张宇杰 2022113573 2203101

撰写如下定理的完整证明：

Monochromatic Triangle问题：给定图，是否可以将划分为两个不相交的集合和，使得和均不包含三角形？

1) Monochromatic Triangle问题是NP完全问题；

以下简称Monochromatic Triangle问题为问题，其对应的语言类记为。

1) 证明：

先证：，

算法： ①读取边集，非确定地将划分为两个不相交的边集和；

②判断及中是否含有三角形。具体算法如下：

以为例，伪代码如下：

for (e\_1 in E\_1)

for (e\_2 in E\_1, e\_2 != e\_1)

for (e\_3 in E\_1, e\_3 != e\_1 && e\_3 != e\_2)

if (e\_1, e\_2, e\_3 form a triangle)

return false

return true

其中判断三边是否构成三角形显然是的；

③若和均不含三角形，则输出；否则，输出。

易见该算法是的，从而是多项式时间的。

再证： ，

往证：，

我们定义：

**·2-边着色**：将图的边集划分为两个不相交的边集与，并将中的边染成红色、中的边染成蓝色。

**·单色三角形**：即Monochromatic Triangle，三边颜色相同的三角形。

**·2-可着色**：如果对图，存在一种2-边着色方案，使得中不出现单色三角形，则图是2-可着色的。

**·2-可着色方案**：使得图 2-可着色的那个2-边着色方案。

**·三角形的主色**：若存在图的一个2-可着色方案，根据定义，在该着色方案下，中不出现单色三角形。那么，对于中的任意三角形，一定是由两条红色、一条蓝色（或两条蓝色、一条红色）的边所组成的。称那两条同色边的颜色为该三角形的主色。

根据以上定义，我们可得到问题的另一种定义：

给定图，是否存在2-可着色方案？

下证明该定义与原定义的等价性：

：若存在的划分与，使和均不含三角形，那么将中的边染成红色，中的边染成蓝色，即得到一个2-可着色方案。

（否则，没有得到一个2-可着色方案，那么中就存在一个单色三角形，不妨设其三条边均为红色，那么该三角形的三条边就都在中，从而中就出现了一个三角形，矛盾）

：若存在一个2-可着色方案，那么将红色边之集记为，将蓝色边之集记为，就有和均不含三角形。

（否则，“和均不含三角形”为假，不妨设包含了一个三角形，从而该三角形的三条边就都是红色的，从而包含一个单色三角形，与该方案是2-可着色方案矛盾）

我们给出以下引理：

引理1：

在的一个2-可着色方案中，该的任意一个三角形的主色，与该三角形的对边（即在该的五个顶点中，除去该三角形的三个顶点后，剩下的两个顶点组成的边）的颜色相同（见图1）。

反之，在一个中，若指定了其中一个三角形的主色，那么总能找到一个满足该条件的的2-可着色方案（见图2）。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图1 引理1上半部分图示

证明：

对前半部分，对的任意一个2-可着色方案，我们注意到，没有顶点会与三条及以上的同色边相接（否则，不妨设对于顶点，边、、都是红色的。那么，边只能是蓝色的，否则三角形形成单色三角形，同理边、只能是蓝色的。从而三角形是单色三角形，与2-可着色矛盾），从而，每个顶点都必须正好与两条红色边及两条蓝色边相接。

不失一般性，我们假设在该2-可着色方案中，三角形的主色是红色，往证边必须是红色的。对边、、的着色情况，只有三种可能：

①边、是红色的，边是蓝色的。从而边、是蓝色的（根据上述结论）。进而边是红色的（否则三角形成为单色三角形）。

②边、是红色的，边是蓝色的。从而边、是蓝色的（根据上述结论）。进而边是红色的（否则三角形成为单色三角形）。

③边、是红色的，边是蓝色的。从而边、是蓝色的（根据上述结论）。进而边是红色的（否则三角形成为单色三角形）。

综上，边必须是红色的。

对后半部分，不失一般性，我们指定三角形的主色为红色，对于边、、的三种染色情况，我们都能给出对应的2-可着色方案，如下图所示：

图表, 雷达图

描述已自动生成

图2 引理1下半部分图示

（证毕）

引理2：

对下图所示的组件，该组件由6个：，，，，与组成，

图表, 雷达图

描述已自动生成

图3 引理2组件的完全体

图表, 雷达图

描述已自动生成

图4 分别展示引理2组件中出现的6个

我们断言，在该组件的2-可着色方案中，三角形与三角形的主色一定是不同的。称该组件中的三角形为其上三角、三角形为其下三角。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图5 引理2组件的简化图（着色仅表示主色不同）

下证明引理2：

反证：假设存在2-可着色方案，使得上三角与下三角主色相同。

不妨设，在该2-可着色方案中，它们的主色都为红色。从而，由引理1，边，边与边均为红色。进而，由2-可着色定义，边为蓝色；得出三角形的主色为红色，由引理1，边为红色。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图6 引理2证明步骤1

从而，我们考察三角形，只有两种着色方案：边为红色、边为蓝色；或边为蓝色、边为红色。我们分别讨论：

①对于第一种方案，当边为红色、边为蓝色时，根据2-可着色与引理1的约束，关于 的着色只有一种方案（如图7的中图所示）。由边与边均为蓝色，有三角形的主色为蓝色，进而在 中，由引理1，边为蓝色。从而，有三角形的主色为蓝色，进而在 中，由引理1，边为蓝色。这与边为红色矛盾。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图7 引理2证明分支1

②对于第二种方案，当边为蓝色、边为红色时，根据2-可着色与引理1的约束，关于 的着色只有一种方案（如图8的中图所示）。由边与边均为蓝色，有三角形的主色为蓝色，进而在 中，由引理1，边为蓝色。由边与边均为蓝色，有三角形的主色为蓝色，进而在 中，由引理1，边为蓝色。从而，有三角形的主色为蓝色，进而在 中，由引理1，边为蓝色。这与边为红色矛盾。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图8 引理2证明分支2

两个分支都是矛盾的，从而说明不存在2-可着色方案，使得上三角与下三角主色相同。进而在所有2-可着色方案中，三角形与三角形的主色一定是不同的。（证毕）

引理3：

在引理2中，我们证明了组件若存在2-可着色方案，那么其上三角与下三角的主色一定是不同的。我们现说明，这样的2-可着色方案是存在的，并且存在两种不同的方案，一种使得组件的上三角主色为红、下三角主色为蓝，另一种使得组件的上三角主色为蓝、下三角主色为红。

证明是平凡的，只需给出对应的2-可着色方案即可，如图9所示。该图给出了一种使组件的上三角为红、下三角为蓝的2-可着色方案。将颜色反转即可得到一个使组件的上三角为蓝、下三角为红的2-可着色方案。（证毕）

在之后，我们称如图9所示的染色方案为“方案1”，其反转颜色后的方案为“方案2”。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图9 一种使组件的上三角主色为红、下三角主色为蓝的2-可着色方案

Notes：

在接下来的归约中，我们将用引理2中的组件来代表一个变元，让上三角主色为红、下三角主色为蓝的状态表示该变元被赋值为，上三角主色为蓝、下三角主色为红的状态表示该变元被赋值为。

卡通人物

低可信度描述已自动生成

图10 引理2组件设计思路

进而，我们用一个三角形来表示一个子句，用该三角形的三条边分别对应三个文字，一条边为红色当且仅当该边对应文字为，一条边为蓝色当且仅当该边对应文字为。由于我们是从问题进行归约，从而，如果有赋值满足该子句，那么，在这三个文字中，有且仅有一个或两个文字对应为，进而在该子句对应的三角形中，有且仅有一条或两条边为红色，从而该三角形不是单色三角形。这就与归约右侧的问题扯上了关系。

形状, 多边形

描述已自动生成

图11 归约整体思路

回顾我们的目标：证明（使用第二定义），我们作归约：

对，是问题的实例，设其变元集为，，，其中为文字（变元或其否定）。令，其中：

①对每个变元，构造的一个子图，该即为在引理2中描述的组件；

②对每个子句，构造的一个子三角形，其三边分别代表了该子句的三个文字；

③对每个子句中的每个文字，如果其为某个变元的正文字（即），那么，我们将该文字对应的边与变元对应的组件的上三角进行“连接”；否则，为某个变元的负文字（即），那么，我们将该文字对应的边与变元对应的组件的下三角进行“连接”。为了实现这样的“连接”，我们将连接对象“三角”与“边”补全为一个。具体而言，将“三角”与“边”中出现的5个点作为顶点，连接缺失的边，形成一个。

易见该归约可在多项式时间内完成。

图表, 形状, 雷达图, 多边形

描述已自动生成

图12 “连接”操作示意图

通过这样的连接操作，根据引理1，变元与子句之间的赋值关系就被表示了出来。如果一个子句中的正文字被赋值为，那么该文字对应的边就被染为红色，进而对应变元组件的上三角的主色就应为红色，反之亦然。

以为例，其对应的图如图所示：

图表

描述已自动生成

图13 一个归约的例子

下证明该归约的正确性：

对任意问题实例，其归约结果：

：即证，对，若存在满足要求的赋值，那么就存在一个2-可着色方案。

设存在满足要求的赋值，那么：

①对于中的每一个子句，都会至少有一个文字赋值为、一个文字赋值为。那么，将赋值为的文字对应的边染成红色，将赋值为的文字对应的边染成蓝色，从而在每个子句对应的三角形中，都至少有一条红色边与一条蓝色边，从而在这些三角形中不存在单色三角形。

②对于每一个变元对应的组件，如果该变元赋值为，就使用引理3中的“方案1”对其染色，若赋值为，就使用引理3中的“方案2”进行染色。这样，在这些组件中，也不存在单色三角形。

③对于那些在“连接”操作时构造的，由于我们将正文字连接到了上三角，将负文字连接到了下三角，这样，当变元赋值为时，其上三角主色为红，对应正文字被满足，文字对应边也为红，是一致的；其下三角主色为蓝，对应负文字不被满足，文字对应边也为蓝，也是一致的。变元赋值为的情况也是类似。（如果颜色不一致，根据引理1前半部分，就不存在2-可着色方案）那么，根据引理1的后半部分，我们就可以将这些进行染色，使之不存在单色三角形。

现说明，上述三种情况覆盖到了整个图中的所有三角形：如果我们先不考虑所有“连接”的操作，那么中就只是单纯的由一些独立、不相交的子句三角形及变元组件所组成，这些子图中的所有三角形已经在情况①、②中覆盖到了。现在我们只要说明，由所有“连接”操作所增加的三角形，在情况③中被覆盖到。

对于一次单纯的连接，如图，显然所有增加的9个三角形都包含在这个之中，被情况③所覆盖；

图表, 雷达图

描述已自动生成

图14 一对一的连接

对于一次“三角形”与“边”一对多的“连接”，如图所示，所有增加的三角形，要么是由“三角形”的边、、（关键边）加上一个在“边”中的点、、、……（关键点）所组成的，这些三角形，根据其组成的“关键点”，可分配其属于的，如，……，进而这些三角形都被包括在这些中；要么是由“边”、、……（关键边）与“三角形”的顶点、、（关键点）组成，根据其组成的“关键边”，可分配其属于的，如，……，也被包括在这些中。

图表, 雷达图

描述已自动生成

图15 一对多的连接

进而，增加的所有三角形都被包括在添加的之中

从而，整个图中都不存在单色三角形，我们的染色方案是一个2-可着色方案。

：若存在一个2-可着色方案，那么对就存在满足要求的赋值。

根据每个变元对应组件的着色情况，我们就可以给出一个满足要求的赋值（上三角主色为红、下三角主色为蓝，赋值为；上三角主色为蓝、下三角主色为红，赋值为）。 这是因为，中不存在单色三角形，那么对每个子句对应的三角形中，都至少有一条红色边与一条蓝色边，从而该子句至少有一个文字赋值为、一个文字赋值为，满足要求。

同样为例，下图展示了归约的正确性：

图表, 雷达图

描述已自动生成

图16 归约的正确性

（证毕）