参数、变量与方程（建模 · 探索）

本讲义聚焦于培养学生的代数感悟与直觉，让学生从小学里用数字运算的观念逐渐向用字母运算靠拢. 讲义以一元一次方程为背景，探索了方程的解的性质、各类方程、方程的实际应用，并结合动点问题培养学生的数形结合思维与用方程解决问题的技能.

【知识回顾】

1. 若关于 x 的方程 $ax-3=0$ 有正整数解，那么 $a=$ ________________.
2. 若 $x=2$ 是关于 x 的方程 $2a-b+3x=1$ 的解，求关于 y 的方程 $-4a-\frac{y}{2}+2b=1$ 的解.

3. 求关于 x 的一元一次方程 $\frac{9x^{|n-3|}}{4}+\frac{4(3+m)x^2}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{x+1}{2n}$ 的解.

4. 一位男生和一位女生在跑道上从同一起点同方向同时开始跑步. 设距离他们起跑经过的时间是 t.

（1）女生以固定的速度 v_1 跑步，那么 t 时刻她跑的路程是 ________________.

（2）男生跑步的速度 v_2 逐渐加快. 在 $t=0$ 时刻，$v_2=0$，此后每经过单位时间 v_2 增加 a. 男生在时刻 t 的速度是多少？经过多少时间后男生的速度等于女生的速度？

（3）经计算，在（2）的条件下，男生经过 t 时间总共跑了 $\frac{a}{2}t^2$ 的路程. 列方程，求出男生追上女生的时刻 t.

【参数的世界】牛顿："我研究了力与物体运动的关系 $F=ma$（F 为力，m 为物体的质量，a 为物体的加速度），发现了力不是使物体运动的原因，而是改变物体运动状态的原因." 欧拉："我研究了复利的计算，发现 $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$（$A$ 为本利和，P 为本金，r 为年利率，n 为每年计息次数，t 为年数），并由此找到了自然常数 e，这是个无理数，约等于 2.718."

例 1 用各种字母变量作为参数，用含参数的方程描述我们的世界.

（1）超市促销，商品打折出售.

（2）教室翻新，需要粉刷墙壁和房顶.

（3）两同学在环形跑道以固定速度反向而行，一位先出发.

练习 1 续例 1.

（1）对于每个情境，在其他参数已知，只有一个参数未知的情况下，分别将各个参数作为未知量，其他参数作为已知量，用含已知量的代数式表达各个未知量.

（2）尝试用实际情境解释各个未知量的表达式的含义. 之后，体会方程在处理这类问题的优越性.

练习 2 你是一个文具店的店主. 昨天，你按照批发价 c 从批发商进了一批笔记本，然后准备按零售价 p 卖出.

(1) 为了获利，p 与 c 之间一定存在 ________________ 的数量关系.

(2) 若你的文具店一天可以卖出 n 本笔记本，那么你一天在笔记本上的盈利是 ________________.

(3) 根据你多年的经验，当笔记本定价 p 升高时，卖出的数量会减少. 若卖出数量 n 是一个关于 p 的二项式 $n = n_0 + kp$（n_0, k 为参数，$n_0 > 0$），那么 k 是 ________（选填“正数”“负数”）.

(4) 在 (3) 的条件下，设你一天在笔记本上的盈利是 y，那么 y 关于定价 p 的表达式是 ________________，这是一个关于 p 的 ________ 次多项式.

(5) 在 (4) 的条件下，若某天你在笔记本上的盈利 $y = 0$，这是因为你把价格定为了 ________ 或 ________（提示：令 $y = 0$，解 (4) 中关于 p 的方程）. 如何解释这两种情况的实际原因?

(6) 你根据自己多年的经验估计了参数 n_0 与 k 的值. 现在，(4) 中的盈利 y 可以写为一个只含有定价 p 这个变量的表达式. 现在，你想知道究竟把 p 定为多少，才能获得最大的盈利 y. 你会用什么方式确定一个可能让你盈利最多的定价?

【含参数的方程】我们知道，一元一次方程的一般形式是 $ax + b = 0\ (a \neq 0)$. 当一个方程中只有一个未知数 x 时，我们可以轻松求出 x 的值. 想用一元一次方程解决实际问题时，也必须要知道系数 a 与常数 b 的值. 但是，我们也会遇到参数 a 或 b 不确定的情况，就像练习 2 中的情境一样. 我们下面来具体研究含参数的方程.

例 2 已知关于 x 的方程 $\dfrac{kx+a}{3} = 1 - \dfrac{2x+bk}{6}$ 中，a 与 b 为定值，且无论 k（$k \neq -1$）的值是多少，方程的解恒为 $x = 1$.

(1) 求 a, b 的值.

(2) 为什么必须有 $k \neq -1$ 的条件?

练习 3 我们在课堂上证明过，一元一次方程必有解，且解必定唯一.

(1) 已知关于 x 的方程 $4k(x+2) - 1 = 2x$ 无解，求 k 的值. 有唯一解呢?

(2) 已知关于 x 的方程 $2a(x-1) = (5-a)x + 3b$ 有无穷多解，求 a 和 b 的值.

练习 4 一群鸡和一群兔在同一个笼子里. 笼子里一共有 30 个头，100 只脚. 问：笼子里一共有多少只鸡，多少只兔? 分别用假设法和一元一次方程解决此问题.

例 3 续练习 4. 为了解决此问题，我们也可以很自然地设鸡有 x 只，兔有 y 只.

（1）根据题意，列出两个同时含有 x 和 y 这两个变量的方程.

（2）观察所列的两个方程，你有什么办法可以解出 x 和 y 的值？将你解此方程组的步骤与完成练习 4 时所列的一元一次方程做比较，你有什么发现？

（3）方程组是由若干个方程组成的一个整体. 由两个二元一次方程构成的二元一次方程组的一般形式为 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，其中包含了 2 个未知数与 6 个参数. 写出（1）中二元一次方程组的 6 个参数的值.

（4）用两种方式（代入消元法、加减消元法）求解二元一次方程组 $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ -x+4y=-3 \end{cases}$.

（5）尝试分别求解二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=10 \\ -\dfrac{2}{3}x+y=-\dfrac{10}{3} \end{cases}$ 与 $\begin{cases} 2x-3y=10 \\ -\dfrac{2}{3}x+y=-3 \end{cases}$. 你发现了什么？

练习 5 现有二元一次方程组 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$.

（1）若方程组有唯一解，尝试用加减消元法求出方程组的解.

（2）观察（1）的结果. 方程组的系数满足什么条件时，方程组的解唯一？

例 4 探索含有绝对值的方程.

（1）解方程：$\left|2x-\dfrac{1}{2}\right|-1=0$.

（2）用分类讨论的思想解方程：$5|2x-1|-2=3|2-x|$.

（3）先观察，再解方程：$3|3x-2|-6=-|3x-2|$.

（4）分别用分类讨论和绝对值的方法解方程：$\max\{x+1,\ 2x-3\}=2x$.

（5）分别用分类讨论和绝对值的几何意义解方程：$|x-2|+|x-1|=4$.

【动点问题】方程利用等式，建立了变量与常量之间的等量关系. 如果一个方程含有一个以上的未知数，那么这个多元方程就隐含决定了各个未知数间的关系. 例如，从二元方程 $x+y=0$ 可知，对任何一个 x 的值，y 的取值都只能是 x 的相反数，即 $y=-x$. 由此看出，多元方程可以用来刻画多个变量间的关系，称之为“函”. 我国清代数学家李善兰在翻译《代数学》(1895 年）一书时, 把“function”一词译为“函数”:“凡式中含天，为天之函数”. 在此我们给出对于一元函数的简单定义：若对于变量 x 的每个取值，变量 y 都有唯一的值与之对应，则称 y 是 x 的函数，就像练习 2 中盈利是定价的函数一样. 简单地说，一个变量关于其他变量的表达式通常就可以称之为函数. 我们以后要学习的所有数学知识几乎都离不开函数，毕竟它充分刻画了变量间的关系；而函数本身就可以是方程的形式，由此又可知方程的重要性. 下面，我们研究一类“动点问题”，初步感受函数的意义.

练习 6 数轴上有一个动点 P，它初始时所处的位置（坐标）是 x. 初始时刻 $t=0$（单位：秒）.

（1）如果点 P 向右移动了 1 个单位长度，求点 P 现在的坐标.

（2）如果点 P 在数轴上移动了 a 个单位长度（a 为负代表向左移动），求点 P 现在的坐标.

（3）如果点 P 从 $t=0$ 时刻起按照每秒 v 个单位长度的速度向左移动，求点 P 在 $t=2$ 秒时的坐标.

（4）如果点 P 从 $t=0$ 时刻起按照每秒 v 个单位长度的速度向右移动，求点 P 在 t 时刻的坐标表达式.（这就是坐标关于时间 t 的函数）

例 5 数轴上有动点 P 与动点 Q，它们在初始时的坐标分别是 x_0, y_0 $(x_0 \neq y_0)$. 初始时刻 $t=0$（单位：秒）.

（1）$t=0$ 时两点间的距离是多少?

（2）$t=0$ 时线段 PQ 的中点坐标是什么？两个三等分点的坐标呢?

（3）若 $x_0=4, y_0=-2$，点 P 以 1 个单位长度每秒的速度向左移动，点 Q 以 2 个单位长度每秒的速度向右移动. 当 t 是多少时，两点相遇?

（4）在（3）的条件下，当 t 是多少时，两点的距离是 2？

（5）在（3）的条件下，设 P、Q 两点的中点为 M. M 什么时候出现在负半轴上?

（6）在（4）的条件下，t 是多少时，M 到原点的距离是 Q 到原点的距离的 2 倍?

（7）总结解题方法：这类动点问题只要求出每个点在时刻 t 时的坐标表达式，即坐标对于时间的 ________，之后列出方程即可求解. 在必要时刻，需要分类讨论.

例 6 数轴上两点 A 和 B 的坐标分别为 $-1, 3$. 点 P 为一动点. 从 $t=0$（单位：秒）时刻开始，点 A、点 B 分别以 2 个单位长度/秒、1 个单位长度/秒的速度向右移动.

（1）在 $t=0$ 时刻，若 $AP:BP=2:1$，求点 P 的坐标.

（2）若运动过程中点 P 始终与点 A、点 B 保持 $AP:BP=2:1$ 的关系，求时刻 t 点 P 的坐标.

（3）在 $t=0$ 时刻，是否存在点 P 使得 $PA+PB=6$？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.

（4）若点 P 从 $t=0$ 开始，以 6 个单位长度/秒的速度从原点向左移动，遇到点 A 时立即反弹，保持同样的速度继续向右移动，遇到点 B 时再次反弹，并不停在 A、B 间往返. 当 A、B 两点重合时，点 P 移动的总路程是多少?

【课后练习】

1. 一个通信员需要在规定时间内骑自行车把信件送到目的地. 若每小时骑 15 千米，可早到 24 分钟；若每小时骑 12 千米，则迟到 15 分钟. 求送信的规定时间和路程.

2. 课上我们尝试求解了一些含有绝对值的方程. 继续探索：

（1）用分类讨论和绝对值的几何意义分别解方程：$|x+3|+|x-1|=5$.

（2）若关于 x 的方程 $|x+3|+|x-1|=k$. 当 k 取多少时，方程有无穷多个解？什么时候方程又无解？

（3）当 $x=$ ________ 时，$|x-3|+5$ 有最小值 ________；当 $x=$ ________ 时，$9-\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ 有最大值 ________；

*（4）$|x+1|+|x-2|+|x-6|$ 的最小值是 ________，此时 $x=$ ________.

3. 分式方程. 寻找各个分母的“最小公倍数”，便可以和一元一次方程一样去分母.

（1）尝试求解分式方程：$\dfrac{2}{x+1}+4=\dfrac{3}{2(x+1)}$.

（2）解分式方程 $\dfrac{1}{x+1}+3=\dfrac{7}{3x-2}$ 时，分母的“最小公倍数”是 ____________，去分母后的方程为 ________________，这是一个一元 ________ 次方程.

（3）求解分式方程 $\dfrac{x+2}{2-x}=-\dfrac{4}{x-2}$. 解完后，代入原方程检验. 你发现了什么？

4. 多元一次方程组. 求解这类方程的做法是代入消元法和加减消元法.

（1）列二元一次方程组解决问题：甲、乙两人需要加工 400 个零件. 若甲先加工 1 天，之后两人合作加工 2 天，则还有 60 个未加工；若两人合作 3 天，则可多加工 20 个. 甲、乙两人每天分别加工多少个零件？

*（2）解三元一次方程组 $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=2 \\ x+2y+3z=-1 \end{cases}$.

*（3）先观察，再尝试求解关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 元一次方程组 $\begin{cases} x_1-x_2=a_1 \\ x_2-x_3=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1} \\ x_n+x_1=a_n \end{cases}$.

5. 一元二次方程. 一元二次方程的一般形式是 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$，a, b, c 为常数). 为了便于讨论，我们规定一种新运算：若 $a^2=N$，那么记 $\sqrt{N}=a$ ($a\geqslant 0$). 例如因为 $3^2=9$，所以 $\sqrt{9}=3$.

（1）$\sqrt{36}=$ ____；估计 $\sqrt{82}$ 的值在 ____ 和 ____ 两个自然数之间.

（2）由于 $2^2=4$，$(-2)^2=4$，所以 $\sqrt{4}=2$ 或 -2. 这个说法是否正确?

（3）根据一元二次方程的一般形式，写出下面方程的系数.

$3x^2+4x-5=0$ 中，$a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____.

$-x^2+x=0$ 中，$a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____.

$-4x^2-6=\sqrt{5}x$ 中，$a=$ ____，$b=$ ____，$c=$ ____.

（4）直接写出一元二次方程 $3x^2=27$ 与 $(x-2)(x+1)=0$ 的解.

（5）或许你已经发现了，如果一元二次方程中系数 $b\neq 0$，直接解此方程会很困难. 人们发现了一元二次方程的求根（解）公式：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. 观察求根公式：

当 $b^2-4ac=$ ________ 时，方程有唯一解 x.（严格地说，此时方程有两个相同的解 $x_1=x_2$，原因已在《新视角下的代数式》课后习题 4 中阐释）

当 b^2-4ac________ 时，方程无解.

当 ____________ 时，方程有两个不同的解 x_1 和 x_2.

（6）利用一元二次方程的求根公式解下面的方程（直接写出答案）.

$x^2-2x+1=0$

$x^2+2x=-2$

$3x=2+x^2$

*（7）观察一元二次方程的求根公式，不解方程，直接写出 $2x^2-7x+4=0$ 的两根之和 $x_1+x_2=$ ________.

*（8）已知一元三次方程 $x^3-2x^2-11x+12=0$ 有两根 $x_1=1$，$x_2=4$，求出另外一个根 x_3.

*6. 对于大于 1 的正整数 A，为了求 A 的因数的个数，首先将 A 分解质因数，表示为 $A=p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times\ldots p_n^{a_n}$（$p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ 为互不相同的质数，$a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ 为自然数），那么 A 的因数的个数为 $(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_n+1)$.

（1）求 402192 的因数的个数.

（2）有 60 个不同因数的最小自然数是什么?

（3）小于 200 的有 14 个因数的自然数是什么?

*7. 假设钟面上时针与分针是连续旋转的. 从正午 12 点开始，在接下来时针旋转一周的 12 小时内，什么时刻时针与分针的夹角刚好是直角?（提示：不仅有 3 点和 9 点. 写出时针、分针旋转角度的表达式，即旋转角度关于时间的函数）

8.（1）正三角形每个外角的度数是 ________ 度，于是外角和是 ________ 度.

（2）n 边形的内角和是 ________________ 度，从而对正 n 边形而言，每个内角是 ________________ 度，因此每个外角是 ________________ 度. 通过进一步计算，得出正 n 边形的外角和是 ________ 度.

*（3）证明：任意一个 n 边形的外角和是 360°.

9. 英语老师想设计一个用于自动听写单词的系统，可以根据学生自己的书写速度个性化配置，以满足不同层次的学生的训练需求. 但是，她对于如何测量学生的速度感到困惑，因此向数学老师请教.

（1）如果一个学生书写每个字母平均用时 t，那么书写一个长度为 s 的单词总共用时为 ________.

（2）假如一个七年级学生 A 和一个三年级学生 B 连续书写了相同的若干单词，共 100 个字母，A 比 B 早 1 分钟完成. 求两学生书写速度的等量关系式.

【方案】数学老师提供了如下解决方案：要求每个学生书写 10 个单词，记录每个单词的长度和书写用时（秒）. 记第 i 个单词的长度为 x_i，书写用时为 y_i，总共书写了 n 个单词. 那么，可以估计出该学生书写用时的表达式（书写用时 y 关于单词长度 x 的函数）为 $y = a + bx$，其中

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2}$$

$$a = \bar{y} - b\bar{x}$$

式中 $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$，$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$，求和符号 $\sum$ 的含义见《有理数与无理数的再讨论》.

（3）理解各个参数的含义，回答 $\bar{x}$ 与 $\bar{y}$ 的实际意义.

（4）如果根据计算，某位学生的书写参数是 $a = 1.21$，$b = 2.43$，估计他书写一个 8 个字母的单词需要 ________ 秒. 这可能是一个书写 ________（选填“熟练”“不熟练”）的学生.

*（5）英语老师对一位学生进行了速度测试，抽取了 10 个单词 apple，national，beginning，fox，door，pineapple，computer，modernization，coincidence，swallow，该学生的书写用时（秒）分别为 2.14，3.37，4.23，1.44，1.74，4.01，3.76，6.09，4.42，3.38. 利用计算器计算：$\bar{x} =$ ________，$\bar{y} =$ ________，$b =$ ________，$a =$ ________.（中间过程保留 3 位小数，最终结果保留 2 位小数）

（6）仿照小学作正比例图像时描点的方法，在图 1 中描出 10 个点的位置.

*（7）根据（5）的结果，你所估计的该学生书写用时与单词长度的关系是 $y =$ ________________. 尝试在图 1 中描绘出这条直线的位置，之后观察这条直线与 10 个点的关系.

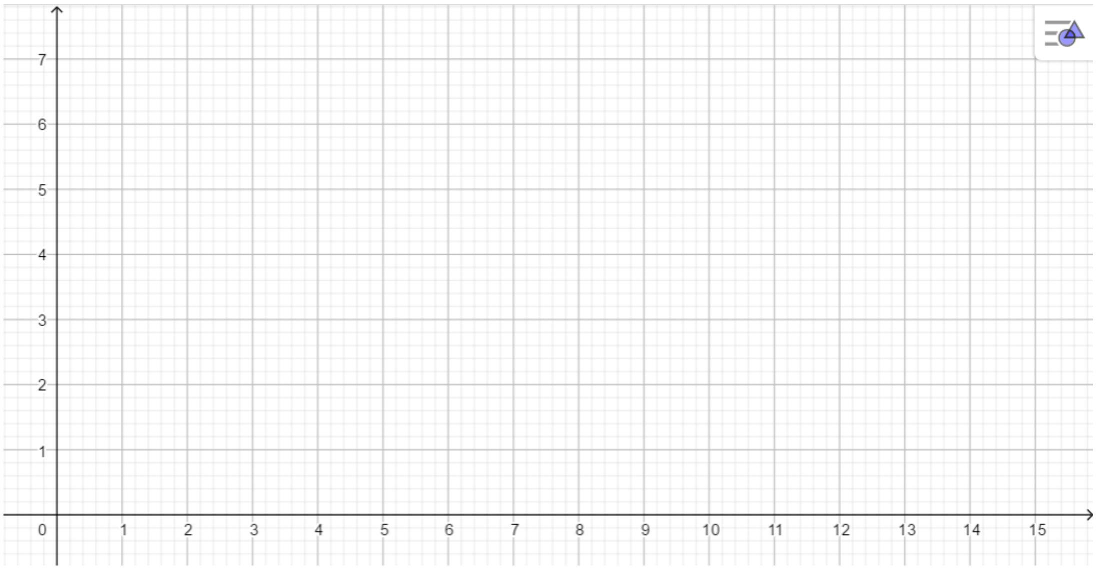

图 1: 第 9 题

*10. 在一条数轴 α 上存在 3 个整数点 O, A, B，表示的数分别为 0, m, n $(m < 0 < n)$. 现有两动点 P, Q 分别位于 A, B 两点，点 P 以 1 个单位长度每秒的速度向右运动，点 Q 以 2 个单位长度每秒的速度向左运动. 两点同时开始运动，设运动的时间为 t 秒. 设 PQ 的中点为 M. 已知 $\left(3m+\frac{9}{4}n\right)^{2n}+|mn+48|=0$.

（1）求出 m, n 的值.

（2）求出 t 时刻点 M 的坐标，并指出 P, Q, M 三点重合时 t 的值.

（3）是否存在时刻 t 使得 $MQ = OQ + AP$？若存在，求出 t 的值；若不存在，说明理由.

（4）若有一数轴 β 与数轴 α 垂直，两数轴的原点重合，数轴 β 上存在一动点 R 以 2 个单位长度每秒的速度沿该数轴正方向从 O 点运动，开始运动的时刻为 $t = 1$ 秒. 点 R' 是点 R 关于点 O 在数轴 β 上的对称点. 问：当 $t > 1$ 时，是否存在时刻 t 使得三角形 ROM 的面积等于三角形 $R'OB$ 的面积?