合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A） 参 考 答 案

2022～2023 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）________ 考试日期 2023 年 3 月 5 日 16:20—18:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

一、填空题(每小题 3 分)

1. 0.6； 2. e^{-3}； 3. $\frac{1}{4}$； 4. $\frac{16}{45}$； 5. $\frac{\sqrt{2\pi}}{2n}$.

二、选择题(每小题 3 分)

1. D； 2. B； 3. C； 4. A； 5. C.

三、(10 分)【解】设 A_1 表示小王骑电瓶车上班，A_2 表示小王坐公交车上班，B 表示小王准时到岗，则

$P(A_1)=0.8$，$P(A_2)=0.2$，$P(B|A_1)=0.7$，$P(B|A_2)=0.3$.

（1）由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.8\times0.7+0.2\times0.3=0.62$.

（2）由贝叶斯公式得 $P(A_2|B)=\dfrac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\dfrac{0.2\times0.3}{0.62}=\dfrac{3}{31}$.

四、(14 分)【解】(1) 由题意 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 kx\mathrm{d}x=\frac{1}{2}k=1$，解得 $k=2$；

所以 $$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) $F(x)=P\{X\le x\}=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，

当 $x<0$ 时，因为 $f(x)=0$，故 $F(x)=0$；

当 $0\le x<1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^x 2tdt=x^2$；

当 $x\ge1$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_0^1 2tdt=1$；

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge1\end{cases}$$

(3) $G(y)=P\{Y\le y\}=P\{X+1\le y\}=P\{X\le y-1\}=F(y-1)$

$$=\begin{cases}0, & y<1,\\ (y-1)^2, & 1\le y<2,\\ 1, & y\ge2.\end{cases}$$

五、(14 分)【解】（1）根据二维随机变量的性质得 $\frac{1}{4}+a+b+\frac{1}{6}=1$，又因为 $F(0,1)=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{1}{4}+a=\frac{1}{2}$，联立解得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{3}$；

（2）X 和 Y 的联合分布律和边缘分布律如下表

Y \ X	0	1	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

因为 $\frac{7}{12}\times\frac{1}{2}\ne\frac{1}{4}$，所以 X 和 Y 不独立；

（3）当 $X=1$ 时，Y 的条件分布律为

$$(Y\mid X=1)\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

所以 $P(Y>0\mid X=1)=P(Y=1\mid X=1)=\frac{1}{3}$.

六、(12 分)【解】(1) 如果 X 和 Y 相互独立，有 $E(XY)=EXEY$，此时有

$Cov(X,Y)=E(XY)-EXEY=0, D(X+Y)=DX+DY=5,$

$$\rho_{UV}=\frac{Cov(X,X+Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{DX+Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}}=\frac{DX}{\sqrt{DX}\sqrt{DX+DY}}=\frac{\sqrt{5}}{5}；$$

（2）如果 X 和 Y 的相关系数为 -0.5，则 $Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{DX}\sqrt{DY}=-0.5\times1\times\sqrt{4}=-1$，

合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A） 参 考 答 案

2022～2023 学年第 一 学期 课程代码 1400091B 课程名称 概率论与数理统计 学分 3 课程性质:必修 考试形式: 闭卷

专业班级（教学班）________ 考试日期 2023 年 3 月 5 日 16:20—18:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名________

$\rho_{UV}=\dfrac{Cov(X,X+Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}}=\dfrac{DX+Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{D(X+Y)}}=\dfrac{1-1}{\sqrt{1}\times\sqrt{3}}=0$.

七、**(14 分)**【解】（1）由于 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$,

令 $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}$，解得 $\theta=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$，所以参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}_M=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$.

（2）似然函数为 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x;\theta)=\prod_{I=1}^{n}\left(\theta x_i^{\theta-1}\right)=\theta^n(x_1x_2\cdots x_n)^{\theta-1}$，

$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$,，令 $\dfrac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$,

解得 $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，所以参数 θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}_L=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

八、**(6 分)**【解】因为 $X\sim N(0,1)$，故 $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$，$(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$，且 $\overline{X}$ 与 S^2 独立，所以

$$DT=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=D\left(\overline{X}^2\right)+\frac{1}{n^2}D(S^2)=\frac{1}{n^2}D(n\overline{X}^2)+\frac{1}{n^2(n-1)^2}D[(n-1)S^2]$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n^2}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{2}{n(n-1)}.$$