Undersöker matematiken bakom Black Scholes formel

Saga Tran **Anh Do**

Kungliga Tekniska Högskolan, SF1693 - Analytiska och numeriska metoder för partiella differentialekvationer och transformer sagatran@kth.se anhd@kth.se

Black Scholes - teori och användning

Black-Scholes-modellen är en matematisk formel som används för att bestämma det rättvisa priset (fair price) eller det teoretiska värdet för en europeisk köp- eller säljoption, under antagandet att det underliggande tillgångspriset följer en geometrisk Brownian-rörelse. Formeln möjliggör för handlare och investerare att fatta informerade beslut om att köpa eller sälja optioner, och till vilket pris. En potentiell begränsning är att den antar en konstant volatilitetsgrad, vilket kanske inte alltid återspeglar verkligheten. Dessutom är modellen baserad på flera antaganden, exempelvis att inga transaktionskostnader existerar, vilket kanske inte stämmer i praktiken. Huvudprincipen bakom modellen är att hedge:a optionen genom att köpa och sälja den underliggande tillgången på ett specifikt sätt för att eliminera risk. Denna typ av hedging kallas "kontinuerligt reviderad delta-säkring" (continuously revised delta hedging) och är grunden för mer komplicerade hedgingstrategier som används av investeringsbanker och hedgefonder.

Black Scholes formel

Från den paraboliska partiella differentialekvationen i modellen, känd som **Black-Scholes ekvation:**

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

kan **Black-Scholes formel** härledas:

$$C_0 = S_0 N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2), d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}, d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{X}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},$$

där N är en standard normal kumulativ fördelningsfunktion och

- S_0 = aktiepris
- X = lösenpris
- r = riskfri ränta (använt i beräkningar: styrränta)
- T = tid i år till optionens utfärdandedatum
- σ = volatilitet

Genom att omformulera Black Scholes ekvation, kan den diskritiseras och sedan lösas med hjälp av **finita differensmetoden** och **Crank-Nicolson**. Nedan visas de analytiska stegen.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_s^{t+1} - V_s^t}{\Delta t} \quad \frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{s+1}^t - V_{s-1}^t}{2\Delta s} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{s-1}^t - 2V_s^t + V_{s+1}^t}{\Delta s^2}$$

$$\Rightarrow \frac{V_s^{t+1} - V_s^t}{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{V_{s-1}^t - 2V_s^t + V_{s+1}^t}{\Delta s^2} + rS\frac{V_{s+1}^t - V_{s-1}^t}{2\Delta s} - rV_s^t = 0$$

$$\Rightarrow V_s^{t+1} = (-\sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{2\Delta s^2} + rS\frac{\Delta t}{2\Delta s})V_{s-1}^t + (1 + \sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{\Delta s^2} + r\Delta t)V_s^t + (-\sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{2\Delta s^2} - rS\frac{\Delta t}{2\Delta s})V_{s-1}^t$$

$$\alpha = -\sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{2\Delta s^2} + rS\frac{\Delta t}{2\Delta s} \quad \beta = \sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{\Delta s^2} + r\Delta t \quad \gamma = -\sigma^2 S^2 \frac{\Delta t}{2\Delta s^2} - rS\frac{\Delta t}{2\Delta s}$$

$$V_s^{t+1} = \alpha V_{s-1}^t + (1+\beta)V_s^t + \gamma V_{s+1}^t$$

$$\Rightarrow \quad \textbf{Crank-Nicolson:} \quad -\frac{\alpha}{2}V_{s-1}^{t+1} + (1 - \frac{\beta}{2})V_s^{t+1} - \frac{\gamma}{2}V_{s+1}^{t+1} = \frac{\alpha}{2}V_{s-1}^t + (1 + \frac{\beta}{2})V_s^t + \frac{\gamma}{2}V_{s+1}^t$$

Genom att lösa ovanstående numeriskt kan vi erhålla information om hur optionens värde utvecklas i tid, samt i förhållande mot aktiekursen.

Arbetsprocess

Genom att utnyttja initialvärden och randvärden och lösa ovanstående matrisekvationer kan de diskritiserade värdena erhållas. Processen bör sedan upprepas för alla värden av t genom att stega bakåt från tidpunkten T till 0. Med samtliga diskretiserade punktvärden användes linjär interpolation mellan punkterna för att skapa en approximerad, kontinuerlig avbildning av Black-Scholes-ekvationen. Slutligen evaluerades denna interpolation över det givna aktiepriset för att få optionspriset som kunde utvärderas mot tiden. Notera att, för att få fram den implicita volatiliteten användes optionspriset, samt aktiepriset vid tidpunkt 0 som referens. Iterativa metoder som sekant metoden användes sedan för att få den implicita volatiliteten σ

Optionspriset som funktion av tid och aktiepris

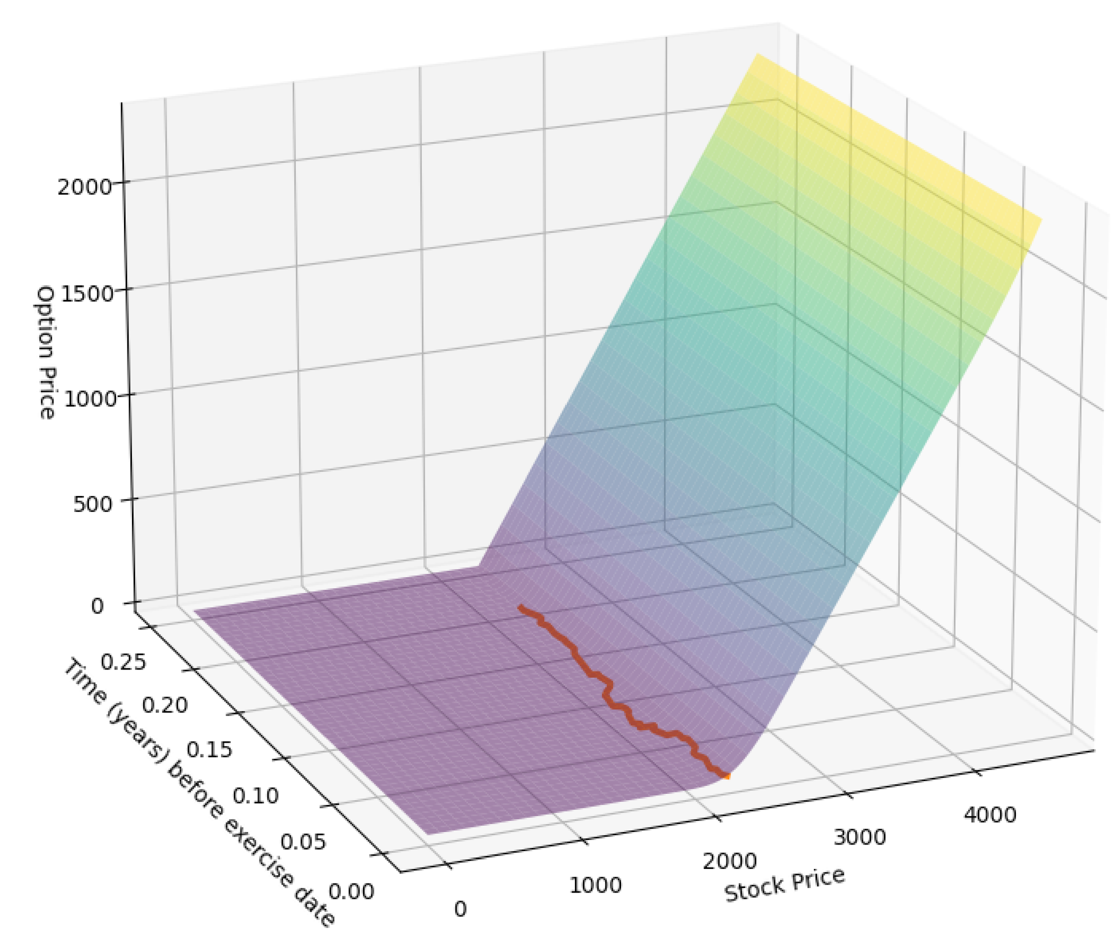

Figure 1:Optionspris som funktion av tid och aktiepris

Terminologi

Nedan presenteras ett par viktiga termer inom finans som kan ge en ökad förståelse för hur Black Scholes formel används:

- **En option** är ett finansiellt instrument i form av ett värdepapper som ger innehavaren rätten att, på en i framtiden bestämd tidpunkt, köpa alternativt sälja en aktie eller ett index till ett avtalat pris, ett så kallat lösenpris
- **En geometrisk brownsk rörelse** är en tidskontinuerlig stokastisk process där logaritmen av den slumpmässigt varierande kvantiteten följer en Brownsk rörelse, det vill säga en Wienerprocess.
- I numerisk analys är **Crank Nicolson metoden** en ändlig finit differens metod som används för att numeriskt lösa värmeekvationen och liknande partiella differentialekvationer. Det är en andra ordningens metod i tiden, vilket i vårt fall direkt implicerar att hela den numeriska approximationen av Black Scholes ger en andra ordningens konvergens. Detta i sin tur ökar stabiliteten i systemet.
- **OMX Stockholm 30** är ett index över de trettio mest omsatta aktierna på Stockholmsbörsen. OMXS30 mäter kursutvecklingen, med basdatum den 30 september 1986, med värde 125

Optionsvärde med hjälp av implicerad volatilitet

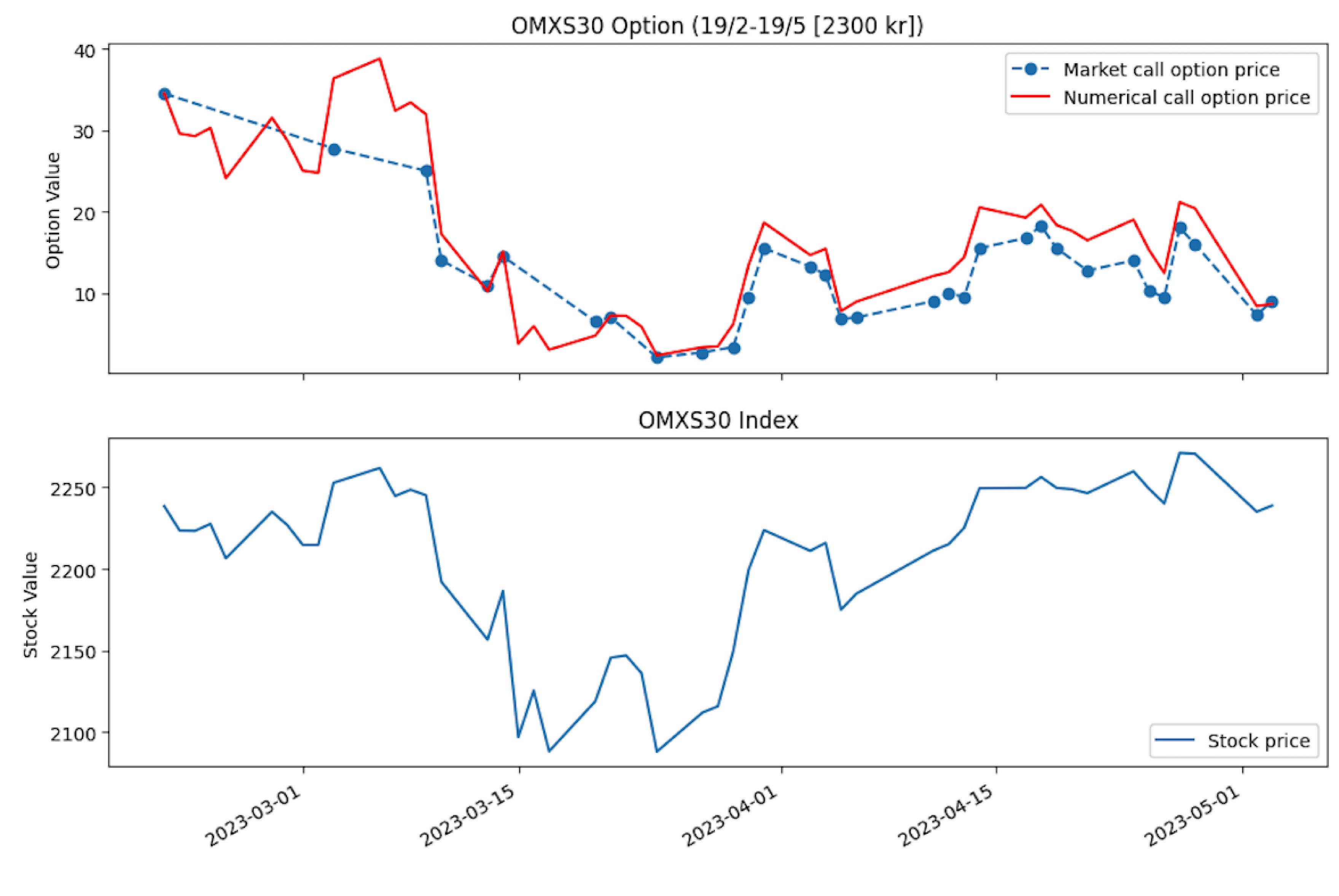

Figure 2:Optionspris och aktiepris

Resultat och slutsats

Vi valde att analysera Black Scholes ekvation utifrån verkliga data, närmare bestämt valdes OMXS30 Index som en aktieportfolio att evaluera utefter. I och med att Black Scholes antar konstant volatilitetsgrad, samt inte tar hänsyn till utdelning ansågs OMXS30 som ett bra val.

I *Figur 1* skildras priset på optionen för varje prisnivå. I och med OMXS30's stabilitet i tiden kan vi se att optionspriset inte är tillsynes rörligt. Något som skulle vara roligt att vidare undersöka är en mer volatil aktiekurs.

Figur 2 visar optionsvärdet över ett löpande tidsintervall från 19:e februari till och med 2:e maj. Den blå-streckade grafen följer marknadsvärdet av optionen och den röda grafen är numeriskt framtagen med hjälp av implicit volatilitet. Det implicita volatilitetsvärdet som erhölls var:

Implicerad volatilitet	
σ	0.148

Table 1:Implicerad volatilitet

Detta värde implicerar hur marknaden flukterar under tidsspannet. Det är även värt att nämna att riksräntan (styrräntan) under tidsspannet har varit konstant på 3%, vilket har underlättat beräkningsmässigt.

Slutligen kan avgöras att modellen ger en bra approximation av priset på en europeisk köpoption. Resultaten verkar sammanhängande med den reella datan och stöds också av empirisk forskning som har visat att Black Scholes ger en god approximation av priset på europeiska köpoptioner på finansiella tillgångar. Det är dock viktigt att notera att modellen är baserad på ett antal antaganden och förenklingar som kan begränsa dess användbarhet i vissa situationer.