Black-Scholes

Theodor Mosetti Björk & Simon Huss

Finansiell bakgrund

Black-Scholes är en prissättningsmodell för optioner. Robert Merton och Myron Scholes fick 1997 Sveriges riksbanks pris i ekonomisk vetenskap till Alfred Nobels minne för denna model.

En **option** är ett avtal mellan en optionsutställare och en optionsinnehavare som ger innehavaren rätten, men inte skyldigheten, att i framtiden köpa (**call**) eller sälja (**put**) en underliggande tillgång till ett på förhand bestämt pris för en avgift (**lösenpris**) vid ett specifikt datum (**lösendatum**) för Europeiska optioner (Amerikanska optioner kan även inlösas före lösendatumet).

Matematisk modell

Det antas att aktiepriset följer en geometrisk Brownsk rörelse: $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$, där W är en stokastisk variabel som följer vanlig Brownsk rörelse och μ är en drift-term då aktiemarknaden tenderar att stiga över tid.

$$\frac{\partial C}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

Tillgångens pris S och **tiden till inlösen** t är funktionsvariablerna för **optionspriset** $C(S,t)$ där S varierar med ovan slumpvandring.

Volatiliteten σ för det underliggande instrument är en okänd konstant parameter som behöver uppskattas från tex historisk data.

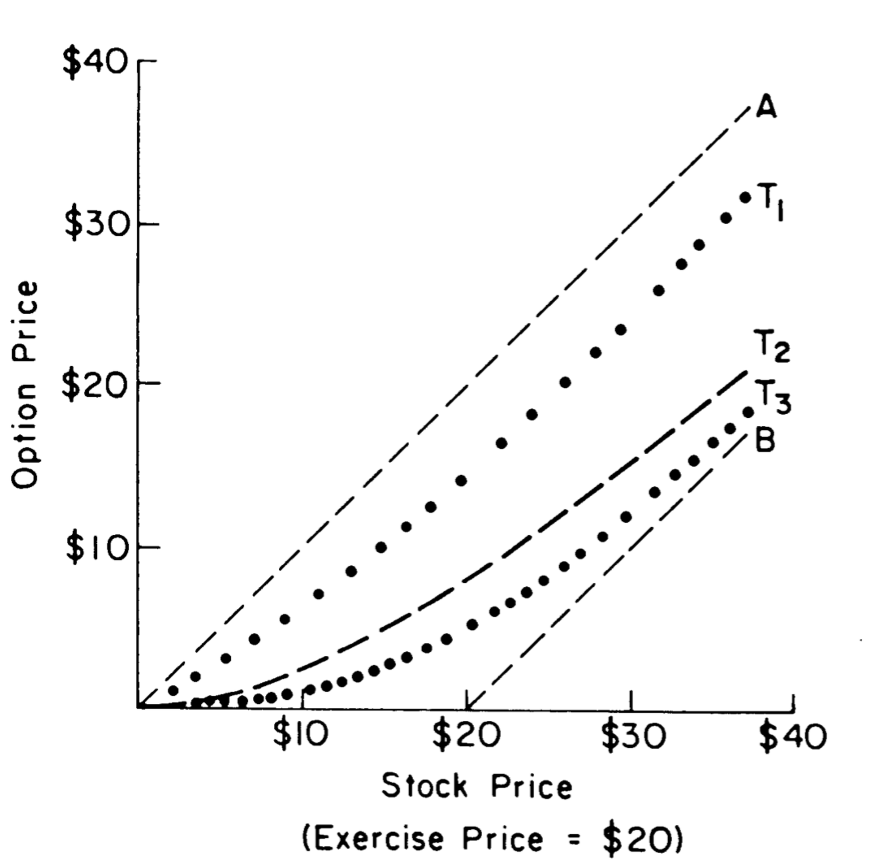
Riskfria räntan r är den avkastning man kan erhålla utan att ta någon risk under en given tidsperiod.

Värmeledningsekvationen kan erhållas från Black-Scholes ekvation genom ett variabelbyte och på så sätt kunde Black och Scholes lösa sin ekvation och få ett analytiskt uttryck för optionspriset.

Vidare antar modellen: inga transaktionskostnader, inga utdelningar på underliggande instrument, den riskfria räntan är konstant och känd.

Problemformulering

Lös Black-Scholes numeriskt med finita differensmetoder och verifiera att svaren som vår numeriska approximation ger är rimliga och därefter variera volatiliteten och studera hur lösningarna ändras när en analytisk lösning saknas.



Figur 1. Bild från ursprungliga texten av Black & Scholes [1] där optionsvärdet är utritat för olika tider.

Randvillkor

Dessa är de numeriska randvillkoren för en call option (enligt [2]):

$$C(S,T) = \max(S-K, 0) \tag{1}$$
$$C(0,t) = 0 \tag{2}$$
$$C(S_{\max}, t) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)} \tag{3}$$

(1) En option utövas endast om lösenpriset är mindre än marknadspriset S på inlösendatumet, tiden T.

(2) Om det underliggande priset på tillgången är 0 så är även optionspriset 0.

(3) Det är upp till $S_{\max}$ som vi löser ekvationen numeriskt (egentligen gäller (3) då $S \to \infty$).

Numerik

För att numeriskt lösa ekvationen så utgår man från att optionspriset är känt vid inlösendatumet, dvs randvilkor (1), och sedan stegar man bakåt i tiden för att kunna prissätta optionen innan inlösendatumet. Vi implementerade två varianter av finita differenser för en call option.

Explicit:

$$C_m^{n-1} = \frac{\Delta t}{2}\left[\sigma^2 m^2 - rm\right] C_{m-1}^n + \left[1 - \Delta t(\sigma^2 m^2 + r)\right] C_m^n + \frac{\Delta t}{2}\left[\sigma^2 m^2 + rm\right] C_{m+1}^n$$

Implicit:

$$C_m^{n+1} = \frac{\Delta t}{2}\left[rm - \sigma^2 m^2\right] C_{m-1}^n + \left[1 + \Delta t(\sigma^2 m^2 + r)\right] C_m^n - \frac{\Delta t}{2}\left[\sigma^2 m^2 + rm\right] C_{m+1}^n$$

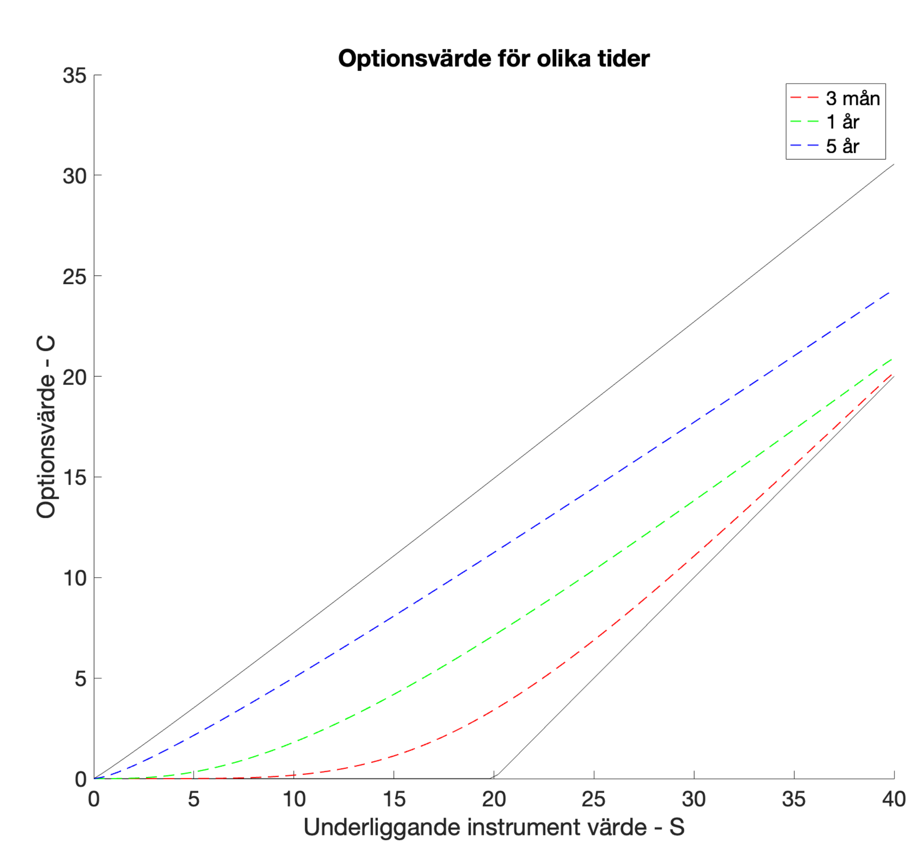
Vi kan nu införa en tidsberoende volatilitet σ^n i explicita respektive implicita metoden och simulera en tidsberoende volatilitet.

En put option, $P(S,t)$, har en nära relation till motsvarande call option och kan beräknas genom:

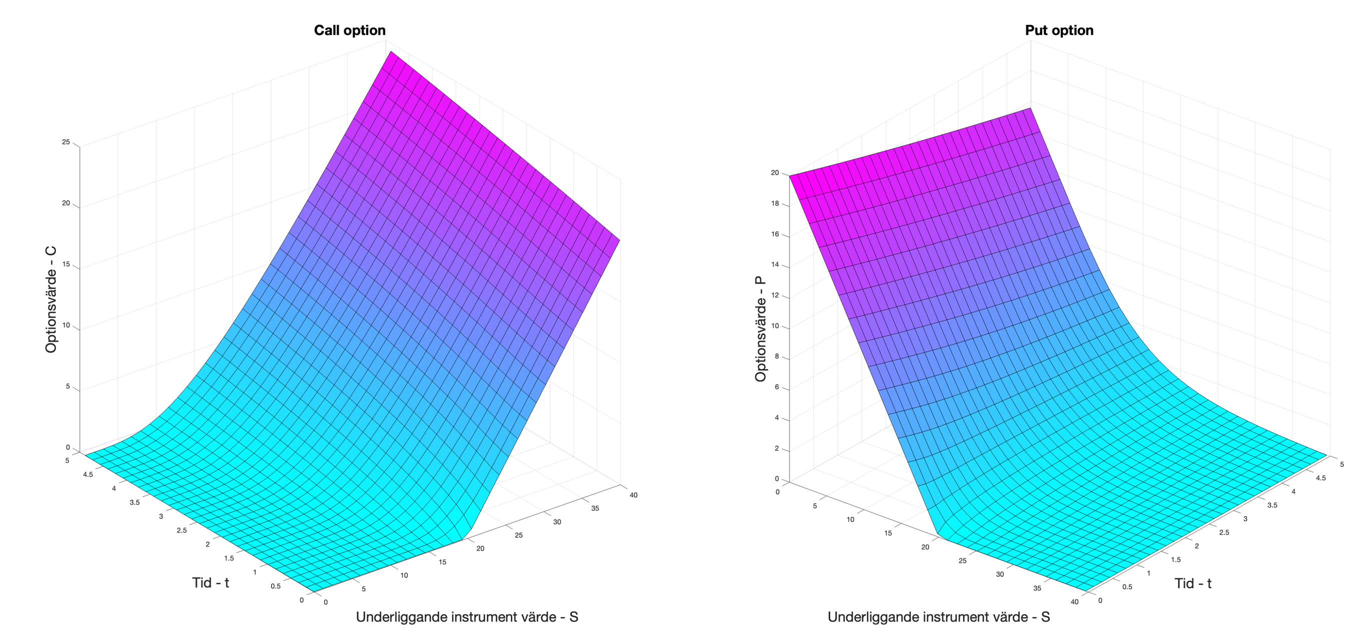
$$P_m^n = C_m^n - m\Delta x + Ke^{-rn\Delta t}$$

Bilder

Nedan följer egna bilder där första är ett försök att återskapa Black & Scholes egna graf (Figur 1) och i samtliga används den implicita metoden.

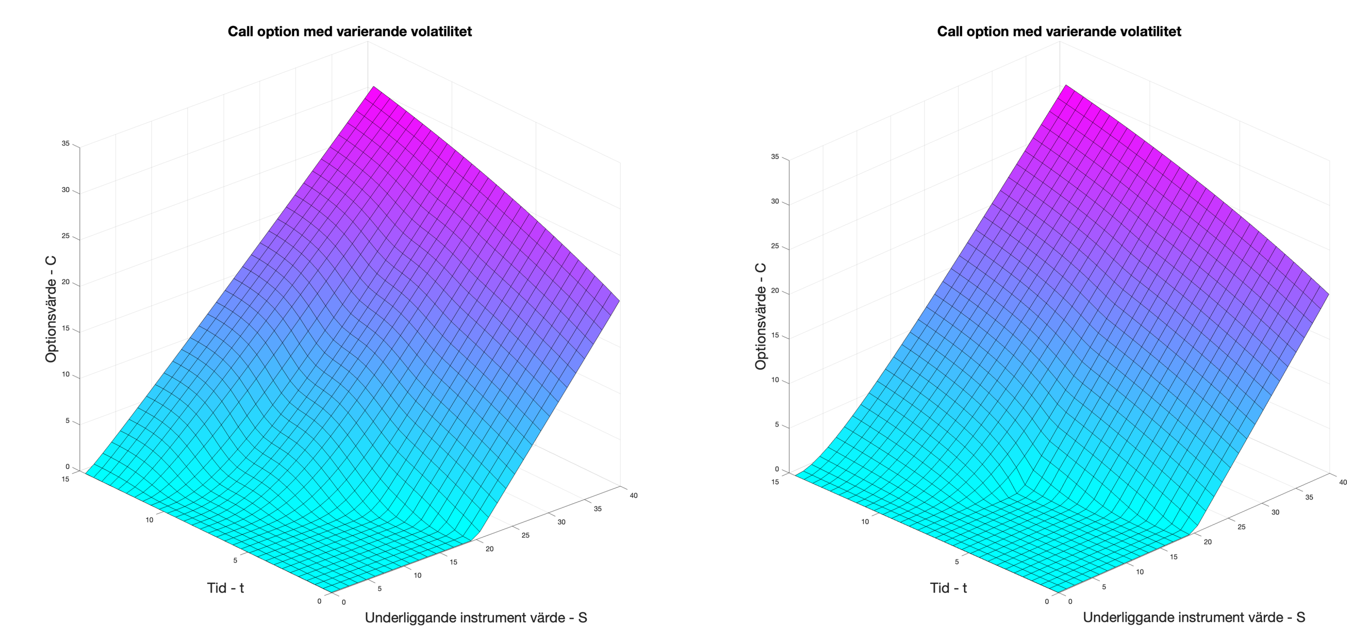


Figur 2. Graf över optionsvärdet vid olika tidpunkter med lösenpris = 20.



(a) Call option med lösenpris = 20. (b) Put option med lösenpris = 20.

Figur 3. Call och put option med konstant volatilitet.



(a) Periodisk volatilitet. (b) Styckvis konstant volatilitet.

Figur 4. Call optioner med varierande volatiliteter.

Option	Avanza (Köp)	Avanza (Sälj)	Vår modell
ERICB3Q60	4.25	4.90	4.448
ERICB3E60	0.01	0.30	0.0112
ERICB3Q55	0.50	0.80	0.479
ERICB3E55	1.05	1.40	1.037

Figur 5. Optioner i Ericsson B (E = köp, Q = sälj) med aktuella köp och sälj priser från nätmäklaren Avanza jämfört med vår modell med konstant volatilitet (priser inhämtade 8/5).

Resultat

När våra finita differensmetoder är stabila så är de väldigt nära den analytiska lösningen (detta resultat är inte med på bilderna). Den implicita metoden var stabil under alla våra tester medans den explicita metoden hade stora begränsningar kring diskretiseringsval av tid och rum för att vara stabil.

Lösningarna när vi varierar volatiliteten anser vi vara rimliga då de fortfarande ligger inom det korrekta området som visas i Figur 1 samtidigt som lösningarna avspeglar den volatilitet vi valt. Put optionerna med varierande volatilitet gav snarlika resultat som call optionerna varav endast sistnämnda inkluderats.

Referenser

[1] Fischer Black & Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilites. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

[2] Wikipedia contributors. Black–scholes equation — Wikipedia, the free encyclopedia, 2023. [Online; accessed 6-May-2023].