Prissättning av amerikanska optioner med hjälp av trädmodeller

Fabian Rudengren [1] Frederik Spang [2]

[1]Kungliga Tekniska Högskolan

Bakgrund

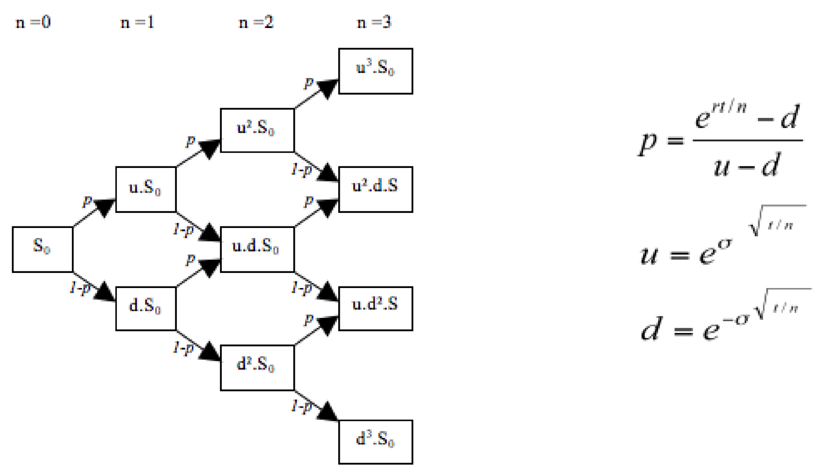

Figure 1. BOPM övergripande illustration

Binomial options pricing model (BOPM) är en matematisk modell som används för att beräkna priset på optioner, vilka är finansiella instrument som ger ägaren rätten att köpa eller sälja ett underliggande värdepapper till ett förutbestämt pris inom en viss tidsperiod. BOPM är en av de mest populära modellerna för att prissätta optioner och används både av professionella handlare och studenter inom finansiell ekonomi. Det är en numerisk metod till skillnad från Black-Scholes som är en analytisk metod. I detta projekt är målet att visa kopplingen mellan BOPM och Black-Scholes samt räkna på ett konkret exempel på en tillgång där vi använder BOPM.

Generell metod

Modellen baseras på en binomialträdstruktur, där varje steg representerar ett möjligt utfall av en akties prisrörelse. BOPM används för att uppskatta det teoretiska värdet på en option genom att simulera möjliga prisrörelser (där slutpriserna blir log-normalfördelade) och beräkna den förväntade avkastningen. Man kan dela upp den i 6 olika steg:

1. Uppdelning av tid: Tiden fram till optionens förfall delas upp i ett antal diskreta tidsintervall. Vid varje tidpunkt kan aktiens pris antingen stiga eller sjunka.
2. Beräkning av upp och ner faktorer: För varje tidsintervall beräknas två faktorer, en upp faktor (u) och en ner faktor (d), som representerar hur mycket aktiens pris kan stiga respektive sjunka. Dessa faktorer kan baseras på historisk volatilitet eller andra modeller för prisrörelse.
3. Skapa binomialträdet: Ett binomialträd byggs upp för att representera alla möjliga prisrörelser under optionens livslängd. Varje nod i trädet representerar ett möjligt aktiepris vid en given tidpunkt, och varje väg genom trädet representerar en möjlig prisutveckling.
4. Beräkning av optionsvärden vid förfall: Vid förfall beräknas värdet på optionen vid varje möjlig aktiepris i trädet. För en call-option är värdet max(S-K, 0), där S är aktiepriset och K är lösenpriset. För en put-option är värdet max(K-S, 0).
5. Diskontering av optionsvärden bakåt i trädet: Börja vid förfall och gå bakåt i trädet. Vid varje nod beräknas det förväntade värdet av optionen genom att ta en viktad genomsnitt av de två möjliga utfallen (up- och down-värdet) vid nästa tidpunkt. Vikterna bestäms av den riskneutrala sannolikheten, som beräknas utifrån up- och down-faktorer, riskfria räntan och tidsintervallet mellan noderna. Det förväntade värdet diskonteras med den riskfria räntan för att få optionsvärdet vid den aktuella noden.
6. Beräkning av det initiala optionsvärdet: Efter att ha diskonterat optionsvärdena bakåt genom trädet, beräknas det initiala värdet på optionen vid trädet rot. Detta värde representerar det teoretiska priset på optionen enligt BOPM.

Exempel

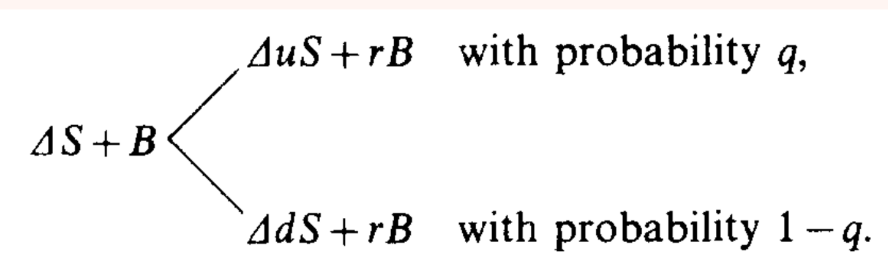

Figure 2. BOPM övergripande illustration

Figuren över är ett enkelt exempel där vi vill skapa en hedgingportfölj till en viss option. Vi köper Δ aktier till priset S, och beloppet B i riskfria obligationer. Vid slutet av perioden blir värdet av portföljen då $C_u = \Delta uS + rB$ eller $C_d = \Delta dS + rB$ där r är den riskfria avkastningen av obligationen. Vi vill ha att vår portfölj ska ha samma värde vid båda utfallen för att eliminera risken, så efter lite algebra får vi att:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{(u - d)S},$$

$$B = \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r}.$$

Hur relaterar BOPM till Black-Scholes?

BOPM och Black-Scholes-modellen använder olika tillvägagångssätt. Black-Scholes syftar också till att uppskatta det teoretiska värdet på en option, men bygger på olika matematiska metoder och antaganden. Här är sätten som BOPM och Black-Scholes-modellen relaterar till varandra:

Båda modellerna antar att aktiepriset följer en stokastisk process, men medan BOPM är en diskret modell som använder ett binomialträd för att simulera prisrörelser, är Black-Scholes en kontinuerlig modell som bygger på en partiell differentialekvation. BOPM kan betraktas som en förenklad, diskret version av Black-Scholes-modellen, och kan i vissa fall vara ett speciellt fall av finita differensmetoden för Black-Scholes. Om antalet steg i BOPM:s binomialträd ökar och tidsintervallet mellan stegen minskar, närmar sig BOPM-värderingen Black-Scholes-värderingen. I gränsen, när antalet steg blir oändligt stort, konvergerar BOPM mot Black-Scholes-modellen. Båda modellerna använder riskneutral värdering för att beräkna optionens teoretiska pris. Det innebär att de tar hänsyn till den riskfria räntan och ignorerar investerarens individuella riskpreferenser. Black-Scholes-modellen används för att prissätta europeiska optioner, det vill säga optioner som endast kan utövas vid förfall. BOPM är mer flexibel och kan användas för att prissätta både amerikanska och europeiska optioner, eftersom den kan hantera optioner som kan utövas före förfall. Detta gör BOPM mer generaliserbar. Båda modellerna har begränsningar och baseras på vissa antaganden, såsom att aktiens volatilitet och den riskfria räntan är konstanta över tid. I praktiken kan dessa antaganden vara förenklade, och det kan finnas situationer där varken BOPM eller Black-Scholes-modellen ger helt korrekta värderingar. Sammanfattningsvis är BOPM och Black-Scholes-modellen två metoder för att prissätta optioner som relaterar till varandra på flera sätt. BOPM kan ses som en diskret version av Black-Scholes-modellen, och de delar vissa grundläggande principer, såsom riskneutral värdering. Men de skiljer sig också åt i sina matematiska metoder och användningsområden.

Vårt numeriska problem

Eftersom binomialmodellen ger en explicit prissättning av en option med indata som är lätt att få tag på, tänkte vi att det skulle vara roligt att försöka beräkna värden på några riktiga optioner för aktien *Ericsson B*. Vi valde denna för att det finns mycket data att hämta och för att det på banken *Avanza* handlas en del amerikanska optioner med denna som underliggande aktie. *Avanza* visar även en teoretisk köpkurs för optioner som vi sedan kan jämföra våra resultat med. Det måste dock påpekas att det är oklart exakt hur *Avanza* beräknar denna teoretiska köpkurs för optioner och vi kan alltså inte resonera om vilken prissättning som är rimligast. Nedan följer de tre olika optionerna som vi betraktade och deras nyckelvärden:

1. Ericsson B 22 dagar fram, $S = 54.85,\ K = 50.00,\ r = 3.33\%,\ q = 0\%,\ \sigma = 29.59\%$ (IV). Teoretisk köpkurs enligt *Avanza*: 4.794.
2. Ericsson B 72 dagar fram, $S = 54.85,\ K = 50.00,\ r = 3.33\%,\ q = 0\%,\ \sigma = 30.39\%$ (HV). Teoretisk köpkurs enligt *Avanza*: 5.966
3. Ericsson B 128 dagar fram, $S = 54.85,\ K = 50.00,\ r = 3.33\%,\ q = 0\%,\ \sigma = 30.19\%$ (HV). Teoretisk köpkurs enligt *Avanza*: 7.054

Resultat

För att beräkna resultaten använde vi oss av historisk volatilitet av aktien och satte längden av varje tidssteg till en halv dag. För våra tre optioner fick vi följande prissättningar:

1. Ericsson B 22 dagar fram, Pris med BOPM: 5.123, Skillnad från teoretisk värde: 0.329
2. Ericsson B 72 dagar fram, Pris med BOPM: 6.124, Skillnad från teoretisk värde: 0.158
3. Ericsson B 128 dagar fram, Pris med BOPM: 7.040, Skillnad från teoretisk värde: 0.014

Slutsats

Även om BOPM oftast inte ger exakta lösningen, så kan den vara mer praktisk att använda än Black-Scholes formel. Den är mer generaliserbar och kan användas för att beräkna prissättningar av både europeiska och amerikanska optioner, samt konvergerar mot Black-Scholes när vi låter antalet tidssteg gå mot oändligheten. De bakomliggande antaganden till modellen är relativt enkla att förstå och vi kan se på våra resultat att modellen ger en bra prissättning av optioner. Vår modell ger dessutom både en explicit formel och en iterativ metod för att beräkna optionsvärdet vilket möjliggör att man kan beräkna optionsvärdet vid en viss tidspunkt under en period och veta hur man ska hedga sin position. Är prissättningen fel innan exekveringsdatumet för en option ger BOPM alltså verktygen för att kunna utnyttja detta utan att införa risk i vår portfölj.

Hur Black-Scholes ekvation kan härledas från BOPM

En viktig sak som visas av Cox, Ross Rubinstein är att man med BOPM får Black-Scholes formel som gränsfall. Detta är en konsekvens av antagandet att priset går antingen upp eller ned i varje tidssteg, vilket innebär att aktiepriset konvergerar mot en lognormal-fördelning när vi låter varje tidsstegs längd bli mindre och mindre. Detta är något som antas under härledningen av Black-Scholes formel och vi kan med hjälp av detta härleda Black-Scholes ekvation från BOPM. Nedan är en omskrivning av vår formel för prissätningen av en option i ett tidssteg från exemplet:

$$\left(\frac{\hat{r} - d}{u - d}\right) C_u + \left(\frac{u - \hat{r}}{u - d}\right) C_d - \hat{r}C = 0 \tag{1}$$

Omskrivningen går till på följande sätt:

$$C = \Delta S + B = \frac{C_u - C_d}{u - d} + \frac{uC_d - dC_u}{(u - d)r} = \frac{\left[\frac{r-d}{u-d}C_u + \frac{u-r}{u-d}C_d\right]}{r}.$$

där Δoch B är samma som i exemplet.

För att jämföra har vi här Black-Scholes ekvation:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (\log r) S \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial C}{\partial t} - (\log r) C = 0 \tag{2}$$

Att gå från (1) till (2) bygger på att det underliggande aktiepriset följer en lognormal-fördelning där volatiliteten σoch tidsstegslängden h ingår som parametrar. Med detta får man att

$$u = 1/d = e^{\sigma\sqrt{h}}$$

$$\hat{r} = r^h$$

$$h = t/n$$

där n är antalet tidssteg.

För att härleda (2) börjar vi med insättning av ovanstående, Taylorutveckling av C_u, C_d kring $(Se^{\sigma\sqrt{h}},\ t - h)$ respektive $(Se^{-\sigma\sqrt{h}},\ t - h)$ och sedan Taylorutveckling av $e^{\sigma\sqrt{h}}$, $e^{-\sigma\sqrt{h}}$, r^h. Vi sätter in detta i (1), dividerar med h och låter h gå mot 0 och får då slutligen (2).

References

[1] John C. Cox & Stephen A. Ross & Mark Rubinstein.
Option pricing: A simplified approach.
Journal of Financial Economics, (7):229–263, 1979.

[2] Fischer Black & Myron Scholes.
The pricing of options and corporate liabilities.
Journal of Political Economy, 81(3):637–654, 1973.