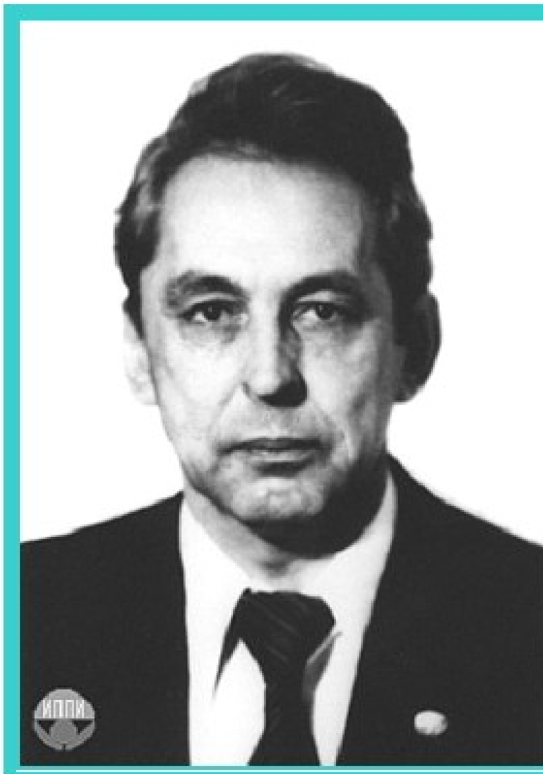


КРАСНОЩЕКОВ
Павел Сергеевич

Родился 6 мая 1935 г., с.Калач Воронежской обл.
Специалист в области механики, прикладной математики и автоматизации проектирования.
Член-корреспондент по Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации (автоматизированные системы с 26 декабря 1984 г., академик по Отделению информатики, вычислительной техники и автоматизации (автоматизация в том числе автоматизация процессов проектирования) с 11 июня 1992 г.

Состоит в Отделении информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН.

(По данным 1999 года)

Таким я был 15 лет назад, когда в журнале: “Математическое моделирование”, 1998, №7 опубликовал статью: “Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма”. Теперь я уже старый. За прошедшие 15 лет накопились новые впечатления, и я снова решил вернуться к этой теме. Я устранил некоторые неточности, несколько модернизировал модель и с ее помощью проанализировал все впечатления заново. Результатами этого анализа я хочу поделиться со своими соотечественниками, и, поэтому помещаю их в этом файле. Этот анализ могут читать как посвященные в математику, так и те, которым она чужда. Для них я все результаты прокомментировал на простом человеческом языке. Если чтение этого файла внесет хотя бы малую ясность в то, что происходит в окружающем нас мире, или заставит задуматься на эту тему, я свою задачу буду считать выполненной.

С о д е р ж а н и е: **стр.**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ. ПСИХОЛОГИЯ КОНФОРМИЗМА.

П.С. Краснощеков

Введение. Меня всегда удивляла, а порой и забавляла, весьма распространенная ситуация, когда люди действуют вопреки своим убеждениям, а то и интересам. Априорные декларации далеко не всегда соответствуют их поступкам. В свое время даже бытовала поговорка: “каждый по отдельности - против, а все вместе - за”. В ней достаточно образно подмечена осторожная привычка людей вести себя, “как все”. Чтобы объяснить это, в некотором роде, парадоксальное явление, необходимо угадать механизм, лежащий в основе такого поведения. Я в этой статье предлагаю для обсуждения очень простую версию подобного механизма и на конкретных реальных примерах пытаюсь оценить его адекватность.

1. Построение одношаговой модели. Сначала обсудим некоторые предпосылки и введем основные понятия. Примем очевидную с точки здравого смысла гипотезу. Будем считать, что индивид, принимая решение по тому или иному вопросу, руководствуется как своим личным отношением к данному вопросу, так и отношением к этому вопросу окружающих его субъектов (*коллектива*). Например, человек может решать такие проблемы:

вступать ли в данную партию, участвовать ли в данном мероприятии, голосовать ли за данное предложение и т.п. Во всех этих случаях (отвлекаясь от их содержательной стороны) индивиду предстоит сделать выбор из двух альтернатив: перейти ему в некоторое конкретное состояние или нет. Вообще говоря, альтернатив может быть сколько угодно, и каждая из них может рассматриваться отдельно, или все вместе как одна, т.к., строго говоря, речь здесь идет о намерениях, а не о самом пребывании в данном состоянии, которое определяется не столько желанием индивида находиться в нем, сколько объективной возможностью в нем реально пребывать. Поэтому альтернативы, рассматриваемые как некоторые конкретные состояния, могут быть совместными или несовместными, однако не отдающий себе в этом отчета индивид может выразить намерение пребывать во всех или в части из них одновременно. Просто реализовать эти намерения ему не всегда удастся. Например, на президентских выборах правила запрещают голосовать одновременно за двух и более кандидатов, но избиратель может об этом не знать или проголосовать так намеренно, и, конечно, в обоих случая бюллетень признают недействительным. Поэтому под состоянием может пониматься любая, сколь угодно сложная, и даже противоречивая конструкция.

Чтобы построить математическую модель поведения такого индивида, необходимо ввести количественные оценки его отношения к данному состоянию. Таких оценок в простейшем случае можно выделить две: личное, априорное (до общения с коллективом), отношение к состоянию, которое определяется числом α_j, выражающим вероятность того, что индивид готов перейти в это состояние, и финальное, апостериорное, отношение, сформировавшееся после общения с коллективом, которое определяется числом P_j, выражающим вероятность того, что индивид принял окончательное решение перейти в данное состояние. Например, некто априори против рыночной экономики, однако, видя реакцию окружающих людей, часть которых за такую экономику, может пересмотреть свое априорное отношение, поддаться влиянию этих людей, и апостериорное решение принять в пользу рыночной экономики. Может, конечно, и не поддаться влиянию, если он личность независимая, т.е. его апостериорное отношение будет совпадать с априорным. Очевидно, что математическая модель поведения должна учитывать весь спектр индивидов: от абсолютно зависимых до абсолютно независимых. Поэтому введем еще одну характеристику индивида, число μ_j , определяющее вероятность того, что в данной конкретной ситуации индивид ведет себя, как независимый. Если μ_j=1, то имеет место абсолютная независимость, если μ_j=0 - абсолютная зависимость.

Итак, у абсолютно независимого индивида апостериорная вероятность P_j^1 совпадает с априорной: α_j. Определим теперь апостериорную вероятность P_j^0 для абсолютно зависимого индивида. Для этого примем простейшую схему. Будем считать, что влияние каждого i-го члена коллектива на данного j-го индивида представляет собой полную систему событий, каждое из которых определяется числом λ_{ji} - вероятностью того, что j-ый индивид поступит так же, как и i-ый, т.е. перейдет в новое состояние с вероятностью P_i. Тогда полная вероятность перехода j-го абсолютно зависимого индивида в новое состояние будет равна

$$P_j^0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i ,$$

Где: N- число членов коллектива, $\lambda_{jj} = 0$, т.к. абсолютно зависимый индивид не влияет на себя по определению, $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} = 1$ и все λ_{ji}, кроме $\lambda_{jj} = 0$, строго положительны, т.к. мы будем полагать, что на абсолютно зависимого индивида влияет любой член коллектива. Теперь не представляет труда определить апостериорную вероятность произвольно выбранного j-го индивида. Применяя снова формулу полной вероятности, получим

$$P_j = \alpha_j\mu_j + (1-\mu_j)P_j^0, \qquad j=1,2,...,N,$$

или в развернутом виде

$$P_j = \alpha_j\mu_j + (1-\mu_j)\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ji}P_i, \qquad j=1,2,...,N. \qquad (1.1)$$

Эти соотношения и представляют собой искомую модель общего вида при тех упрощениях, которые мы здесь постулировали. При заданных параметрах (α,μ,λ) из нее должны определиться апостериорные вероятности **P**. В векторной форме она выглядит совсем просто

$$\mathbf{P=AM+(E-M)\Lambda P}, \qquad (1.2)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ - стохастическая матрица (λ_{ji}), **M** - диагональная матрица (μ_j), **E** - единичная, **A** и **P** - векторы с компонентами α_j и P_j - соответственно.

Теперь остается доказать, что решение системы (1.1) всегда существует, неотрицательно и каждое P_j не превосходит единицы. На этом построение общей модели будет завершено. Перепишем для удобства (1.2) в виде

$$\mathbf{(E-B)P=AM}, \qquad (1.3)$$

где матрица $\mathbf{B=(E-M)\Lambda}$.

Пусть не все μ_j=0 (случай: все μ_j=0 мы исследуем отдельно). Сначала будем считать, что все $\mu_j \neq 1$. Матрица **B** - неотрицательна. Более того, она неразложима, начиная с $N>2$, т.к. ее квадрат строго больше нуля (на тривиальном случае $N \leq 2$ мы не останавливаемся) По теореме Фробениуса [1] такая матрица всегда имеет положительное характеристическое число r с максимальным модулем, которое является простым корнем характеристического уравнения и удовлетворяет неравенству $s \leq r \leq S$, где *s* и *S*, соответственно, - минимальная и максимальная суммы элементов строк матрицы **B.** Строгое равенство слева или справа от r достигается лишь при $s = S$. В нашем случае отсюда следует, что $r < 1$. Как известно [1], это гарантирует существование и неотрицательность матрицы, обратной к **(E-B*)*.** Следовательно, решение системы (1.1) - единственно и неотрицательно. Докажем теперь, что по норме оно не превосходит единицы, т.е. $\max P_j \leq 1$. Для этого разделим все индексы j на две группы: K и R. В группу K отнесем все индексы $j = k$, при которых $\mu_j = 0$, а в группу R - остальные $j = r$. Систему уравнений (1.1) с учетом вышеприведенного разбиения индексов можно будет представить в виде

$$P_r = \alpha_r \mu_r + (1 - \mu_r) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ri} P_i, \quad r \in R,$$

$$P_k = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ki} P_i, \qquad k \in K.$$

Обозначим все множество индексов $j = m$, при которых реализуется $\max P_j = P_m$ через M. Докажем, что в группе индексов R содержится хотя бы один индекс из множества M. Действительно, в противном случае для всех $m \in M$ имело бы место

$$P_m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} P_i,$$

а это равенство возможно лишь тогда, когда все $P_i = P_m$, т.к. $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} = 1$, все $\lambda_{mi} > 0$, и все $P_i \geq 0$. Следовательно, множество M совпадало бы со всем множеством индексов j=1,2,...,N, а это приводит к противоречию с предположением, что в R не содержится ни одного индекса из множества M. Таким образом, группа индексов R содержит хотя бы один индекс из множества M. Но тогда при этом индексе имеет место равенство

$$\max P_j = \alpha_m \mu_m + (1 - \mu_m) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} P_i,$$

откуда следует, что

$$\max P_j \leq \mu_m + (1-\mu_m) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} \max P_j = \mu_m +$$

$$+ (1-\mu_m) \max P_j = \mu_m (1 - \max P_j) + \max P_j,$$

а это приводит к неравенству: $\mu_m(\max P_j - 1) \leq 0$. Так как $\mu_m > 0$, то остается $\max P_j \leq 1$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в коллективе часть индивидов абсолютно независима, т.е. у каждого из них $\mu_s = 1$, $s \in S \subseteq J$ (здесь через J обозначено все множество индексов j). Исходная матрица **B** теперь становится разложимой и это естественно, т.к. в коллективе выделяется независимая группа. Однако никаких принципиальных трудностей в связи с этим не появляется: поведение независимой группы определяется как априорное ($P_s=\alpha_s$), порядок системы, в силу этого, понижается, а новая матрица $\mathbf{B}^*$ как неразложимый минор матрицы **B** сохраняет все необходимые свойства. Поэтому проблем с существованием, единственностью, неотрицательностью и ограниченностью решения не возникает.

2. Исследование модели. Так как предлагаемая модель построена на основе примитивного здравого смысла, то оправданием ей может служить успешная проверка на простых и прозрачных примерах. Если окажется, что интерпретации, которые позволяет делать эта модель в рассматриваемых примерах, будут содержательными, то с нашей точки зрения это оправдает примитивизм, положенный в ее основу, и придаст ей определенную эвристическую ценность.

Стадо. Сначала проведем обещанный нами ранее анализ случая, когда все индивиды абсолютно зависимы, т.е. все $\mu_j=0$. В этом случае матрица **M=0**, и уравнение (1.3) принимает вид $\mathbf{(E\text{-}\Lambda)P=0}$. Суммы элементов каждой из строк матрицы $\mathbf{E\text{-}\Lambda}$, в силу свойств стохастической матрицы

Λ, равны нулю. Следовательно, определитель матрицы **E-Λ** равен нулю, а это, как известно, обеспечивает существование решения и его неединственность. Последнее вполне объяснимо, т.к. в коллективе абсолютно зависимых индивидов нет индивида с более или менее определенными устремлениями. Однако поведение индивидов в таком коллективе не является хаотичным. Несмотря на неопределенность состояния коллектива, все индивиды ведут себя, в некотором смысле, как единое целое: все P_j равны между собой, т.е. индивиды подражают друг другу.

Действительно, из (1.1) следует

$$P_j = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i .$$

Предположим, что не все P_j равны между собой.

Тогда среди них должны быть максимальные $P_j = P_m$.

Следовательно

$$P_m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{mi} P_i ,$$

а это, в силу свойств матрицы $\mathbf{\Lambda}$, как мы видели ранее, возможно лишь, когда все P_i равны между собой. Таким образом, действительно, индивиды ведут себя, как единое целое.

Требование неразложимости матрицы $\mathbf{\Lambda}$ обусловлено представлением о том, что подразумевается под понятиями *коллектив* и *абсолютная зависимость*. Если допустить, чтобы матрица Λ была разложимой, это приведет к тому, что в основном коллективе могут возникнуть независимые друг от друга *подколлективы*, что, вообще говоря, нехорошо, т.к. предполагает либо отсутствие контактов между отдельными частями коллектива, либо, в противном случае, противоречит абсолютной зависимости индивидов. В дальнейшем мы увидим, что отдельные *подколлективы* (их можно называть *партиями*) могут возникать в общем коллективе, но это будет обусловлено наличием в нем лидеров различных ориентаций.

Однако "вернемся к нашим баранам". Исследуемый здесь коллектив абсолютно зависимых индивидов очень напоминает стадо без вожака, или неориентированную уличную толпу. Поведение индивидов непредсказуемо, хотя действуют они, как единое целое, т.е. переходят в новое состояние с одной для всех вероятностью P, значение которой, вообще говоря, произвольно. Однако из этого безразличного состояния коллектив легко выводится любым провоцирующим действием (формально, любым малым возмущением одного из параметров μ_j): достаточно одному из индивидов как-то сориентироваться, так весь коллектив следует за ним. Действительно, если в коллективе вдруг появился индивид, у которого $\mu_k > 0$, то ситуация резко меняется. Решение становится единственным: у всех индивидов $P_j=\alpha_к$, где $\alpha_к$ - априорная вероятность к-го индивида. Проверяется это простой подстановкой $P_j=\alpha_к$ в уравнения системы (1.1). Таким образом, поведение к-го индивида копируют все. Не зря с древних времен бытует поговорка: “дурная овца все стадо портит”. Теперь понятно, почему этот пункт был озаглавлен: *Стадо*. В этом смысле абсолютно зависимого индивида условно можно было бы называть “стадным”.

Кажется естественным в первую очередь исследовать коллективы, в которых при условии абсолютной зависимости индивиды не отдают друг другу персональных предпочтений. То есть в таком коллективе $\lambda_{ji} = \dfrac{1-\delta_{ji}}{N-1}$, где δ_{ji} - символ Кронекера

$$\delta_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}.$$

Действительно, в общем случае у нас нет никаких разумных априорных соображений о том, как назначать параметры λ_{ji}, а заниматься апостериорной подгонкой под ответ с научных позиций неэтично. Поэтому постараемся оставаться в рамках простых и, поскольку это возможно, разумных предположений. В дальнейшем, за некоторыми исключениями, мы будем работать в пределах предложенной схемы. Исследовать примеры начнем с самого простого.

Митинг. Прежде, чем разбирать этот пример, построим аналитическое решение системы (1.1), когда $\lambda_{ji} = \frac{1-\delta_{ji}}{N-1}$. Система уравнений принимает следующий вид

$$P_j = \alpha_j \mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1} \sum_{i=1}^{N} (1-\delta_{ji}) P_i, \qquad j=1,2,...,N. \qquad (21)$$

Этот вариант модели легко интерпретируется. Сумма, стоящая в правой части (2.1), представляет собой математическое ожидание числа индивидов (помимо j-го), перешедших в данное состояние. Таким образом, индивид ориентируется на свое априорное отношение к данному состоянию (в числовом выражении определяемом величиной вероятности α_j) и на число остальных членов коллектива, готовых перейти в это состояние. Персоналий он не различает. Система (2.1) имеет аналитическое решение

$$P_j = \frac{N-1}{N-\mu_j} \alpha_j \mu_j + N \frac{1-\mu_j}{N-\mu_j} \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i \mu_i}{(N-\mu_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{(N-\mu_i)}}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i \mu_i}{(N-\mu_i)}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{(N-\mu_i)}}. \qquad (2.2)$$

(Выкладки смотри в **Приложении:** стр. 55).

Здесь $M=\sum_{i=1}^{N} P_i$ - математическое ожидание числа индивидов, перешедших в данное состояние. При больших значениях N формулы (2.2) упрощаются

$$P_j = \alpha_j\mu_j + (1-\mu_j)\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i}, \qquad (2.3)$$

и в случаях, когда N достаточно велико, мы будем использовать эти формулы. Например, на уличных митингах, где собираются толпы людей, такого приближения вполне достаточно. Эта ситуация в весьма упрощенном виде сейчас и будет рассмотрена. Пусть на митинге выступают два лидера, находящихся друг к другу в оппозиции: у первого лидера α_1 =1, μ =μ_1 ; у второго - α_2 =0, μ =μ_2. У толпы, в силу специфики уличного сборища, все μ_j=0, а разброс мнений достаточно широк, т.е. α_j - разные. Из (2.3) следует, что при стадном менталитете толпы (μ_j =0), разброс мнений никакой роли не играет: индивиды отрекаются от своих убеждений, толпа делится на две части в отношении $\frac{\mu_1}{\mu_2}$: за первым лидером идет часть, равная $\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$, за вторым, соответственно, $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$. К более уверенному и решительному лидеру присоединяется большая часть толпы. В данной модели политическая платформа лидеров, как видим, роли не играет. Тривиальный случай, когда лидеры собирают на митинг только своих единомышленников, мы разбирать не будем.

Переговоры. Выше исследовалось влияние лидеров на поведение абсолютно зависимых индивидов в однородном коллективе. Чтобы посмотреть, как лидеры влияют друг на друга, рассмотрим дипломатические переговоры представителей двух стран по некоторому вопросу, например, вступать ли Восточной Европе в НАТО. Будем считать, что ***1-ый*** лидер априорно ***за*** , т.е. $\alpha_1 = 1$, и его $\mu = \mu_1$, а ***2-ой*** лидер априорно ***против***, т.е. $\alpha_2 = 0$, и его $\mu = \mu_2$. Переговоры ведутся в течение многих туров так, что апостериорная вероятность после каждого ***n-го*** тура у каждого лидера становится априорной для следующего, ***n+1-го***, тура, т.е. $\alpha_1^{(n+1)} = P_1^{(n)},\quad \alpha_2^{(n+1)} = P_2^{(n)}$ причем $\alpha_1^{(1)} = 1,\quad \alpha_2^{(1)} = 0$. Так как в данном случае число N невелико, то придется воспользоваться формулами (2.2). Из них, опуская промежуточные выкладки, получим следующие конечно-разностные уравнения

$$\begin{cases} P_1^{(n+1)} - P_1^{(n)} = -\Phi(\mu_1, \mu_2)\psi^n, \quad P_2^{(n+1)} - P_2^{(n)} = \Phi(\mu_2, \mu_1)\Psi^n, \\ \qquad M^{(n+1)} - M^{(n)} = -[\Phi(\mu_1, \mu_2) - \Phi(\mu_2, \mu_1)]\psi^n, \end{cases} \tag{2.4}$$

где: $P_1^{(0)} = \alpha_1^{(1)} = 1,\quad P_2^{(0)} = \alpha_2^{(1)} = 0,\quad M^{(0)} = 1$, а:

$$\begin{cases} \Phi(\mu_1,\mu_2) = \dfrac{\mu_2(1-\mu_1)}{\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2}, \quad \Psi = \dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2}, \\ \qquad \Phi(\mu_1,\mu_2) - \Phi(\mu_2,\mu_1) = \dfrac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Решение рекуррентных уравнений (2.4) имеет вид

$$\begin{cases} P_1^{(n)} = 1 - \Phi(\mu_1,\mu_2)\dfrac{1-\psi^n}{1-\Psi}, \quad P_2^{(n)} = \Phi(\mu_2,\mu_1)\dfrac{1-\psi^n}{1-\Psi}, \\ \qquad M^{(n)} = 1 - [\Phi(\mu_1,\mu_2) - \Phi(\mu_2,\mu_1)]\dfrac{1-\psi^n}{1-\Psi}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Условимся переговоры считать результативными для ***1-го*** лидера, если к окончанию переговоров на некотором ***к-ом*** туре он добился определенных уступок от ***2-го*** лидера, т.е. математическое ожидание $M^{(k)}$ стало больше единицы; для ***2-го*** лидера, естественно, наоборот: переговоры результативны, если: он добился уступок, т.е. $M^{(k)}$ стало меньше единицы. Переговоры будут считаться безрезультатными, если $M^{(n)}$?1, ($1 \le n \le к$). Последний вариант очевиден. Он реализуется в случае, когда $\mu_1=\mu_2=\mu$. Действительно, при $0<\mu<1$ из (2.6) видно, что $M^{(n)}$ от тура к туру не меняется, оставаясь равным единице. При $\mu=0$ стороны будут пребывать в состоянии “дружной” неустойчивой неопределенности: любое случайное внешнее влияние может привести их к любому решению. При $\mu=1$ лидеры абсолютно независимы и друг другу не уступят. Поэтому переговоры могут быть результативными лишь при условии, что хотя бы один из лидеров не является абсолютно независимым. Тривиален случай, когда у одного из лидеров μ =0, а у другого μ>0: абсолютную победу ($M^{(1)}$=2 или $M^{(1)}$=0) одерживает в первом туре тот лидер, у которого μ >0. Остается случай, когда у обоих лидеров μ >0, но у одного из них μ <1.

Из формул (2.6) видно, что математическое ожидание $M^{(n)}$ является строго монотонной функцией номера тура n, т.к. $\Psi < 1$. При $\mu_1>\mu_2$ она строго возрастает с увеличением номера тура, потому что из (2.5) следует, что $\Phi(\mu_1,\mu_2) < \Phi(\mu_2,\mu_1)$, при μ_1 < μ_2 строго убывает. Следовательно, в каждом туре выигрывает тот лидер, у которого μ больше, т.е. проигрывает более “мягкотелый”. Отсюда, между прочим, следует, что в продолжении переговоров должен быть заинтересован тот лидер, который побеждает, чтобы “додавить” “мягкотелого”. При $n \to \infty$ выигрыш будет максимальным, равным

$$M^{\infty} = 1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1(1-\mu_2) + \mu_2(1-\mu_1)}, \qquad (2.7)$$

причем, если у одного из лидеров μ =1, то он одержит абсолютную победу $(M^{\infty} = 2$,или $M^{\infty} = 0)$, как, с очевидностью, это следует из (2.7).

В заключение этого пункта еще раз напомним, что модель не учитывает никаких логических аргументов сторон. Однако, мне кажется, что такие аргументы мало чего стоят в реальной жизни, когда речь идет о существенных интересах. Скорее, на первый план здесь выступает психология, а параметр μ, как раз, и характеризует психический тип индивида.

Рабочий коллектив. До сих пор мы рассматривали качественные примеры, т.е. не проводили никаких вычислений и не привлекали численных материалов для сравнения. Попробуем теперь получить некоторые количественные результаты также на простом и прозрачном примере. Рассмотрим однородный рабочий коллектив во главе с начальником, у которого $\alpha_1 = 1$ и $\mu_1 = 1$, а у остальных членов коллектива все $\alpha_j = \alpha$ и все $\mu_j = \mu$. Обращаясь к точному решению (2.2), будем иметь

$$\frac{M}{N} = \frac{N - \mu + \alpha\mu(N-1)^2}{N - \mu + \mu(N-1)^2}. \qquad (2.8)$$

Из этой формулы видно, что: $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{M}{N} = \alpha$, т.е. коллектив становится неуправляемым: взаимное влияние индивидов друг на друга подавляет влияние начальника, если, конечно, не придерживаться маловероятного предположения, что все они единомышленники начальника, т.е. $\alpha = 1$. Поэтому возникает естественная задача о *рациональном количественном составе рабочего коллектива*: каков должен быть состав коллектива, чтобы доля $\frac{M}{N}$ его членов, выполняющих указания начальника, была не меньше, чем Q ? Чтобы ответить на этот вопрос необходимо решить следующее неравенство

$$(Q-\alpha)\mu(N-1)^2-(1-Q)(N-1)-(1-Q)(1-\mu)\leq 0. \qquad (2.9)$$

Первый же взгляд на (2.9) показывает, что это неравенство выполняется при любых N, если $\alpha \geq Q$. Это означает, что коллектив готов на большее, чем от него минимально требуется. В таком коллективе некоторые сотрудники могут искать работу, жалуясь на начальника, что он их мало загружает. Такие случаи в рабочей практике встречаются, однако наиболее типичной является ситуация, когда $\alpha < Q$. Поэтому разумно рассчитывать на некоторого *среднего* индивида: в меру независимого $(\mu = 1/2)$ и в меру усердного $(\alpha = 1/2)$. Стопроцентной производительности от такого индивида требовать невозможно, поэтому попробуем задать Q = 0,75. В этом случае решение неравенства (2.9) показывает, что коллектив вместе с начальником не должен превышать 3 ~ 4 человек, чтобы влияние начальника обеспечивало заданную производительность Q =0,75. При Q = 0,66 получаем: 6 ~ 7 человек. В первом случае “бездельничать” в среднем будет 1 человек, во втором - *2* человека. Как видим, цифры получились вполне реальные. Примерно такую численность имеют рабочие группы, сектора, бригады и т.п. Если же численность коллектива таких индивидов произвольно увеличивать, то влияние начальника, как мы уже знаем, будет падать, и при достаточно больших N *полвина* коллектива в трудовом процессе участвовать не будет. Любопытно, что при больших N сокращением коллектива *наполовину*, как это часто рекомендует "большое начальство", проблема производительности не решается, т.к. из оставшейся половины *половина* опять работать не будет, а число работающих уменьшится вдвое. Поэтому реально проблема решается не сокращениями, а правильной организацией коллектива и трудового процесса: структуризацией коллектива, т.е. разбиением его на вложенные друг в друга подразделения и организацией иерархической системы подчинения и контроля, как это обычно и делается. Однако, размещение сотрудников по подразделениям порождает местную управленческую номенклатуру, которая до работы тоже не очень большой охотник.

Парламент. Хорошей проверкой модели на адекватность может служить применение ее для предсказания результатов голосования в парламенте. Для этого здесь будут использованы фактические материалы ***3-го внеочередного Съезда народных депутатов СССР***, на котором был избран ***первый Президент СССР***. Причина такого выбора проста. Во-первых, о нем имеется подробный отчет, во-вторых, структура депутатского корпуса тех времен была проста и прозрачна: легко просматривалась партия будущего президента, оппозиция и, так называемое, “болото”. К тому же можно считать, что этот съезд уже в историческом прошлом, и обращение к его материалам ничьих интересов не затрагивает. Так как на этом съезде председатель (глава партии) был благополучно избран в конце съезда в президенты, то далее, ради простоты, условимся называть его президентом.

Итак, пусть имеется парламент, состоящий из N членов, среди которых q членов партии президента, p членов оппозиции, а остальные r - “болото”. Естественно считать, что у партии президента имеется твердая независимая позиция по каждому обсуждаемому вопросу и при голосовании они действуют как единое целое, т.е. μ=1, а P_j=α_j=1 (в тех случаях , когда они голосуют против, естественно, P_j=0, но, очевидно, что вопрос можно переформулировать на противоположный и тогда всегда будет: P_j=α_j=1). Оппозицию тоже будем считать единой в решениях, т.е. группой независимых (μ_j=1) единомышленников, у которой, в отличие от партии президента, P_j=α_j=0. “Болото” полагается однородным: все

$\mu_j=\mu$, $\alpha_j=\alpha$. Воздержавшиеся в рамках этой модели ничем не отличаются от не участвующих в голосовании, и мы будем их отбрасывать.

Так как депутатский корпус съезда был большой (порядка 2000 человек), то уместно использовать приближенные формулы (2.3). Из них следует, что “за” проголосует доля депутатов, равная

$$\frac{M}{N}=\frac{q+r\mu\alpha}{p+q+r\mu}. \qquad (2.10)$$

Будем называть “болото” *идеальным*, если μ =0. Тогда (2.10) упрощается

$$\frac{M}{N}=\frac{q}{p+q}=c. \qquad (2.11)$$

Последняя величина имеет определенный внутренний смысл. Анализируя формулу (2.10), нетрудно усмотреть, что в случае α < c , президенту выгодно, чтобы представители “болота” были более зависимы (меньшее μ, - лучше), т.е. президент заинтересован в существовании *идеального* “болота”. Если же α >c , то ему выгодно, чтобы μ было ближе к 1, т.е. “болото” отсутствовало.

Обработка данных съезда показывает, что на нем партия президента составляла, примерно, q =1000 человек, оппозиция около p =250 человек, остальные r представляли “болото”. Здесь следует дать некоторое разъяснение. Так как на каждом заседании присутствовали и голосовали отнюдь не все депутаты, то с вычислением r есть определенные трудности. Чтобы обойти их, придется принять гипотезу, что все представители партии президента и оппозиции как наиболее заинтересованные практически полностью участвовали в голосовании. Тогда количество представителей “болота” r от голосования к голосованию будет разным и, поэтому, в каждом голосовании будет вычисляться по данным съезда отдельно. Частично выручает тот факт, что в случае идеального “болота” (μ =0), как видно из (2.11), от величины “болота” результат не зависит. Идеальное “болото” при голосовании делится в отношении $c = \frac{q}{p+q}$. В том случае, когда нам понадобится величина r, мы будем пользоваться ее средним значением.

При обработке результатов съезда были выделены только те вопросы, по которым у оппозиции с партией президента были принципиальные разногласия. Таких вопросов оказалось относительно немного, и результаты голосования по ним сведены в Таблицу1. Предварительно вопросы переформулированы в согласии с вышеприведенной договоренностью. Для тех, кому это не совсем понятно, поясняю: если партия президента голосует против чего-либо, то вопрос можно переформулировать так: “Вы против этого предложения?”. Очевидно, что ответ должен быть “да”, т.е. при голосовании это будет означать “за” предложение, заданное в противоположной форме.

Таблица 1.

Депутаты	Распределение голосов									Сред.
за	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428	1490
против	374	349	352	368	452	399	409	463	485	406
воздер.	47	112	52	76	66	73	163	41	74	78
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987	1974
Всего- воздер.	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913	1896
%голосов за	80 %	81%	81%	81%	77%	79%	77%	76%	75%	79 %

Для прогноза воспользуемся формулой (2.11), полагая, что на съезде “болото” было идеальным (μ =0). Получаем

$$\frac{M}{N} = \frac{1000}{1000+250}100 = 80\%.$$

Сравнивая этот результат с табличным средним, видим, что имеется хорошее совпадение с погрешностью порядка 1%, однако по отдельным голосованиям расхождение достигает 6~7%. Возникает вопрос: какие факторы можно еще учесть, чтобы добиться лучшего совпадения?

Для этого мы попробуем использовать общую модель (1.1) в рамках следующей гипотезы. Во времена обсуждаемого съезда влияние будущего президента на рядовых депутатов было велико. В основном оно, конечно, распространялось на представителей “болота”, которые чутко реагировало на поведение президента. Тот, кто смотрел съезд по телевизору или читал его материалы, возможно, заметил, а кто не заметил должен поверить на слово, что поведение президента, когда он вел заседания съезда, не всегда было беспристрастным. В некоторых случаях он проявлял явную заинтересованность в положительных результатах голосования, в некоторых выглядел сомневающимся, а иной раз казалось, что он "против". Наблюдая за поведением президента, "болото", в силу своей повышенной зависимости, делало выводы и вносило коррективы в голосование. Мне кажется, что, учитывая это свойство "болота" результаты Таблицы1 можно сгруппировать по следующему принципу: в первую группу отнести результаты, когда казалось, что президент проголосует "за" ($P_0 = 1$); во вторую, когда казалось, что он колеблется ($P_0 = 0,5$); в третью группу, когда можно было подумать, что президент "против" ($P_0 = 0$). Такой перегруппировкой Таблица1 преобразуется в Таблицу2. В этой таблице появилась строка со значениями количественного состава "болота" при каждом голосовании. Как видно он разный, а так как в расчетной формуле мы вынуждены использовать одно значение, то придется довольствоваться средним

Таблица 2.

Президент	за				колеблется			против		сред.
P_0	1,0				0,5			0,0		0,6
Депутаты	Распределение голосов									сред.
за	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428	1490
против	374	349	352	388	452	399	409	463	485	406
воздер.	47	112	52	76	66	73	163	41	74	78
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987	1974
всего-воздер.	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913	1896
"болото"	662	603	648	680	687	656	557	677	663	646
%голосов за	80 %	81%	81 %	81%	77%	79%	77%	76%	75 %	79 %
Расчет	81%				78%			75%		78%

Теперь надо показать, как трансформируется модель сообразно этому случаю. Обратимся к стохастической матрице взаимных влияний $\mathbf{\Lambda}$. Обозначим взаимное влияние депутатов друг на друга через λ, т.е. $\lambda_{ji} = \lambda$, ($i > 1$, $j > 1$), а влияние президента на депутатов λ_{j1} через λ_0. Влияние депутатов на президента несущественно, т.к. он ведет себя, как фигура абсолютно независимая. Назовем λ_0 рейтингом президента, а λ -рейтингом рядового депутата. В силу свойств матрицы $\mathbf{\Lambda}$ эти рейтинги связаны условием

$$\lambda_0 + (N - 2)\lambda = 1.$$

Депутатов много, поэтому рейтинги будут выражаться очень маленькими числами. Чтобы избежать этого неудобства, введем для их измерения другой масштаб: положим

$$\lambda = \frac{\Delta}{N-1}, \quad \lambda_0 = \frac{\Delta_0}{N-1}.$$

Тогда связь между рейтингами станет выглядеть следующим образом

$$\Delta_0 + (N-2)\Delta = N - 1. \tag{2.12}$$

С учетом этих допущений исходная система (1.1) приобретает следующий вид

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta\sum_{i=2}^{N}(1-\delta_{ji})P_i + \frac{1-\mu_j}{N-1}\left[N-1-(N-2)\Delta\right]P_0 \quad \left(\text{здесь}: \quad P_1 = P_0\right),$$

или

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta\sum_{i=1}^{N}(1-\delta_{ji})P_i + \left(1-\mu_{jj}\right)\left(1-\Delta\right)P_0 .$$

Эта система уравнений так же, как и система (2.1), допускает аналитическое решение (выкладки смотри в **Приложении:** стр. 56). При больших значениях N и идеальном “болоте” доля депутатов, проголосовавших “за”, определяется формулой вида

$$\frac{M}{N} \approx \frac{q+(1-\Delta)rP_0}{p+q+(1-\Delta)r}. \qquad (2.13)$$

Она превращается в формулу (2.11), если $\Delta = 1$. В общем случае значение этого параметра невозможно определить без привлечения конкретных данных по голосованиям. Подставляя данные из Таблицы 2 в формулу (2.13), получим серию уравнений для определения Δ при каждом голосовании. Из них определятся значения этого параметра с некоторым разбросом: $\Delta =$ 1,00; 0,89; 0,89; 0,90; 0.80; 0,93; 0,75; 0,90; 0,87, и это, как известно, вполне естественно, т.к. задача определения параметра Δ некорректна и требует регуляризации. Мы применим самую примитивную регуляризацию: возьмем среднее арифметическое, что вполне обеспечит нам допустимую точность. Итак, $\Delta =$ 0,88, при этом мы так же будем пользоваться средним арифметическим значением параметра r = 646. Теперь формула (2.13) принимает конкретный вид

$$\frac{M}{N} = \frac{1000 + 0{,}12 \cdot 646P_0}{1250 + 0{,}12 \cdot 646}$$

Из нее следует, что: при P_0=1,0: $\frac{M}{N} = 0{,}81$; при P_0=0,5: $\frac{M}{N} = 0{,}78$; при P_0=0,0: $\frac{M}{N} = 0{,}75$. Это дает совпадение с данными съезда по группам с точностью порядка 1%, что можно считать идеальным результатом.

Итак, рейтинг рядового депутата $\Delta = 0{,}88$. Определим рейтинг президента

$$\Delta_0 = 1895 - 0{,}88 \cdot 1894 = 226,$$

т.е. рейтинг будущего президента на съезде был высок, он превосходил средний рейтинг депутата в *257* раз. Однако на выборах он получил меньше голосов, чем предсказала бы модель. Объяснение очевидно. По этому вопросу произошел раскол в партии президента, и часть ее проголосовала "против". Но все это уже история - "дела давно минувших дней...".

Выборы. Обратимся теперь к истории недавних дней. В России прошли выборы президента. И страна, и президент уже были другими, и выбирали президента не на съезде, а *всенародно*. То есть ситуация в корне отличается от предыдущей. Поэтому интересно посмотреть дает ли обсуждаемая модель возможность проанализировать и эти события. Для того, чтобы справиться с такой задачей, надо понять, что представляет собой коллектив взаимных влияний, в котором решается проблема выбора. *Всенародность* - понятие довольно расплывчатое, если под ним подразумевать все население страны, то задача становится безнадежной. Поэтому необходимо определить ту *элементарную* общественную ячейку, в которой принимаются основные решения. Кажется естественным за такую ячейку принять *семью.* Так и поступим. Рассмотрим *среднюю семью*, вероятнее всего, состоящую из *четырех* человек. Не станем конкретизировать ее персональный состав, однако заметим, что она будет “неполной”, если не включить в ее состав “на равных правах” *телевизор*. Мне думается, что в современной семье он стал полноценным членом, хотя в выборах и не участвует. Но это не означает, что по отношению к выборам у него нет твердого и определенного мнения. На прошедших выборах он был *целиком на стороне ныне здравствующего президента.*

Итак, в нашей условной семье *пять* субъектов. Один из них, далее именуемый как *телевизор,* имеет следующие параметры: $\mu =1$, $P_0 = \alpha_0$. Остальных членов семьи мы не будем различать по персоналиям и положим: $P_j = P$, $\alpha_j = \alpha$, $\mu_j = \mu$. Используем в этом случае вариант модели (2.1), где для удобства заменим N на N+1, чтобы отделить *телевизор* от *живых членов семьи.* Формулы (2.2) после элементарных выкладок дают результат, который можно представить следующим образом

$$P = \frac{M}{N} = \frac{N\alpha\mu + (1-\mu)\alpha_0}{1 + (N-1)\mu}. \qquad (2.14)$$

При N = 4 получаем

$$P = \frac{M}{4} = \frac{4\alpha\mu + (1-\mu)\alpha_0}{1 + 3\mu}. \qquad (2.15)$$

Теперь надо определиться с параметрами α_0 и μ. С параметром α дело обстоит сложнее, и мы уточним процедуру его определения позднее. Параметр μ положим равным $1/2$, рассчитывая на “средне зависимого” индивида, а параметр $\alpha_0 = 1$, т.к. *телевизор* был всецело на стороне нынешнего президента.

Тот, кто помнит прошедшие выборы, должен согласиться, что всю выборную компанию можно разбить на три этапа. Первый этап начинался за несколько месяцев до официальной предвыборной компании. Президенту старались подтянуть рейтинг к ее началу. *Телевизор* пытался убедить избирателей, что альтернативы попросту нет. Второй этап совпадал с официальной предвыборной кампанией перед первым туром. На этом этапе пропаганда усиливалась - *телевизор* не умолкал. Третий этап перед вторым туром ни в чем не уступал второму этапу - давление на избирателей нарастало.

Принимая вышесказанное как рабочую гипотезу, займемся исследованием этапов. На каждом этапе будем использовать формулу (2.15). Причем, как и в задаче о

переговорах, будем считать, что апостериорная вероятность P в конце предыдущего этапа становится априорной α в начале следующего. На всех этапах у *телевизора* α_0 =1.

Теперь формулу (2.15) можно представить в виде

$$P^{(n)} = \frac{4P^{(n-1)}+1}{5}, \quad P^{(0)} = \alpha^{(1)}. \tag{2.16}$$

Величина вероятности P, как это видно из (2.14) представляет собой долю избирателей, готовых проголосовать за действующего президента. В согласии с *телевизором* будем называть ее рейтингом действующего президента (об этом рейтинге регулярно сообщалось по телевидению по результатам так называемых опросов населения). У меня нет доверия к этим опросам, но даже они показывали, что к первому этапу рейтинг был низким. Так как целью этого пункта статьи является оценить роль телевидения в выборной компании, то я намеренно занижу рейтинг президента перед первым этапом, положу $P^{(0)}= \alpha^{(1)}$ = 0. Тогда по формуле (2.16) *телевизор* к концу первого этапа перед официальной предвыборной кампанией *создаст* президенту рейтинг $P^{(1)}$ = 0,20, т.е. 20% избирателей будут готовы подать свои голоса за президента. К концу второго этапа, к первому туру выборов из (2.16) следует, что к урнам придут избиратели с намерением подать за президента *36%* голосов, т.е. $P^{(2)}$ =

0,36. В действительности за президента в первом туре было отдано *35,28%* голосов. Расхождение в результатах не превышает 0,72%; относительная погрешность равна 0,0223, т.е. порядка *2%*. Это очень неплохо для столь грубой схемы. С третьим этапом дело обстоит сложнее. На третьем этапе происходило перераспределение голосов избирателей, отданных за не прошедших во второй тур кандидатов. Предложенная нами схема таких тонкостей не улавливает, но мы помним, что у президента образовался альянс с одним не прошедшим во второй тур, однако набравшем неплохой процент голосов, кандидатом. Если же этими нюансами пренебречь, то (2.16) дает следующий результат по второму туру: $P^{(3)} = 0{,}4880$, т.е. 48,80% голосов. Таким образом, из нашей схемы следует, что ***телевизора* оказалось** недостаточно, чтобы президент выиграл выборы во втором туре. Однако это теперь тоже уже история, которую, как известно, “вспять не повернуть”.

Существуют еще некоторые данные, на которых можно проверить формулу (2.16). А именно: опросы избирателей об их намерениях придти к избирательным урнам и фактический процент явки в первом туре. По опросам получалось так, что к началу первого этапа посетить избирательные участки собиралось примерно 50% избирателей. Телевидение всячески старалось убедить граждан повысить процент явки. Формула (2.16) показывает, что к началу второго этапа, т.е. к открытию официальной предвыборной компании *телевизору* удалось повысить эту величину до 60%. В течение второго этапа давление на телезрителя не ослабевало - все помнят лозунг: “Голосуй, а то проиграешь!” Используя формулу (2.16) и на втором этапе, получим прогноз процента явки избирателей на первый тур выборов. Элементарный подсчет дает величину, равную 68%. Официально опубликованная величина составляет 69,81%, т.е. имеет место хорошее совпадение с прогнозом.

На этом я кончаю анализ частных примеров и перехожу к обсуждению вопросов, имеющих более общий характер: роль конформизма в общественной жизни, его влияние на стабильность и управляемость общества. Поясню, что *конформизм* означает для меня здесь: *подражательный, подобный*. Именно такой механизм в простейшей форме и заложен в обсуждаемой модели, хотя степень *подражательности* может быть разной: от нулевой до полной.

3. Конформизм - плюсы и минусы. В связи с вышесказанным параметр модели $k_j = 1-\mu_j$ можно назвать *степенью конформизма* индивида, а параметр μ_j, соответственно - *степенью индивидуализма.* Эти параметры описывают весь спектр индивидов от крайних конформистов ($k_j = 1$) до не менее крайних индивидуалистов ($\mu_j = 1$). Не надо путать конформистов с *коллективистами.* Конформизм это - психический тип личности, а *коллективизм,* в определенном смысле, - идеология, которую зачастую проповедуют индивидуалисты. Для властолюбивых индивидуалистов коллектив конформистов - благодатная среда для удовлетворения своих властных наклонностей. Поэтому абсолютный конформизм является почвой, питающей корни *тоталитаризма,* что бы при этом в обществе ни исповедовалось: *коммунистический распределительный рай* или *демократическая рыночная идиллия.* Однако это вовсе не означает, что сам по себе конформизм плох. Не будь такого явления, не было бы человеческого общества как такового. Без способности воспринимать иные мнения, без дара к подражанию невозможно было бы обучение, а, следовательно, и возникновения того, что мы называем интеллектом, т.к. он дан человеку в потенции и может развиться у него лишь в общении с окружающими людьми. Известно, что у так называемых “маугли”, воспитанных животными, пробудить интеллект уже невозможно. Поэтому *конформизм* - великое благо, обретенное человеком в процессе эволюции, чтобы он мог жить и успешно развиваться, если, конечно, не впадать в крайность. А рецепт от крайности давно известен: “не сотвори себе кумира”. Проповедовать же индивидуализм, как альтернативу конформизму, по меньшей мере, неразумно, т.к. на эти проповеди в первую очередь откликнутся конформисты, однако, в силу своей природной сущности, истинными индивидуалистами не станут. Самое большее, на что они будут способны, так это подражать индивидуалистам, а это хуже индивидуализма как такового. Но это все - слова. Хотелось бы посмотреть, что можно извлечь из модели чисто формальными методами. Например, какими должны быть параметры α_j и μ_j у индивидов, составляющих общество, чтобы все общество в целом пребывало в некотором фиксированном состоянии, т.е. величина $\frac{M}{N} = 1$. Нам здесь все равно, что представляет собой это состояние с содержательной стороны. Являет ли оно собой состояние застоя, или состояние стабильного экономического роста, или процесс реформирования.

Итак, пусть $\frac{M}{N} = 1$. Из второй формулы (2.3) следует, что при этом

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \text{, или } \sum_{i=1}^{N} (1 - \alpha_i) \mu_i = 0. \qquad (3.1)$$

Так как $\alpha_i \le 1$, а $\mu_i \ge 0$, то (3.1) эквивалентно системе равенств

$$(1 - \alpha_i) \mu_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, N. \qquad (3.2)$$

Здесь возможны два варианта: первый - все $\mu_i = 0$ и второй - не все $\mu_i = 0$, т.е. существуют $\mu_r > 0$, $r \in R$. Первый вариант соответствует *стадному* обществу. Он, как мы уже знаем, не гарантирует стабильности состояния - как угодно малое возмущение одного из параметров μ может перевести общество в любое непредсказуемое состояние. Остается второй вариант, из которого с очевидностью следует: все $\alpha_r = 1$, $r \in R$. Но это означает, что в обществе выделилась *партия* - группа единомышленников, которых вполне устраивает данное состояние общества. Остальные члены общества, в силу своего абсолютного конформизма, послушно следуют за ними. Интересно, что из модели, как мы видим, вытекает единственно возможная структура общества, при которой оно целиком пребывает в одном и том же состоянии. Такое общество довольно долго может существовать стабильно, пока в *партии* не будет поколеблено единомыслие или в обществе не появятся достаточно *независимые субъекты* с иными, чем у *партии*, убеждениями. А так как появление таких *субъектов* и в обществе и в *партии*, рано или поздно, неизбежно, то такое общество тоже не застраховано от радикальных изменений. Я вообще не представляю себе вечно стабильных обществ. Не дает таких примеров и *история*.

Человек, конечно, устроен сложнее, чем любая модель, однако это не означает, что он обладает полной свободой воли. Во многом он раб обстоятельств и своего характера. Поэтому он далеко не всегда повинен в присущем ему конформизме или индивидуализме. Нельзя утверждать, что *индивидуализм* являет собой абсолютное зло, хотя я считаю его одним из существенных источников нестабильности в обществе и эксплуатации общественного конформизма в личных, далеко не всегда безобидных, интересах. Но без индивидуалистов не было бы независимых идей и суждений, не было бы критического отношения к состоянию общества, живая мысль не оплодотворяла бы общественного инстинкта. Так же нелепо было бы считать *конформизм* абсолютным благом, хотя, опять таки, я считаю его ценнейшим даром, делающим человека контактным, способным прислушиваться к иному мнению, развиваться интеллектуально, в конце концов, приходить к ближнему на помощь не ради личной выгоды, а по велению сердца. Однако общество *абсолютных конформистов* слишком уж легко управляемо и может быть направлено *злой волей* на преступные деяния, что, к сожалению, не раз случалось в истории. Стабильность абсолютно конформистского общества во главе даже с очень *высоконравственными лидерами* напоминала бы закоснелую стабильность муравейника, или термитника, где за миллионы лет ничего по существу не изменилось. На эту тему существует замечательное высказывание Анри Пуанкаре в его знаменитой книге “Наука и метод”: “Я не желал бы ни этой плутократии, жадной и ограниченной, ни этой демократии, добродетельной и посредственной, всегда готовой подставить левую щеку; демократии, среди которой жили бы мудрецы, лишенные любознательности, люди, которые, избегая всякого излишества, не умирали бы от болезни, но наверняка погибали бы от скуки”. (Не кажется ли читателю, который уже досыта нахлебался “благами” современной демократии, что у Пуанкаре о демократии, по крайней мере, идеализированное представление?)

Так что же, существует ли общество, лишенное таких недостатков? Что можно сказать об обществе индивидов, у которых индивидуализм и конформизм как-то сбалансированы между собой: $\mu_j = k_j = 0{,}5$? Например, если в таком обществе исповедуется плюрализм мнений.

Плюрализм. Из (3.2) следует, что при наличии, так называемого, *плюрализма мнений*, когда не все $\alpha_i = 1$, общество не будет целиком находиться в данном состоянии, как и не в каком другом, если только это другое не окажется устраивающим всех. Но тогда не будет пресловутого плюрализма мнений, т.к. общество придет к согласию: все $\alpha_i = 1$. А это, очевидно, - *утопия в чистом* *виде.* Если быть последовательным, то *идеалом плюрализма* естественно считать в определенном смысле *равномерное* распределение всевозможных мнений в обществе по отношению к данному конкретному состоянию, попросту говоря, у каждого индивида имеется свое, отличное от других, мнение - уж быть плюралистами, так быть. Если упорядочить индивидов по возрастанию величины α_i, то формально это будет выглядеть так

$$\alpha_i = \frac{i-1}{N-1}. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (2.3), получим

$$P_i = \frac{i-1}{2(N-1)} + \frac{1}{4}, \quad \frac{M}{N} = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (i-1). = \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Как и следовало ожидать, только половина общества в среднем будет пребывать в данном состоянии. Но интересно другое: какова будет энтропия в таком обществе как мера неопределенности в его состоянии. В нашем случае выражение для энтропии будет выглядеть следующим образом

$$H = -\sum_{i=1}^{N} [P_i \log_2 P_i + (1-P_i)\log_2(1-P_i)]. \tag{3.5}$$

Прежде, чем производить какие-либо вычисления по этой формуле, выпишем выражение для $1\text{-}P_i$. Оно имеет вид

$$1 - P_i = \frac{3}{4} - \frac{i-1}{2(N-1)}.$$

Если в этой формуле изменить нумерацию, положив i = N+1-j, то мы получим

$$1 - P_{N+1-j} = \frac{J-1}{2(N-1)} + \frac{1}{4}. \qquad (3.6)$$

Сравнивая (3.6) с первой формулой из (3.4), видим, что P_j = 1-P_{N+1-j} , или (так удобнее) 1- P_j =P_{N+1-j}, откуда следует, что (3.5) можно переписать в виде

$$H = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i - \sum_{j=1}^{N} P_{N+1-j} \log_2 P_{N+1-j}.$$

Возвращаясь во второй сумме к прежней нумерации, окончательно получаем

$$H = -2\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i .$$

Подставим теперь сюда выражение для апостериорной вероятности P_i . Получим следующую формулу для энтропии

$$H = -2N\left\{\frac{1}{N}\sum_{i-1}^{N}\left[\frac{i-1}{2(N-1)} + \frac{1}{4}\right]\log_2\left[\frac{i-1}{2(N-1)} + \frac{1}{4}\right]\right\}.$$

Если теперь внимательно посмотреть на выражение в фигурных скобках, то можно заметить, что оно совпадает с интегральной суммой для функции: $0,5(x+0,5)\log_2[0,5(x+0,5)]$ на отрезке $[0,1]$, и, при больших значениях N, заменить ее соответствующим ей интегралом

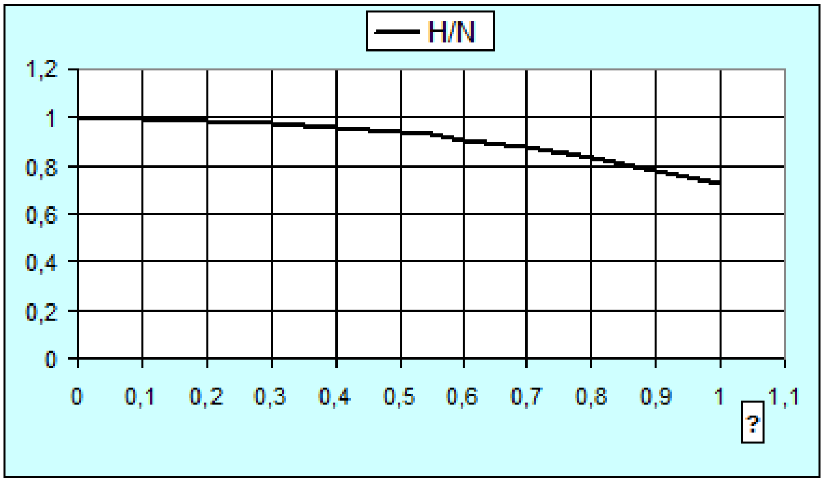
$$H \approx -N\int_0^1 (0,5+x)\log_2\left[0,5(0,5+x)\right]dx \approx 0,94N.$$

Отсюда видно, что мера неопределенности в таком обществе очень велика. Чтобы узнать в каком конкретно состоянии на данный момент оно находится, необходимо произвести в нем более, чем 0,94N замеров его социальных, экономических и политических *параметров*, на худой конец, опросить почти все дееспособного населения, что в большой стране практически невозможно, а если и возможно, то чрезвычайно трудно и дорого. По существу, в таком обществе немыслима никакая целенаправленная реформаторская деятельность. По этой же причине такое состояние общества достаточно стабильно: малым изменением параметра μ его трудно перевести в иное, резко отличное от данного, состояние. Я не исключаю при этом, так называемую, *самоорганизацию* в особенности после потрясения общества разного рода *шоковыми терапиями*. Однако эта самоорганизация, как показывает жизнь, приводит к распаду общества на группировки, промышляющие криминалом. Впоследствии такой опыт может оказаться даже весьма прибыльным для общества, если сфера действия особо опасного для государства криминала будет вынесена за его пределы. Сращивание криминальных структур с государственным аппаратом позволяет узаконить подобный опыт как *свободное предпринимательство*, а общество объявить *правовым,* что не без успеха давно проделано в некоторых пресловутых *цивилизованных* странах, но это уже вопрос *нравственности*. Я говорю об этом здесь не потому, что озабочен положением с нравственностью в этих странах, а потому, что наши *доморощенные либералы* очень сильно уповали на упомянутую *самоорганизацию* в условиях *плюрализма и экономических свобод*, однако жизнь показала, какова эта самоорганизация (во всяком случае, в начальной стадии), и я думаю, что другой не бывает. Трудно представить себе, как уберечь общество от *криминальной самоорганизации* в условиях безграничного плюрализма, экономического хаоса и политического безволия. Не дает ответа на эти вопросы и модель, т.к. подобные механизмы не описывает.

Не лучше обстоит дело, если все - плюралисты и, к тому же, – твердокаменные индивидуалисты $(\mu_j = 1)$. В этом случае энтропия оценивается интегралом

$$H \approx -2N\int_0^1 x\log_2 x dx \approx 0{,}72N.$$

Это *минимальное* значение энтропии, которое она принимает в таком экзотическом обществе повального *плюрализма*. С уменьшением значений μ_j энтропия растет. Если положить все $\mu_j = \mu$, то зависимость приведенной энтропии H/N от значений параметра μ наглядно демонстрирует диаграма



Диаграма1

Остается посмотреть, что может представлять собой общественная структура, в которой энтропия равна нулю. Из (3.5) с очевидностью следует, что это возможно лишь в одном случае, если набор значений P_i состоит только из нулей и единиц, т.е. общество представляет собой, по меньшей мере, *двуполярный* мир (ситуацию, когда все P_i = 0 или 1, я считаю нереальной). Здесь нам представляется два случая. Первый очевиден и не интересен: все общество изначально расколото на два абсолютно изолированных лагеря, отгороженных друг от друга *железным занавесом*. Второй случай, когда в обществе возможны любые контакты, менее тривиален, т.к. накладывает определенные ограничения на параметры μ_i и априорные вероятности α_i. Действительно, пусть у

К членов общества: $P_к = 1$, а у остальных: $S = N\text{-}K$: $P_s = 0$. Тогда из (2.3) следует, что

$$1 = \alpha_k \mu_k + (1-\mu_k)\frac{K}{N} \quad , \qquad k = 1,2,\dots,K,$$

$$0 = \alpha_s \mu_s + (1-\mu_s)\frac{K}{N} \quad , \qquad s = K+1,\dots,N,$$

или в более удобной для анализа форме

$$(1-\alpha_k)\mu_k + (1-\frac{K}{N})(1-\mu_k) = 0, \qquad \alpha_s \mu_s + \frac{K}{N}(1-\mu_s) = 0, \qquad 0 < \frac{K}{N} < 1.$$

Анализ показывает, что эти ограничения выполняются лишь при одном условии, когда все $\alpha_к = 1$, все $\alpha_s = 0$, а все $\mu_k = \mu_s = 1$. Отсюда следует, что разделение общества, как минимум, на два лагеря происходит в этом случае в силу твердого (т.к. все $\mu_i = 1$) различия в убеждениях, покоящихся на различных идеологических или религиозных концепциях. Такое разделение достаточно стабильно, т.к. априорные убеждения совпадают с апостериорными. Мир идеально упорядочен: энтропия в таком мире равна нулю. Во всех других случаях в мире, в той или иной степени, будет присутствовать элемент неопределенности. Однако, как показывает история человечества, такая идеальная упорядоченность недолговечна.

Глобализм и демократия. Попытки сделать человеческую популяцию управляемой приводят к идее

Всемирной глобализации. Предполагается, что в обществе т.н. “квалифицированных потребителей” в условиях демократии будет полная предсказуемость и управляемость (в чем, естественно, немалую роль сыграют средства массовой информации).

Посмотрим, насколько эти надежды оправданы. Демократия предполагает многопартийность, однако много партий я рассматривать не буду, т.к. это ничем не лучше уже исследованного плюрализма. Поэтому я остановлюсь на двухпартийной системе. Ради краткости и простоты я буду полагать, что все в равной степени конформисты (или индивидуалисты) т.е. у всех индивидов: $\mu_j = \mu \neq 0$ (можно показать, что это допущение существенно не повлияет на основной результат исследования, а сделает его только нагляднее). Я также буду полагать, что каждая партия через средства массовой информации умело пропагандирует свою идеологию, разделяя общество на две равные части: у одной из них формируются все $\alpha_j = 1$, а у другой все $\alpha_j = 0$. В этом случае уместно воспользоваться приближенными формулами (2.3):

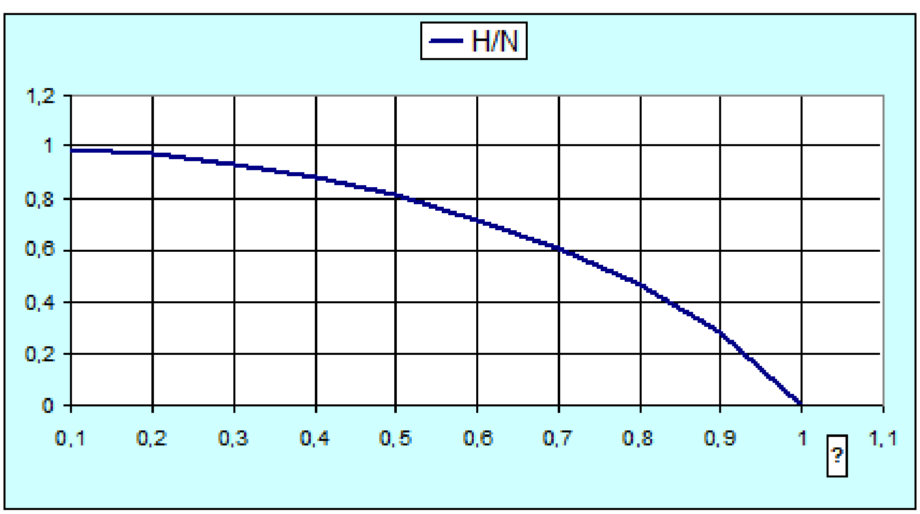
$$P_j = \mu\left(\alpha_j - \frac{M}{N}\right) + \frac{M}{N}, \quad \frac{M}{N} = \frac{1}{2}, \tag{3.7}$$

которые в данном случае сводятся к: $P_j = \frac{1+\mu}{2}$ для первой партии и к: $P_j = \frac{(1-\mu)}{2}$ для второй. Энтропия задается формулой

$$H = -N\left[\frac{1+\mu}{2}\log_2\left(\frac{1+\mu}{2}\right) + \left(\frac{1-\mu}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\mu}{2}\right)\right].$$

Из этой формулы следует, что энтропия $H = 0$ лишь при условии: $\mu = 1$, но это уже не глобальный, а двуполярный мир, о котором я говорил выше. При значениях $\mu < 1$ энтропия будет больше нуля. Например, в сбалансированном обществе $(k = \mu = 0,5)$ она будет уже очень велика: $H = 0,81N$.

Зависимость $\frac{H}{N}$ от величины μ изображена на диаграме внизу. Видно, что приемлемые значения энтропии начинаются со значений μ, близких к единице



Диаграма2

Таким образом, надежды на прогнозируемость и управляемость мира глобальной демократии есть не что иное, как благая буржуазная ***Утопия.*** И она опасна тем, что попытки ее реализовать могут погрузить человечество в “Великую Американскую депрессию”, но уже во Всемирном масштабе.

Однако вполне упорядочный глобальный мир был бы возможен, если бы человечество отказалось от многопартийности. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим вместо (3.7), точные уравнения (1.1) при произвольных значениях параметра μ_j

$$P_j = \alpha_j\mu_j + (1-\mu_j)\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ji}P_i, \qquad j = 1,2,3,\dots,N. \tag{3.8}$$

Из этих уравнений следует любопытный факт: если общество состоит из “априорных единомышленников”, т.е. у всех: $\alpha_j = \alpha$, то решение системы уравнений (3.8) тривиально: апостериорная вероятность P_j не зависит от значений μ_j и равна априорной вероятности: α . А это значит, что наличие в обществе конформизма, или индивидуализма никак не влияет на его состояние. Но тогда (в случае однопартийной системы) основной задачей средств массовой информации (пропаганды) является превращение всех в “априорных единомышленников” со значением параметра α , как можно более, близким к единице, чему наличие конформизма только способствует.

Тогда значение энтропии в обществе будет минимальным, и большинство будет пребывать в заданном состоянии. Такое общество было бы возможно при “победе ***коммунизма*** во Всемирном масштабе”. Однако это тоже ***Утопия.*** Земля большая. Людей на ней много и все они разные.

Давать советы, как известно, занятие неблагодарное. Однако, кое что не в меру забывчивым стоит напомнить:

Не надо одерживать никаких побед во Всемирном масштабе: ни капиталистических, ни коммунистических. Главную победу, которую человеку предстоит одержать во Всемирном масштабе, это Победу над самим собой. Поумерить бы алчность и амбиции. Не надо на Марсе и Луне скупать участки и не надо оставлять своих следов на пыльных тропинках далеких планет. Ничего и нигде лучше Земли мы не найдем. Она наша Мать. Из нее мы вышли - в нее и уйдем и ничего с собой не заберем. Она принадлежит всем. Ее надо любить и беречь. Без нее мы - никто.

4. Заключение. Многошаговая модель.

“Верю. Дорогу широкую, ясную
Грудью народы проложат себе.
Вот только жить в эту пору прекрасную
Уж не придется ни мне, ни тебе”

В заключение я решил посмотреть: оправдана ли надежда оптимистов, что естественным путем развития, со временем, человечество облагородится, нравы смягчатся, и жизнь людей станет прекрасной. Для этого, по меньшей мере, надо, чтобы человечество перешло в состояние, исповедуемое всеми Мировыми Религиями: “Не убий. Не кради. Хлеб насущный добывай в поте лица своего”.

Чтобы провести анализ указанной проблемы с помощью модели поведения, ее придется трансформировать:

1. Введем безразмерное дискретное время: $k = 1,2,3,\ldots,K$, где: K - велико, но не настолько, чтобы состав зафиксированных в начальный момент времени: $k = 1$ индивидов за это время существенно изменился $(N = \text{const})$. Учет демографических сдвигов в рамках этой модели невозможен.

2. Будем полагать (*) априорную вероятность в момент времени "$k+1$" равной апостериорной вероятности в ‘момент времени "k". Уравнения (2.1) примут рекуррентную форму:

$$P_j^{(k+1)} = P_j^{(K)}\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\delta_{ji}\right)P_j^{(k+1)}, \quad j = 1,2,\ldots,N, \qquad (4.1)$$

при начальных условиях: $P_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}$. (*)Как в "*Переговорах*".

Теперь дело за решением системы уравнений (4.1) Приведем его (уже известным нам способом) к виду

$$P_j^{(k+1)} = P_j^{(K)}\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}M^{(k+1)} - \frac{1-\mu_j}{N-1}P_j^{(k+1)}$$

и разрешим это равенство относительно $P_j^{(k+1)}$

$$P_j^{(k+1)} = (N-1)\frac{P_j^{(K)}\mu_j}{N-\mu_j} + \frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}M^{(k+1)}, \qquad P_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)}. \tag{4.2}$$

Просуммируем обе части этих соотношений по j от 1 до N. Получим

$$M^{(k+1)} = (N-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{P_j^{(K)}\mu_j}{N-\mu_j} + M^{(k+1)}\sum_{j=1}^{N}\frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}, \qquad M^{(1)} = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j^{(1)}.$$

Откуда найдем математическое ожидание числа индивидов, готовых перейти в состояние “благодати” к моменту времени “k-1”

$$M^{(k+1)} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{P_j^{(K)}\mu_j}{N-\mu_j}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{N(N-\mu_j)}}\ . \tag{4.3}$$

(*) <u>То же самое можно было получить сразу, заменив в формулах (2.2):</u> α_j на $P_j^{(k)}$, а P_j на $P_j^{(k+1)}$.

Если теперь подставить (4.3) в (4.2), то мы получим рекуррентную формулу для последовательного вычисления значений апостериорных вероятностей $P_j^{(k)}$. Однако в таком общем виде аналитическое исследование представляет собой определенные сложности, поэтому я прибегну к естественным упрощениям. Я буду считать, что у подавляющего числа индивидов все $\mu_j = \mu$ и $0 < \mu < 1$ (т.е. большинство человечества не состоит поголовно из абсолютных конформистов или индивидуалистов). В таком обществе равенство (4.3) превращается в простое рекуррентное соотношение: $\boxed{M^{(k+1)} = M^{(k)}}$, из которого следует, что

$$M^{(k)} \equiv M^{(1)} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}. \qquad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2), при больших значениях N получим простое уравнение для определения $P_j^{(k)}$

$$P_j^{(k+1)} = P_j^{(K)}\mu + (1-\mu)\frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}}{N}.$$

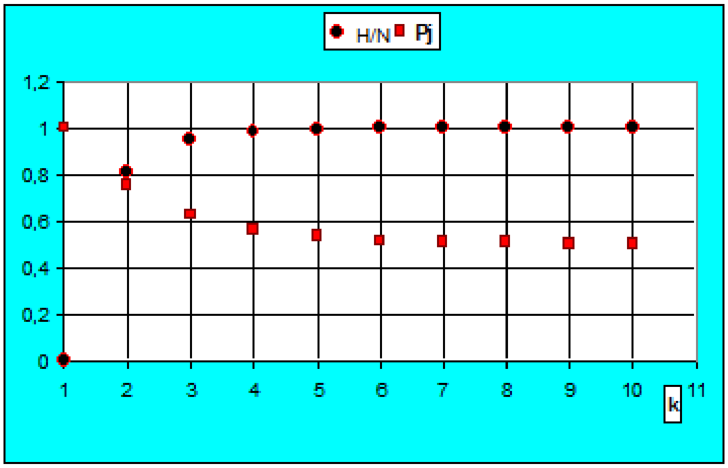
Решение этого уравнения легко находится и имеет следующий вид

$$P_j^{(k)} = \left(\alpha_j^{(1)} - \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}}{N}\right)\mu^{k-1} + \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}}{N}, \text{ причем: } \underset{k\to K}{P_j^{(k)}} \to \frac{\sum_{i=1}^{N} \alpha_i^{(1)}}{N} \le \max_j \alpha_j^{(1)}.$$

Итак, на пути такого естественного “развития” человечество нивелируется: персональные различия индивидов исчезают. Люди начинают подражать друг другу. Если изначально (в момент времени: к=1) в человеческом обществе добро и зло присутствовали в равной мере, т.е. индивиды были разделены поровну на два лагеря: лагерь “добра” и лагерь “зла”:

$$\alpha_j^{(1)} = \begin{cases} 1 \quad \text{при} \quad j < 0{,}5N \to \text{"добро"}, \\ 0 \quad \text{при} \quad j > 0{,}5N \to \text{"зло"}, \end{cases}$$

то апостериорная вероятность индивидов из лагеря "добра" будет убывать, стремясь к половине, а у индивидов из лагеря "зла" симметрично возрастать от нуля до половины. Приведенная энтропия будет $\to \max = 1$



Диаграма3 $\mu = 0,5$

В результате люди "освобождаются" в своем сознании от добра и зла, т.к. не могут отличить одно от другого. Они мечутся в заколдованном круге, перебегая из лагеря в лагерь. Производительные силы хиреют. Торжествует основной инстинкт обывателя: потребление по принципу: хватай, пока есть, что хватать, а не то расхватают другие. Вот только хватать, похоже, скоро станет нечего. В ближайшее время требованием обезумевшего потребителя будет: "Хлеба и зрелищ". История повторяется. Настоящего Хлеба уже нет. И эти процессы протекают тем скорее, чем шире круг человеческого общения, укрепляющий психологию конформизма. Паутина Интернета, опутавшая Земной шар, и мобильник в этом смысле свое дело уже сделали.

В общей абстрактной модели я ввел безразмерное дискретное время "k" , которое можно трактовать как моменты смены индивидами общества своего отношения к данному состоянию. Например, это могут быть моменты каких-то бытовых, политических или экономических неурядиц (кризисов). Интервалы ***реального времени*** между двумя такими последовательными моментами, в зависимости от сложившихся обстоятельств, могут быть разными. Чем меньше такой интервал, тем больше в заданный промежуток времени уложится шагов возможной смены состояний, тем быстрее будет происходить нивелирование общества, и тем быстрее будет нарастать в нем энтропия.

(PS) Схема, используемая в пункте **Заключение**, конечно, грубовата, но тенденцию, которая уже ощущается, она отражает.

Мы, конечно, уже не обезьяны, но пока еще и не люди

Приложение.

1. Здесь приводятся выкладки, с помощью которых я получил решение системы уравнений (2.1).

Выпишем систему (2.1)

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(1-\delta_{ji})P_i \qquad (\text{П}.1)$$

И преобразуем ее правую часть следующим образом

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\sum_{i=1}^{N}P_i - \frac{1-\mu_j}{N-1}P_j, \qquad (\text{П}.2)$$

где $M = \sum_{i=1}^{N}P_i$ - математическое ожидание числа индивидов, перешедших в данное состояние. Разрешая равенство (П.2) относительно P_j, найдем

$$P_j = (N-1)\frac{\alpha_j\mu_j}{N-\mu_j} + \frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}M. \qquad (\text{П}.3)$$

Суммируя обе части этого равенства по j от 1 до N, получим линейное уравнение для определения математического ожидания M

$$M = (N-1)\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{N-\mu_j} + M\sum_{j=1}^{N}\frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}. \qquad (\text{П}.4)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$M = N\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{N-\mu_j}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{(N-\mu_j)}}. \qquad (\text{П}.5)$$

Подставляя (П.5) в (П.3) находим окончательно

$$P_j = \frac{N-1}{N-\mu_j} + N\frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{N-\mu_j}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{(N-\mu_j)}}, \quad \frac{M}{N} = \frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{N-\mu_j}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j}{(N-\mu_j)}}. \qquad (П.6)$$

Как видно, (П.6) совпадают с (2.2). Что и требовалось.

2. Решение системы уравнений в пункте ***Парламент***

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta\sum_{i=1}^{N}(1-\delta_{ji})P_i + (1-\mu_{jj})(1-\Delta)P_0$$

находится аналогичным образом. Приведем это уравнение к виду

$$P_j = \alpha_j\mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta M - \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta P_j + (1-\mu_{jj})(1-\Delta)P_0, \quad M = \sum_{i=1}^{N}P_i$$

и разрешим его относительно P_j:

$$P_j = \frac{(N-1)\alpha_j\mu_j}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]} + \frac{(1-\mu_j)\Delta}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}M + \frac{(1-\mu_j)(N-1)(1-\Delta)P_0}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}$$

Просуммируем обе части этого равенства по j от 1 до N. Получим линейное уравнение для определения математического ожидания: $M = \sum_{j=1}^{N}P_j$

$$M = \sum_{j=1}^{N}\frac{(N-1)\alpha_j\mu_j}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]} + M\sum_{j=1}^{N}\frac{(1-\mu_j)\Delta}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]} + \sum_{j=1}^{N}\frac{(1-\mu_j)(N-1)(1-\Delta)P_0}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$M=\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\left[1-(1-\mu_j)\Delta\right]}{N\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}+\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{(1-\mu_j)(1-\Delta)P_0}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\left[1-(1-\mu_j)\Delta\right]}{N\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}.$$

Тогда доля депутатов, проголосовавших “за” будет равна

$$\frac{M}{N}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j\mu_j}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\left[1-(1-\mu_j)\Delta\right]}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}+\frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{(1-\mu_j)(1-\Delta)P_0}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}{\sum_{j=1}^{N}\frac{\left[1-(1-\mu_j)\Delta\right]}{\left[N-1+(1-\mu_j)\Delta\right]}}\ .$$

При больших значениях N формула упрощается

$$\frac{M}{N}\approx\frac{\sum_{j=1}^{N}\left[\alpha_j\mu_j+(1-\mu_j)(1-\Delta)P_0\right]}{\sum_{j=1}^{N}\left[1-(1-\mu_j)\Delta\right]}=\frac{q+\alpha r\mu+r(1-\mu)(1-\Delta)P_0}{p+q+r(1-\Delta)+r\mu\Delta}.$$

В случае идеального “болота” $(\mu=0)$ получаем уже известную нам формулу (2.13)

$$\frac{M}{N}\approx\frac{q+(1-\Delta)rP_0}{p+q+(1-\Delta)r}.$$

Что и требовалось.

3. Замечание к пункту ***Переговоры*** (стр.16)

Для получения решения системы уравнений, используемых в этом пункте, можно применить стандартную процедуру, не сводя предварительно их к системе (2.4).

Выпишем исходную систему уравнений

$$\begin{cases} P_1^{(n+1)} = P_1^{(n)}\mu_1 + (1-\mu_1)P_2^{(n+1)}, \\ P_2^{(n+1)} = P_2^{(n)}\mu_2 + (1-\mu_2)P_1^{(n+1)}. \end{cases} \tag{1.П}$$

Эти уравнения линейны и однородны. Соответствующую им систему линейно независимых частных решений можно представить в виде: λ^n. Выпишем характеристический определитель для нахождения собственных значений λ

$$\begin{Vmatrix} \lambda-\mu_1 & \lambda(\mu_1-1) \\ \lambda(\mu_2-1) & \lambda-\mu_2 \end{Vmatrix} = 0$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение

$$(\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2)\lambda^2 - (\mu_1+\mu_2)\lambda + \mu_1\mu_2 = 0,$$

и найдем его корни

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \Psi = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2}. \tag{2.П}$$

Таким образом, общее решение системы (1.П) представимо в виде

$$P_1^{(n)} = A\Psi^n + B, \qquad P_2^{(n)} = C\Psi^n + D.$$

Привлекая начальные условия: $P_1^{(0)} = 1$, $P_2^{(0)} = 0$ и систему уравнений (1.П), определим константы: A, B, C, D

$$A = \frac{\Phi(\mu_1,\mu_2)}{1-\Psi}, \quad B = 1-\frac{\Phi(\mu_1,\mu_2)}{1-\Psi}, \quad C = \frac{\Phi(\mu_1,\mu_2)}{1-\Psi}-1,, \quad D = 1-\frac{\Phi(\mu_1,\mu}{1-\Psi}$$

где: $\Phi(\mu_1,\mu_2) = \dfrac{\mu_2(1-\mu_1)}{\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2}$.

После несложных тождественных преобразований приведем решение системы (1.П) к виду, который полностью совпадает с (2.6):

$$\begin{cases} P_1^{(n)} = 1 - \Phi(\mu_1, \mu_2)\dfrac{1-\Psi^n}{1-\Psi}, \quad P_2^{(n)} = \varphi(\mu_2, \mu_1)\dfrac{1-\Psi^n}{1-\Psi}, \\ M^{(n)} = P_1^{(n)} + P_2^{(n)} = 1 - \left[\Phi(\mu_1, \mu_2) - \varphi(\mu_2, \mu_1)\right]\dfrac{1-\Psi^n}{1-\Psi}. \end{cases} \qquad (3.П)$$

Литература:

1. Гантмахер Ф.Р. "Теория матриц", "Наука", Гл. ред. физмат литературы, Москва, 1967.

2. Краснощеков П.С. Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма. // Математическое моделирование. 1998, т.10, №7. с. 76 - 92.

*“Земля наша велика и обильна,
но порядка в ней нет. Приди и
правь нами”.*

Эпилог.

К сожалению, распространено заблуждение: путают ***диктатуру*** (единоначалие), очевидно необходимую в коллективных сообществах, с ***самодурством***, отсутствие которого в любом обществе ни какая демократия не гарантирует. Такой самодур, как Гитлер, пришел к власти ***демократическим путем.*** За демократическим фасадом в обществе может прятаться просто ***регулярная смена самодуров***. Или, что еще хуже, ***услужливых шестерок олигархов.***

↑ ↑

Авторитарное самодурство + тотальный конформизм т.н. "сверх-человеков", приводящий последних в состояние полной истерии.