Optimal prissättning av optioner

William Tornéus Edward Ahlzén Markai

Kungliga Tekniska Högskolan

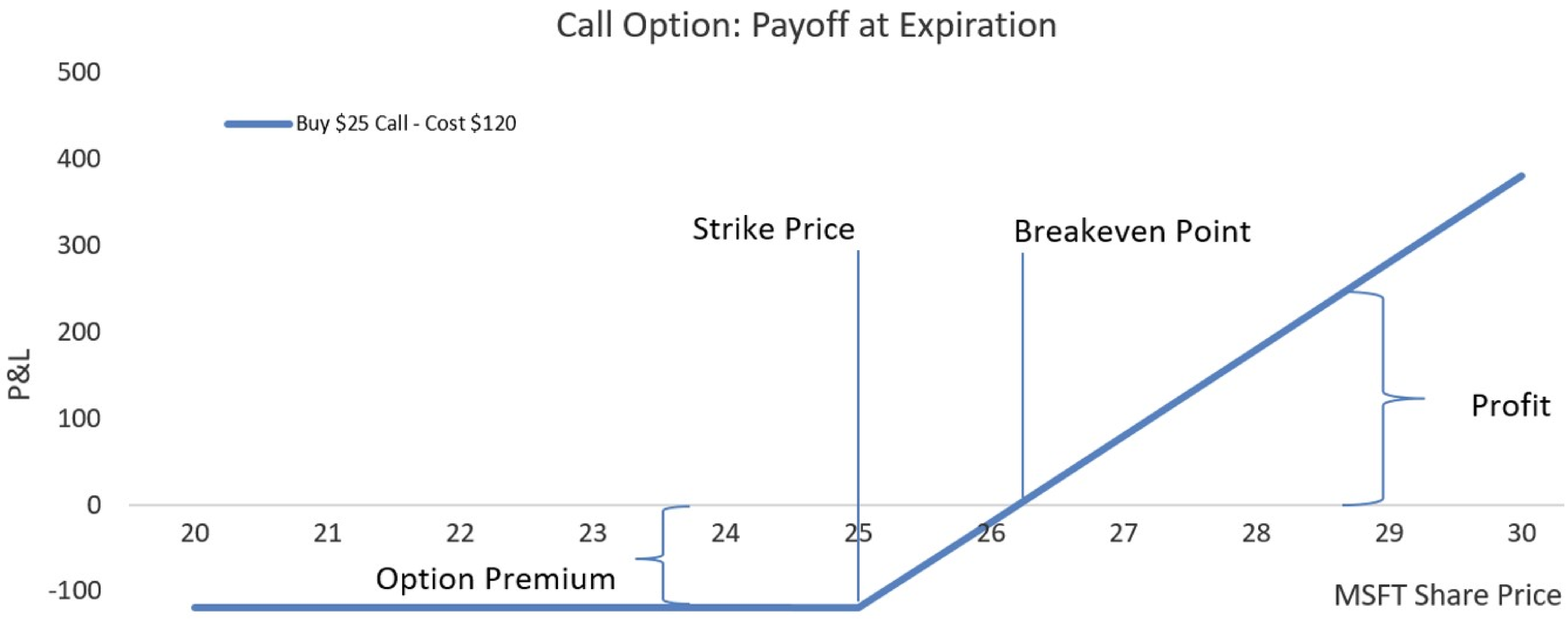
Bakgrund

Optioner är en typ av finansiella instrument som erbjuder möjligheten att köpa eller sälja andra finansiella tillgångar, såsom aktier, till ett fixt pris vid ett visst tillfälle eller under en viss period. I detta projekt har vi valt att fokusera på Call-optioner.

Att köpa en call-option innebär att man köper rätten att inom en viss tid köpa en aktie för ett förutbestämt lösenpris. Samtidigt är säljaren av optionen skyldig att sälja aktien givet att köparen exekverar optionen. Priset för optionen då den säljs kallas premie och ifall den underliggande aktiens värde överstiger både lösenpriset samt premien man betalade för optionen kan man exekvera optionen och köpa den underliggande aktien till ett fördelaktigt pris. Ifall aktiepriset istället går ned exekverar man sällan optionen utan låter den förfalla och optionsköparen förlorar endast premien som denne betalat.

Som säljare av en option (och ägare av den underliggande aktien) är det därmed ofördelaktigt om aktien stiger i värde under den period optionen kan exekveras. Man kan samtidigt tjäna den premie optionen kostar och göra en vinst så länge aktiepriset håller sig under lösenpriset plus premien innan optionens slutdatum. Denna typen av affär fungerar även som en förlustminimering ifall aktien skulle minska i värde. Om aktiepriset stiger över lösenpriset så går optionssäljaren miste om värdeökningen, men har åtminstone tjänat in premien.

Det finns två typer av optioner; Europeiska och Amerikanska. Det som skiljer dessa åt är när man som optionsköpare kan exekvera optionen, det vill säga köpa den underliggande aktien till lösenpriset. En amerikansk option kan exekveras när som helst innan den förfaller, medan en europeisk option endast kan exekveras vid en specificerad tidpunkt. Detta gör att värdet för dessa optioner skiljer sig åt. I detta projekt kommer vi fokusera på prissättningen av amerikanska optioner. Vi antar utdelningsfria aktier.



[Källa: https://www.optiontradingtips.com/options101/payoff-diagrams.html]

Syfte

En options premie bestäms likt priset på en aktie av vad köpare och säljare kommer överens om för pris i en (oftast) öppen marknad. Som vilken annan fri marknad som helst kommer en option med för högt satt pris kunna utnyttjas av den som säljer optionen genom att denne även på sidan av köper en viss mängd av den underliggande aktien. Då kan optionssäljaren hitta ett så kallat arbitrage, en möjlighet att tjäna pengar helt utan risk.

Priset av en option är dock självklart beroende av hur stor sannolikheten är att man kommer tjäna pengar på köpet (dvs, vara "in the money"). Vi kan därmed komma fram till ett teoretiskt korrekt pris på en option var runt marknadspriset för optionen borde röra sig kring.

För att lösa denna problematik har man tagit fram olika matematiska modeller för att prissätta optioner. Två av de vanligaste modellerna är Black Scholes Formel och Binomial Option Pricing Model.

Black Scholes PDE

Prisutvecklingen på en Europeisk option kan beskrivas med Black Scholes-ekvationen:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

med lösningen (för en Call-option med underliggande aktie utan utdelningar):

$$C = SN(x) - Kr^{-t}N(x - \sigma\sqrt{t}),$$

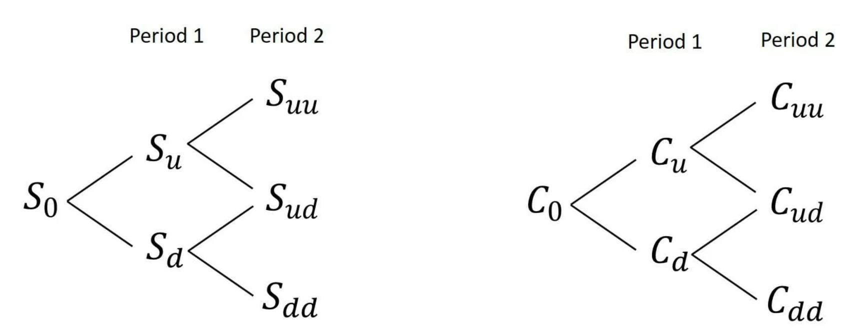
där

$$x = \frac{\log \frac{S}{Kr^{-t}}}{\sigma\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t},$$

och C är värdet på optionen, S är nuvarande priset på den underliggande aktien, N är standardiserade normalfördelningen, t tiden till optionens förfallodatum (i år i vårt fall), σ volatiliteten av den underliggande aktien, K lösenpriset, och r den riskfria räntan vi antar att vi kan låna pengar för och få avkastning på.

Binomial Option Pricing Model

Denna modell (BOPM) bygger man diskretiserar tiden fram till förfallodatumet i n intervall. Sedan gör man antagandet att för varje period/intervall så kan priset på den underliggande aktien antingen gå upp eller ned, vilket representeras av faktorerna u (up) respektive d (down). Detta bygger ett binärt träd med noder som går genom tiden. Man baserar i praktiken ofta u och d på aktiens historiska volatilitet och modellen bygger på antagandet att denna volatilitet kommer förbli densamma.



Valen av u och d tillsammans med den riskfria räntan r och villkoret att $d < r < u$ inducerar då en så kallad riskneutral sannolikhet för att aktien kommer gå upp. Vi kallar denna sannolikhet p och den blir definierad enligt

$$p = \frac{r-d}{u-d} \text{ och } 1 - p = \frac{u-r}{u-d}$$

Vid förfallodatumet T är en option alltid värd $max\{0, S_T - K\}$, där S_T är aktiens värde och K är lösenpriset. I BOPM bygger man ett träd av möjliga framtidsscenarion för olika nivåer på aktiepriset. Man börjar med att titta på de möjliga värdena vid optionens förfallodatum, i nod nummer n, där optionens värde alltså är $max\{0, S_T - K\}$. Sedan tar man ett steg bakåt i trädet och sätter värdet i den noden till det större av antingen väntevärdet för optionen i framtiden och vinsten man kan få genom att exekvera optionen.

I fallet med utdelningsfria aktier blir största värdet alltid det nämnda väntevärdet, vilket därmed motsvarar att vänta med att exekvera optionen till förfallodatumet, likt en europeisk option. I perioden(noden) innan förfallodatumet blir alltså värdet

$$C = [pC_u + (1-p)C_d] \cdot \frac{1}{r}$$

där man delar med faktorn r för att ta hänsyn till den riskfria avkastningen som till exempel statsobligationer skulle innebära. Poängen är att det såklart endast är värdefullt att ta risker ifall det innebär chans för större avkastning är riskfria alternativ, och detta spelar in i värdet på optionen.

Man jobbar sig sedan bakåt genom trädet tills man kommer till roten, vilket representerar tiden just nu, då optionen ska säljas och man ska bestämma vad den bör kosta. Vi får då en formel för priset enligt

$$C = \left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)p^j(1-p)^{n-j}max\{0, u^j d^{n-j}S - K\}\right]/r^n$$

Genom att inse att alla slutnoder med aktievärde lägre än lösenpris ger ett optionsvärde av 0 kan vi hitta det minimala antalet uppåtrörelser a i aktien för att vilket gör att vi istället kan summera från a till n och ta bort max-funktionen. Därefter kan vi skriva isär summan för båda termer i $u^j d^{n-j}S - K$ och få fram att

$$C = S \cdot B(a; n, p') - Kr^{-n} \cdot B(a; n, p)$$

där $p' = \frac{u}{r}p$ och $1 - p' = \frac{d}{r}(1-p)$ och B står för sannolikhetsfunktionen för en binomialfördelad variabel med parametrar n och p. Fördelen med BOPM är att man i fallet av aktier med direktavkastning kan ta hänsyn till att det kan vara optimalt att exekvera optionen tidigt, och därmed modellerar detta amerikanska optioner bättre. I vårt fall då vi betraktar aktier utan direktavkastning är det aldrig optimalt att exekvera tidigt, vilket gör att prissättningen i detta fall fungerar som för en europeisk option. Där får vi kopplingen till Black Scholes formel som kan ses i likheten mellan den och BOPM-formeln.

Binomial Option Pricing Model då $n \to \infty$

Vi vill nu väva samman BOPM med Black-Scholes modellen genom att välja parametrarna för Binomialträdmodellen så att vi konvergerar mot en korrekt prissättning av optionen då $n \to \infty$. Först måste vi undersöka vad som händer med parametrarna. Vi har tidigare räknat med räntan r (årsräntan), och anpassar vi den till perioden mellan ett handelstillfälle får vi $\tilde{r} = r^{t/n}$, där n är antalet tillfällen handel sker (priset rör sig) och t är tiden till expiration i enheter i vilken r anges (år). När vi kortar ner perioderna mellan vilka handel sker måste vi också justera u och d därefter. Ett antal upp- och nedrörelser av priset kommer tillslut landa i det sista priset S^* vid sista exekveringstiden för optionen. Till exempel $S* = uudud S$, $\frac{S*}{S} = u^3 d^2$, för 5 perioder och 3 uppåtrörelser. I det generella fallet med n perioder och j uppåtrörelser får vi efter lite algebra:

$$\mathrm{E}[\log \tfrac{S*}{S}] = \log \tfrac{u}{d}\mathrm{E}(j) + n \log d \quad \mathrm{Var}[\log \tfrac{S*}{S}] = [\log \tfrac{u}{d}]^2 \mathrm{Var} j$$

Om varje uppåtrörelse har sannolikheten q så blir alltså $\mathrm{E}(j) = qn$ och vi får att

$$\mathrm{E}[\log \tfrac{S*}{S}] = [q \log \tfrac{u}{d} + \log d]n = \tilde{\mu}n \quad \mathrm{Var}[\log \tfrac{S*}{S}] = q(1-1)[\log \tfrac{u}{d}]^2 = \tilde{\sigma}^2 n$$

där q är sannolikheten att priset under en period ökar man u. Detta väntevärde och varians uppfylls när man låter $n \to \infty$. Ytterligare lite algebra ger oss

$$u = e^{\sigma\sqrt{t/n}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}, \quad q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(\tfrac{\mu}{\sigma})\sqrt{\tfrac{t}{n}}, \quad \text{och} \quad \tilde{\mu}n = \mu t, \quad \tilde{\sigma}^2 n = [\sigma^2 - \mu^2(\tfrac{t}{n})]t$$

När $n \to \infty$ går $\tilde{\sigma}^2 \to \sigma^2 t$. Som tidigare nämnt blir kumulativa rörelsen i priset över en period av längd t (t.ex. år) summan av n olika oberoende slumpmässiga variabler, varav varje kan ta värdet $\log u$ resp $\log d$ med sannolikhet q resp $1 - q$. Med Central gränsvärdessatsen kan vi analyser vad som händer då $n \to \infty$. Vi vet att

$$P\left(\frac{\log S*/S - \tilde{\mu}n}{\tilde{\sigma}\sqrt{n}} \le z\right) \to N(z)$$

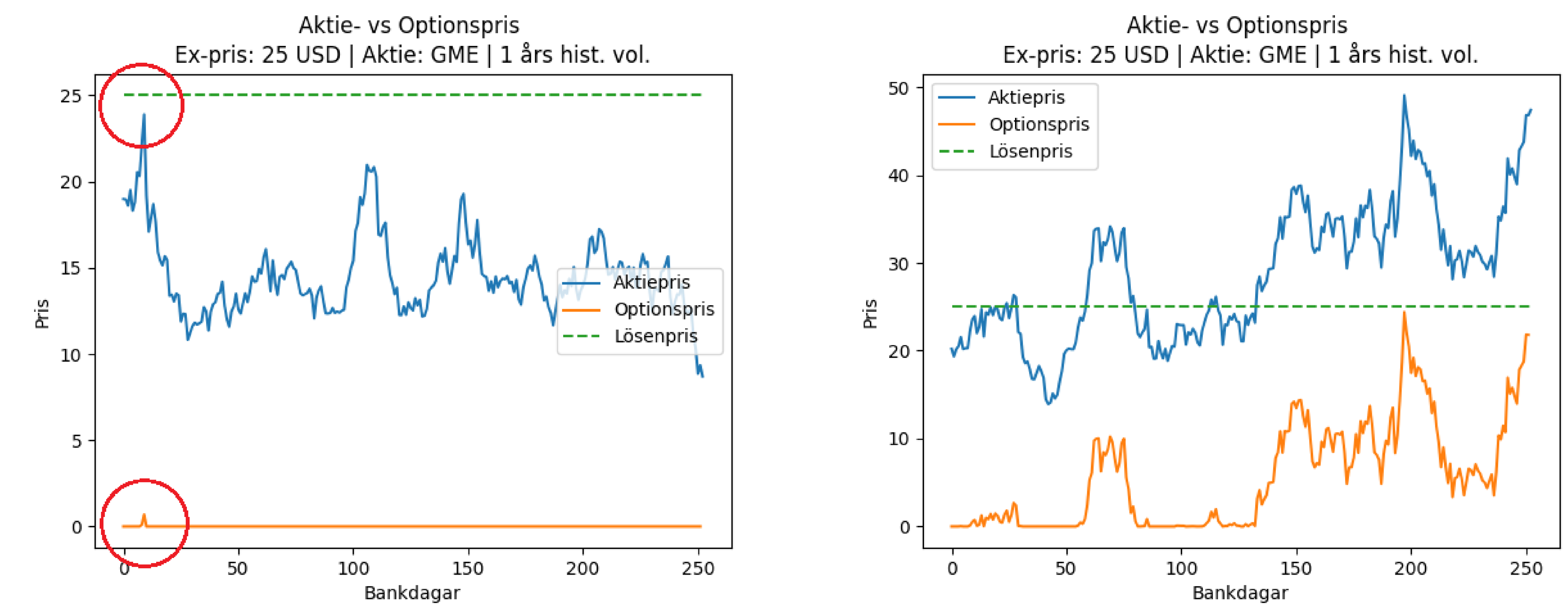
.

VI har nu att då antalet perioder n man delar in perioden till expiration i går mot oändligheten, kommer sannolikheten att standardiserat kontinuerlig kumulativ avkastning av aktien i expirationsdatumet överstiger z är normalfördelad. Detta är utgör kopplingen till Black-Scholes.

Resultat, diskussion och slutsats

Nedan grafer visar ett slumpmässigt simulerat aktiepris för för aktien GameStop (NYSE: GME) baserat påaktien historiska volatilitet mellan 2022/04/19 och 2023/04/19. Med detta aktiepris har det dagliga optionspriset beräknats under ett år (ca 250 bankdagar). Heteroskedasticitet i historisk data har inte tagits hänsyn till men detta bör inte påverka grafernas demonstrativa syfte.

I den vänstra nedre grafen kan man tydligt se att en del av värdet för en amerikansk option motsvarar sannolikheten att aktiepriset vid någon tidpunkt kommer befinna sig "in the money", då aktiepriset vid detta tillfälle är under lösenpriset (och därmed skulle innebära en direkt förlust om man exekverade optionen) men trots detta har optionen ett värde som inte avrundas till noll. I övrigt följer optionspriset nära aktieprisets rörelser genom skillnaden mellan aktiepris och lösenpris.



Vi kan avslutningsvis dra slutsatsen att problematioken kring värdering och prissättning av optioner kan lösas med matematiska modeller som till exempel Black Scholes PDE. Detta är viktigt av många anledningar, bl.a. för att facilitera en korrekt fungerande marknad. För denna prissättning spelar alltså partiella differentialekvationer spelar en central roll. Genom att approximera lösningar till dessa genom metoder som BOPM bygger på kan vi hitta fall som motiveras mer av den praktiska appliceringen av finansiella instrument än konventionella numeriska metoder för att lösa partiella differentialekvationer.