1차원 나비에-스토크스 방정식 해 구하기

1. 1차원 나비에-스토크스 방정식 설정

3차원 NS 방정식:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\right)=-\nabla p+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{f},$$

비압축성 조건: $\nabla\cdot\mathbf{u}=0$.

1차원 단순화 (x축, $\mathbf{u}=(u,0,0)$, $\frac{\partial}{\partial y}=0$, $\frac{\partial}{\partial z}=0$):

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f_x,$$

비압축성 조건 (특수 경우): $\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

2. 항 분리 과정 (상세)

각 항을 명확히 분리하여 분석합니다. 스토크스 흐름 가정(대류항 무시, $f_x=0$)을 적용한 후 진행합니다.

관성항 (Inertial Term):

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

시간에 따른 속도의 변화, 유체의 관성 효과를 나타냅니다.

대류항 (Convective Term):

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$$

비선형 항으로, 유체의 자가이동에 의한 운동량 전달. 스토크스 가정에서 ≈ 0으로 무시.

압력항 (Pressure Term):

$$-\frac{\partial p}{\partial x}$$

압력 구배에 의한 힘, 1차원에서 x 방향으로 작용.

점성항 (Viscous Term):

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

유체의 점성에 의한 내부 마찰력, 2차 공간 미분으로 표현.

외력항 (External Force Term):

$$f_x$$

외부 힘(예: 중력), 스토크스 가정에서 $f_x = 0$으로 간주.

스토크스 가정 적용 후:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

3. 연립방정식 구성

1차원 NS 방정식은 단일 방정식으로 간소화되며, 압력 p와 속도 u의 관계를 명시하려면 연립 형태로 간주:

모멘텀 방정식:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x,$$

비압축성 조건 (특수 경우):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

(유속이 x에 무관하거나 경계 조건으로 처리).

스토크스 가정 적용:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

4. 편미분 및 선형 변환 과정

해를 구하기 위해 편미분과 선형 변환을 순서대로 적용합니다.

단계 1: 비선형 항 제거 (선형화)

대류항 $\rho u \frac{\partial u}{\partial x}$을 스토크스 가정($u \frac{\partial u}{\partial x} \approx 0$)으로 무시:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

단계 2: 편미분 방정식 분석

시간 미분($\frac{\partial u}{\partial t}$)과 2차 공간 미분($\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$) 포함. 압력 항은 독립 변수로 처리.

단계 3: 변수를 분리 (Separation of Variables)

$u(x,t) = X(x)T(t)$로 가정:

$$\rho \frac{\partial (XT)}{\partial t} = -\frac{\partial (XTp)}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 (XT)}{\partial x^2}.$$

- 시간 미분: $\rho X \frac{dT}{dt}$
- 공간 미분: $-\frac{\partial p}{\partial x} XT + \mu T \frac{d^2 X}{dx^2}$

분리 상수 λ 적용:

$$\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{X}\frac{d^2 X}{dx^2} - \frac{1}{\rho X}\frac{\partial p}{\partial x} = -\lambda.$$

단계 4: 시간 및 공간 방정식

- 시간 방정식:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda T \quad \Rightarrow \quad T(t) = T_0 e^{-\lambda t}.$$

- 공간 방정식:

압력 $\frac{\partial p}{\partial x}$를 상수($p = p_0$)로 가정 후:

$$\frac{d^2X}{dx^2} - \frac{\rho\lambda}{\mu}X = 0.$$

특성 방정식: $r^2 - \frac{\rho\lambda}{\mu} = 0$, $r = \pm\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}$.

해: $X(x) = Ae^{\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}x}$.

단계 5: 경계조건 적용

평판 경계, $x = 0$에서 $u = 0$, $x = L$에서 $u = 0$:

$X(0) = 0$: $A + B = 0 \to B = -A$.

$X(L) = 0$: $Ae^{\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}L} - Ae^{-\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}L} = 0$.

비자명식 해: $\sqrt{\frac{\rho\lambda}{\mu}}L = n\pi$, $\lambda_n = \frac{\mu n^2\pi^2}{\rho L^2}$.

전체 해:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\sqrt{\frac{\rho\lambda n}{\mu}}x} + B_n e^{-\sqrt{\frac{\rho\lambda n}{\mu}}x}\right)e^{-\lambda_n t}.$$

단계 6: 초기 조건 맞춤

초기 조건 $u(x,0) = u_0(x)$로 푸리에 계수 A_n, B_n 결정.

5. 선형 변환 요약

1. 비선형 대류항을 스토크스 가정으로 선형화.
2. 변수 분리 후 시간/공간 방정식으로 변환.
3. 경계조건으로 고유값 문제 해결.

4. 초기 조건으로 계수 결정.

6. 밀레니엄 문제: 3D 전역 해 미해결성 (2025 업데이트)

3D NS 방정식의 글로벌 부드러운 해 존재 여부, 2025년 10월 14일 오전 5:15 KST 기준 미해결. 1차원 단순화는 로컬 해 가능하나, 3D 비선형 blow-up 증명 불가.

7. 결론

항 분리와 연립방정식으로 1차원 NS 방정식 구성, 스토크스 가정 하 선형화. 편미분 후 변수 분리로 해 도출, 경계조건 적용으로 구체화. 3D 해는 경계 조건 필요, 수치적 접근(FDM, FEM) 대안. 밀레니엄 문제 해결은 비선형성 해결 필요. 추가 데이터로 구체적 해 도출 가능.