

上海交通大学试卷 (B 卷)

(2022 至 2023 学年 第 1 学期)

班级号 _____ 学号 _____ 姓名 _____

课程名称 _____ 《算法设计》 _____ 成绩 _____

1. (15 分) 给定一个边权均为正整数的无向图 $G = (V, E)$, 假设 X 是 G 的某个最小生成树的一部分, 对于任何一个集合 $S \subseteq V$, 且 X 中的边与 S 和 V/S 之间的边并不相交。现在选取 e 为 S 和 V/S 之间的边权值最小的边, 试证明: $X \cup \{e\}$ 是 G 的某个最小生成树的一部分。

2. (20 分) **计数逆序问题**: 给定一个元素各不相同的整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n , 如果 $i < j$ 且 $a_i > a_j$, 则称之为一个逆序, 求问这个序列中逆序的数目是多少? 请给出一个 $O(n \log n)$ 复杂度的算法, 并给出算法复杂度分析。

3. (10 分) 对于下面的线性规划

$$\begin{aligned} \text{Max } & 6x - 4z - 1 \\ & 3x - y \leq 1 \\ & 4y - z \leq 2 \\ & x, y, z \geq 0 \end{aligned}$$

请问 $(x, y, z) = (0.5, 0.5, 0)$ 时, 能取到最优解么? 写出该线性规划的对偶线性规划, 以及找出对偶线性规划的最优解。

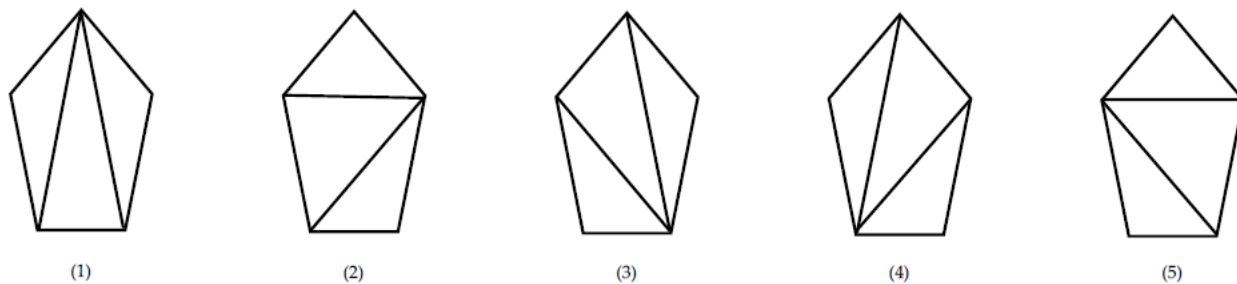
4. (20 分) **边不相交问题**是指给定一组路径, 没有两条路径共享同一条边。

I. (10 分) 给定一个有向图 G 和两个顶点 s 和 t , 试求出有向图 G 中 s - t 边不相交的路径最大数目。

II. (10 分) 给定一个无向图 G' 和两个顶点 s' 和 t' , 试求出无向图 G' 中 s' - t' 边不相交的路径最大数目。

5. (20 分) 任给一个凸的 N -多边形, 它的一个三角剖分是由 $N - 3$ 条对角线构成, 这 $N - 3$ 条对角线互不相交, 且把多边形分成 $N - 2$ 个三角形.

一个三角剖分的花费定义为形成该三角剖分的 $N - 3$ 条对角线的长度之和, 注意这里的长度指平面上两个顶点之间的距离。如下图是一个五边形的 5 种三角剖分,(2)(5)的三角剖分花费比(1)(3)(4)要小.



I. (5 分) 求一个 N -凸多边形的三角剖分的个数 (给出递推式即可) .

II. (15 分) 设计动态规划算法求 N -凸多边形三角剖分的最小花费.

输入: 正整数 n , 表示凸多边形的边数, 以及两个数组 $x[1..n], y[1..n]$, $(x[i], y[i])$ 表示第 i 个顶点的坐标, 且顶点 $1 \dots n$ 是按照点在凸多边形上逆时针顺序排列.

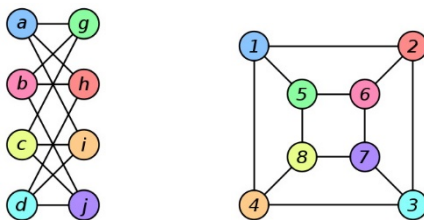
输出: 该凸多边形三角剖分的最小花费.

要求时间复杂度 $O(n^3)$, 空间复杂度为 $O(n^2)$ 。请对你的算法的时间空间复杂度进行一定的分析说明。

6. (15 分) **图同构问题** (Graph Isomorphism) 是指给定两图 G 与 H , 问其顶点集 $V(G)$ 与 $V(H)$ 是否存在一个双射 f

$$f: V(G) \rightarrow V(H)$$

使得对于任意顶点 $u, v \in V(G)$, $(u, v) \in E(G)$ 当且仅当 $(f(u), f(v)) \in E(H)$.



试证明, 图同构问题是一个 NP 问题.