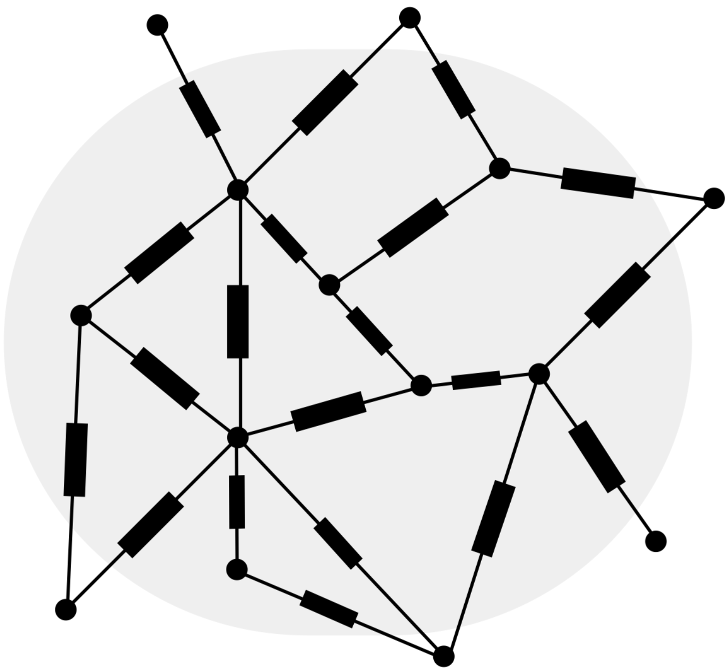
KTH Engineering Sciences

Projekt

Elektriska nät

Bakgrund

I det här projekt ska ni studera elektriska nätverk. Nätverken består av ett antal noder som är ihopkopplade med resistorer (motstånd). Ett exempel visas i bilden nedan, där noderna är markerade med punkter och resistorerna med rektanglar.



Vi antar att det finns n noder i nätverket och kallar dem $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Två noder x_i och x_j kan vara ihopkopplade med (max) en resistans, som vi då betecknar med r_{ij}. Vi låter den elektriska potentialen i nod x_j vara U_j och strömmen som går från nod x_i till x_j vara I_{ij}. Vi definierar också *konduktansen* som $k_{ij} = 1/r_{ij}$.

Ohms lag ger att

$$I_{ij} = \frac{U_i - U_j}{r_{ij}} = k_{ij}(U_i - U_j), \tag{1}$$

Notera att strömmen i andra riktningen har omvänt tecken, $I_{ji} = -I_{ij}$. Vi låter slutligen den totala strömmen ut från en nod betecknas med I_j och definieras som

$$I_i = \sum_{\text{alla noder } j \text{ kopplade till } i} I_{ij}. \tag{2}$$

Del 1 – teoriuppgifter

1. Låt $\boldsymbol{U} = (U_1, \ldots, U_n)^T$ och $\boldsymbol{I} = (I_1, \ldots, I_n)^T$ vara vektorer med alla noders potentialer respektive strömmar. Visa att vektorerna är relaterade som

$$\boldsymbol{I} = K\boldsymbol{U}, \qquad K \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

   där matrisen K beror på konduktanserna k_{ij}.

   Matrisen K kallas *Kirchoffmatrisen* till nätverket. Bestäm K i termer av k_{ij} med hjälp av sambanden (1) och (2). För att få enklare formler kan ni definiera k_{ij} för *alla* nodpar med index $i \neq j$, och låta $k_{ij} = 0$ när noderna x_i och x_j inte är sammankopplade.

2. I allmänhet säger vi att en matris $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ med elementen $\{a_{ij}\}$ är en Kirchoffmatris om och endast om

   (i) den är symmetrisk, $a_{ij} = a_{ji}$,

   (ii) radsummorna för A är noll, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$,

   (iii) element som inte ligger på diagonalen är antingen negativa eller noll, $a_{ij} \leq 0$ när $i \neq j$.

   Visa att K har dessa egenskaper.

3. Vi antar nu att det finns $m < n$ yttre noder (utanför det gråa området) och $n-m$ inre noder. Vi ordnar också noderna så att de yttre noderna är $x_1, \ldots, x_m$ och de inre $x_{m+1}, \ldots, x_n$.

   Vi ansluter de yttre noderna till spänningskällor och vill beräkna strömmen som flyter från dem. Med andra ord, vi antar att $U_1, \ldots, U_m$ är kända och att vi vill beräkna $I_1, \ldots, I_m$. Dela upp $\boldsymbol{U}$ i yttre och inre noder $\boldsymbol{U}^T = [\boldsymbol{U}_{\text{yttre}}^T\ \boldsymbol{U}_{\text{inre}}^T]$ där $\boldsymbol{U}_{\text{yttre}} = (U_1, \ldots, U_m)^T \in \mathbb{R}^m$ och $\boldsymbol{U}_{\text{inre}} = (U_{m+1}, \ldots, U_n)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$. Dela upp $\boldsymbol{I}$ på samma sätt. Vi kan då skriva $\boldsymbol{I} = K\boldsymbol{U}$ i blockform som

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{\text{yttre}} \\ \boldsymbol{I}_{\text{inre}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_{\text{yttre}} \\ \boldsymbol{U}_{\text{inre}} \end{pmatrix}.$$

   För de inre noderna $x_{m+1}, \ldots, x_n$ gäller Kirchoffs lag som säger att nettoströmmen från en nod utan strömkälla är noll, dvs $\boldsymbol{I}_{\text{inre}} = 0$. Visa att

$$\boldsymbol{I}_{\text{yttre}} = S\boldsymbol{U}_{\text{yttre}}, \qquad S \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

   där matrisen S beror på K. Ge en formel för S i termer av blocken K_{ij} som gäller när K_{22} är inverterbar. Matrisen kallas *Schurkomplementet* till K för uppdelningen, eller *responsmatrisen* för nätverket.

4. Man kan visa att även S är en Kirchoffmatris. Detta innebär att S motsvarar ett annat, mindre nätverk som är ekvivalent med det ursprungliga nätverket. Er uppgift är att visa (några delar av) detta:

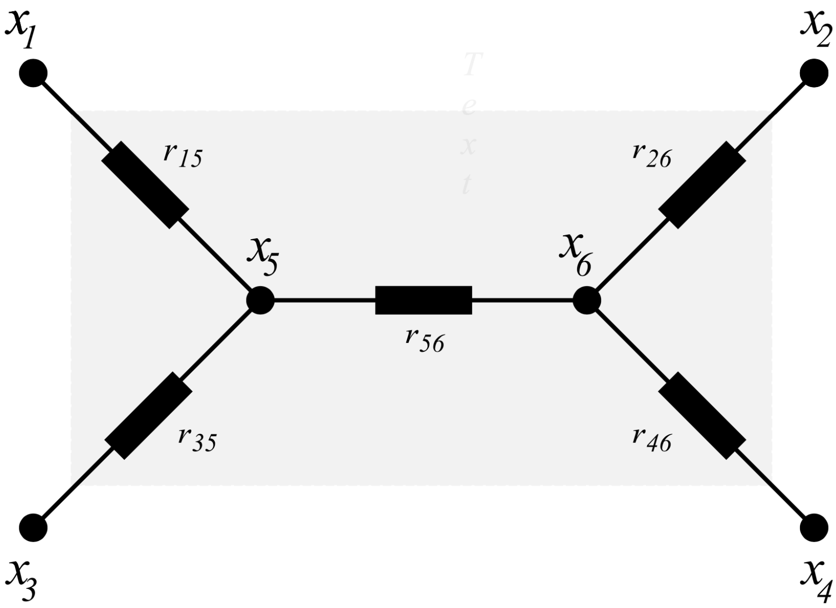
   (a) Visa att S har egenskaperna (i) och (ii) när K_{22} är inverterbar. Förklara varför summan av strömmarna i $\boldsymbol{I}_{\text{yttre}}$ därför är noll.

   (b) Visa att K_{22} är inverterbar om nätverket är *sammanhängande* (connected), dvs om det finns en väg i nätverket mellan alla par av noder.

   (c) *Frivillig:* Visa att S har egenskapen (iii) om nätverket är sammanhängande.

Del 2 – inledande uppgifter

Vi studerar nu ett specifikt nätverk givet i bilden nedan. Det består av sex noder och fem resistanser/konduktanser. Noderna x_1, x_2, x_3, x_4 är yttre noder.



1. Samla alla konduktanser i en vektor $\boldsymbol{k}$, definierad som $\boldsymbol{k} = (k_{15}, k_{26}, k_{56}, k_{35}, k_{46})^T$. Skriv MATLAB-funktioner som givet $\boldsymbol{k}$ beräknar motsvarande Kirchoffmatris $K = K(\boldsymbol{k})$ och responsmatris $S = S(\boldsymbol{k})$.

2. Antag att konduktanserna är givna som

$$\boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} k_{15} \\ k_{26} \\ k_{56} \\ k_{35} \\ k_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.0 \cdot 10^{-3} \\ 2.5 \cdot 10^{-3} \\ 1.0 \cdot 10^{-3} \\ 0.5 \cdot 10^{-3} \\ 4.5 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \quad \Omega^{-1}.$$

   Vi ansluter x_1 till 9 volt och jordar resten av de yttre noderna. (Dvs $U_1 = 9$ och $U_2 = U_3 = U_4 = 0$.) Vad blir strömmarna i de yttre noderna? Verifiera att summan av strömmarna är noll.

Del 3 – det inversa problemet

Vi betraktar nu den inre (gråa) delen av nätverket som en svart låda. Vi antar att man endast har tillgång till de yttre noderna och att alla resistorerna inne i lådan är okända. Genom mätningar på de yttre noderna vill vi bestämma dessa resistanser. Detta kallas för ett *inverst problem* – modellen som bestämmer $\boldsymbol{I}$ givet $\boldsymbol{k}$ och $\boldsymbol{U}$ är känd och lätt att beräkna, men det omvända, att hitta $\boldsymbol{k}$ från $\boldsymbol{I}$ och $\boldsymbol{U}$, är svårare. Liknande problem uppstår i tex tomografi, där man skickar in en våg genom ett material, och från vågens observerade beteende vill bestämma materialet; där är ekvationen för vågen, givet materialet, välkänd men det omvända förhållandet mycket komplicerat.

1. Vi ansluter 1 volt till en yttre nod, jordar resten och mäter upp strömmarna från de yttre noderna med en amperemeter. Förfarandet upprepas för alla de fyra yttre noderna. De uppmätta strömmarna är ges i tabellen nedan. Värdena är givna i *milliampere*.

Nod	1	2	3	4
I_1	1.10	-0.19	-0.37	-0.55
I_2	-0.18	1.11	-0.15	-0.77
I_3	-0.38	-0.16	0.95	-0.40
I_4	-0.57	-0.80	-0.42	1.75

   Från dessa mätvärden ska ni bestämma konduktanserna i nätverket. Man kan göra det genom att lösa ett överbestämt olinjärt ekvationssystem med Gauss–Newtons metod.

   - Låt $\boldsymbol{k}$ vara de okända konduktanserna. Mätserien ovan ger en matris S_0 som skulle uppfylla $S(\boldsymbol{k}) = S_0$ om mätningarna vore helt exakta. Vad är S_0? Notera: På grund av mätfel är S_0 inte exakt symmetrisk och dess rad- och kolumnsummor är inte exakt noll.
   - Formulera problemet som ett överbestämt olinjärt ekvationssystem $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{k}) \approx 0$, där elementen i $\boldsymbol{F}$ utgörs av elementen i S och S_0. (Notera: varje element i S är en funktion av $\boldsymbol{k}$.)
   - Skriv Matlab-funktioner som beräknar $\boldsymbol{F}$ och dess jakobimatris J. Jakobimatrisen kan antingen beräknas analytiskt eller approximeras numeriskt på samma sätt som i approximerad Newton.

     För att få fram ett analytiskt uttryck, använd tex produktregeln för matris-värda funktioner,

     $$\frac{d}{ds}A(s)B(s) = \frac{dA(s)}{ds}B(s) + A(s)\frac{dB(s)}{ds}, \quad \text{och speciellt att} \quad \frac{d}{ds}A(s)A(s)^{-1} = \frac{d}{ds}I = 0.$$

   - Välj lämplig startgissningen (tex $\boldsymbol{k} = [1\ 1\ 1\ 1\ 1]^T$) och lös med Gauss–Newton. Rapportera resultatet (konduktanserna), felkvadratsumman och antal iterationer för er valda tolerans. Beräkna även motsvarande resistanser r_{ij}.

2. Amperemetern har en felmarginal på 2%. Alla värden i S_0 har därför en osäkerhet på $\pm 2\%$. Använd experimentell störningsräkning för att hitta vilken osäkerhet som detta leder till i de beräknade resistanserna. Vilken av resistanserna är mest osäker?

Del 4 – optimering

Vi vill nu tillverka en krets med specifikationen att $S(\boldsymbol{k}) = B_0 + \eta B_1$ där

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1.0 & -0.3 & -0.3 & -0.4 \\ -0.3 & 1.0 & 0.0 & -0.7 \\ -0.3 & 0.0 & 0.9 & -0.6 \\ -0.4 & -0.7 & -0.6 & 1.7 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & -0.2 & -0.4 \\ 0.3 & 0.3 & -0.4 & -0.2 \\ -0.2 & -0.4 & 0.1 & 0.5 \\ -0.4 & -0.2 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

(Notera faktorn 10^{-3}.) Parametern η är fri och kan väljas i intervallet $\eta \in [0, 1]$. Det bästa valet av $\boldsymbol{k}$ beror nu på η och vi låter minsta kvadratlösningen till $S(\boldsymbol{k}) \approx B_0 + \eta B_1$ betecknas $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}(\eta)$. Vi låter också $\boldsymbol{r}(\eta) = (r_1(\eta), \ldots, r_5(\eta))^T$ vara motsvarande resistanser.

Kostnaden för en resistor på r ohm antas följa priskurvan $P(r)$ som ges av formeln

$$P(r) = 1 + 10 \left(\frac{r}{1000} \right)^2.$$

Totala priset på resistanserna för ett givet η är därför

$$P_{\text{tot}}(\eta) = \sum_{j=1}^{5} P(r_j(\eta)).$$

Er uppgift är att hitta det optimala valet av $\eta \in [0, 1]$ som minimerar det totala priset $P_{\text{tot}}(\eta)$. Använd Matlab-lösningen från den tidigare uppgiften för att beräkna $\boldsymbol{r}$, givet η, och sedan gyllene snittet-sökning[1] för att hitta det optimala värdet η^*. Rapportera η^*, $\boldsymbol{r}(\eta^*)$, $P_{\text{tot}}(\eta^*)$, samt hur väl den optimala lösningen överensstämmer med specifikationen, dvs felkvadratsumman för η^*. Ange också vilken tolerans ni använde och hur många iterationer som krävdes i gyllene snittet-sökningen.

[1] P_{tot} är unimodal på intervallet.