A. Szepessy, KTH

APPROXIMATION, EXISTENS OCH ENTYDIGHET FÖR ORDINÄRA DIFFERENTIALEKVATIONER

Här presenteras de grundläggande argumenten för approximation, existens och entydighet av lösningar till ordinära differentialekvationer, med hjälp av ett konvergensbevis för Eulers metod. Dessa tre begrepp, approximation, existens och entydighet, är fundamentala för att hantera differentialekvationer: när vi använder en differentialekvation vill vi veta att den har en lösning och om det finns flera eller bara en lösning med samma data. Det är svårt att föreställa sig en lösning som inte kan approximeras, vilket intimt hänger samman med att om den finns är den approximerbar. Det är enklare att inse att vissa lösningar kan vara svårare att approximera noggrant än andra (i den meningen att bättre upplösning krävs, dvs mer beräkningsresurser). Avsikten med beviset som du har framför dig är att förmedla sådan insikt; t.ex. varför kan det vara svårt att göra en noggrann beräkning av en lösning till en differentialekvation över lång tid, när är lösningen entydig och har dessa frågor med varandra att göra? Framställningen är relaterad till det första existens och entydhetsbeviset för ordinära differentialekvationer som gjordes av Cauchy 1824.

Contents

1. Konvergens av Eulers metod

Vi studerar först konvergens av Eulers approximationsmetod för differentialekvationen $y'(t) = f\big(y(t)\big)$ med begynnelsedata $y(0) = y_0$ och $t \in [0, T]$. Det första steget är att utvidga Eulerapproximationen, $\bar{y}(\bar{t}_n)$, från beräkningspunkterna, $\bar{t}_n = nT/\bar{N},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \bar{N}$, till alla punkter $t \in [0, T]$.

Steg 1. Betrakta en indelning av intervallet $[0, T]$ med beräkningspunkterna $\bar{t}_n = nT/\bar{N},\ n = 0, 1, 2, \ldots, \bar{N}$ och definiera den diskreta Eulerapproximationen

$$\bar{y}(\bar{t}_{n+1}) - \bar{y}(\bar{t}_n) = (\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n) f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) \quad \text{för } n = 0, 1, 2, \ldots, \bar{N} - 1. \tag{1}$$

Utvidga nu $\bar{y}$ till en kontinuerlig styckvis linjär funktion

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) - \bar{y}(\bar{t}_n) &= (t - \bar{t}_n) f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) \\ &= \int_{\bar{t}_n}^{t} f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) \mathrm{d}s \quad \bar{t}_n \le t < \bar{t}_{n+1}, \end{aligned} \tag{2}$$

se Figur 1. Med andra ord $\bar{y} : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ löser den ordinära differentialekvationen

$$\bar{y}'(s) = \bar{f}(s, \bar{y})$$

där $\bar{f}$ är styckvis konstant med $\bar{f}(s, \bar{y}) := f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big)$ för $\bar{t}_n \le s < \bar{t}_{n+1}$ och värdena av funktionen $\bar{y}$ i beräkningspunkterna bestäms av Eulers metod (1).

Sats 1 (Konvergens av Eulers metod)**.** *Låt $\bar{y}$ och $\bar{\bar{y}}$ vara Eulerapproximationer av den ordinära differentialekvationen*

$$y'(t) = f\big(y(t)\big) \quad 0 \le t \le T \text{ och } y(0) = y_0 \tag{3}$$

med beräkningspunkerna $\bar{t}_n = nT/\bar{N}$, $n = 0, 1, 2, \ldots, \bar{N}$ respektive $\bar{\bar{t}}_m = mT/\bar{\bar{N}}$, $m = 0, 1, 2, \ldots, \bar{\bar{N}}$ och $\Delta t := \max(T/\bar{N}, T/\bar{\bar{N}})$. Antag att det finns en konstant C så att

$$|f(z) - f(y)| \le C|z - y| \quad \text{och} \quad \max\big(|f(0)|, |y(0)|\big) \le C\ . \tag{4}$$

Då finns konstanter B_1 och B_2 så att

$$\max_{t\in[0,T]} \big(|\bar{y}(t)|, |\bar{\bar{y}}(t)|\big) \le B_1 \tag{5}$$

och

$$\max_{t\in[0,T]} |\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| \le B_2 \Delta t\ . \tag{6}$$

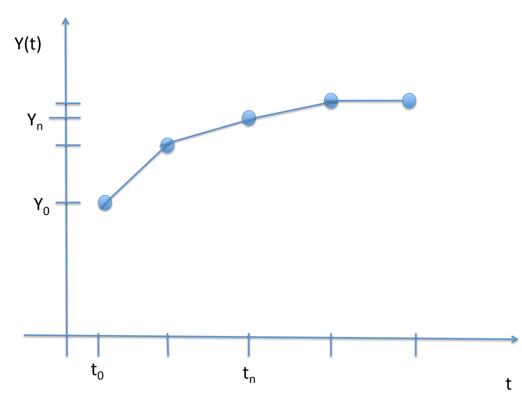

FIGURE 1. Kontinuerlig styckvis linjär Eulerapproximation med $Y(t) := \bar{y}(t)$.

En funktion f som uppfyller (4) sägs vara Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstanten C. Innan vi bevisar satsen ger vi exempel på funktioner som är Lipschitzkontinuerliga och på funktioner som inte är det.

Exempel 1. Antag att $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ har begränsad derivata

$$\max_{y\in\mathbb{R}} |f'(y)| \le C.$$

Då gäller att

$$|f(z) - f(y)| \le C|z - y|$$

ty Taylors formel ger

$$
\begin{aligned}
|f(z) - f(y)| &= \Big| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} f\big(sz + (1-s)y\big)\mathrm{d}s \Big| \\
&= \Big| \int_0^1 f'\big(sz + (1-s)y\big)\mathrm{d}s(z-y) \Big| \\
&\le \int_0^1 \big|f'\big(sz + (1-s)y\big)\big|\mathrm{d}s|z-y| \\
&\le C|z-y|.
\end{aligned}
$$

Om $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ är Jacobianen $f'(y)$ en $d \times d$ matris och om denna matris har begränsad norm $|f'(y)| := \max_{v \in \mathbb{R}^d} |f'(y)v|/|v| = C$ gäller också (4). $\square$

Exempel 2. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definerierad av $y \mapsto |y|$ är Lipschitzkontinuerlig med Lipschitzkonstanten $C = 1$, men f är inte deriverbar i punkten $y = 0$. Vi ser alltså från Exempel 1 att mängden av Lipschitzkontinuerliga funktioner innehåller och är större än mängden av funktioner med begränsad derivata. $\square$

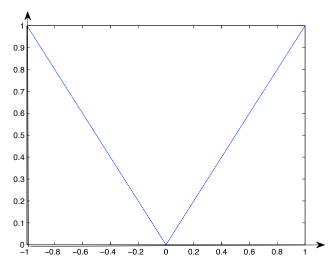

FIGURE 2. Funktionen $y \mapsto |y|$ med odefinierad derivata i punkten $y = 0$.

Exempel 3. Funktionen $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ definierad av $f(y) = \sqrt{y}$ uppfyller inte (4) i området $y \ge 0$ ty

$$\Big| \frac{\sqrt{z} - \sqrt{y}}{z - y} \Big| = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{y}} \to \infty$$

när $z, y \to 0+$.

Funktionen $f : [c, \infty] \to \mathbb{R}$ definierad av $f(y) = \sqrt{y}$, för en positiv constant c, uppfyller (4) ty

$$|\sqrt{z} - \sqrt{y}| = \frac{|z-y|}{|\sqrt{z} + \sqrt{y}|} \le \frac{|z-y|}{2\sqrt{c}}$$

för $z \ge c$ och $y \ge c$. $\square$

1.1. **Eulerapproximationer av integraler.** För att underlätta läsningen av beviset av satsen gör vi först det enklare men liknande konvergensbeviset för integraler med Eulers metod. I den vanliga konstruktionen och existensbeviset av integralen $\int_0^T g(s)\mathrm{d}s$ i envariabelanalys användes approximation med Riemannsummor, vilket är en variant av Eulers metod, och konvergensen visades när integranden g var likformigt kontinuerlig; här använder vi g som är Lipschitzkontinuerlig och får då en konvergenshastighet som är proportionell mot indelningens storlek Δt. Att bestämma integralen $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$ är med hjälp av integralkalkylens fundamentalsats detsamma som att lösa differentialekvationen $y'(t) = g(t)$ med begynnelsedata $y(0) = 0$, ty $y(T) = \int_0^T g(t)\mathrm{d}t$.

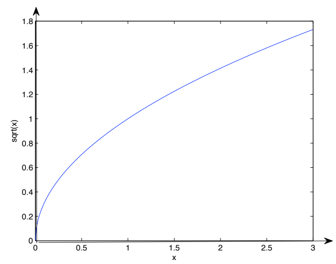

FIGURE 3. Funktionen $y \mapsto \sqrt{y}$ med oändlig derivata i punkten $y = 0$.

Eulermetodens approximation av integralen $\int_0^T g(t)\mathrm{d}t$ då skrivas som

$$\bar{I} := \sum_{n=0}^{\bar{N}-1} g(\bar{t}_n)(\bar{t}_{n+1} - \bar{t}_n) = \int_0^T \bar{g}(t)\mathrm{d}t$$

med den styckvis konstanta funktionen $\bar{g}(t) := g(\bar{t}_n)$ för $t \in [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1})$, se Figur 4. Skillnaden mellan två Eulerapproximationer blir då

$$\bar{I} - \bar{\bar{I}} = \int_0^T \underbrace{\bar{g}(t) - \bar{\bar{g}}(t)}_{=:\Delta g(t)} \mathrm{d}t.$$

Välj $t \in [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}) \cap [\bar{\bar{t}}_m, \bar{\bar{t}}_{m+1})$ och dela upp integranden i två delar genom att addera och subtrahera $g(t)$

$$\begin{aligned} \Delta g(t) &= g(\bar{t}_n) - g(\bar{\bar{t}}_m) \\ &= \underbrace{g(\bar{t}_n) - g(t)}_{=:R_1} \\ &\quad + \underbrace{g(t) - g(\bar{\bar{t}}_m)}_{=:R_3}. \end{aligned} \tag{7}$$

Lipschitzvillkoret $|g(t) - g(s)| \le C|t - s|$ ger för $t \in [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1}) \cap [\bar{\bar{t}}_m, \bar{\bar{t}}_{m+1})$

$$\begin{aligned} |R_1| &\le C|t - \bar{t}_n| \le C\Delta t \\ |R_3| &\le C|t - \bar{\bar{t}}_m| \le C\Delta t \end{aligned} \tag{8}$$

så att

$$\begin{aligned} |\bar{I} - \bar{\bar{I}}| &= |\int_0^T \bar{g}(t) - \bar{\bar{g}}(t)\mathrm{d}t| \\ &\le \int_0^T |\bar{g}(t) - \bar{\bar{g}}(t)|\mathrm{d}t \\ &\le \int_0^T |R_1| + |R_3|\mathrm{d}t \\ &\le 2CT\Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

d.v.s. skillnaden mellan två Eulerapproximationer av en integral är mindre än $2CT\Delta t$.

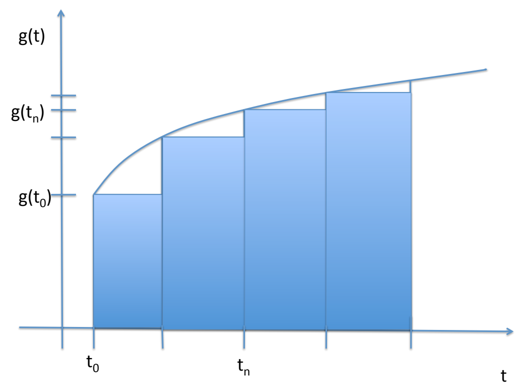

FIGURE 4. Eulerapproximation av en integral $Y(1) = \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$.

1.2. **Eulerapproximationer av differentialekvationer.** Med beteckningarna (1) i satsen kan vi skriva (9) som $|\bar{y}(T) - \bar{\bar{y}}(T)| \leq 2CT\Delta t$. I konvergensbeviset av Eulerapproximationer till differentialekvationer kommer vi se att det finns en ny term

$$|\bar{y}(s) - \bar{\bar{y}}(s)| \leq C_1 T\Delta t + C\int_0^s |\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)|\mathrm{d}t, \tag{10}$$

se (16). Den grundläggande idén för att utvidga konvergensbeviset av Eulers metod för integraler till allmänna differentialekvationer är följande lemma, som hanterar den extra termen.

Lemma 1 (Grönwalls lemma)**.** *Antag att det finns positiva konstanter A och K så att $h : [0,T] \to \mathbb{R}$ satisfierar olikheten*

$$h(t) \leq K\int_0^t h(s)\mathrm{d}s + A, \quad t \in [0,T]. \tag{11}$$

Då gäller uppskattningen

$$h(t) \leq Ae^{KT}, \quad t \in [0,T].$$

Bevis av Lemma 1. Låt $I(t) := \int_0^t h(s)\mathrm{d}s$. Då ger (11)

$$I'(t) \leq KI + A$$

och multiplikation med den integrerande faktorn e^{-Kt} visar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(I(t)e^{-Kt}\big) = I'(t)e^{-Kt} - I(t)Ke^{-Kt} \leq Ae^{-Kt}.$$

Integrera från 0 för att erhålla

$$e^{-Kt}I(t) - I(0) \leq \int_0^t Ae^{-Ks}\mathrm{d}s = \frac{A}{K}(1 - e^{-Kt})$$

och $I(0) = 0$ ger

$$I(t) \leq \frac{A}{K}(e^{Kt} - 1)$$

som insatt i (11) visar resultatet

$$h(t) \le KI(t) + A \le Ae^{Kt}.$$

□

Bevis av Satsen. För att bevisa (6) antar vi först att (5) gäller. Beviset av (6) är uppdelat i följande steg:

1. Eulerapproximationen utvidgas till alla tider,
2. använd Lipschitzantagandet (4) för skillnaden av Eulerekvationerna, som i kapitel 1.1,
3. tillämpa Grönwalls lemma.

Steg 1 gjordes (2).

Steg 2. Subtrahera de två Eulerlösningarna för att få

$$\bar{y}(s) - \bar{\bar{y}}(s) = \underbrace{\bar{y}(0) - \bar{\bar{y}}(0)}_{=0} + \int_0^s \underbrace{\bar{f}(t, \bar{y}) - \bar{\bar{f}}(t, \bar{\bar{y}})}_{=:\Delta f(t)} \,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Vi kan som i (7) och (8) dela upp integranden genom att addera och subtrahera $f(\bar{y}(t))$ och $f(\bar{\bar{y}}(t))$

$$\begin{aligned}\Delta f(t) &= f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) - f\big(\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)\big)\\ &= \quad \underbrace{f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) - f\big(\bar{y}(t)\big)}_{R_1}\\ &\quad + \underbrace{f\big(\bar{y}(t)\big) - f\big(\bar{\bar{y}}(t)\big)}_{=:R_2}\\ &\quad + \underbrace{f\big(\bar{\bar{y}}(t)\big) - f\big(\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)\big)}_{R_3}\end{aligned}$$

där $t \in [\bar{\bar{t}}_m, \bar{\bar{t}}_{m+1}) \cap [\bar{t}_n, \bar{t}_{n+1})$. Antagandet (4) medför

$$|R_1| = |f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big) - f\big(\bar{y}(t)\big)| \le C|\bar{y}(\bar{t}_n) - \bar{y}(t)| \tag{13}$$

och

$$|f(z)| \le C|z| + |f(0)| \le C(1 + |z|). \tag{14}$$

Tillsammans ger (2) och (14)

$$|\bar{y}(\bar{t}_n) - \bar{y}(t)| = (t - \bar{t}_n)|f\big(\bar{y}(\bar{t}_n)\big)| \le C\big(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|\big)(t - \bar{t}_n). \tag{15}$$

Kombinationen av (13) och (15) implicerar

$$|R_1| \le C^2\big(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|\big)(t - \bar{t}_n)$$

och på samma sätt

$$|R_3| \le C^2\big(1 + |\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)|\big)(t - \bar{\bar{t}}_m)\ .$$

Lipschitzantagandet (4) visar att

$$|R_2| \le C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)|,$$

som vi nämnde i (10). Dessa tre olikheter medför med hjälp av (5) att

$$\begin{aligned}|\Delta f(t)| &\le |R_1| + |R_2| + |R_3|\\ &\le C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| + C^2\big(1 + |\bar{y}(\bar{t}_n)|\big)(t - \bar{t}_n) + C^2\big(1 + |\bar{\bar{y}}(\bar{\bar{t}}_m)|\big)(t - \bar{\bar{t}}_m)\\ &\le C|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| + \underbrace{2C^2(1 + B_1)}_{=:C_1}\Delta t\end{aligned}$$

vilket insatt i (12) ger

$$
\begin{aligned}
|\bar y(s)-\bar{\bar y}(s)| &\le \int_0^s C|\bar y(t)-\bar{\bar y}(t)| + C_1\Delta t\,\mathrm{d}t \\
&\le C\int_0^s |\bar y(t)-\bar{\bar y}(t)|\mathrm{d}t + C_1 T\Delta t \quad \text{för} \;\; s\in[0,T].
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Steg 3. Tillämpa Grönwalls lemma på uppskattningen (16), med $K = C$ och $A = C_1T\Delta t$, för att erhålla det önskade resultatet (6)

$$|\bar y(t)-\bar{\bar y}(t)| \le C_1T\Delta t\, e^{CT} \quad t\in[0,T].$$

Det återstår att bevisa uppskattningen (5). För detta ska vi använda en diskret variant av Grönwalls lemma.

Lemma 2. *Antag att det finns positiva konstanter K och A så att*

$$y_n \le Ky_{n-1} + A \quad n = 1,2,\ldots,N$$

då gäller att

$$y_n \le \begin{cases} K^n y_0 + A\frac{K^n-1}{K-1} & K\neq 1 \\ y_0 + An & K = 1\,. \end{cases}$$

Lemma 2 bevisas i (17) nedan. Eulers metod

$$\bar y(\bar t_n) = \bar y(\bar t_{n-1}) + \Delta t f(\bar y(\bar t_{n-1}))$$

och antagandet (14) visar att

$$|\bar y(\bar t_n)| \le |\bar y(\bar t_{n-1})| + C\Delta t\big(1+|\bar y(\bar t_{n-1})|\big) = (1+C\Delta t)|\bar y(\bar t_{n-1})| + C\Delta t\,.$$

Lemma 2, med $K = 1 + C\Delta t$ och $A = C\Delta t$, ger då att

$$|\bar y(\bar t_n)| \le (1+C\Delta t)^n|\bar y(0)| + C\Delta t\frac{(1+C\Delta t)^n-1}{1+C\Delta t-1}$$

vilket tillsammans med

$$(1+C\Delta t)^n \le e^{Cn\Delta t} = e^{C\bar t_n}$$

visar (5)

$$|\bar y(\bar t_n)| \le e^{C\bar t_n}|\bar y(0)| + e^{C\bar t_n} - 1\,.$$

□

Bevis av Lemma 2. Vi har

$$
\begin{aligned}
y_n &\le Ky_{n-1} + A \\
&\le K(Ky_{n-2}+A) + A \\
&= K^2y_{n-2} + A(1+K) \\
&\le K^2(Ky_{n-3}+A) + A(1+K) \\
&\le K^3y_{n-3} + A(1+K+K^2) \\
&\le K^ny_0 + A(1+K+\ldots+K^{n-1}) \\
&= \begin{cases} K^n y_0 + A\frac{K^n-1}{K-1} & K\neq 1 \\ y_0 + An & K = 1. \end{cases}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

□

2. Existens av lösningar till ordinära differentialekvationer

Satsen visar att

$$\max_{t\in[0,T]} |\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)| \le K\Delta t \tag{18}$$

det vill säga skillnaden mellan de två Eulerapproximationerna är godtyckligt liten om Δt är tillräckligt litet. Om vi bildar en följd av Eulerapproximationer där $\Delta t \to 0+$ får vi ett gränsvärde $y(t)$ ty

$$\big|\bar{y}(t) - \bar{\bar{y}}(t)\big| \le K\Delta t \to 0+\,.$$

Detta gränsvärde $y(t)$ uppfyller ekvationen

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f\big(y(s)\big)\mathrm{d}s$$

eftersom gränsövergång i representationen (2) ger

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\Delta t\to 0+} \bar{y}(t) \\ &= \lim_{\Delta t\to 0+} \Big(\bar{y}(0) + \int_0^t f\big(\bar{y}(s)\big)\mathrm{d}s\Big) \\ &= \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0+} \bar{y}(0)}_{=y_0} + \lim_{\Delta t\to 0+} \int_0^t f\big(\bar{y}(s)\big)\mathrm{d}s \\ &= y(0) + \int_0^t f\big(y(s)\big)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

där sista likheten följer av att approximationen av integralen konvergerar

$$\begin{aligned} \big|\int_0^t f\big(\bar{y}(s)\big)\mathrm{d}s - \int_0^t f\big(y(s)\big)\mathrm{d}s\big| &\le \int_0^t \big|f\big(\bar{y}(s)\big) - f\big(y(s)\big)\big|\mathrm{d}s \\ &\le C\int_0^t \underbrace{\big|\bar{y}(s) - y(s)\big|}_{\le K\Delta t}\mathrm{d}s \\ &\le CKT\Delta t \to 0+, \qquad \text{när } \Delta t \to 0+\ . \end{aligned}$$

Vi ser alltså att Eulerapproximationen konvergerar mot en lösning till ekvationen i integralform

$$y(t) = y(0) + \int_0^t f\big(y(s)\big)\mathrm{d}s.$$

Integralkalkylens fundamentalsats visar då att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) = f\big(y(t)\big),$$

eftersom $s \mapsto f\big(y(s)\big)$ är kontinuerlig på $[0,T]$ (varför?), så gränsvärdet $y(t)$ av Eulerapproximationen när $\Delta t \to 0+$ är en lösning till differentialekvationen (3).

3. Entydighet av lösningar till ordinära differentialekvationer

Vi ser att differentialekvationen har en lösning, men är den entydig? Antag att vi har två lösningar $y_1(t)$ och $y_2(t)$. Då gäller

$$y_1(t) - y_2(t) = \underbrace{y_1(0) - y_2(0)}_{=0} + \int_0^t f\big(y_1(s)\big) - f\big(y_2(s)\big)\mathrm{d}s$$

så Lipschitzantagandet (4) ger

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq C \int_0^t \big|y_1(s) - y_2(s)\big|\mathrm{d}s$$

och Grönwalls lemma visar att

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq 0 \quad 0 \leq t \leq T,$$

det vill säga, $y_1 = y_2$, så vi har i själva verket en entydig lösning för differentialekvationer (3) när f uppfyller (4).

Vi ser också att två lösningar till samma ekvation men med olika begynnelsedata uppfyller stabilitetsvillkoret

$$|y_1(t) - y_2(t)| \leq |y_1(0) - y_2(0)|e^{Ct}, \quad t > 0,$$

där vi använt $A = |y_1(0) - y_2(0)|$ och $K = C$ i Grönwalls lemma.

Exempel 4. I detta exempel studerar vi differentialekvationen (3) med $f(y) = \sqrt{y}$, som enligt Exempel 2 inte uppfyller villkoret (4). Differentialekvationen $y'(t) = \sqrt{y(t)},\ t \geq 0$ med begynnelsedata $y(0) = 0$ har flera olika lösningar: $y(t) = 0$ för alla t är en lösning, en annan är $y(t) = t^2/4$ (som hittas med separering av variabler) och ytterliggare lösningar är

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{(t-a)^2}{4} & t > a\,, \end{cases}$$

för varje $a \in [0, \infty)$. Detta visar att söka existens och entydighet till differentialekvationer i mängden av problem som uppfyller (4) är tillfredställande stor, eftersom vi har exempel på att lösningen inte är entydig om (4) inte gäller. □

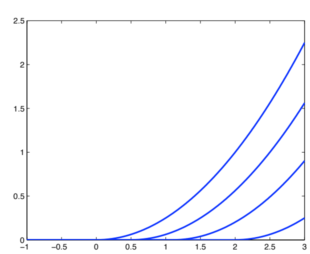

FIGURE 5. Fyra olika lösningar till $y'(t) = \sqrt{y(t)},\ t \geq 0$ med begynnelsedata $y(0) = 0$.

Exempel 5. Notera att vi kan använda beviset för system av differentialekvationer där $y : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ med $d \geq 1$. Till exempel kan vi för $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ skriva ekvationen $y'(t) = g\big(y(t), t\big)$ som ett system med variabeln $z = (y, t)$ och $f_1(z) := g(y, t)$ och $f_2(z) := 1$ så att $z'(s) = f\big(z(s)\big)$. □

4. Stabilitet för en skalär ekvation

Vi kan använda tekniken i Grönwalls lemma för att bevisa följande stabilitetssats

Sats 2. *Låt $y_1 \in \mathbb{R}$ vara en jämviktspunkt till den skalära differentialekvationen*

$$y'(t) = g\big(y((t)\big), \tag{19}$$

där funktionen g är differentierbar i en omgivning till y_1. Om $g'(y_1) < 0$ är y_1 en asymptotiskt stabil jämviktspunkt, d.v.s $y(t) \to y_1$ när $t \to \infty$ om $y(0)$ är tillräckligt nära y_1.

Bevis. Idén är att visa att $\big(y(t)-y_1\big)^2 \to 0$, när $t \to \infty$ och $y(0)$ är tillräckligt nära y_1. Ekvationen (19) och differentierbar g ger

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(y(t)-y_1\big)^2 &= 2\big(y(t)-y_1\big)y'(t)\\ &= 2\big(y(t)-y_1\big)g(y)\\ &= 2\big(y(t)-y_1\big)\big(\underbrace{g(y_1)}_{=0}+g'(y_1)(y(t)-y_1)+o(y-y_1)\big)\\ &= 2g'(y_1)\big(y(t)-y_1\big)^2+o\big((y-y_1)^2\big)\,.\end{aligned}$$

Om $|y-y_1|$ är tillräckligt litet är $o\big((y-y_1)^2\big) < -g'(y_1)(y-y_1)^2$, så

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y-y_1)^2 < g'(y_1)(y-y_1)^2\ ,$$

vilket visar att $|y(t)-y_1|^2$ minskar, eftersom $g'(y_1)<0$. För att också visa $(y(t)-y_1)^2 \to 0$ använder vi att den integrerande faktorn $e^{-g'(y_1)t}$ ger, som i Grönwalls lemma,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(e^{-g'(y_1)t}(y(t)-y_1)^2\big) < 0$$

d.v.s. funktionen $e^{-g'(y_1)t}(y(t)-y_1)^2$ är avtagande och då gäller att

$$e^{-g'(y_1)t}(y(t)-y_1)^2 < e^{-g'(y_1)0}(y(0)-y_1)^2$$

vilket visar det önskade resultatet $\big(y(t)-y_1\big)^2 < e^{g'(y_1)t}\big(y(0)-y_1\big)^2 \to 0$ när $t\to\infty$, eftersom $g'(y_1)$ är negativ.