

基于 L_1 范数的总变分正则化超分辨率图像重建

占美全 邓志良¹

(江苏科技大学计算机科学与工程学院, 镇江 212003 常州信息职业技术学院, 常州 213164)

摘 要 设计了一种基于 L_1 范数的总变分正则化超分辨率图像序列重建算法。采用 L_1 范数对重建图像保真度进行约束, 利用总变分正则化克服重建问题的病态性, 有效地保持了图像的边缘并且提高了运算速度; 运用设计的算法对模拟的低分辨率图像序列进行重建, 分别从主观效果和客观衡量指标两方面与基于 L_2 范数的总变分正则化的超分辨率重建结果进行比较, 实验结果表明该算法在保持图像边缘的同时, 提高了超分辨率重建算法的运算速度。

关键词 总变分 正则化 超分辨率 L_1 范数 L_2 范数

中图分类号 TP751.1 文献标志码 A

图像超分辨率 (super resolution, SR) 是指利用一幅或者多幅低分辨率 (low resolution, LR) 图像, 通过相应的算法来获得一幅清晰的高分辨率 (high resolution, HR) 图像^[1]。高分辨率图像能更详细地表示景物的细节信息, 在许多领域 (如遥感、军事侦察和医疗成像等) 有着广泛的应用。目前, 高分辨率图像主要是通过高精度的光学器件及传感器等硬件设备来获得; 然而, 一方面由于传感器和光学器件制造工艺和成本的限制, 在很多场合和大规模部署中不易实现; 另一方面硬件设备的精度不能无限地提高, 而是有一个技术极限。因此, 通过软件途径来获得高分辨图像的超分辨率技术成为人们研究的热点。

在文献 [1] 中提到了三种方法可以实现超分辨率技术: 基于插值的方法、基于重建的方法和基于学习的方法。本文采用的是基于重建方法中的正则化法。从数学的角度来看, 超分辨率图像重建问题是一个典型的病态 (ill-posed) 问题。需要利用先验信息对该问题进行正则化, 通常使用的是 L_2 范数和 Tikhonov 正则化^[2], 它假定图像是平滑的, 这种

假设导致了重建图像边缘模糊; 由文献 [3] 提出的总变分 (Total variation, TV) 正则化图像复原方法, 在复原的同时保持了图像的边缘。文献 [4] 在总变分 (Total Variation, TV) 正则化的基础上利用 L_1 范数 (以下简称为 L_1 TV) 实现了对图像的去卷积去除噪声。本文利用文献 [4] 提到的 L_1 TV 方法进行超分辨率重建, 实验将与文献 [5] 中提到的基于 L_2 范数的总变分算法 (以下简称为 L_2 TV) 的超分辨率进行了比较, 实验结果显示 L_1 TV 方法不仅与 L_2 TV 法同样的边缘保持能力并且提高了算法的运行速度。

1 超分辨率重建数学模型

设有 N 帧低分辨率观测图像 Y_k ($k=1, 2, \dots, N$) 图像大小为 $M \times N$ 将每帧低分辨率图像 Y_k 按行方向排列成向量的形式, 记为 $Y_k, Y_k \in R^{M \times 1}$; x 为原始高分辨率图像, 大小为 $M \times N$ q 为内插因子, 并且 $q \geq 1$ 同样按行方向排列成向量的形式, 记为 $X, X \in R^{M \times 1}$ 。图像的降质模型如图 1 所示, X 为原始高分辨率图像, F 表示运动模糊, H 为线性移不变降晰模糊, D 为高分辨率到低分辨率图像的欠采样, V 为系统引入的噪声, 则图像的降质过程可以表示为^[4]

$$Y_k = D_k H_k F_k X + V_k, \quad k=1, \dots, N \quad (1)$$

式 (1) 中 $F_k \in R^{M \times N \times M \times N}$ 为场景在第 k 帧的运动矩阵, 可以通过运动估计获得; $H_k \in R^{M \times N \times M \times N}$ 为成像

2010 年 7 月 13 日收到

第一作者简介: 占美全 (1984—), 男, 江西九江人, 江苏科技大学硕士研究生, 研究方向: 图像恢复、图像超分辨率重建。E-mail: zmquan@126.com

系统的降晰矩阵; $D_k \in \mathbb{R}^{M \times N}$ 为理想情况下的采样矩阵; $V_k \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ 为系统噪声。在大多数应用中, 成像设备和成像条件都是相同的, 这样就有 $\forall k$ $H_k = H$, $D_k = D$ 则式 (1) 变为

$$Y_k = DHF_k X + V_k, \quad k=1, \dots, N \quad (2)$$

式 (2) 便是图像超分辨率重建模型, 即在已知 Y_k , D , H , F_k , V_k 的情况下, 如何估算出原始的高分辨率图像 X 。如果只考虑单帧低分辨率图像的重建, 实际上就是转化为求解 MN 个线性方程, 然而对于图像序列的超分辨率重建, 则要转化为求解更大阶数的线性方程组。对于这样的方程组, 利用传统的方法求解几乎是很难实现的。在没有约束条件或者其他有关图像先验知识的限制下, 式 (2) 的超分辨率重建问题是一个典型的反问题。

2 超分辨率重建算法

如前所述, 超分辨率图像重建是一个反问题, 由于噪声的存在, 其过程是病态的, 即不能产生同时满足存在性、惟一性以及连续输入产生连续输出特性的解, 重建结果受到噪声较大的影响。通常采用正则化的方法来约束, 使该问题变为良态问题。正则化函数方程如下:

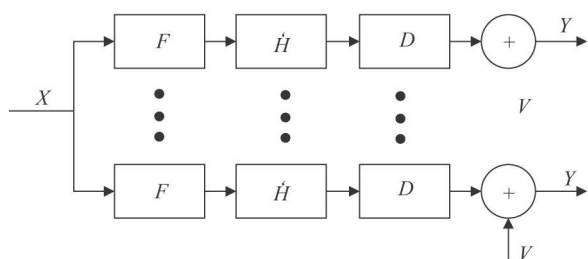


图 1 系统成像模型

$$\ell(X) = \sum_{k=1}^N \| DHF_k X - Y_k \|_p^p + \lambda J(X) \quad (3)$$

式 (3) 中: λ 为正则化系数, 起平衡正则项和数据项的作用, 当它变大时, 重建解趋于光滑, 反之则数据拟合误差变小。当 $p=1$ 时, (3) 式为具有 L_1 范数的正则化问题, 当 $p=2$ 时, (3) 式为具有 L_2 范数的正则化问题。

在文献 [5] 中, 利用了 L_2 范数的形式, 其对应的形式如下:

$$\ell(X) = \sum_{k=1}^N \| DHF_k X - Y_k \|_2^2 + \lambda J_V(X) \quad (4)$$

式 (4) 中的前一项为平方, 而对于图像序列的超分辨率重建来说, 由于数字图像的运算在计算机中就是以矩阵的形式表示, 所以这将会导致计算速度的下降, 而当 $p=1$ 时, 符合 L_1 范数的形式; 相对于矩阵平方的运算, L_1 范数的形式能很好提高算法的运算速度; 且由于文献 [4] 利用 L_1 TV 法实现了对图像的去噪处理, 所以本文采用基于 L_1 范数和 TV 正则化的方法进行图像序列的超分辨率重建; L_1 TV 法的代价函数, 定义为 [4]:

$$\ell(X) = \sum_{k=1}^N \| DHF_k X - Y_k \|_1 + \lambda J_V(X) \quad (5)$$

在式 (5) 中:

$$J_V(X) = \| \nabla X \| = \int_{\Omega} \sqrt{X_u^2 + X_v^2 + \beta^2} \, du dv \quad (6)$$

式 (6) 中 Ω 为图像空间, $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$, $X_v = \frac{\partial X}{\partial v}$ 是图像 X

在点 (u, v) 沿水平和垂直方向上的一阶偏导数, β 为可调参数, 是为了避免 $J_V(X)$ 在 $X_u=0$, $X_v=0$ 处不可微。将式 (6) 代入到式 (5) 中得:

$$\ell(X) = \sum_{k=1}^N \| DHF_k X - Y_k \|_1 + \lambda \int_{\Omega} \sqrt{X_u^2 + X_v^2 + \beta^2} \, du dv \quad (7)$$

利用变分方法求解式 (7), 最小化问题就转化为求解 Euler-Lagrange 方程:

$$\sum_{k=1}^N F_k^T H^T D^T \operatorname{sign}(DHF_k X - Y_k) + \lambda L(X) X = 0 \quad (8)$$

式 (8) 中:

$$L(X) X = - \nabla \left[\frac{\nabla X}{\sqrt{X_u^2 + X_v^2 + \beta^2}} \right] = \frac{X_{uu}(X_u^2 + \beta^2) - 2X_u X_v X_{uv} + X_v(X_v^2 + \beta^2)}{(X_u^2 + X_v^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (9)$$

$$X_{uu} = \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}, \quad X_{uv} = \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}, \quad X_{vv} = \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$$

本文利用最速下降法迭代求解:

$$X_{n+1} = X_n - \alpha \left(\sum_{k=1}^N F_k^T H^T D^T \operatorname{sign}(DHF_k X_n - Y_k) + \lambda L(X_n) X_n \right) \quad (10)$$

式 (10)中 α 为迭代步长, 算法步骤如下:

(1) 初始化迭代次数 n_0 利用插值的方法确定初始值 X_0 ;

(2) 求梯度方向,

$$G_n = \sum_{k=1}^N F_k^T H^T D^T \operatorname{sgn}(DHF_k X_n - Y_k) + \lambda L(X_n) X_n;$$

(3) 迭代更新, $X_{n+1} = X_n - \alpha G_n$;

(4) 迭代停止的条件为 $\frac{\|X_{n+1} - X_n\|}{\|X_n\|} \leq \eta$, 其中

η 为预先设定的阈值, 本文设为 10^{-8} ; 若满足迭代停止条件, 转到 (5), 否则令 $n = n + 1$ 转到 (2);

(5) 如果 $\eta \leq 10^{-8}$ 或者 n 达到最大迭代次数, 结束程序; X_{n+1} 即为重建的高分辨率图像。

3 实验及分析

实验一选择图 256×256 `peppers` 图像依次进行仿射变换、模糊、欠采样及加入噪声生成 16 幅低分辨率图像。模糊取尺寸为 3×3 方差为 0.3 的高斯模糊, 欠采样因子为 2。实验选取其中一幅低分辨率图像 (如图 2(a)) 分别对最邻近插值法、 l_2 TV 本文算法进行实验; 实验中采用高斯金字塔配准算法获得运动参数, 迭代步长 $\alpha = 2$ 正则化因子 $\lambda = 0.4$ 最大迭代次数为 50。图 2(b) 为对图 2(a) 进行最邻近插值得到原来两倍的图像, 图 2(c) 为采用 l_2 TV 方法重建得到的超分辨率图像, 图 2(d) 为本文算法结果, 重建时均选择图 2(b) 作为起始参考帧。实验是利用 MATLAB 7.0 在奔 4 512 M 内存的环境下进行的。

3.1 重建效果比较

从图中可以看出 2(d) 比 2(c) 获得相类似的重建结果, 且 3(d) 中边缘也得到了很好的保持。

为了客观评价超分辨率重建图像的效果, 采用两种衡量指标来定量的分析实验中的结果:

(峰值信噪比 (PSNR) 主要用来评价图像经压缩、传输、复原处理前后的质量变化情况, 定义如下式所示^[19]:

$$\text{PSNR} = 10 \lg_{10} \left(\frac{255^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i,j} (X - \hat{X})^2} \right) \quad (11)$$



图 2 模拟生成的低分辨率图像及超分辨率重建结果对比

式 (11) 中 uv 为图像的总像素, \hat{X} 和 X 分别表示重建的高分辨率图像和原始图像。从表 1 中可以看出图 2(d) 的峰值信噪比与 l_2 TV 法的相近, 但比最邻近插值法的要大。

(2) 图像标准偏差, 反映了图像整体灰度的分布的统计量, 标准偏差越大, 对比度越大, 方差的基本表达式定义为^[10]

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{MN} \left(\sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} (f(i,j) - \mu)^2 \right)} \quad (12)$$

式 (12) 中 M 和 N 表示图像的行和列数, $f(i,j)$ 表示图像在 (i,j) 点的灰度值, μ 为整幅图像的均值。从表 1 中可知图 3(d) 的标准差最大。

表 1 实验重建结果衡量标准对比

	最邻近插值法	l_2 TV法	l_1 TV法
峰值信噪比 / dB	26.62	30.35	30.46
标准偏差	52.6	53.4	54.6

3.2 重建速度比较

从 4.1 的分析可以看出, l_1 TV 法与 l_2 TV 法在重建效果上相似, 甚至更好一点; 图 3 是 l_1 TV 法与 l_2 TV 方法在重建时, 根据不同的迭代次数需要的相应的迭代时间绘制的。其中横坐标表示迭代次数, 纵坐标为相应的迭代时间 (单位为 s); 蓝色实线表示 l_1 TV (本文算法) 法的运算速度曲线, 红色实线为 l_2 TV 法的运算速度曲线; 从图 3 中可以看出, 当迭代次数较小时, 两者的运算速度相差不是很明显, 但随着次数的不断增大, 本文算法的运算速度明显

比 L_2 TV法的运算速度要快。

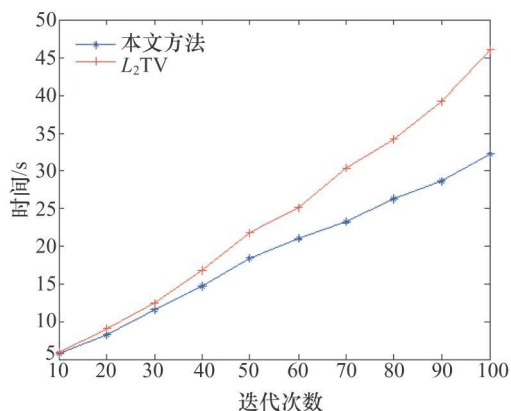


图 3 L_1 TV法与 L_2 TV法的运算速度比较

4 结论

本文设计了基于 L_1 范数和 TV正则化的超分辨率图像重建算法, 将 L_1 范数作为保真度约束项, 用 TV正则化来克服超分辨率重建问题的病态性, 有效地保持了图像的边缘并且提高了运算速度。利用模拟的数据进行超分辨率重建, 并将结果与基于 L_2 范数的 TV正则化重建图像对比, 实验表明, 无论是从主观视觉效果还是客观衡量指标来看, L_1 TV法与 L_2 TV法都具有相类似的重建效果, 但运算速度随着迭代次数的增大, 得到了明显的提高。

L_1 Norm of Total Variation Regularization Based Super Resolution Reconstruction for Images

ZHAN Mei-quan, DENG Zhi-liang

(School of Computer Science and Technology, Jiangsu University of Science and Technology, Zhenjiang 212003, P. R. China)

Changzhou College of Information Technology, Changzhou 213164, P. R. China)

[Abstract] An L_1 norm of total variation regularization based super resolution reconstruction algorithm for images was proposed. The L_1 norm was used to constrain the fidelity of the reconstructed image, and the total variation regularization was implemented to overcome the ill-posed of the problem. The edge of the image was preserved effectively and the speed of the algorithm was improved. Simulated taken low resolution image sequences for the designed algorithm were used in the experiments and compared the proposed algorithm with the algorithm that based on L_2 norm of total variation regularization for super resolution reconstruction in the way of subjective vision effect and objective quality respectively. The results show that the proposed algorithm not only preserves the edge of image but also improves the computing speed of the algorithm for super resolution reconstruction for image sequences.

[Key words] total variation regularization super resolution L_1 norm L_2 norm
©1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

- 1 浦 剑, 张军平, 黄 华. 超分辨率研究综述. 山东大学学报, 2009 39(1): 27—32
- 2 Nguyen N, Milanfar P. A computationally efficient image super resolution image reconstruction algorithm. IEEE Transactions on Image Processing 2004; 10(4): 573—583
- 3 Vogel CR, Olna ME. Fast robust total variation-Based reconstruction of noisy blurred images. IEEE Transactions on Image Processing 1998; 7(6): 813—824
- 4 Wohlberg B, Rodríguez P. An L_1 -TV algorithm for deconvolution with salt and pepper noise. IEEE Signal Processing 2009 4(19): 20—24
- 5 Shen H, Lan F, Zhang L. A total variation regularization based super resolution reconstruction algorithm for digital video. EURASIP Journal on Advances in Signal Processing 2007: 1—16
- 6 Elad M, Helor Y. A fast super resolution reconstruction algorithm for pure translational motion and common space invariant blur. IEEE Transactions on Image Processing 2004; 10(8): 1187—1193
- 7 Park S C, Park M K, Moon G K. Super resolution image reconstruction: a technical overview. IEEE Signal Processing Magazine 2003 20(3): 21—36
- 8 Babacan S D, Molina B, Katsaggelos A K. Total variation super resolution using a variation approach. IEEE International Conference on Image Processing 2008; 1(5): 641—644
- 9 Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm. Physica D 1992 60(1—4): 259—268
- 10 熊兴华. 数字影像质量评价方法评述. 测绘科学, 2004 29(1): 68—71