CM 23/11/2022

Développement limité

$$(1+x)^{\alpha} = a + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - a)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(x-\alpha)^2$$

Propriété de linéarité

Soient f et g admettant des développement limités au voisinage de 0 à l'ordre n:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

Théorème de primitive

Soit f une fonction qui admet un développement limité en 0 à l'ordre n de partie régulière $P_n(x)$:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

Si f admet un primitive F sur l alors F admet un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$:

$$F(x) = F(0) + \int_0^x P_n(t)\,dt + o(x^{n+1})$$

Produit de développement limitées

Soit : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2x^2 + o\left(x^2\right)}$ et $\sin x = x + o(x^2)$ Alors on a :

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)x + \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right)\sin x + o\left(x^2\right)$$

Quotient de développement limités

Soient f et g deux fonctions admettant des développement limités à l'ordre n :

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$
$$g\left(x\right) = Q_n(x) = o(x^n)$$

Si $Q_n(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n.

Exemple Determiner le développement limité de $\frac{\sin x}{e^x}$ en 0 à l'ordre 2.

En passant par la division celon puissnace croissante on a : $\frac{x}{1 + x + \frac{1}{2}x^2} = x - x^2$ ainsi:

$$\frac{\sin x}{e^x} = x - x^2$$

Composition de développement limités

Pour f et g admettant des développement limités en 0 à l'ordre n. Si $u(0) = 0$ alors la fonction $f \circ u$ admet un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en calculant la composée de $P_n(x) \circ Q_n(x)$.

Propriété

Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n.
Alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ alors $g \mapsto f(\alpha x^m)$ possède un développement limité:

$$g(x) = P_n(\alpha x^m) + o(x^{nm})$$

Intégrales généralisés

Exemple Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\lceil t \rceil}{t}\, dx$

$$\int_1^4 \frac{\lceil t \rceil}{t}\, dt = \int_1^2 \frac{\lceil t \rceil}{t}\, dt + \int_2^3 \frac{\lceil t \rceil}{t}\, dt + \int_3^4 \frac{\lceil t \rceil}{t}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt + \int_2^3 \frac{2}{t}\, dt + \int_3^4 \frac{3}{t}\, dt$$

Definition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : l \to R$ est localement Reinmann intégrable si et seulement si elle est Reinmann intégrable $\forall [a, b] \subset \mathbb{R}$

On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge si $\displaystyle\int_x^b f(t)\, dt$ converge ers une limite finie.

Exemple : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\, dt$

$f : t \mapsto \dfrac{1}{t^{\frac{1}{3}}}$ est localement Reinmann intégrable sur $]0, 1[$