1차원 나비에-스토크스 연립방정식: 풀이 과정 상세 서술

연립방정식의 설정, 타당성 확인, 풀이 과정(변수 분리법 등)을 상세히 서술하고 취합한 내용입니다. 평행판 사이 흐름을 가정하며, 표기 수정(y: 횡방향, h: 판 간격).

1. 연립방정식 설정

3차원 나비에-스토크스 방정식에서 1차원 축소(흐름 방향 x, 횡방향 y, $\mathbf{u} = (u(y,t), 0, 0)$):

$$\boxed{\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x & (\text{모멘텀}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & (\text{연속}) \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 & (\text{압력 조건}) \end{cases}}$$

여기서 $\nu = \mu/\rho$. 대류항은 자동으로 0.

2. 연립방정식 타당성 확인

각 항을 하나씩 제거한 후 연립 여부 확인(모든 경우 일관성 유지, 해 존재):

- 점성항 제거 ($\mu = 0$): $\rho \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + f_x$ (오일러 형태, ODE로 풀이 가능).
- 관성항 제거 (정상 상태): $0 = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_x$ (Poisson-like, 적분으로 풀이).
- 압력 구배 제거 ($\partial p/\partial x = 0$): $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (확산 방정식, 변수 분리법 적용).
- 외력 제거 ($f_x = 0$): 기본 형태 유지.

저 Re ($\mathrm{Re} \ll 1$)에서 타당, 3D 검증으로 확인됨.

3. 연립방정식 풀이 과정 (상세 서술)

3.1 기본 가정 (압력 구배 및 외력 제거)

연립에서 모멘텀 방정식을 중심으로 풀이: $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ (확산 방정식).

경계 조건 (Dirichlet): $u(0,t) = 0$, $u(h,t) = 0$.

초기 조건: $u(y,0) = u_0(y)$.

연속 및 압력 조건: 자동 만족 ($\partial u/\partial x = 0$, 압력 y/z 무관).

3.2 변수 분리법 풀이 과정 (단계별)

1. **함수 분리 가정**: $u(y,t) = Y(y)T(t)$ (분리 가능한 형태).
2. **방정식 대입**: $YT' = \nu TY''$.
3. **분리 상수 도입**: $\frac{T'}{\nu T} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda$ (λ: 상수, 음수 선택으로 감쇠 해 보장).
4. **공간 문제 (Sturm-Liouville 고유값 문제)**:

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = 0, \quad Y(h) = 0.$$

   - 특성 방정식: $r^2 + \lambda = 0$. - λ < 0: 지수 해, 경계 조건으로 자명해 (불가). - λ = 0: 선형 해, 자명해. - λ > 0: 진동 해 $Y(y) = A\cos(\sqrt{\lambda}y) + B\sin(\sqrt{\lambda}y)$. - 경계 적용: $A = 0$, $\sin(\sqrt{\lambda}h) = 0 \implies \sqrt{\lambda}h = n\pi$, $\lambda_n = (n\pi/h)^2$, $n = 1, 2, \ldots$. - 고유함수: $Y_n(y) = \sin(n\pi y/h)$.

5. **시간 문제 풀이**:

$$T' + \nu\lambda T = 0 \implies T_n(t) = C_n \exp(-\nu\lambda_n t) = \exp\left(-\nu\frac{n^2\pi^2}{h^2}t\right).$$

6. **부분해 합**: $u_n(y,t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \exp\left(-\nu\frac{n^2\pi^2}{h^2}t\right)$.
7. **일반해 (Fourier 급수)**:

$$u(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right) \exp\left(-\nu\frac{n^2\pi^2}{h^2}t\right).$$

8. **푸리에 계수 결정 (초기 조건)**:

$$u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right).$$

   - 직교성: $\int_0^h \sin(m\pi y/h)\sin(n\pi y/h)dy = (h/2)\delta_{mn}$. - 계수: $A_n = \frac{2}{h}\int_0^h u_0(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{h}\right)dy$.

9. **수렴성 확인**: t > 0에서 지수 감쇠로 균일 수렴, 미분 가능.

3.3 특정 해 예시

단일 모드 ($u_0(y) = U_0 \sin(\pi y/h)$): $A_1 = U_0$, 나머지 0.

$$u(y,t) = U_0 \sin\left(\frac{\pi y}{h}\right) \exp\left(-\nu \frac{\pi^2}{h^2} t\right).$$

포물선 ($u_0(y) = U_0 y(h-y)/h^2$): 부분적분으로 $A_n = \frac{4U_0 h}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$ (홀수 n만).

$$u(y,t) = \frac{8U_0 h}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^3} \sin\left(\frac{(2m-1)\pi y}{h}\right) \exp\left(-\nu \frac{(2m-1)^2\pi^2}{h^2} t\right).$$

정상 압력 구배 ($\partial u/\partial t = 0$, $\partial p/\partial x = -G$): $\mu \frac{d^2u}{dy^2} = G$.

- 일반해: $u(y) = \frac{G}{2\mu} y^2 + C_1 y + C_2$.

- 경계 적용: $C_1 = -\frac{Gh}{2\mu}$, $C_2 = 0$.

$$u(y) = \frac{G}{2\mu} y(h-y).$$

4. 에너지 분석

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_0^h u^2 dy, \quad \frac{dE}{dt} = -\nu\rho \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy \leq 0.$$

급수:

$$E(t) = \frac{\rho h}{4} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \exp\left(-2\nu \frac{n^2\pi^2}{h^2} t\right).$$

5. 3차원 해석학 검증

벡터 해석학: 3D NS에서 1D 축소 타당 (대류 0, 연속 만족).

함수해석학: $L^2([0,h])$ 공간, semigroup $u(t) = e^{\nu\Delta t} u_0$ (존재/유일성).

저 Re에서 타당, 고 Re 시 한계.

6. 결론

연립방정식은 변수 분리법으로 풀이되며, 3D 해석학으로 타당성 확인됨.

추가 질문이 있으시면 말씀해주세요.