Лабораторная работа № 1

Исследование и решение задач линейного программирования геометрическим методом

1.1 Цель работы

Целью лабораторной работы является приобретение студентами практических навыков решения задач линейного программирования графическим методом и использования инструмента **Поиск решения** среды Excel для нахождения оптимального допустимого решения.

1.2 Формулировка задачи линейного программирования

Рассмотрим пример с двумя переменными. Компания «Русские краски» производит краску для внутренних и наружных работ из сырья двух типов: М1 и М2 (табл. 1.1).

Таблица 1.1 – Основные данные для задачи

	Расход сырья (в тоннах) на тонну краски		Максимально возможный ежедневный расход сырья
	для наружных работ	для внутренних работ	
Сырье М1	6	4	24
Сырье М2	1	2	6
Доход (в тыс. долл.) на тонну краски	5	4	

Отдел маркетинга компании ограничил ежедневное производство краски для внутренних работ до 2 тонн, а также поставил условие, чтобы ежедневное производство краски для внутренних работ не превышало более чем на тонну аналогичный показатель производства краски для внешних работ. Компания хочет определить оптимальное соотношение между видами выпускаемой продукции для максимизации общего ежедневного дохода.

1.3 Математическая модель задачи линейного программирования

Задача линейного программирования, как и любая задача исследования операций, включает три основных элемента.

1. **Переменные**, которые следует определить;

2. **Целевая функция**, подлежащая оптимизации;

3. **Ограничения**, которым должны удовлетворять переменные.

В нашем примере необходимо определить ежедневные объемы производства краски для внутренних и наружных работ. Обозначим эти объемы как переменные модели:

x_1 – ежедневный объем производства краски для наружных работ;

x_2 – ежедневный объем производства краски для внутренних работ.

Используя эти переменные, далее строим целевую функцию Z, как суммарный ежедневный доход, который должен возрастать.

$$Z = 5x_1 + 4x_2.$$

Ограничения на сырье можно записать следующим образом.

$$\begin{pmatrix} \textit{Используемый объем} \\ \textit{сырья для производства} \\ \textit{обоих видов краски} \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} \textit{Максимально возможный} \\ \textit{ежедневный расход сырья} \end{pmatrix}.$$

Из таблицы с данными получим используемые объемы в тоннах:

для сырья $M1 = 6x_1 + 4x_2$;

для сырья $M2 = 1x_1 + 2x_2$.

Поскольку ежедневный расход сырья М1 и М2 ограничен соответственно 24 и 6 тоннами, получаем следующие ограничения.

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ 1x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$$

Существует еще два ограничения по спросу на готовую продукцию. Первое ограничение указывает, что ежедневный объем производства краски для внутренних работ не должен превышать ежедневный объем производства краски для наружных работ более чем на одну тонну, т.е. $x_2 - x_1 \le 1$. Второе ограничение максимального ежедневного объема производства краски для внутренних работ двумя тоннами запишем, как $x_2 \le 2$. Учтем условие неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$.

Окончательно задача будет записана следующим образом:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

1.4 Графический способ решения задачи линейного программирования

Графический способ решения задачи линейного программирования состоит из двух этапов.

1. Построение пространства допустимых решений, удовлетворяющих всем ограничениям модели.
2. Поиск оптимального решения среди всех точек пространства допустимых решений.

Этап 1. Построение пространства допустимых решений.

Проведем оси координат. На горизонтальной оси будут указываться значения переменной x_1, а на вертикальной – x_2 (рис. 1.1). Условия неотрицательности переменных: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ показывают, что пространство допустимых решений будет лежать в первом квадранте (т.е. выше оси x_1 и правее оси x_2).

Учтем оставшиеся ограничения, заменив неравенства на равенства и получив уравнения прямых. Например, неравенство $6x_1 + 4x_2 \le 24$ заменяется уравнением прямой $6x_1 + 4x_2 = 24$. Найдем две различные точки, лежащие на этой прямой. При $x_1 = 0, x_2 = 6$. Аналогично для $x_2 = 0, x_1 = 4$. Проведем искомую прямую через найденные точки (линия 1 на рис. 1.1).

Теперь рассмотрим, как графически интерпретируются неравенства. Точки плоскости, расположенные по одну сторону прямой, удовлетворяют неравенству (допустимое полупространство), а точки, лежащие по другую сторону, – нет. "Тестовой" точкой, может служить точка $(0,0)$. Например, эта точка удовлетворяет первому неравенству $6x_1 + 4x_2 \le 24$. Это означает, что точки полупространства, содержащего начальную точку $(0,0)$, удовлетворяют этому неравенству. На рис. 1.1 допустимые полупространства показаны стрелочками.

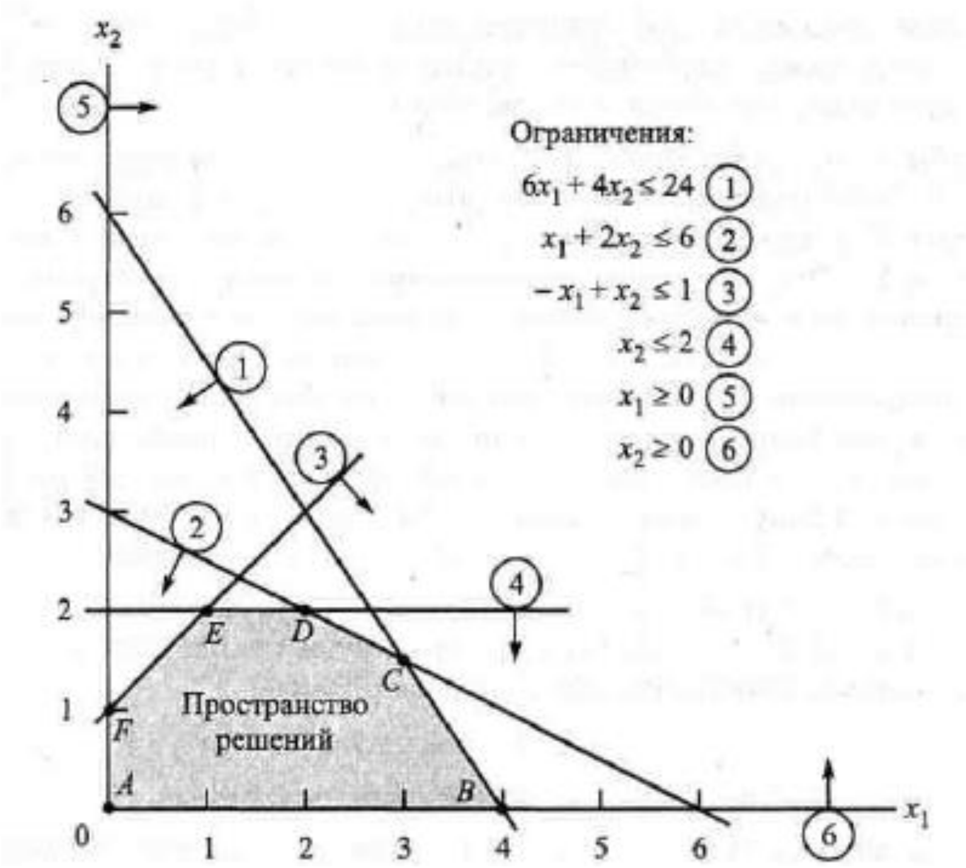


Рисунок 1.1 – Пространство допустимых решений модели

Если точка $(0,0)$ не удовлетворяет неравенству, допустимым полупространством будет то, которое не содержит эту точку. Если же прямая проходит через эту точку, следует в качестве "тестовой" взять другую точку.

Этап 2. Поиск оптимального решения.

Точки пространства допустимых решений, показанного на рис. 1.1, удовлетворяют одновременно всем ограничениям. Это пространство ограничено отрезками прямых, которые соединяются в угловых точках A, B, C, D, E и F. Любая точка, расположенная внутри или на границе области, ограниченной ломаной ABCDEF, является допустимым решением, т.е. удовлетворяет всем ограничениям. Поскольку пространство допустимых решений содержит бесконечное число точек, необходима некая процедура поиска оптимального решения.

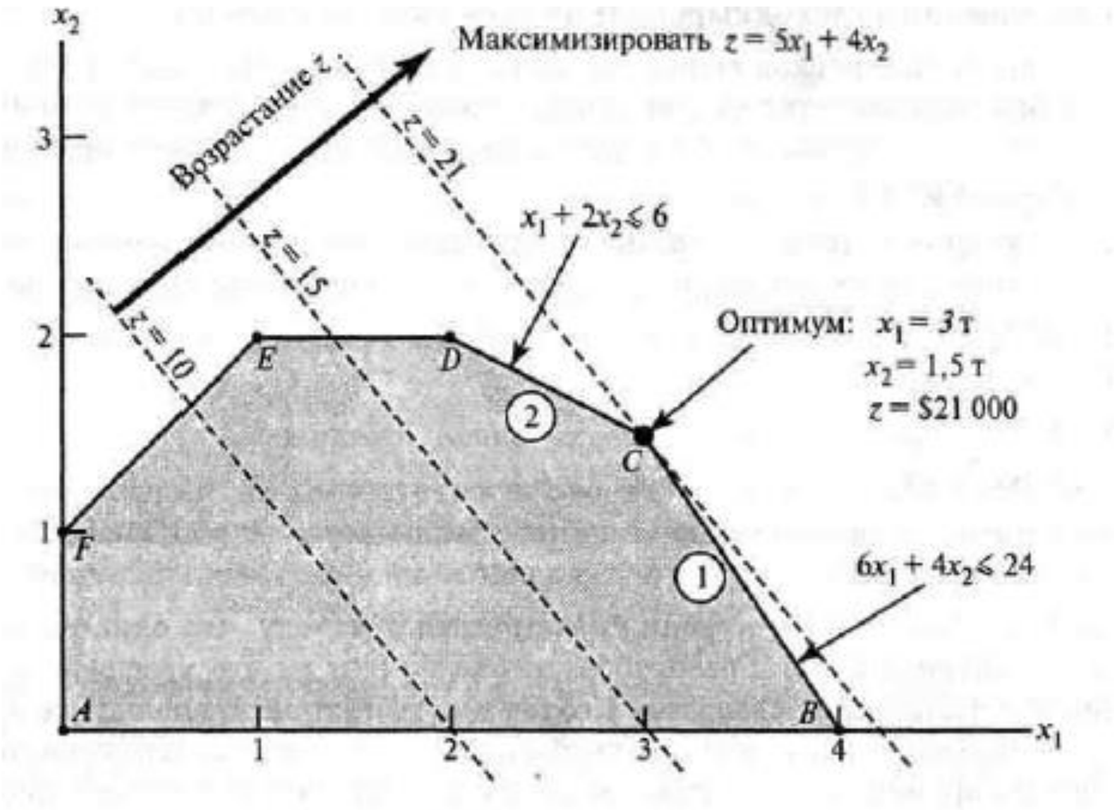


Рисунок 1.2 – Оптимальное значение модели

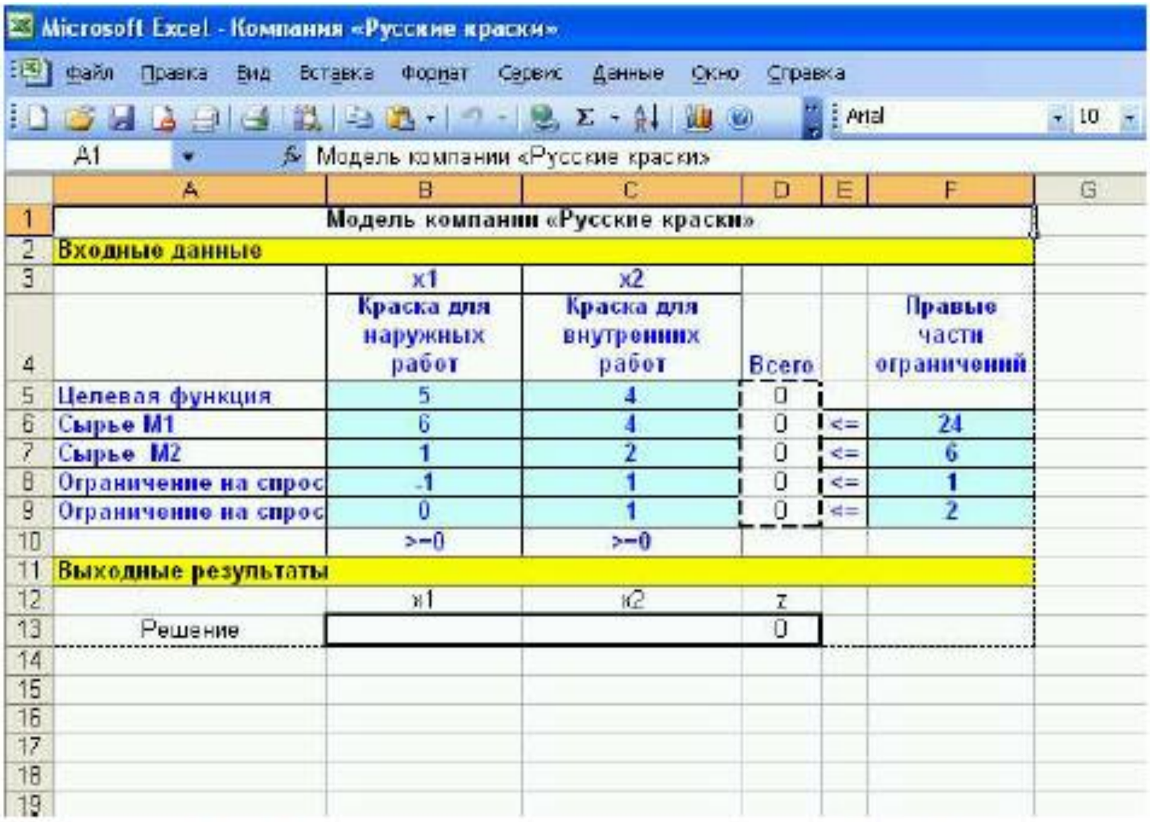
Для того чтобы найти оптимальное решение, необходимо определить направление возрастания целевой функции $Z = 5x_1 + 4x_2$. Мы можем приравнять Z к нескольким возрастающим значениям, например 10 и 15. Получаем уравнения прямых $5x_1 + 4x_2 = 10$ и $5x_1 + 4x_2 = 15$. На рис. 1.2 эти прямые показаны штриховыми линиями. Направление возрастания целевой функции отмечено жирной стрелкой. Целевая функция может возрастать до тех пор, пока прямые, соответствующие возрастающим значениям этой функции, пересекают область допустимых решений. Точка пересечения области допустимых решений и прямой, соответствующей максимально возможному значению целевой функции, и будет точкой оптимума.

Оптимальное решение соответствует точке С. Ее координаты $x_1 = 3, x_2 = 1{,}5$ являются решением рассматриваемой задачи линейного программирования. При этом значение целевой функции равно $Z = 5 \times 3 + 4 \times 1{,}5 = 21$. Полученное решение означает, что для компании «Русские краски» оптимальным выбором будет ежедневное производство 3 тонн краски для наружных работ и 1,5 тонн краски для внутренних работ с ежедневным доходом в 21 000 долл.

1.5 Использование среды Excel для нахождения оптимального допустимого решения

Решение задачи линейного программирования может быть найдено в Excel с помощью инструмента **Поиск решения**. В верхней части рис. 1.3 показано табличное представление рассматриваемой модели. Здесь содержится 4 типа данных:

1) входные данные (затененные ячейки B5:C9 и F6:F9);
2) значения переменных и целевой функции (ячейки в прямоугольнике B13:D13);
3) формулы, по которым вычисляются значения целевой функции и левых частей ограничений (ячейки D5:D9);
4) поясняющие заголовки и надписи.



	A	B	C	D	E	F
1	Модель компании «Русские краски»					
2	Входные данные					
3		x1	x2			
4		Краска для наружных работ	Краска для внутренних работ	Всего		Правые части ограничений
5	Целевая функция	5	4	0		
6	Сырье M1	6	4	0	<=	24
7	Сырье M2	1	2	0	<=	6
8	Ограничение на спрос	-1	1	0	<=	1
9	Ограничение на спрос	0	1	0	<=	2
10		>=0	>=0			
11	Выходные результаты					
12		x1	x2	z		
13	Решение			0		

Рисунок 1.3 – Табличное представление задачи в Excel

Поясняющие заголовки и надписи необходимы для того, чтобы сделать табличное представление модели более понятным и удобочитаемым. Относительное расположение ячеек, содержащих информацию разных типов, может быть другим.

Покажем соответствие между математической моделью и табличной. Начнем с соответствия формул этих моделей. Коэффициенты целевой функции и левых частей ограничений помещены в диапазон ячеек B5:C9. В следующей таблице приведены алгебраические формулы и эквивалентные им формулы Excel и ячейки, в которых эти формулы записаны.

	Алгебраическая формула	Формула Excel	Ячейка
Целевая функция z	$5x_1 + 4x_2$	=B5*B$13+C5*C$13	D5
Ограничение 1	$6x_1 + 4x_2$	=B6*B$13+C6*C$13	D6
Ограничение 2	$x_1 + 2x_2$	=B7*B$13+C7*C$13	D7
Ограничение 3	$-x_1 + x_2$	=B8*B$13+C8*C$13	D8
Ограничение 4	$0x_1 + x_2$	=B9*B$13+C9*C$13	D9

Формула первоначально вводится только в ячейку D5, а затем ее надо скопировать в ячейки D6:D9. Чтобы правильно скопировать формулы, в формуле ячейки D5 надо ссылки на ячейки B13 и C13 (содержащих значения x_1 и x_2) сделать абсолютными в виде $B$13 и $C$13. Для больших табличных моделей в ячейку D5 вводят формулу

= СУММПРОИЗВ(B5:C5;$B$13:$C$13)

и затем копируют ее в ячейки D6:D9.

После ввода исходных данных и расчетных формул табличная модель готова для использования средства **Поиск решения**. В меню Сервис выберите команду **Поиск решения**. Откроется одноименное диалоговое окно, показанное на рис. 1.4. В этом окне надо ввести адрес ячейки, в которой вычисляется значение целевой функции, указать, надо ли минимизировать или максимизировать целевую функцию, и ввести адреса ячеек, содержащих значения переменных. В нашей модели:

– в поле ввода **Установить целевую ячейку** вводится $D$5;

– устанавливается переключатель **Равной максимальному значению**;

– в поле ввода **Изменяя ячейки** вводится $B$13:$C$13.

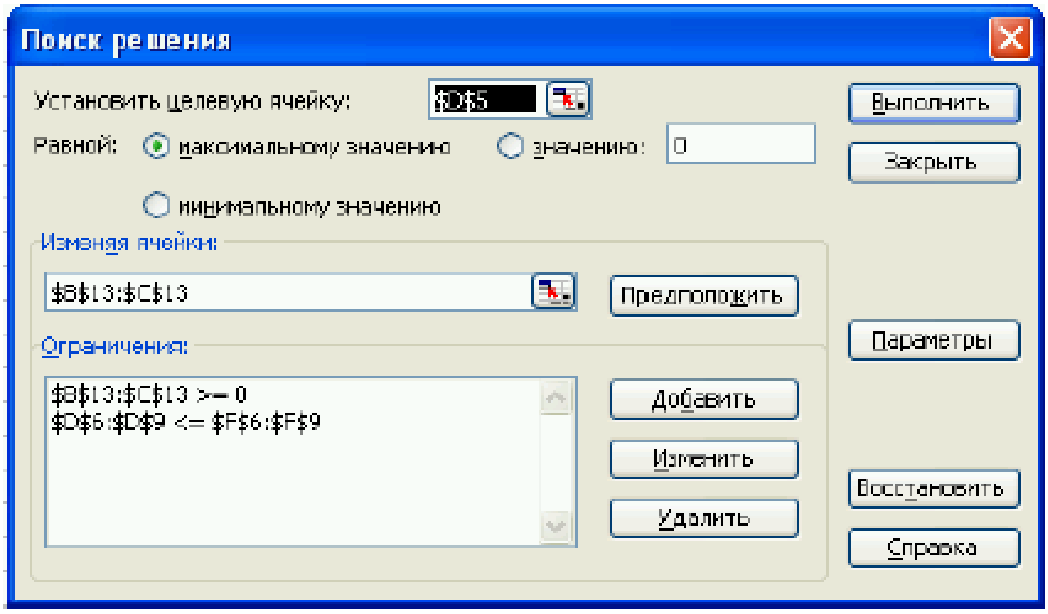


Рисунок 1.4 – Диалоговое окно **Поиск решения**

Эта информация указывает средству Поиск решения, что переменные находятся в ячейках B13 и C13, и надо найти максимум целевой функции, значение которой вычисляется в ячейке D5.

Далее надо задать ограничения модели, щелкнув на кнопке **Добавить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Отрывшееся диалоговое окно **Добавление ограничения** (рис. 1.5), предоставляет средства для ввода всех частей ограничений (левой части, знака неравенства и значения правой части).

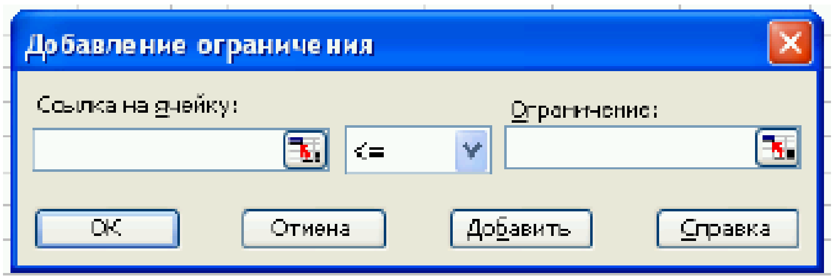


Рисунок 1.5 – Диалоговое окно **Добавление ограничения**

Используя это окно, вводим ограничения модели в таком виде $D$6:$D$9<=$F$6:$F$9. В ячейках F6:F9 записаны значения правых частей ограничений. Теперь осталось ввести ограничения неотрицательности для переменных. С помощью диалогового окна **Добавление ограничения** вводим $B$13:$C$13>=0

Установка параметров работы средства **Поиск решения** (максимальное время поиска решения, максимальное количество итераций, относительная погрешность и т.д.), производится в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 1.6).

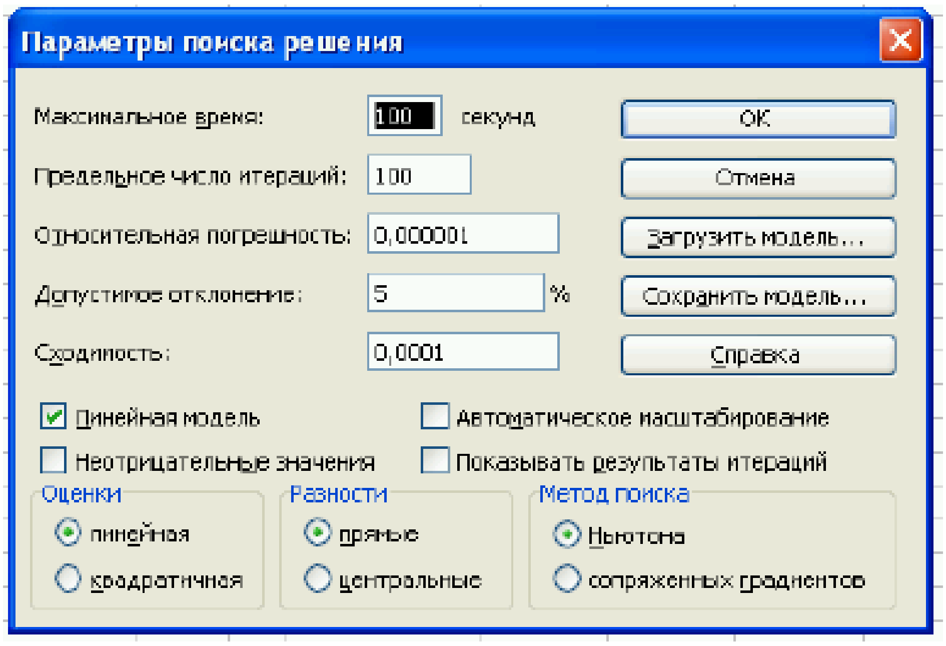
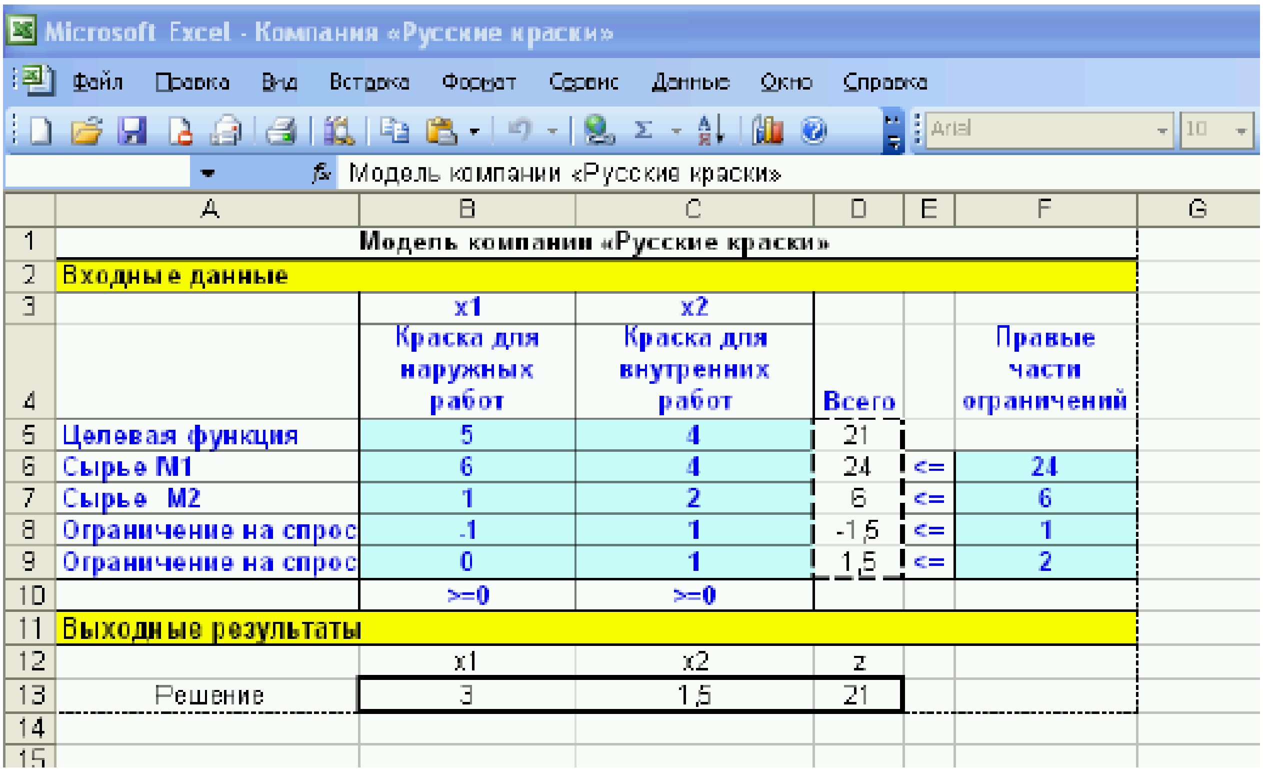


Рисунок 1.6 – Диалоговое окно **Параметры поиска решения**

Доступ к нему можно получить, щелкнув на кнопке **Параметры** в диалоговом окне **Параметры поиска решения**. В этом же окне можно указать требование о неотрицательности всех переменных опцией **Неотрицательные значения**. Основное условие при решении задачи линейного программирования использование опции **Линейная модель**.

Для решения задачи, необходимо щелкнуть на кнопке **Выполнить** в диалоговом окне **Поиск решения**. Решение появится в выходных ячейках B13:D13 табличной модели (рис. 1.7). Оптимальное значение целевой функции появится в ячейке D5, а значения переменных x_1 и x_2 — в ячейках B13 и C13 соответственно. В ячейке D13 дублируются значения целевой функции, т.к. в эту ячейку введена формула =D5.

Также появится новое диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 1.8), которое даст возможность получить при необходимости более детальную информацию о решении в виде отчетов, включая важный отчет по устойчивости. Эти отчеты формируются на отдельных листах рабочей книги.



	A	B	C	D	E	F
1		Модель компании «Русские краски»				
2	Входные данные					
3		x1	x2			
4		Краска для наружных работ	Краска для внутренних работ	Всего		Правые части ограничений
5	Целевая функция	5	4	21		
6	Сырье М1	6	4	24	<=	24
7	Сырье М2	1	2	6	<=	6
8	Ограничение на спрос	-1	1	-1,5	<=	1
9	Ограничение на спрос	0	1	1,5	<=	2
10		>=0	>=0			
11	Выходные результаты					
12		x1	x2	z		
13	Решение	3	1,5	21		
14						
15						

Рисунок 1.7 – Решение задачи в Excel

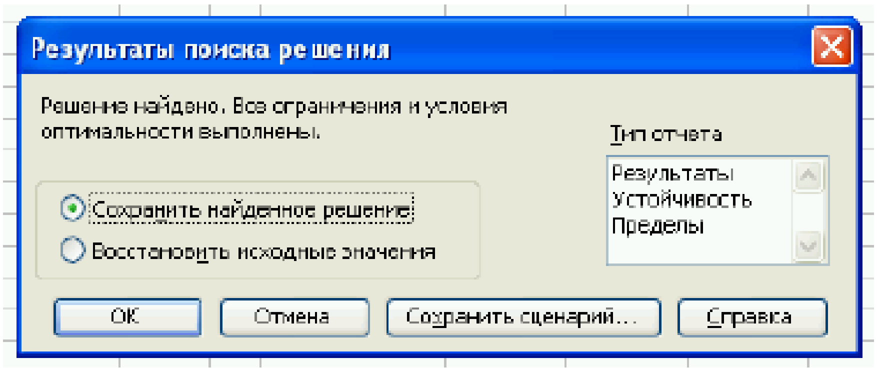


Рисунок 1.8 – Диалоговое окно **Результаты поиска решения**