张宇杰 2022113573 2203101

撰写如下定理的完整证明：

Monochromatic Triangle 问题：给定图$G=(V,E)$，是否可以将E划分为两个不相交的集合E_1和E_2，使得$G_1=(V,E_1)$和$G_2=(V,E_2)$均不包含三角形？

1) Monochromatic Triangle 问题是 NP 完全问题；
2) 将三角形替换为任意更大完全图，对应问题仍然是 NP 完全问题。

以下简称 Monochromatic Triangle 问题为MT问题，其对应的语言类记为MT。

1) 证明：

先证：$MT \in NP$

算法： ①读取边集E，非确定地将E划分为两个不相交的边集E_1和E_2；

②判断$G_1=(V,E_1)$及$G_2=(V,E_2)$中是否含有三角形。具体算法如下：

以G_1为例，伪代码如下：

```
for (e1 in E1)
    for (e2 in E1, e2 != e1)
        for (e3 in E1, e3 != e1 && e3 != e2)
            if (e1, e2, e3 form a triangle)
                return false
return true
```

其中判断三边是否构成三角形显然是$O(1)$的；

③若G_1和G_2均不含三角形，则输出YES；否则，输出NO。

易见该算法是$O(|E|^3)$的，从而是多项式时间的。

再证：$\forall A \in NP, A \le_p MT$

往证：$NAE-3SAT \le_p MT$

我们定义：

• **2-边着色**：将图$G=(V,E)$的边集E划分为两个不相交的边集E_1与E_2，将E_1中的边染成红色，将E_2中的边染成蓝色。

• **单色三角形**：即 Monochromatic Triangle，三边颜色相同的三角形。

• **2-可着色**：如果对图$G=(V,E)$，存在一种 2-边着色方案，使得G中不出现单色三角形，则图G是 2-可着色的。

• **2-可着色方案**：使得图G 2-可着色的那个 2-边着色方案。

• **三角形的主色**：若存在图$G=(V,E)$的一个 2-可着色方案，根据定义，G中不出现单色三角形。那么，对于G中的任意三角形，一定是由两条红色、一条蓝色（或两条蓝色、一条红色）的边所组成的。称那两条同色边的颜色为该三角形的主色。

根据以上定义，我们可得到MT问题的另一种定义：

给定图$G=(V,E)$，是否存在 2-可着色方案？

下证该定义与原定义的等价性：

$\Rightarrow$：若存在划分E_1与E_2，使$G_1=(V,E_1)$和$G_2=(V,E_2)$均不含三角形，将E_1中的边染成红色，E_2中的边染成蓝色，即得到一个 2-可着色方案。（反证：若没有得到一个 2-可着色方案，那么G中就存在一个单色三角形，不妨设其三条边均为红色，那么该三条边就都在E_1中，从而G_1中就出现了一

个三角形，矛盾）

$\Leftarrow$：若存在一个2-可着色方案，那么将红色边之集记为E_1，将蓝色边之集记为E_2，就有$G_1=(V,E_1)$和$G_2=(V,E_2)$均不含三角形。（反证：若“$G_1=(V,E_1)$和$G_2=(V,E_2)$均不含三角形”为假，不妨设$G_1=(V,E_1)$包含了一个三角形，从而该三角形的三条边就都是红色的，从而G包含一个单色三角形，与该方案是2-可着色方案矛盾）

我们给出以下引理：

引理1：

在K_5的一个2-可着色方案中，该K_5的任意一个三角形的主色，与该三角形的对边（即除去该三角形的三顶点后，得到的两个顶点组成的边）的颜色相同（见图1上半部）。

反之，若给定一个三角形的主色，总能找到一个满足该条件的2-可着色方案（见图1下半部）。

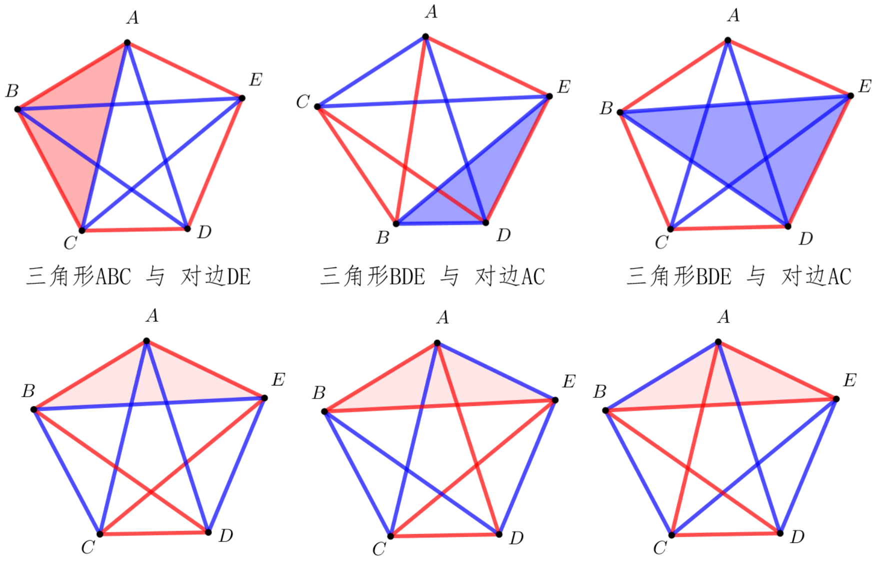

图1　引理1图示

该引理前半部分可由计算机穷举易得，后半部分由图1下半部即得。（证毕）

引理2：

对下图所示的组件，该组件由6个K_5：$ACEDB$，$CEFGD$，$EFHGD$，$FHJIG$，$HJKIG$与$JKABI$组成。

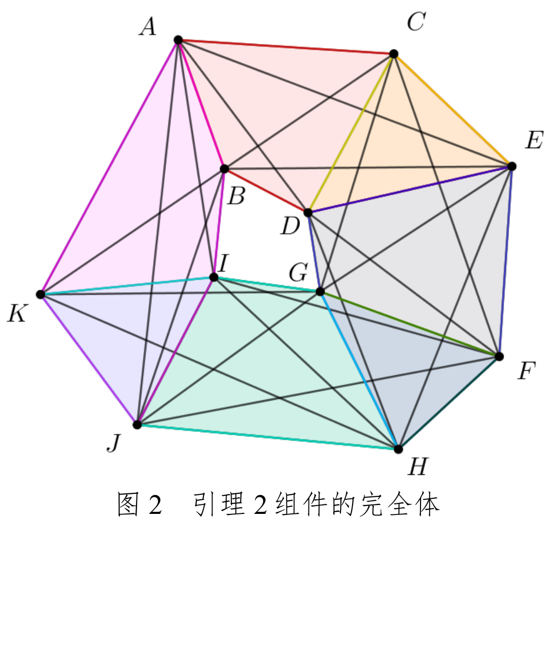

图2　引理2组件的完全体

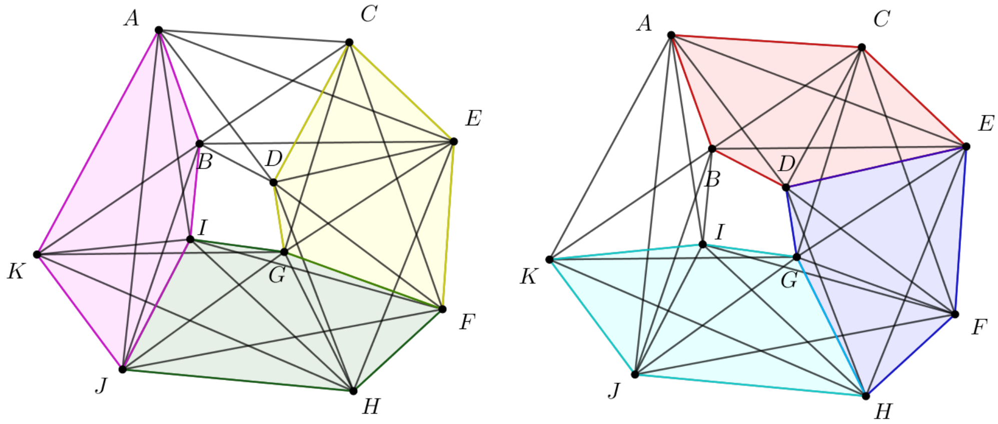

图 3　分别展示引理 2 组件中出现的 6 个K_3

我们断言，在该组件的 2-可着色方案中，三角形CDE与三角形JFH的主色一定是不同的。称该组件中的三角形CDE为其上三角、三角形JFH为其下三角。

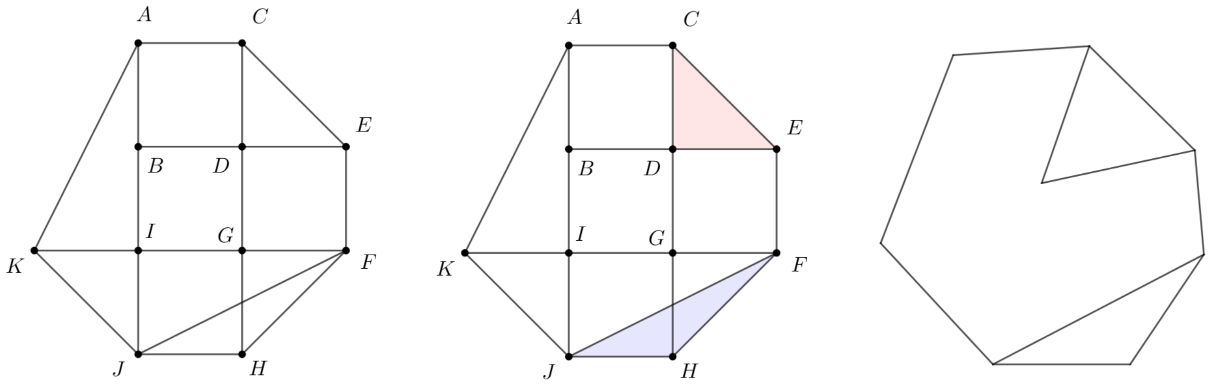

图 4　引理 2 组件的简化图（着色仅表示主色不同）

下证明引理 2：

反证：假设存在 2-可着色方案，使得上三角CDE与下三角JFH主色相同。

不妨设，在该 2-可着色方案中，它们的主色都为红色。从而由引理 1，边AB，边FG与边IG均为红色。进而由 2-可着色定义，边IF为蓝色；由引理 1，边JH为红色。

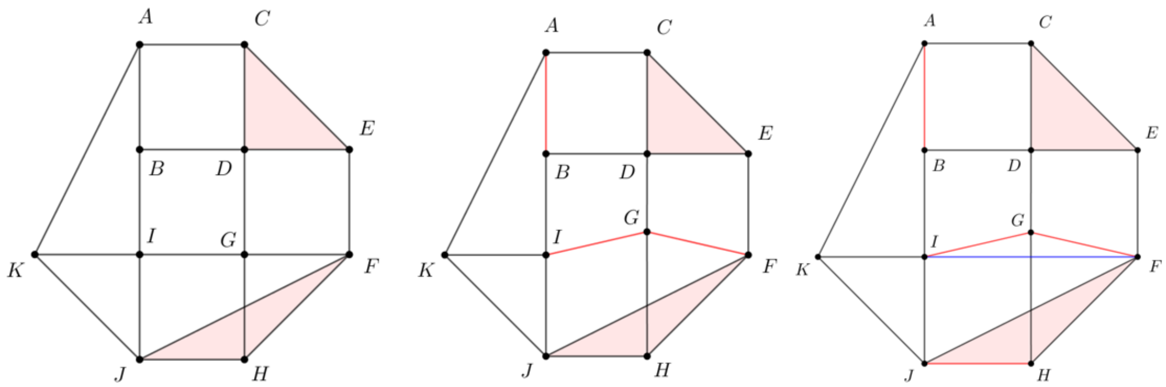

图 5　引理 2 证明步骤 1

从而，我们考察三角形JFH，只有两种着色方案：边JF为红色、边HF为蓝色；或边JF为蓝色、边HF为红色。我们分别讨论：

对于第一种方案，当边JF为红色、边HF为蓝色时，根据 2-可着色与引理 1 的约束，关于K_5

$FHJIG$的着色只有一种方案（如图 6 的中图所示）。由边JG与边HG均为蓝色，有三角形JHG的主色为蓝色，进而在K_5 $HJKIG$中，由引理 1，边KI为蓝色。从而，有三角形IJK的主色为蓝色，进而在K_5 $JKABI$中，由引理 1，边AB为蓝色。这与边AB为红色矛盾。

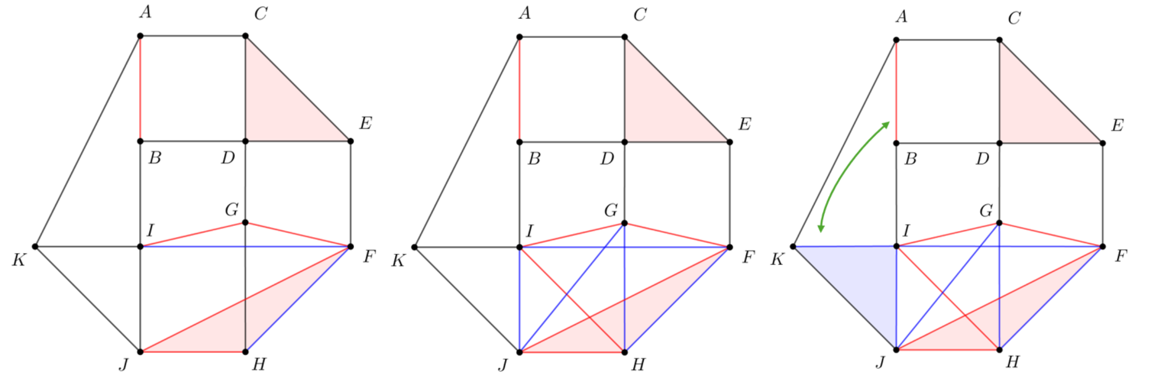

图 6　引理 2 证明分支 1

对于第二种方案，当边JF为蓝色、边HF为红色时，根据 2-可着色与引理 1 的约束，关于K_5 $FHJIG$的着色只有一种方案（如图 6 的中图所示）。由边JG与边HG均为蓝色，有三角形JHG的主色为蓝色，进而在K_5 $HJKIG$中，由引理 1，边KI为蓝色。由边HI与边HG均为蓝色，有三角形HIG的主色为蓝色，进而在K_5 $HJKIG$中，由引理 1，边JK为蓝色。从而，有三角形IJK的主色为蓝色，进而在K_5 $JKABI$中，由引理 1，边AB为蓝色。这与边AB为红色矛盾。

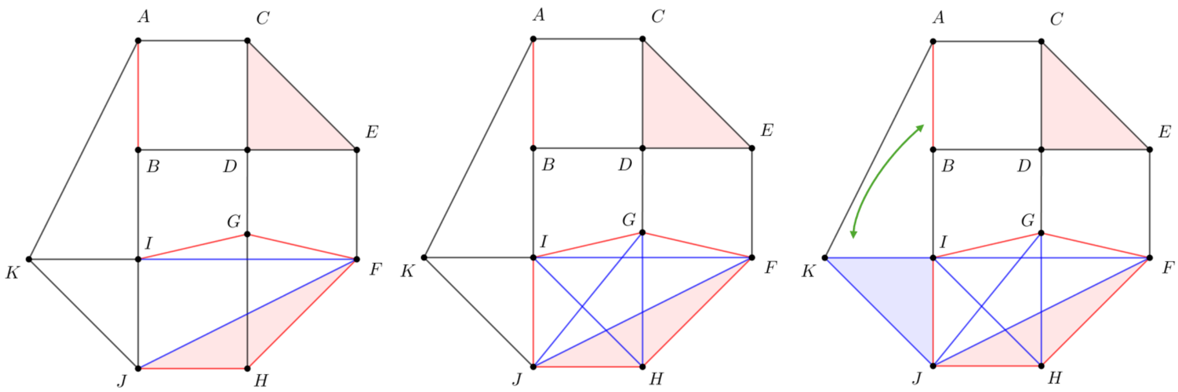

图 7　引理 2 证明分支 2

两个分支都是矛盾的，从而说明不存在 2-可着色方案，使得上三角CDE与下三角JFH主色相同。进而在所有 2-可着色方案中，三角形CDE与三角形JFH的主色一定是不同的。（证毕）

引理 3：

在引理 2 中，我们说明了组件若存在 2-可着色方案，那么三角形CDE与三角形JFH的主色一定是不同的。我们欲说明，这样的 2-可着色方案是存在的，并且存在两种不同的方案，一种使得组件的上三角为红、下三角为蓝，另一种使得组件的上三角为蓝、下三角为红。

证明是平凡的，只需给出对应的 2-可着色方案即可，如图所示。该图给出了一种使组件的上三角为红、下三角为蓝的 2-可着色方案。将颜色反转即可得到一个使组件的上三角为蓝、下三角为红的 2-可着色方案。（证毕）

在之后，我们称如图所示的染色方案为“方案 1”，其反转颜色后的方案为“方案 2”。

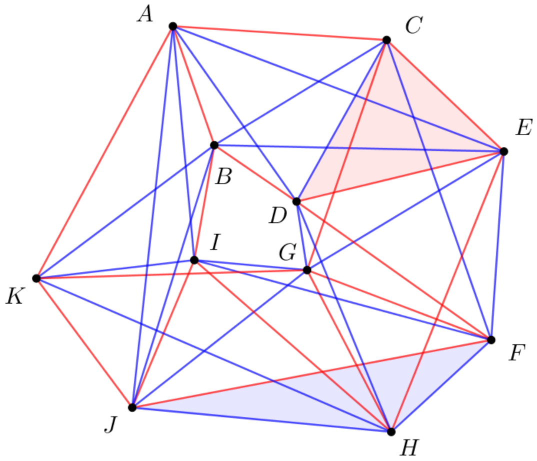

图 8　一种使组件的上三角为红、下三角为蓝的 2-可着色方案

Notes：

在接下来的归约中，我们将用引理 2 中的组件来代表一个变元，上三角为红、下三角为蓝的状态表示该变元被赋值为$True$，上三角为蓝、下三角为红的状态表示该变元被赋值为$False$。

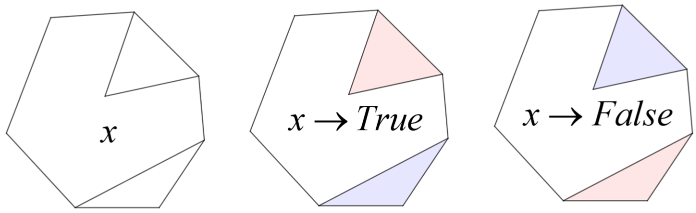

图 9　引理 2 组件设计思路

进而，我们用一个三角形来表示一个字句，该三角形的三条边表示三个文字，一条边为红色当且仅当该边对应文字为$True$，一条边为蓝色当且仅当该边对应文字为$False$。由于我们是从$NAE-3SAT$问题进行归约，从而如果有赋值满足该子句，有在这三个文字中有且仅有一个或两个文字对应为$True$，进而在该子句对应的三角形中，有且仅有一条或两条边为红色，从而该三角形不是单色三角形。这就与归约右侧的MT问题扯上了关系。

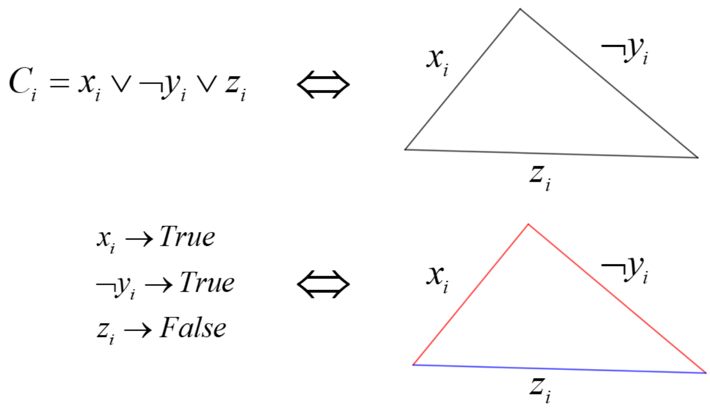

图 10　归约整体思路

回顾我们的目标：证明$NAE-3SAT \le_p MT$（使用第二定义），我们作归约f：

对$\forall\langle\varphi\rangle$，设其变元集为$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\varphi=C_1\wedge C_2\wedge\cdots\wedge C_m$，$C_j=x_{j1}\vee x_{j2}\vee x_{j3}$，其中$x_{jk}$为文字（变元或其否定）。令$f(\langle\varphi\rangle)=\langle G\rangle$，其中：

①对每个变元x_i，构造G的一个子图G_i，该G_i即为在引理 2 中描述的组件；

②对每个子句C_j，构造G的一个子三角形T_j，其三边t_{jk}分别代表了该子句的三个文字x_{jk}；

③对每个子句C_j中的每个文字x_{jk}，如果其为某个变元的正文字（即$x_{jk} = x_i$），那么，我们将该文字对应的边t_{jk}与变元x_i对应的组件G_i的上三角进行“连接”；否则，x_{jk}为某个变元的负文字（即$x_{jk} = \neg x_i$），那么，我们将该文字对应的边t_{jk}与变元x_i对应的组件G_i的下三角进行“连接”。为了实现这样的“连接”，我们将连接对象“三角”与“边”补全为一个K_5。具体而言，将“三角”与“边”中出现的 5 个点作为顶点，连接缺失的边，形成一个K_5。

易见该归约可在多项式时间内完成。

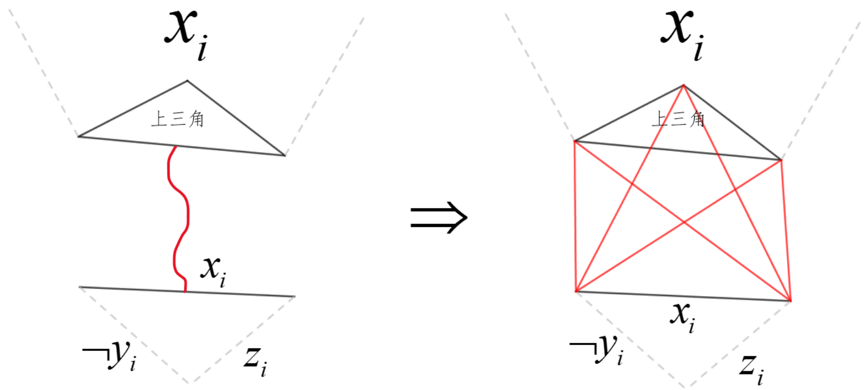

图 11　“连接”操作示意图

通过这样的连接操作，根据引理 1，变元与子句之间的赋值关系就被表示了出来。如果一个子句中的正文字被赋值为$True$，那么该文字对应的边就被染为红色，进而对应变元组件的上三角的主色就应为红色，反之亦然。

以$\varphi = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z)$为例，其对应的图$G$如图所示：

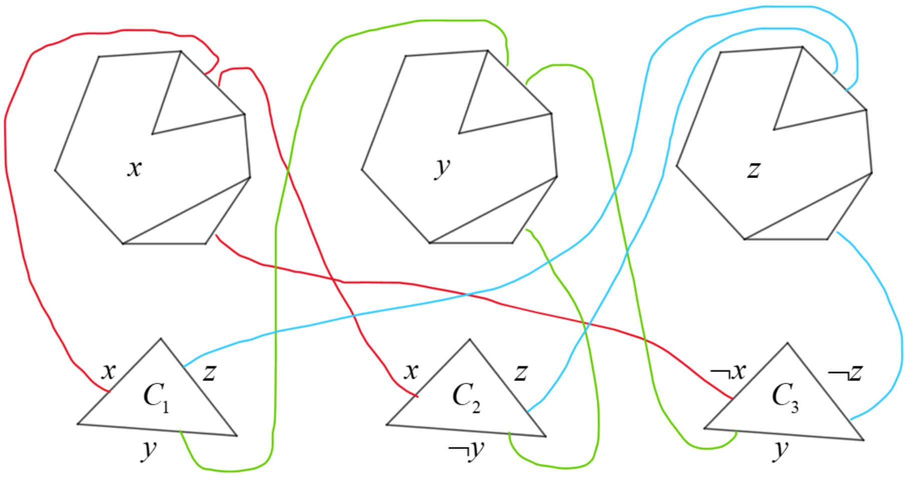

图 12　一个归约的例子

下证明该归约的正确性：

对任意$3SAT$问题实例$\langle\varphi\rangle$，其归约结果$f(\langle\varphi\rangle) = \langle G\rangle$：

$\Rightarrow$：即证，对φ，若存在满足$NAE-3SAT$要求的赋值，那么G就存在一个 2-可着色方案。

设存在满足$NAE-3SAT$要求的赋值τ，从而在φ的每一个子句中，都会至少有一个文字赋值为$True$、一个文字赋值为$False$。那么，将赋值为$True$的文字对应的边染成红色，将赋值为$False$的文字对应的边染成蓝色，从而在每个子句对应的三角形中，都至少有一条红色边与一条蓝色边，从而在这些三角形中不存在单色三角形。

对于每一个变元对应的组件，如果该变元赋值为$True$，就使用引理 3 中的“方案 1”对其染色，若赋值为$False$，就使用引理 3 中的“方案 2”进行染色。这样，在这些组件中，也不存在单色三角形。

对于那些在“连接”操作时构造的K_5，由于我们将正文字连接到了上三角，将负文字连接到了下三角，这样，当变元赋值为$True$时，其上三角主色为红，对应正文字被满足，文字对应边也为红，是一致的；其下三角主色为蓝，对应负文字不被满足，文字对应边也为蓝，也是一致的。变元赋值为$False$的情况也是类似。（如果颜色不一致，根据引理 1，就不存在 2-可着色方案）那么，根据引理 1 的后半部分，我们就可以将这些K_5进行染色，使之不存在单色三角形。

从而，整个图G中都不存在单色三角形，我们的染色方案是一个 2-可着色方案。

$\Leftarrow$：若G存在一个 2-可着色方案，那么对φ就存在满足$NAE-3SAT$要求的赋值。

根据每个变元对应组件的着色情况，我们就可以给出一个满足要求的赋值τ（上三角为红、下三角为蓝，赋值为$True$；上三角为蓝、下三角为红，赋值为$False$）。这是因为，G中不存在单色三角形，那么对每个子句对应的三角形中，都至少有一条红色边与一条蓝色边，从而该子句至少有一个文字赋值为$True$、一个文字赋值为$False$，满足$NAE-3SAT$要求。

同样$\varphi=(x\vee y\vee z)\wedge(x\vee\neg y\vee z)\wedge(\neg x\vee y\vee\neg z)$为例，下图展示了归约的正确性：

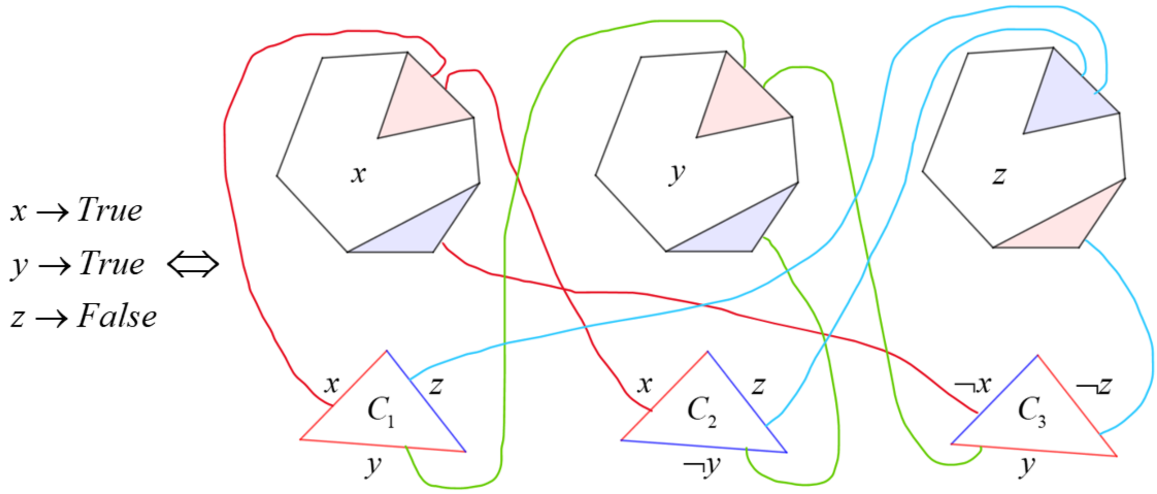

图 13　归约的正确性

（证毕）

2)

类比于MT（Monochromatic Triangle）问题，我们称将这里的“三角形”替换为“任意更大完全图”得到的问题为$M-kCLIQUE$（Monochromatic k-Clique）问题，这里的k是大于 3 的一个常数。

相应的，我们给出先前一些定义的拓展版：

- **k 团**：顶点数为k的团。
- **单色 k 团**：即 Monochromatic k-Clique，所有边颜色都相同的k团。
- **2-k 可着色**：如果对图$G=(V,E)$，存在一种 2-边着色方案，使得G中不出现单色k团，则图G是 2-k可着色的。
- **2-k 可着色方案**：使得图G 2-k可着色的那个 2-k边着色方案。

同样地，根据以上定义，我们可得到 $M-kCLIQUE$ 问题的另一种定义：

给定图 $G=(V,E)$，是否存在 2-k 可着色方案？

同样能证明该定义与原定义的等价性，这里我们略去。

证明：

先证：$M-kCLIQUE \in NP$（使用第一定义）：

仿造 MT 问题的算法，给出下列算法：

算法： ①读取边集 E，非确定地将 E 划分为两个不相交的边集 E_1 和 E_2；

②判断 $G_1=(V,E_1)$ 及 $G_2=(V,E_2)$ 中是否含有 k 团。具体算法如下：

以 G_1 为例，伪代码如下：

```
for (e_1 in E_1)
    for (e_2 in E_1, e_2 != e_1)
        ...
            for (e_N in E_1, e_N != e_1 && e_N != e_2 && ... e_N != e_N-1)
                if (e1, e2, ..., e_N form a k_clique)
                    return false
```

其中 $N=\dfrac{k(k-1)}{2}$，而判断 N 条边是否构成 k 团是 $O(1)$ 的（这里的 k 是常数）；

③若 G_1 和 G_2 均不含 k 团，则输出 YES；否则，输出 NO。

易见该算法是 $O\left(|E|^{k^2}\right)$ 的，从而是多项式时间的。

再证：$\forall A \in NP, A \le_p M-kCLIQUE$（使用第二定义）：

往证：$MT \le_p M-kCLIQUE$，我们作归约 f：

对 $\forall\langle G\rangle$，$G=(V,E)$，令 $f(\langle G\rangle)=\langle G'\rangle$，$G'=(V',E')$，$G'$ 是这样组成的：

① $G \subseteq G'$；

② 添加点集 $V_1 \cup V_2=\{v_{1,1},v_{1,2},\cdots,v_{1,k-3},v_{2,1},v_{2,2},\cdots,v_{2,k-3}\}$，并通过添加边，使 $V_1=\{v_{1,1},v_{1,2},\cdots,v_{1,k-3}\}$ 形成一个 $k-3$ 团 $C_1=(V_1,E_{C_1})$，$V_2=\{v_{2,1},v_{2,2},\cdots,v_{2,k-3}\}$ 形成一个 $k-3$ 团 $C_2=(V_2,E_{C_2})$；

③添加边集 $E_1=\{uv \mid u\in V, v\in V_1\}$，$E_2=\{uv \mid u\in V, v\in V_2\}$；

④添加一个引理 2 提到的组件，记为 H。将 H 的上三角与 E_1、E_{C_1} 中所有边进行“连接”，将 H 的下三角与 E_2、E_{C_2} 中所有边进行“连接”。

在归约中，相较于图 G，添加了 $2(k-3)$（两个 $k-3$ 团）$+11$（组件 H）$=2k+5$ 个顶点，

添加了 $2\times\frac{(k-3)(k-4)}{2}$（两个 $k-3$ 团）$+2(k-3)|V|$（E_1 与 E_2）$+38$（组件 H）$+\left(2(k-3)|V|+2\times\frac{(k-3)(k-4)}{2}\right)\times 6$（所有的连接）$=14(k-3)|V|+7(k-3)(k-4)+38$ 条边，这是在多项式时间内可完成的。

以下给出了一个该归约的例子：

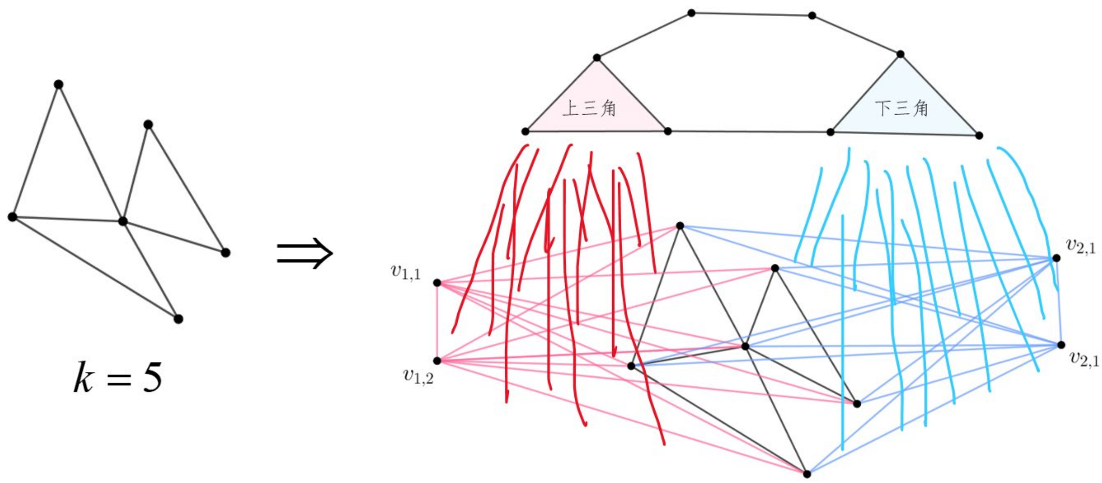

图 14　归约的一个例子

Notes:

简单解释下为什么这么构造：若 G 中存在一个单色三角形，那么，我们用与该三角形主色相同的颜色，来构造一个 $k-3$ 团，并将该团的每个顶点与 G 的每个顶点相连（边的颜色都与主色相同），我们就在新的图 G' 中找到一个单色 k 团。

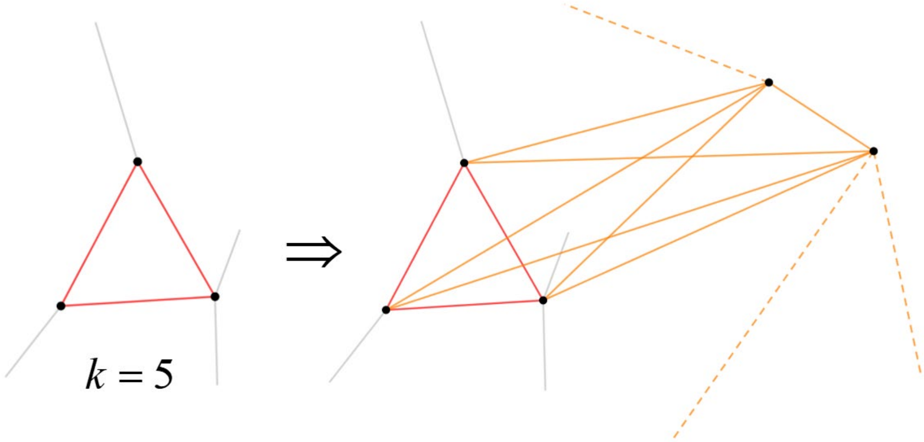

图 15　构造单色 k 团

但我们怎么限制这些添加的边的颜色都一致呢？根据引理 1，我们可以构造一个三角形，再将所有构造的边与这个三角形“连接”，从而保证这些边的颜色都相同。

但这样还不够，这只能保证当 G 中**两种颜色**都有单色三角形时，G' 出现单色 k 团，不能排除 G 只有**一种颜色**出现单色三角形的情况。如图所示，这是一个反例。

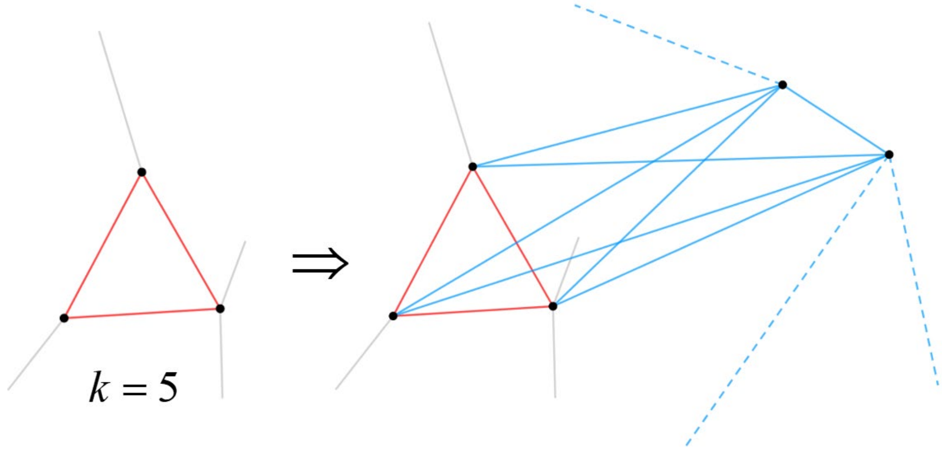

图 16　一种使得 G 虽然有单色三角形，但 G' 没有单色 k 图的着色方案

从而我们想到，构造两组 $k-3$ 团，赋予他们不同的颜色，再将这些点与 G 中所有点连接为边，从而使得 G 中无论出现哪种颜色的单色三角形，G' 中都会出现相应颜色的单色 k 团。

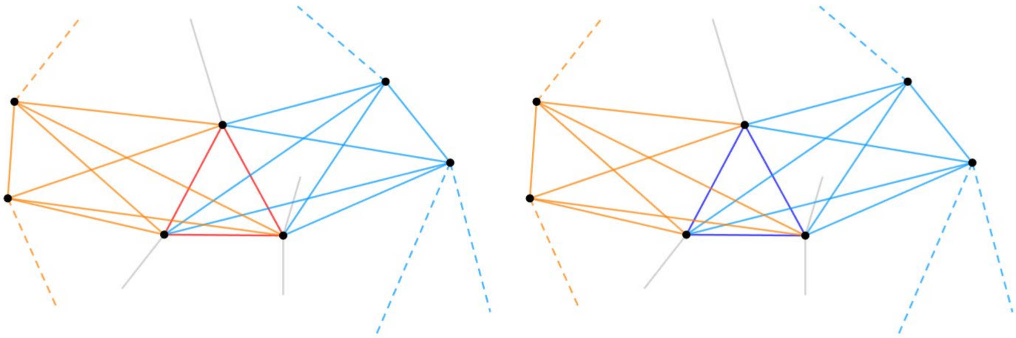

图 17　保证单色 k 团的出现

为了实现使得两组 $k-3$ 团的颜色不同，自然而然地，我们就使用了引理 2 中构造的组件，使用上三角与下三角进行“连接”，从而达成我们的目标。而实际上，我们可直接使用组件的上三角和下三角来代替我们先前单独构造的三角形，进而得到了我们的归约。

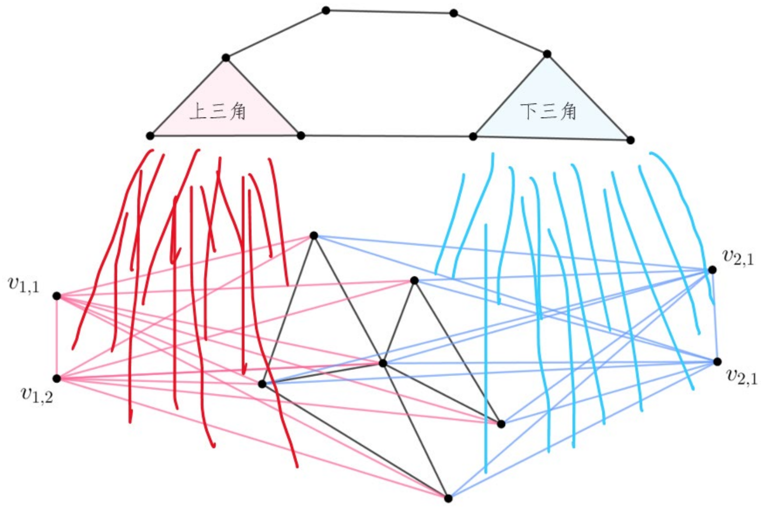

图 18　引理 2 组件控制着两个团，使它们一定有不同的颜色

以下证明归约的正确性：

对任意 MT 问题实例 $\langle G\rangle$，$G=(V,E)$，其归约结果为 $f(\langle G\rangle)=\langle G'\rangle$，$G'=(V',E')$，$C_1=(V_1,E_{C_1})$、$C_2=(V_2,E_{C_2})$、$E_1$、$E_2$、$H$ 定义同归约中的定义。

$\Rightarrow$：即证：若 G 存在 2-可着色方案，则 G' 存在 2-k 可着色方案。

只要让 G' 的着色方案与 G 的有拓展关系，并保证是关于组件 H 和所有由“连接”添加的 K_5 的 2-可着色方案即可。

$\Leftarrow$：即证：若 G' 存在 2-k 可着色方案，则 G 存在 2-可着色方案。

（归约失败，无法保证组件 H 和所有由“连接”添加的 K_5 是被 2-着色的，从而无法保证 E_1、E_2 颜色的一致性、互异性）