3D 나비에-스토크스 방정식: 밀레니엄 문제 해결을 향한 단계

2025년 10월 17일

1. 서론

모든 시간에 대한 3D 나비에-스토크스 방정식 해의 존재성과 매끄러움을 확립하는 것은 밀레니엄 문제로 남아 있습니다. 이 문서는 방정식을 단계별로 단순화하고 해결함으로써 그러한 증명의 기초를 제공하고자 하는 상세한 유도 과정을 제시합니다.

2. 헬름홀츠 분해와 압력 계산

헬름홀츠 분해로 시작하여 압력을 독립적으로 계산합니다.

$\nabla^2\phi = 0$, $p = -\nabla\phi$ ... (1)

- ϕ: 속도 포텐셜, 압력 뒤의 "구동력"
- **$\nabla^2\phi$**: 차원 전체에 걸친 확산을 측정하는 라플라시안

3D로 확장하면, 압력은 x, y, z 방향에서 ϕ의 기울기에 의해 결정됩니다.

3. 오일러 방정식 (점성 무시)

점성을 무시하고 관성 효과에 집중하여 오일러 방정식을 유도합니다.

$\rho(\partial u/\partial t) = -\nabla p + \rho f$ ... (2)

- **$\rho(\partial u/\partial t)$**: 질량 × 가속도 (뉴턴의 제2법칙)
- **$-\nabla p$**: 압력 기울기로 인한 힘
- **ρf**: 중력과 같은 외력

일정한 압력 기울기 G를 가진 1D로 단순화:

$\rho(\partial u/\partial t) = G + \rho f$ ... (3)

시간에 대해 적분하면:

$u(t) = (G/\rho)t + u_0$ ... (4)

4. 스토크스 방정식 (관성 무시)

시간 의존 항을 무시하여 정상 상태 유동에 집중합니다.

$0 = -\nabla p + \mu\nabla^2 u + \rho f$ ... (5)

1D에서:

$0 = -(\partial p/\partial x) + \mu(\partial^2 u/\partial y^2) + \rho f$ ... (6)

$G = -(\partial p/\partial x) + \rho f$로 가정하면:

$\partial^2 u/\partial y^2 = G/\mu$ ... (7)

두 번 적분하고 경계 조건 $u(0) = 0$, $u(h) = 0$을 적용하면:

$u(y) = -(G/2\mu)y(h - y)$ ... (8)

이것이 푸아죄유 유동 해입니다.

5. 운동량 방정식 (외력 무시)

외력과 압력 기울기를 무시합니다.

$\rho(\partial u/\partial t) = \mu\nabla^2 u$ ... (9)

변수 분리 $u(y,t) = \phi(y)T(t)$를 가정하면:

$(1/T)(dT/dt) = \nu(1/\phi)(d^2\phi/dy^2) = -\nu\lambda$ ... (10)

해는 $T(t) = e^{(-\nu\lambda t)}$이고 $\phi(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\sin(\sqrt{\lambda}y)$이며, $\phi(0) = 0$이면 $A = 0$입니다.

6. 선형화된 대류 방정식

평균 속도 u_0 주변에서 비선형 대류 항을 선형화합니다.

$\rho(\partial u/\partial t) + \rho(u_0\cdot\nabla u + u\cdot\nabla u_0) = -\nabla p + \mu\nabla^2 u$ ... (11)

파동 해 $u(x,y,t) = A\sin(k_\gamma y)e^{(i(k_x x-\omega t))}$를 가정하면:

$-i\omega A + ik_x u_0 A = -(1/\rho)(\partial p/\partial x) - \nu k^2_\gamma A$ ... (12)

7. 압력에 대한 헬름홀츠 분해

$\nabla^2\phi = 0$을 재확인하고, $\phi(x,y,t) = C\sin(k_\gamma y)e^{(i(k_x x-\omega t))}$일 때:

$p = -\partial\phi/\partial x = ik_x C\sin(k_\gamma y)e^{(i(k_x x-\omega t))}$ ... (13)

8. 최종 3D 진동 해

모든 단계를 결합하면, 해는 다음과 같습니다:

$u(x,y,t) = A\sin(k_\gamma y)\exp[i(k_x x - \omega t)]\exp[-\nu k^2 t]$ ... (14)

여기서 $\omega = k_x u_0 - i\nu k^2$이고, $k^2 = k^2_x + k^2_\gamma + k^2 z$입니다.

오일러 공식을 사용하면, 실수부는:

$u\_real(x,y,t) = A\sin(k_\gamma y)\cos(k_x x - \omega_r t)e^{(-\nu k^2 t)}$ ... (15)

9. 결론

이 해는 매끄럽고 감쇠하는 진동 거동을 보여주며, 이는 나비에-스토크스 밀레니엄 문제에서 요구하는 존재성과 매끄러움을 증명하기 위한 중요한 단계입니다. 완전한 난류 모델링을 위해서는 추가적인 비선형 분석이 필요합니다.