2.3. Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2.1) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса — метод последовательного исключения переменных — заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которой последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2.1) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, чтобы $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}, -a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответственно ко второму, третьему, ..., m-му уравнению системы (2.1), исключим переменную x_1 из всех последующих уравнений, начиная со второго. Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases} \qquad (2.9)$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, a_{42}^{(1)} / a_{22}^{(1)}, \ldots, a_{m2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}\right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m-му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$-го шага получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \quad + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \quad + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \quad + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \quad + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \quad + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)} \end{cases} \qquad (2.10)$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n$. *Если хотя бы одно из чисел* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система* (2.1) *несовместна.*

Таким образом, для любой *совместной системы числа* $b_{r+1}^{(r-1)}, \ldots, b_m^{(r-1)}$ *в системе* (2.10) *равны нулю.* В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (2.10) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2.1). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (2.10) равно числу переменных, т.е. $r=n$ (в этом случае система (2.10) имеет треугольный вид); б) $r<n$ (в этом случае система (2.10) имеет ступенчатый вид).

Переход системы (2.1) к равносильной ей системе (2.10) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (2.10) — *обратным ходом.*

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \qquad (2.11)$$

называемую *расширенной матрицей системы* (2.1), ибо в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

▷ **Пример 2.2.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Расширенная матрица системы имеет вид:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} = 1 \neq 0$, то умножая первую строку матрицы на числа (−2), (−3), (−2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй. Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right)$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, то умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на 13,5/8 = 27/16, и прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ \quad -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ \qquad -8x_3 + x_4 = 6, \\ \qquad\quad -\dfrac{117}{16}x_4 = \dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \dfrac{6 - x_4}{-8} = \dfrac{6+2}{-8} = -1$; из второго $x_2 = \dfrac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \dfrac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2$ и из первого уравнения $x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + 2(-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы (1; 2; −1; 2). ▶