1차원 나비에-스토크스 방정식: 실수해 및 연립방정식 풀이

평행판 사이 비압축성 유체 흐름에 대한 1차원 나비에-스토크스 방정식의 정확한 해(실수해)를 도출하고, 연립방정식의 풀이 과정을 상세히 서술하며, 3차원 해석학으로 타당성을 검증한 내용입니다. (흐름 방향: x, 횡방향: y, 판 간격: h)

1. 연립방정식 설정

1.1 3차원에서 1차원 축소

3차원 나비에-스토크스 방정식:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0$$

1차원 가정 (평행판, fully developed 흐름): $\mathbf{u} = (u(y,t), 0, 0)$, $\partial/\partial x = \partial/\partial z = 0$.

연립방정식:

$$\boxed{\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x & (\text{모멘텀}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & (\text{연속, 자동 만족}) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & (\text{압력 조건}) \end{cases}}$$

여기서 $\nu = \mu/\rho$, 대류항 $(u\cdot\nabla)u = 0$.

2. 연립방정식 타당성 확인

2.1 각 항 제거 후 연립 여부

각 항을 제거한 경우 연립방정식의 일관성 확인:

- 점성항 제거 ($\mu = 0$): $\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + f_x$ (오일러, ODE).

- 관성항 제거 (정상 상태): $0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x$ (Poisson-like).
- 압력 구배 제거 ($\partial p / \partial x = 0$): $\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (확산 방정식).
- 외력 제거 ($f_x = 0$): 기본 형태 유지.

모든 경우 선형 PDE로 해 존재, 저 Re ($\mathrm{Re} \ll 1$)에서 타당.

3. 실수해 도출 및 연립방정식 풀이

3.1 기본 방정식

압력 구배 및 외력 제거 ($\partial p / \partial x = 0, f_x = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

경계 조건: $u(0, t) = 0$, $u(h, t) = 0$. 초기 조건: $u(y, 0) = u_0(y)$.

연속 및 압력 조건은 자동 만족.

3.2 변수 분리법 풀이 과정

1. **가정**: $u(y, t) = Y(y)T(t)$.
2. **대입**: $\frac{T'}{\nu T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$ (분리 상수).
3. **공간 문제**:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = Y(h) = 0$$

   - 특성 방정식: $r^2 + \lambda = 0$. - $\lambda > 0$: $Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda} y) + B\sin(\sqrt{\lambda} y)$. - 경계: $A = 0, \sin(\sqrt{\lambda} h) = 0 \implies \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2$. - 고유함수: $Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)$.
4. **시간 문제**:

$$T' + \nu \lambda_n T = 0 \implies T_n(t) = \exp\left(-\nu \frac{n^2\pi^2}{h^2} t\right)$$

5. **일반해**:

$$u(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \exp\left(-\nu \frac{n^2\pi^2}{h^2} t\right)$$

- 계수: $A_n = \frac{2}{h}\int_0^h u_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)dy.$

6. **수렴성**: $t > 0$에서 지수 감쇠로 균일 수렴.

3.3 실수해 (닫힌 형태)

1. 단일 모드 ($u_0(y) = U_0\sin(\pi y/h)$):

$$u(y,t) = U_0\sin\left(\frac{\pi y}{h}\right)\exp\left(-\nu\frac{\pi^2}{h^2}t\right)$$

2. 포물선 ($u_0(y) = U_0\frac{y(h-y)}{h^2}$):

$$A_n = \frac{4U_0h}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n], \quad A_{2m-1} = \frac{8U_0h}{(2m-1)^3\pi^3}$$

$$u(y,t) = \frac{8U_0h}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{h}\right)\exp\left(-\nu\frac{(2m-1)^2\pi^2}{h^2}t\right)$$

3. 정상 압력 구배 ($\partial u/\partial t = 0$, $\partial p/\partial x = -G$):

$$\mu\frac{d^2u}{dy^2} = G, \quad u(y) = \frac{G}{2\mu}y(h-y)$$

4. 에너지 분석

운동에너지:

$$E(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^h u^2(y,t)\,dy$$

감쇠율:

$$\frac{dE}{dt} = -\nu\rho\int_0^h\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \le 0$$

급수 형태:

$$E(t) = \frac{\rho h}{4}\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\exp\left(-2\nu\frac{n^2\pi^2}{h^2}t\right)$$

5. 3차원 해석학 검증

5.1 벡터 해석학

3D NS에서 1D 축소 ($\mathbf{u} = (u(y,t), 0, 0)$)는 연속 및 모멘텀 방정식과 일치.

5.2 함수해석학

$L^2([0,h])$ 공간에서 $\sin(n\pi y/h)$는 완전 직교 기저, 해는 semigroup $u(t) = e^{\nu\Delta t}u_0$.

저 Re에서 타당, 고 Re 시 난류로 한계.

6. 결론

1차원 나비에-스토크스 방정식의 실수해는 변수 분리법으로 도출되며, 3D 해석학으로 타당성 확인:

1. 벡터장 이론 (3D → 1D)
2. Sturm–Liouville 이론
3. Hilbert 공간 및 semigroup 이론
4. 에너지 감쇠 분석

특정 수식이나 추가 분석이 필요하면 요청해 주세요. (2025년 10월 14일 23:30 KST)