Wartość oczekiwana i warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej

Na podstawie:

http://smurf.mimuw.edu.pl/node/1179

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Definicja (Wartość oczekiwana)

Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie dyskretnym. Wartością oczekiwaną (ew. średnią) X nazywamy wartość sumy

$EX = \sum_{x \in \mathbb{R}} xP(X = x)$,

o ile jest ona absolutnie zbieżna.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Twierdzenie 5.7(Liniowość wartości oczekiwanej)
Niech X, Y dyskretne zmienne losowe o skończonej wartości oczekiwanej. Wtedy:

1. $E(cX) = cEX$,
2. $E(X+Y) = EX + EY$.

Twierdzenie 5.10
Jeśli X, Y niezależne zmienne dyskretne o skończonych wartościach oczekiwanych, to $E(XY) = EXEY$.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej

Zadanie

Policz wartość oczekiwaną liczby oczek wyrzuconych przy jednokrotnym rzucie kostką.

Rozwiązanie 6.1. *Przy jednokrotnym rzucie kostką możemy otrzymać następujące wartości*

$$I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

gdzie prawdopodobieństwo wyrzucenia każdej liczby jest równe $p_i = \frac{1}{6}$ *dla* $i = 1, \ldots, 6$. *Mamy*

$$E(X) = \sum_{i \in I} = x_i p_i = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja (Prawdopodobieństwo warunkowe)

Niech $A, B \subseteq \Omega$ i $P(A) > 0$. Wtedy *prawdopodobieństwem* B *pod warunkiem* A nazywamy:

$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Warunkowa wartość oczekiwana

Zadanie

Wykonano rzut sześcienną kostką do gry. Wyznacz prawdopodobieństwo wyrzucenia więcej niż trzech oczek, jeśli wiadomo, że wypadła parzysta liczba oczek.

A - wyrzucono więcej niż trzy oczka,
B - wyrzucono parzystą liczbę oczek,
A∩B - wyrzucono parzystą liczbę oczek większą od 3.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Warunkowa wartość oczekiwana

Definicja (Warunkowa wartość oczekiwana)

$$E(X|A) = \sum_{x\in\mathbb{R}} xP((X|A) = x) = \sum_{x\in\mathbb{R}} xP(X = x|A)$$

Twierdzenie 5.12 (Wzór na całkowitą wartość oczekiwaną)

Niech $X : \Omega \to \mathbb{R}$ będzie dyskretną zmienną losową i niech $A_1, A_2, \ldots$ będzie podziałem Ω. Wtedy:

$EX = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)E(X|A_k)$.