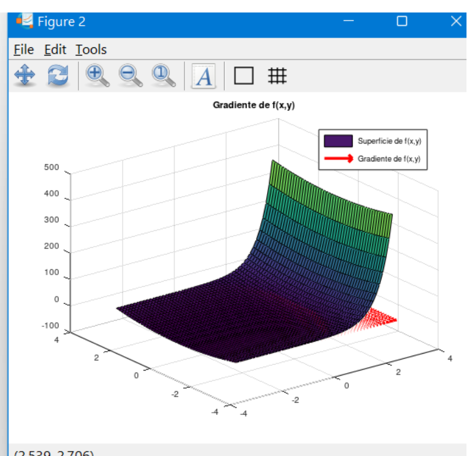
Evaluando en (0,0):

$$\nabla f(0,0) = (2, \quad 0)$$

Evaluando en (5, -5):

$$\nabla f(5,-5) = (2e^{10}, \quad -30)$$

```
% Definir la función
f = @(x,y) exp(2*x) + 3*(y.^2 - 9);

% Definir los límites de la malla
x = linspace(-3,3,50);
y = linspace(-3,3,50);
[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Calcular el gradiente
[Gx, Gy] = gradient(f(X,Y));

% Graficar la superficie
figure;
surf(X,Y,f(X,Y));
title('Superficie de f(x,y)');

% Graficar el vector
hold on;
quiver(X,Y,Gx,Gy, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
hold off;
title('Gradiente de f(x,y)');
legend('Superficie de f(x,y)', 'Gradiente de f(x,y)');
```



c) $z = f(x, y) = (y^4 - x^2) - (x^{-2} + \sqrt{y})$, evalúe el gradiente en $(1, 5)$ y $(5, -1)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((y^4 - x^2) - (x^{-2} + \sqrt{y})\right) = -2x + \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left((y^4 - x^2) - (x^{-2} + \sqrt{y})\right) = 4y^3 - \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(-2x + \frac{2}{x^3}\,,\quad 4y^3 - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

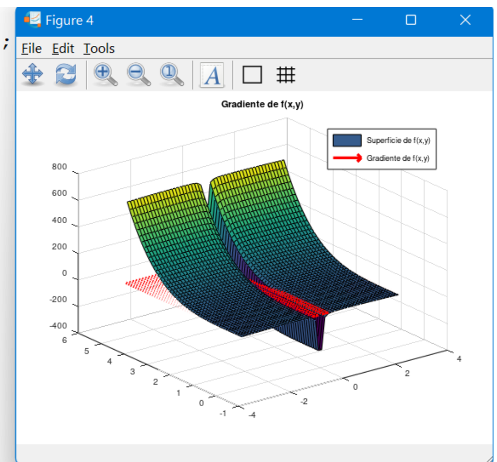
Evaluando en (1,5):

$$\nabla f(1{,}5) = \left(4, \quad 500 - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

Evaluando en (5, 1):

$$\nabla f(5{,}1) = \left(-9.984, \quad \frac{7}{2}\right)$$

```
% Definir la función
f = @(x,y) (y.^4 - x.^2) - (x.^(-2) + sqrt(y));

% Definir los límites de la malla
x = linspace(-3,3,50);
y = linspace(0,5,50);
[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Calcular el gradiente
[Gx, Gy] = gradient(f(X,Y));

% Graficar la superficie
figure;
surf(X,Y,f(X,Y));
title('Superficie de f(x,y)');

% Graficar el vector
hold on;
quiver(X,Y,Gx,Gy, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
hold off;
title('Gradiente de f(x,y)');
legend('Superficie de f(x,y)', 'Gradiente de f(x,y)');
```



d) $z = f(x, y) = 4x^3 - 5(y^2 - x)^2$, evalúe el gradiente en $(2, 2)$ y $(3, -8)$

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^3 - 5(y^2 - x)^2) = 12x^2 + 10(y^2 - x)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 - 5(y^2 - x)^2) = -20y(y^2 - x)$$

$$\nabla f(x, y) = \left(-2x + \frac{2}{x^3}\,,\quad 4y^3 - \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

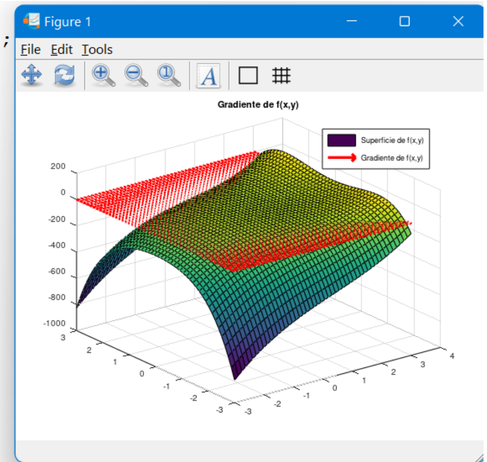
Evaluando en (2,2):

$$\nabla f(2{,}2) = (68, \quad -80)$$

Evaluando en (3, -8):

$$\nabla f(3,\text{-}8) = (718, \quad 9760)$$

```
% Definir la función
f = @(x,y) 4*x.^3 - 5*(y.^2 - x).^2;

% Definir los límites de la malla
x = linspace(-3,3,50);
y = linspace(-3,3,50);
[X,Y] = meshgrid(x,y);

% Calcular el gradiente
[Gx, Gy] = gradient(f(X,Y));

% Graficar la superficie
figure;
surf(X,Y,f(X,Y));
title('Superficie de f(x,y)');

% Graficar el vector
hold on;
quiver(X,Y,Gx,Gy, 'color', 'red', 'linewidth', 1.5);
hold off;
title('Gradiente de f(x,y)');
legend('Superficie de f(x,y)', 'Gradiente de f(x,y)');
```



4.4. Matrices

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$ calcule los eigen vectores y eigen valores de manera analítica, posteriormente utilice la función $eig(A)$ para obtener la matriz de los autovalores y los auto vectores

Calculamos los eigen valores:

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -4 & 7-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ -4 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-7-\lambda) + 16$$

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -3$$

Obtenemos los eigen vectores:

$$(A - 3I)\,\vec{v} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -4x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ -(-y) - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = y \end{cases}$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Código

```
## 4.4
format bank
A = [1,4;-4,-7];
[V,D] = eig(A);

printf("Valores propios\n")
D
printf("Vectores propios\n")
V
```

Resultados

```
>>
Valores_propios =

   0.71   0.71
  -0.71  -0.71

Vectores_propios =

Diagonal Matrix

  -3.00      0
      0  -3.00
```

4.5. Probabilidad y estadística

1. Genere un set de datos aleatorio que consista en 4 variables (h1, h2, h3, h4) con 20 muestras cada una. Muestre la matriz con las 20 muestras.
2. Obtenga el valor esperado de cada una de las variables utilizando las funciones de Octave.
3. Obtenga la matriz de covarianza sin utilizar la función. Puede utilizar la función cov.

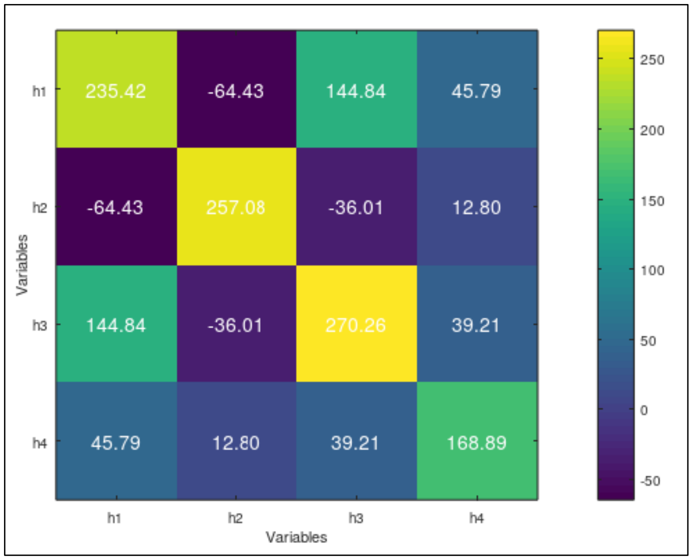
Código

```
% Generamos un set de datos aleatorios con 4 variables
% y 20 muestras cada una
data = randi([1, 50], 20, 4);

# Calculamos el valor esperado de cada variable.
h1_mean = mean(data(:, 1));
h2_mean = mean(data(:, 2));
h3_mean = mean(data(:, 3));
h4_mean = mean(data(:, 4));

% Calculamos la matriz de covarianza
matriz_cov = cov(data);

% Hacemos el gráfico de la matriz de covarianza
nombres_variables = {'h1', 'h2', 'h3', 'h4'};
imagesc(matriz_cov);
##colormap(cool);
colorbar;

% Agregamos los nombres de las variables a los ejes x e y
set(gca, 'XTickLabel', nombres_variables);
set(gca, 'YTickLabel', nombres_variables);

% Agregamos las etiquetas de los ejes x e y
xlabel('Variables');
ylabel('Variables');

% Asignar el valor correspondiente
for i = 1:4
  for j = 1:4
    text(i, j, sprintf('%.2f', matriz_cov(i,j)),
    'HorizontalAlignment', 'center',
    'VerticalAlignment', 'middle',
    'FontSize', 14',
    'Color', [1, 1, 1]);
  end
end
```

Resultados

```
>> data =

   34   12    6   14
   37   16   24   32
   10    9    3    8
   38   14   40   46
   23   23    9    8
    1   39    6   16
   37   41   49   37
   50   37   14   46
    4   47   25   32
   39   31   42   17
   40    5   44   23
   22   22   39   27
   17   30   18   40
   15    6   36   17
   25   49   37    7
   38    6   42   45
    3   45    7   33
    9    2    9   28
   19   42   11   22
   48   11   48   13

h1_mean = 25.45
h2_mean = 24.35
h3_mean = 25.45
h4_mean = 25.55
matriz_cov =

   235.418   -64.429   144.839    45.792
   -64.429   257.082   -36.008    12.797
   144.839   -36.008   270.261    39.213
    45.792    12.797    39.213   168.892
```

4. Explique cuales de las variables se relacionan más y cuales se relacionan menos.



Para el caso de la variable h1, se observa que tiene una relación lineal positiva con h3 pues posee uno de los valores más altos de covarianza y positivo, lo cual implica que, si alguna de las dos aumenta, la otra variable también aumentará. Lo mismo sucede con h4, pero la relación es más débil que con h3. Ahora bien, para el caso de h2 sucede lo contrario, al tener una covarianza negativa, existe una relación lineal negativa.

Con respecto a h2, esta tiene una relación lineal negativa con h3, aunque es más débil que la relación entre h1-h2. Lo cual implica que, si h2 aumenta, h3 disminuirá o viceversa. Y, por último, h2- h4 presentan una relación lineal positiva, pero es bastante débil en comparación a las otras relaciones. Entre h3-h4, también hay una relación lineal positiva, lo cual significa que ambas se mueven en la misma dirección.