计算模型①
Models of Computation

刘显敏
liuxianmin@hit.edu.cn
海量数据计算研究中心
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

计算理论—2024年春

什么是计算模型

2

什么是计算的理论模型
- 有效计算的严格数学定义
- 模型独立于具体的机器

为什么需要计算模型
- 算术公理化⇨希尔伯特第二问题⇨证明论、元数学⇨哥德尔不完备定理（1931）
- 丢番图方程的可解问题⇨希尔伯特第十问题⇨算法⇨不可判定性⇨马蒂亚塞维奇（1970）
- 哪些问题是可以计算的、多久可以算完等
- 随机性、量子计算、并行计算等

在介绍计算模型之前

3

什么是问题
- 3+5=?
- 计算a+b，其中a、b是两个整数；
- 78236是否可以被234整除?
- a是否可以被b整除，其中a、b是两个整数；
- 哥德巴赫猜想是否成立?
- 将大于2的整数x拆分为x=a+b+c，其中abc均为质数；

- 判定 vs 计算 vs 枚举 vs 优化

图灵机的直观想法

4

回想一下如何计算加法和乘法

确定图灵机

5

阿兰·图灵于1936年提出**图灵机**，实现如下直观想法
- 有一个双向无穷带（infinite tape）存储信息
- 有一个带头（tape head）可以在带上移动、读写
- 无穷带用输入初始化，带头上有状态标记
- 如果需要存储信息，可以在带上写
- 如果要读取某位置的信息，带头需先移动到该位置
- 计算过程由一系列的移动和读写操作构成
- 计算过程中带头的状态不断改变
- 计算可以停止
- 计算也可以一直进行下去，不停机（死机）

确定图灵机

6

定义 确定图灵机(Deterministic Turing Machine, DTM)

M由7元组构成，记作$M=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,B,F)$，其中
- ➢ Q是有穷状态集合
- ➢ Σ是有穷输入符合集合
- ➢ Γ是有穷的带上符号集合，显然$\Sigma\subseteq\Gamma$
- ➢ q_0是图灵机的起始状态
- ➢ $F\subseteq Q$是停机状态集合
- ➢ $B\in\Gamma\setminus\Sigma$是空字符
- ➢ δ是形如$(Q\setminus F)\times\Gamma\rightarrow Q\times\Gamma\times\{R,L\}$的转移函数

转移函数是核心
- $\delta(p,a)=(q,b,L)$定义了一个动作
- 当机器处于状态p，并且带头所处的格子(cell)内容为a时，机器将a改成b，进入状态q，带头左移(L)

确定图灵机

7

输入$w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \Sigma^*$，图灵机M的计算方式如下

❶初始化时，w存储在M的连续n个格子里，其余部分是空白符，带头处于w_1格子处，状态为q_0

❷M开始运行后，根据δ的规则执行计算动作，计算一直持续，直到M进入停机状态，停机

❸如果M无法进入停机状态，M将永远一直运行下去

❹如果M无法找到可使用的转移规则，M停机

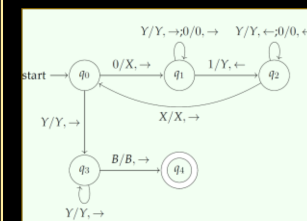
一个例子

8

- $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$

$\delta(q_0, 0) = (q_1, X, \rightarrow)$
$\delta(q_0, Y) = (q_3, Y, \rightarrow)$
$\delta(q_1, 0) = (q_1, 0, \rightarrow)$
$\delta(q_1, 1) = (q_2, Y, \leftarrow)$
$\delta(q_1, Y) = (q_1, Y, \rightarrow)$
$\delta(q_2, 0) = (q_2, 0, \leftarrow)$
$\delta(q_2, Y) = (q_2, Y, \leftarrow)$
$\delta(q_2, X) = (q_0, X, \rightarrow)$
$\delta(q_3, Y) = (q_3, Y, \rightarrow)$
$\delta(q_3, B) = (q_4, B, \rightarrow)$

状态转移图



图灵机的计算描述

9

图灵机计算过程的瞬时描述(ID)

$$X_1 X_2 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n$$

- 图灵机的当前状态是q
- 图灵机的带头正在扫描X_i
- 图灵机带上的内容为$X_1 X_2 \cdots X_{i-1} X_i X_{i+1} \cdots X_n$

瞬时描述的移动，即图灵机的一步计算，表示为$\vdash$

- 如果有$\delta(q, X_i) = (p, Y, \leftarrow)$，那么有如下移动
  $X_1 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n \ \vdash X_1 \cdots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \cdots X_n$
- 特殊情况，瞬时描述的长度发生变化
  - 当$i = 1$时，$q X_1 X_2 \cdots X_n \vdash pBYX_2 \cdots X_n$
  - 当$i = n$且$Y = B$时，$X_1 X_2 \cdots X_{n-1} q X_n \vdash X_1 X_2 \cdots X_{n-2} p X_{n-1}$

一个例子

图灵机的计算描述

10

图灵机计算过程的瞬时描述(ID)

$$X_1 X_2 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n$$

- 图灵机的当前状态是q
- 图
- 图

多次移动（多步计算）可以表示为
$\alpha_1 q \beta_1 \vdash^* \alpha_2 p \beta_2$或$\alpha_1 q \beta_1 \vdash_M^* \alpha_2 p \beta_2$

瞬

- 如
  $X_1 \cdots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \cdots X_n \ \vdash X_1 \cdots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \cdots X_n$
- 特殊情况，瞬时描述的长度发生变化
  - 当$i = 1$时，$q X_1 X_2 \cdots X_n \vdash pBYX_2 \cdots X_n$
  - 当$i = n$且$Y = B$时，$X_1 X_2 \cdots X_{n-1} q X_n \vdash X_1 X_2 \cdots X_{n-2} p X_{n-1}$

一个例子

图灵机的语言

11

给定图灵机M和字符串$w \in \Sigma^*$，如果存在M的瞬时描述序列$ID_1, ID_2, \ldots, ID_k$满足下列条件

- ID_1是图灵机M初始状态对应的瞬时描述
- ID_k对应图灵机M的某个接受状态
- 对任意$i \in [1, k-1]$，$ID_i \vdash ID_{i+1}$

则称M接受w

定义 图灵机M的语言(M识别的语言)

M接受的字符串集合称为M的语言，或M识别的语言，记作$L(M)$。

- 例子

$\{0110\}$ $\{0^n 1^n | n > 0\}$ $\{w\#w | w \in \{0,1\}^*\}$ $\{0^{2^n} | n \geq 0\}$

图灵机形式化定义的讨论

12

- 是否可以引入"拒绝"状态?
- 是否可以只有一个停机状态?
- 是否可以在移动动作中加入"停在原地"?
- 是否可以删除L(←)或者R(→)移动?
- 是否可以"无穷化"?
- 单向无穷带可以吗?
- 有穷带可以吗?
- ……

图灵机编程

状态中存储

多道(track)

子程序

计算模型②

Models of Computation

刘显敏
liuxianmin@hit.edu.cn

海量数据 计算研究中心
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY

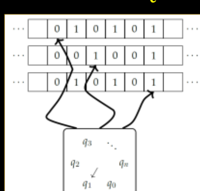
计算理论—2024年春

图灵机的变形

多带图灵机

- 图灵机有多条带，都有各自的带头
- 初始化时，输入在第一个带上，其它空白
- 转移函数

$$\delta: Q \times \Gamma^k \to Q \times \Gamma^k \times \{L, R, S\}^k$$



定理 多带与单带图灵机等价

令N是k-带图灵机，L(N)是N所识别的语言，则存在单带图灵机M满足L(M)=L(N)。

单带图灵机模拟多带图灵机
时间代价：平方级别

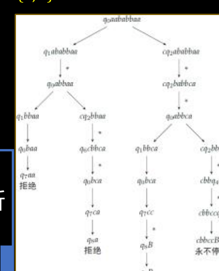
图灵机的变形

非确定图灵机(不确定图灵机)

- 转移函数

$$\delta: Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R\}}$$

- 非确定图灵机有多种可能计算过程，对应多个瞬时描述转移
- w被接受，当且仅当存在转移序列使得$q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$，$p \in F$



定理 确定与非确定图灵机等价

令N是非确定图灵机，L(N)是N所识别的语言，则存在确定图灵机M满足L(M)=L(N)。

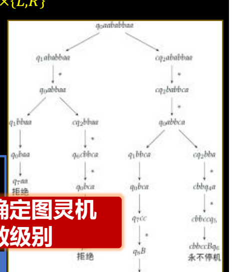
图灵机的变形

非确定图灵机(不确定图灵机)

- 转移函数

$$\delta: Q \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma \times \{L, R\}}$$

- 非确定图灵机有多种可能计算过程，对应多个瞬时描述转移
- w被接受，当且仅当存在转移序列使得$q_0 w \vdash^* \alpha p \beta$，$p \in F$



定理 确定与非确定图灵机等价

令N是非确定图灵机，L(N)是N所识别的语言，则存在确定图灵机M满足L(M)=L(N)。

确定图灵机模拟非确定图灵机
时间代价：指数级别

图灵机的其它变形

- 单向无穷带图灵机
- 多栈图灵机
- 计数图灵机
- 枚举图灵机

与标准图灵机等价

其它计算模型-随机访存图灵机

19

instruction	operand	semantics
load	j	$R_0 := R_j$
load	$= c$	$R_0 := c$
add	j	$R_0 := R_0 + R_j$
add	$= c$	$R_0 := R_0 + c$
sub	j	$R_0 := \max\{R_0 - R_j, 0\}$
sub	$= c$	$R_0 := \max\{R_0 - c, 0\}$
half		$R_0 := \lfloor \frac{R_0}{2} \rfloor$
jump	s	$\kappa := s$
jpos	s	if $R_0 > 0$ then $\kappa := s$
jzero	s	if $R_0 = 0$ then $\kappa := s$
halt		$\kappa := 0$

与标准图灵机等价

其它计算模型-文法

20

- 一个文法由4元组构成$G = (V, \Sigma, R, S)$，V是字母集，Σ是终结符集，$S \in V \setminus \Sigma$是起始符，R是生成规则集合。

$$R \subseteq (V^*(V \setminus \Sigma)V^*) \times V^*$$

$$(u, v) \in R \text{ 记作 } u \to v$$

- 从符号S开始生成的字符串集合就是文法生成的语言
- 一个例子

与标准图灵机等价

生成语言$\{a^n b^n c^n | n \geq 1\}$的文法

$G = (V, \Sigma, R, S)$，$V = \{S, a, b, c, A, B, C, T_a, T_b, T_c\}$，$\Sigma = \{a, b, c\}$，$R$:

- $S \to ABCS$, $S \to T_c$
- $CA \to AC$, $BA \to AB$, $CB \to BC$
- $CT_c \to T_c c$, $CT_c \to T_b c$, $BT_b \to T_b b$, $BT_b \to T_a b$, $AT_a \to T_a a$
- $T_a \to \epsilon$

其它计算模型-函数

21

- 基本函数(ℕ)
  - 零函数：$zero_k(x_1, \dots, x_k) = 0$
  - 取值函数：$id_{k,j}(x_1, \dots, x_k) = x_j$
  - 后继函数：$succ(x) = x + 1$
- 函数的合成(composition)
  - 令函数$g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$，函数$h_1, \dots, h_k$形如$\mathbb{N}^l \to \mathbb{N}$，两者的合成

$$f(x_1, \dots, x_l) = g(h_1(x_1, \dots, x_l), \dots, h_k(x_1, \dots, x_l))$$

- 函数的递归(recursion)
  - 令函数$g: \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$，函数$h: \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$，两者递归定义的函数

$$f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(x_1, \dots, x_k, m + 1) = h(x_1, \dots, x_k, m, f(x_1, \dots, x_k, m))$$

- 上述为基础递归函数

其它计算模型-函数

22

- 最小化函数
  - 令函数$g: \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$，$g$的最小化函数如下

$$f(x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} \min\{m | g(x_1, \dots, x_k, m) = 1\} \\ \quad 0 \text{ 如果}m\text{不存在} \end{cases}$$

- 上述为μ-递归函数

与标准图灵机等价

Church-Turing Thesis

23

- 1936-图灵

  图灵机是“任意可能计算”的模型
- 合理的计算模型都是等价的，即与图灵机等价
- 图灵机与现代计算机能力相同，等价

  算法等同于图灵机算法
- 丘奇-图灵论题并不是严格的数学表达，无法证明
- 丘奇-图灵论题的正确性来自于科学界的广泛认同

图灵机编码

24

- 程序即数据（冯诺依曼结构）
- 图灵机如何表示为字符串

图灵机编码

- 简化假设：处理{0,1}字符串，q_0为初始状态，q_1为接受状态

$$M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_1\})$$

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$，令$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B, D_1 = L$，$D_2 = R$

- 将$\delta(q_i, X_j) = (q_k, X_l, D_m)$编码为$0^{i+1}10^j10^{k+1}10^l10^m$
- 将图灵机M编码为(假设δ有r条转移规则)如下形式，这里$code_i$是δ中第i个转移规则的编码

$$\langle M \rangle = code_1 11 code_2 11 \dots 11 code_r$$

- 图灵机均可以编码为01字符串，则图灵机可与整数对应
  - 若M的编码是第i个串，称M是第i个图灵机，记作M_i
- 并非所有整数都对应一个图灵机 此时M_i =? $L(M_i)$ =?

图灵机编码

25

- 程序即数据（冯诺依曼结构）
- 图灵机如何表示为字符串

图灵机编码

- 简化假设：处理{0,1}字符串，q_0为初始状态，q_1为接受状态

$$M = (Q, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_1\})$$

$Q = \{q_0, q_1, \dots, q_n\}$，令$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = B, D_1 = L,\ D_2 = R$

$\delta(q_0, 1) = (q_2, 0, R)$　　$\delta(q_2, 0) = (q_0, 1, R)$

$\delta(q_2, 1) = (q_1, 0, R)$　　$\delta(q_2, B) = (q_2, 1, L)$

$\langle M \rangle =$ **0100100010100110001010100100111**
0001001001010011000100010010010

- 图灵机均可以编码为01字符串，则图灵机可与整数对应
  - 若M的编码是第i个串，称M是第i个图灵机，记作M_i
- 并非所有整数都对应一个图灵机　**此时M_i =? $L(M_i)$ =?**

通用图灵机M_u

26

能否制造一个图灵机模拟其它图灵机的运行?

定理 通用图灵机是存在的。

证明思路 构造通用图灵机(universal Turing machine)M_u

- M_u输入$\langle M, w \rangle$
  1. 检查M的合法性
  2. 在w上模拟M运行，how?
  3. 若M停机，则M_u停机
  4. 若M不停机，则M_u无法停
- M_u接受$\langle M, w \rangle \Leftrightarrow M$接受$w$

M_u有穷控制器

$\langle M \rangle$	w	输入
0100100100101		M的编码
0000000		M的状态
		草稿带

通用图灵机M_u

27

能否制造一个图灵机模拟其它图灵机的运行?

定理 通用图灵机是存在的。

证明思路 构造通用图灵机(universal Turing machine)M_u

- M_u输入$\langle M, w \rangle$
  1. 检查M的合法性
  2. 在w上模拟M运行，how?

M_u有穷控制器

❶ M_u可适用于任意图灵机编码的处理
❷ M_u模拟给定编码对应图灵机的行为
❸ M_u实际上是一台支持编程的图灵机
❹ M_u是现代的通用计算机的理论基础

28

☛ 可计算理论