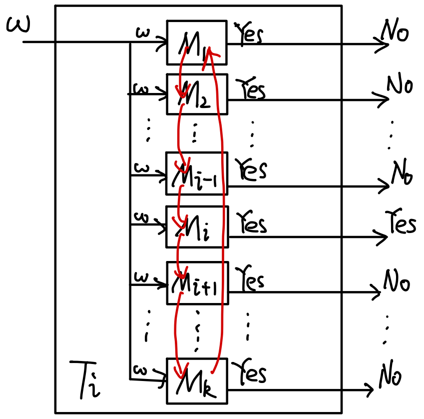
计算理论作业–肆　　姓名: 张宇杰　　学号: 2022113573

★★★★★★★★★★ **作业电子版发送到指定邮箱** ★★★★★★★★★★

题目1: 假设 $L_1, L_2, \ldots, L_k$ 是定义在字符集 Σ 上的语言集合，并且
(1) 对于任意 $i \neq j$，我们有 $L_i \cap L_j = \emptyset$; (2)$L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_k = \Sigma^*$;
(3) 每个 L_i 都是递归可枚举的。证明：每个 L_i 都是递归的。

由每个 L_i 都是 RE 的，则分别存在对应的 M_i，M_i 识别 L_i，即 $L(M_i) = L_i$

现对每个 L_i 构造对应的 TM: T_i



T_i 获取输入 ω，转发至每个内机器 M_j

每个 M_j 只运行一步，若该步 M_j 未接受，则把控制权交给 $M_{(j+1)\%k+1}$

即 $M_1 \to M_2 \to \cdots \to M_i \to \cdots \to M_k \to M_1 \to M_2 \to \cdots$

当某个 M_j 接受时，若 $i=j$，T_i 输出 Yes，否则 T_i 输出 No

下证 T_i 判定 L_i：

对 $\forall \omega \in L(T_i)$，即 $T_i(\omega) = Yes$，知 $M_i(\omega) = Yes$，从而 $\omega \in L_i$

对 $\forall \omega \in L_i = M_i$，知 M_i 在有限步内接受 ω，且由 $\forall i \forall j\,(i \neq j \to L_i \cap L_j = \phi)$，知只有 M_i 才会接受 ω

从而 T_i 将在有限步内运行至 M_i 接受 ω 的那一步，$\omega \in L(T_i)$

故 $L(T_i) = L_i$

而由于 $L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_k = \Sigma^*$，对 $\forall \omega \in \Sigma^*$，总有一个 M_t 会接受 ω，

使得 T_i 接受或拒绝 ω，从而 T_i 总停机

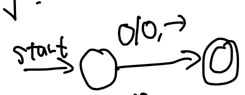
故 T_i 判定 L_i，从而 L_i 递归

题目2: 证明 $L = \{\langle M \rangle | M\text{是图灵机}, L(M) = \{ww^R | w\text{是 0、1 字符串}\}\}$ 是不可判定的，w^R 是 w 的逆序字符串。

该性质显然是关于图灵机语言的性质

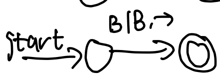
且该性质非平凡，由于：

存在图灵机 M_1：



，$L(M_1) = 0(0+1)^*$　不满足该性质 ($0 \in L(M_1)$)

存在图灵机 M_2：



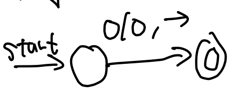
，$L(M_2) = \{\varepsilon\}$　满足该性质

由莱斯定理，该语言 L 不可判定

题目 3： 证明 $L=\{\langle M\rangle \mid M$是图灵机$, L(M)=(L(M))^R$，即若$w\in L(M)$有$w^R\in L(M)\}$ 不可判定，进一步证明是非递归可枚举的。

该性质显然是关于图灵机语言的性质

且该性质非平凡，由于：

存在图灵机 M_1:  ，$L(M_1)=0(0+1)^*$ 不满足该性质 ($01\in L(M_1)$，但 $10\notin L(M_1)$)

存在图灵机 M_2:  ，$L(M_2)=\Sigma^*$ 满足该性质

由莱斯定理，该语言 L 不可判定

下证：$\overline{L_{ACC}}\le_m L$，即证 $L_{ACC}\le_m \overline{L}$

构造归约 f:

若 x 不为 L_{ACC} 合法输入，令 $f(x)=\langle M_{ACC}\rangle$，其中 M_{ACC} 接受所有输入

若 x 形如 $\langle M,w\rangle$，令 $f(x)=\langle M'\rangle$，其中 M' 有：

记 M' 的输入为 y，M' 模拟 w 在 M 上的运行：

① 若 M 接受 w，模拟 y 在 M_{01} 上的运行，M_{01} 接受 y 则 M' 接受 y

② 否则，即 M 不接受 w 或 M_{01} 不接受 y，M' 不停机

(M_{01} 只接受串 01，即 $L(M_{01})=\{01\}$

对 $\forall x\in L_{ACC}$，有 $x=\langle M,w\rangle$，M 接受 w，从而 $f(x)=\langle M'\rangle$ 中，

M' 模拟其输入在 M_{01} 上的运行，从而 $L(M')=L(M_{01})$，而 $L(M_{01})$ 显然不满足 $L(M_{01})=(L(M_{01}))^R$

故 $f(x)\in\overline{L}$

对 $\forall x\notin L_{ACC}$，① x 不为 L_{ACC} 合法输入，有 $f(x)=\langle M_{ACC}\rangle\in L$

② $x=\langle M,w\rangle$，但 M 不接受 w，从而 $f(x)=\langle M'\rangle$ 中 M' 不停机，$L(M')=\varnothing$

而 $\varnothing=\varnothing^R$，从而 $\langle M'\rangle\in L$

综上 $f(x)\notin\overline{L}$

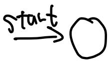
从而 $x\in L_{ACC}\Leftrightarrow f(x)\in\overline{L}$

故 $\overline{L_{ACC}}\le_m L$，又由 $\overline{L_{ACC}}$ 不可识别，从而 L 不可识别

题目 4： 证明 $L = \{\langle M\rangle | M\text{是图灵机}, L(M) = \Sigma^*\}$ 不可判定。

该性质显然是关于图灵机语言的性质

且该性质非平凡，由于：

存在图灵机 M_1： 

，$L(M_1)=\phi$ 不满足该性质

存在图灵机 M_2： 

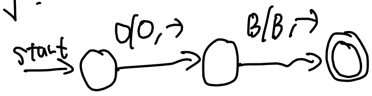
，$L(M_2)=\Sigma^*$ 满足该性质

由莱斯定理，该语言 L 不可判定

题目 5： 证明 $L = \{\langle M\rangle | M\text{是图灵机}, L(M)\text{是无穷的}\}$ 不可判定。

该性质显然是关于图灵机语言的性质

且该性质非平凡，由于：

存在图灵机 M_1： 

，$L(M_1)=\{0\}$ 不满足该性质

存在图灵机 M_2： 

，$L(M_2)=\Sigma^*$ 满足该性质

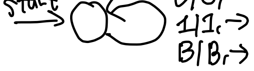
由莱斯定理，该语言 L 不可判定

题目 6： 令问题集合 $L = \{\langle M\rangle | M\text{在所有输入上均停机}\}$。(1) 利用 Rice 定理证明 L 不可判定；(2) 证明 L 非递归可枚举（**提示：利用归约技术**）；(3) 证明 $\overline{L}$ 非递归可枚举（**提示：利用归约技术**）。

(1)

该性质等价于："L(M) 是图灵可判定的，且可由 M 判定"，是关于图灵机语言的性质，以 $\Sigma=\{0,1\}$ 为例

且该性质非平凡，由于：

存在图灵机 M_1： 

，$L(M_1)=\phi$，M_1 始终不停机，不满足该性质

存在图灵机 M_2： 

，$L(M_2)=\Sigma^*$，M_2 始终停机 满足该性质

由莱斯定理，该语言 L 不可判定

(2) 证明 L 非 R.E.

往证：$\overline{L_{ACC}} \leq_m L$，即证 $L_{ACC} \leq_m \overline{L}$

构造归约 f：

若 x 不为 L_{ACC} 合法输入，令 $f(x)=\langle M_2\rangle$，M_2 为上述的：

若 x 形如 $\langle M,w\rangle$，令 $f(x)=\langle M'\rangle$

M' 计算其输入 y 的长度 n，在内部模拟 M 在 w 上前 n 步的运行

若 M 在 n 步内接受 w，那么 M' 进入死循环，不停机

若 M 在 n 步内没有接受 w，那么 M' 接受 y

对 $\forall x\in L_{ACC}$，即 x 形如 $\langle M,w\rangle$，且 M 接受 w

从而 M 在有限步 N 内接受 w，那么，总存在 M' 的输入 y

使得 $|y|>N$，从而 M 在 $|y|$ 步内接受 w，

对于 $f(x)=\langle M'\rangle$，知 M' 对输入 y 不停机，从而 $f(x)\in\overline{L}$

对 $\forall x\notin L_{ACC}$

① x 不为 $\langle M,w\rangle$ 的合法输入，显然 $f(x)=\langle M_2\rangle\notin\overline{L}$

② x 形如 $\langle M,w\rangle$，且 M 不接受 w

那么，对任意 M' 的输入 y，M 在 $|y|$ 步内都不接受 w，从而 M' 接受 y

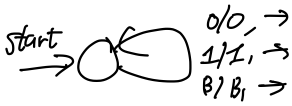
从而对于 $f(x)=\langle M'\rangle$，知 M' 接受任何输入 y，$f(x)\notin\overline{L}$

故 $L_{ACC}\leq_m\overline{L}$，即 $\overline{L_{ACC}}\leq_m L$，又由 $\overline{L_{ACC}}$ 非 R.E. 从而 L 非 R.E.

(3) 证明 $\overline{L}$ 非 R.E.

往证：$\overline{L_{ACC}} \le_m \overline{L}$，即证 $L_{ACC} \le_m L$

构造归约 f：

若 x 不为 $\langle M, w\rangle$ 合法输入，令 $f(x)=\langle M_1\rangle$，M_1 为上述的 

若 x 形如 $\langle M, w\rangle$，令 $f(x)=\langle M'\rangle$，其中：

M' 忽略其输入 y，在内部模拟 M 在 w 上的运行

① 当 M 接受 w 时，M' 接受 y

② 当 M 不接受 w 时，M' 进入死循环，不停机

或 M 在 w 上不停机，显然 M' 不停机

对 $\forall x \in L_{ACC}$，知 x 形如 $\langle M, w\rangle$ 且 M 接受 w，从而 M' 接受所有输入 y，$f(x)=\langle M'\rangle \in L$

对 $\forall x \notin L_{ACC}$，

① x 不为 $\langle M, w\rangle$ 合法输入，$f(x)=\langle M_1\rangle \notin L$

② x 形如 $\langle M, w\rangle$ 且 M 不接受 w，由 M' 构造知 M' 不停机，$f(x)=\langle M'\rangle \notin L$

题目 7: 如果波斯特对应问题的字母表只包含一个字符，如 $\Sigma = \{1\}$，该问题是否可判定，如不可判定给出证明，否则给出算法。

这样的PCP问题是可判定的

问题等价于：给定非负数组 $A[\,]$ 与 $B[\,]$，$A.length = B.length = k$

是否存在有限非空下标列表 $I \in \{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$，使 $\sum_{i \in I} A[i] = \sum_{i \in I} B[i]$

① 若存在 $0 \le i < k$，使 $A[i] = B[i]$，那么 $\{i\}$ 为一解

② 若存在 $0 \le i < j < k$

2.1 使 $A[i] > B[i]$，$A[j] < B[j]$

记 $m = A[i] - B[i]$，$n = B[j] - A[j]$，有 $\{\underbrace{i, i, \cdots, i}_{n个}, \underbrace{j, j, \cdots, j}_{m个}\}$ 为一解

2.2 使 $A[i] < B[i]$，$A[j] > B[j]$，同理有解

③ 否则对 $\forall i \in [0, k)$ 有 $A[i] > B[i]$ 或 $A[i] < B[i]$，显然无解