TD Math - Intégrales Doubles

Exercise 56

On note T le domaine du plan contenant le point de coordonnées $(0,1)$ et délimité par les droites d'équations $g_2(x) = x + 2$, $g_1(x) = -x$, et $x = 1$

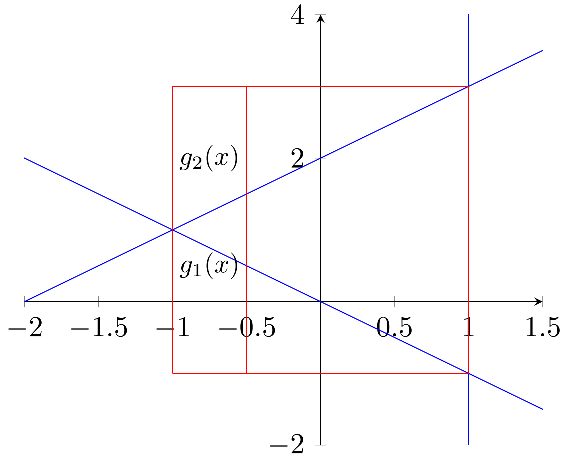

Figure 1

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ avec $T \subset [-1,1] \times [-1,3]$.

Ainsi : $\iint\limits_T xy\; dxdy = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} xy\; dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{G_1(y)}^{1} xy\; dx \right) dy + \int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{G_2(y)}^{1} xy\; dx \right) dy$

Or $G_1(y) = -y$ et $G_2(y) = y - 2$ donc on a :

$$\int\limits_{-1}^{1} \left(\int\limits_{-x}^{x+2} xy\; dy \right) dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} xy^2]_{-x}^{[x+2]}\; dx = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{2} x(x+2)^2 - \frac{1}{2} x^3\; dx = \int\limits_{-1}^{1} 2x^2 + 2x\; dx = \frac{4}{3}$$

Exercise 58

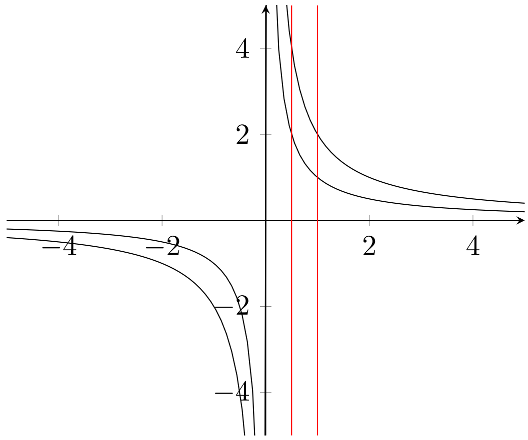

Figure 2

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} x\sin(\frac{\pi}{2}xy + x)\, dy \right) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}xy + x\right)\Big]_{\frac{1}{x}}^{\frac{2}{x}} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\pi}\cos(x) + \frac{2}{\pi}\sin(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\cos(x)\Big] \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} = \frac{2\sqrt{3} - 2}{\pi}$$

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x\sin\left(\frac{\pi}{2}xy + x\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc ses intégrales éxistent

Calcul asymptotique et développement limités

Exercise 60

Exercise 61

On pose $X = \ln x$ alors on transforme les quantités :

$$x = e^u, \quad \exp(\sqrt{u}), \quad \exp\left(u^2\right), \quad \exp(\exp(u))$$

Exercise 62

On cherche le développement limité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto (\sin x)\ln(1+x)$ en 0 d'ordre 4

$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^4)$
$\ln(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^4)$
Donc par produit de développement limités :
$(\sin x)\ln(x+1) = \left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)x - \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4\right)x^3 + o(x^4)$

On cherche le développement limité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{1+x+x^2}$ en 0 d'ordre 4

$\dfrac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$

> <u>Note:</u> on peut effectuer par substitution $u = x + x^2$ pour calculer le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$
>
> On s'assure que pour $x \to 0$, on a $u \to 0$. Ainsi par composition:
>
> $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o(x^4)$ et $x + x^2 = x + x^2 + o(x^4)$
> On a alors $\dfrac{1}{1+x+x^2} = 1 + \left(x+x^2\right) + \left(x+x^2\right)^2 + \left(x+x^2\right)^3 + \left(x+x^2\right)^4 + o(x^4)$
>
> Ainsi en développant : $\dfrac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4)$

On cherche le développement limité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \exp(\sin x)$ en 0 d'ordre 3
En prenant $u = \sin x$, on s'assure que quand $x \to 0$, $u \to 0$ on applique la composition :
$\sin x = x - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3)$ et $e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))$

On retrouve : $\exp(\sin x) = 1 + \left(x - \dfrac{1}{6}x^3\right) + \left(x - \dfrac{1}{6}x^3\right)^2 + \left(x - \dfrac{1}{6}x^3\right)^3$

Ainsi $\exp(\sin x) = 1 + x + x^2 + \dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$