מתמטיקה בדידה - שיעור 10

נושא 1: אינדוקציית סכומים וסדרות

הסבר מקוצר:

שיטת הוכחה מתמטית המשמשת להוכחת נכונותן של טענות או נוסחאות עבור כל המספרים הטבעיים, המבוססת על בדיקת מקרה בסיס ראשוני והוכחה כי נכונות עבור איבר מסוים גוררת בהכרח נכונות עבור האיבר הבא אחריו.

הסבר מורחב:

הוכחה באינדוקציה של סדרות וסכומים מורכבת משלושה שלבים קבועים:

1. בסיס האינדוקציה (שלב הבדיקה): בדיקת נכונות הנוסחה עבור המספר הטבעי הראשון בסדרה (בדרך כלל עבור n שווה 1). שלב זה הנו חובה מוחלטת במבחן ולא ניתן לדלג עליו.
2. הנחת האינדוקציה: שלב שבו מניחים כי הטענה או הנוסחה נכונה עבור מספר טבעי כלשהו n.
3. צעד האינדוקציה (שלב ההוכחה): מוכיחים כי הטענה נכונה עבור n פלוס 1 על בסיס ההנחה שהיא נכונה עבור n. בתרגילי סכומים, אנו כותבים את הטור עד האיבר ה-n פלוס 1, מזהים בתוכו את הטור המקורי של n, מחליפים אותו באגף ימין של הנחת האינדוקציה, ומבצעים פיתוח אלגברי (פתיחת סוגריים וכינוס איברים) כדי להראות ששני אגפי המשוואה החדשה שווים זה לזה.

משפטי מפתח והגדרות למבחן:

- בסיס האינדוקציה: שלב חיוני המוכיח את קיומו של עוגן ראשוני לסדרה. ללא עוגן זה, להוכחת הצעד אין משמעות מעשית.
- הנחת האינדוקציה: השורה אותה אנו מניחים כנכונה באופן זמני עבור n ומציבים אותה כתרגול אלגברי בתוך שלב ההוכחה של n פלוס 1.
- צעד האינדוקציה: המעבר האלגברי מ-n ל-n פלוס 1 הדורש זיהוי של האיברים הקודמים בסדרה בהתאם להפרש הקבוע שלהם.

דוגמאות:

דוגמה 1 (סדרה חשבונית בקפיצות של 4):
יש להוכיח עבור כל n טבעי כי מתקיים: 3 ועוד 7 ועוד 11 ועוד ... ועוד (4n פלוס 3) שווה 3n כפול (6n פלוס 1).
בדיקה עבור n שווה 1:
אגף שמאל מורכב מהאיבר הראשון עד האיבר שבו מציבים n שווה 1. בבדיקה המספרית שנערכה בכיתה נמצא כי אגף שמאל שווה ל-21 ואגף ימין שווה ל-3 כפול 1 כפול (6 כפול 1 ועוד 1) שווה 21.
השוויון מתקיים והבדיקה הוכתרה בהצלחה.
בשלב ההוכחה עבור n פלוס 1, מפרקים את הסכום, מוצאים את האיבר הקודם באמצעות הפחתת 4 (הקפיצה הקבועה בסדרה), מציבים את אגף ימין של ההנחה ומראים באמצעות פתיחת סוגריים ששני האגפים מגיעים לביטוי הריבועי המשותף: 18n בריבוע ועוד 39n ועוד 21.
דוגמה 2 (סדרה בקפיצות של 5):
יש להוכיח כי: 1 ועוד 6 ועוד 11 ועוד 16 ועוד ... ועוד (10n פחות 4) שווה ל-n כפול (10n פחות 3).

בדיקה עבור n שווה 1:
אגף שמאל (רץ מאחד עד שש בהתאם להצבה): 1 ועוד 6 שווה 7.
אגף ימין: 1 כפול (10 כפול 1 פחות 3) שווה 7. מתקיים.
בשלב הצעד עבור n פלוס 1, מזהים את האיבר הקודם על ידי הפחתת 5 מהאיבר האחרון, מציבים את הנחת האינדוקציה, פותחים סוגריים ומגיעים לכך ששני האגפים שווים במדויק ל-10n בריבוע ועוד 17n ועוד 7.
דוגמה 3 (סדרה זוגית):
יש להוכיח כי: 2 ועוד 4 ועוד 6 ועוד ... ועוד 8n שווה 4n כפול (4n פלוס 1).
בדיקה עבור n שווה 1:
אגף שמאל: 2 ועוד 4 ועוד 6 ועוד 8 שווה 20.
אגף ימין: 4 כפול 1 כפול (4 כפול 1 ועוד 1) ששווה ל-4 כפול 5 שווה 20. מתקיים.

שאלות הבנה:

1. מדוע שלב בדיקת בסיס האינדוקציה הוא תנאי הכרחי להוכחה כולה, ומה הסכנה הלוגית בדילוג עליו?
2. כיצד אנו נעזרים בהפרש הקבוע בין איברי הסדרה (הקפיצות) כדי למצוא את האיבר הקודם בשלב ההוכחה של n פלוס 1?
3. אם במהלך פתיחת הסוגריים בשלב הצעד לא מתקבל שוויון בין האגפים, אילו שתי אפשרויות מרכזיות יכולות להסביר זאת?

נושא 2: אינדוקציה מתמטית עם איבר ראשון משתנה

הסבר מקוצר:

וריאציה מתקדמת של הוכחה באינדוקציה שבה לא רק האיבר האחרון והסכום הכללי משתנים עם גידולו של n, אלא גם האיבר הראשון הפותח את הסדרה משתנה בהתאם לערכו של n.

הסבר מורחב:

בסדרות סטנדרטיות, האיבר הראשון קבוע תמיד (למשל המספר 1 או 2). לעומת זאת, בסדרות עם איבר ראשון משתנה, האיבר הפותח מכיל את המשתנה n (לדוגמה, n פלוס 1). כאשר עוברים משלב n לשלב n פלוס 1, האיבר הראשון משתנה והופך ל-n פלוס 2.
משמעות הדבר היא שהאיבר הראשון שהיה קיים בהנחת האינדוקציה (n פלוס 1) "נעלם" מתחילת הסדרה החדשה. כדי שנוכל להשתמש בהנחת האינדוקציה, אנו מחויבים לבצע מניפולציה אלגברית של איזון: אנו מוסיפים את האיבר החסר לשני אגפי המשוואה. הוספה זו משלימה את אגף שמאל למבנה המדויק של הנחת האינדוקציה ומאפשרת לנו להציב במקומו את אגף ימין הנתון, ולאחר מכן לפשט את המשוואה המשודרגת.

משפטי מפתח והגדרות למבחן:

- איבר ראשון משתנה: מצב שבו גבולות הסכום דינמיים ונעים קדימה משני הצדדים במקביל עם כל הגדלה של n.
- איזון אגפים חיובי: הוספת האיבר החסר (שנשמט מתחילת הסדרה) בצורה שווה לשני אגפי המשוואה על מנת לשמור על ערך השוויון ולאפשר את חילוץ הנחת האינדוקציה.

דוגמאות:

דוגמה 1:
יש להוכיח עבור כל n טבעי כי מתקיים: (n פלוס 1) ועוד (n פלוס 2) ועוד (n פלוס 3) ועוד ... ועוד 2n שווה ל-n כפול (3n פלוס 1) חלקי 2.
בדיקה עבור n שווה 1:
אגף שמאל: האיבר הראשון הוא 1 פלוס 1 שווה 2, והאיבר האחרון הוא 2 כפול 1 שווה 2. כיוון שההתחלה והסוף מתלכדים, יש לנו איבר אחד בלבד שערכו 2.
אגף ימין: 1 כפול (3 כפול 1 ועוד 1) חלקי 2 שווה ל-4 חלקי 2 שווה 2. הבדיקה מתקיימת.
שלב ההוכחה עבור n פלוס 1:
הביטוי הנדרש להוכחה הופך ל- (n ועוד 2) ועוד (n ועוד 3) ועוד ... ועוד (2n ועוד 2).
כדי לקשר זאת להנחת האינדוקציה, אנו שמים לב שחסר לנו האיבר (n פלוס 1) בתחילת הטור. אנו מוסיפים את (n פלוס 1) לשני האגפים, מחליפים את הטור השלם באגף ימין של ההנחה, מכפילים את כל המשוואה ב-2 כדי להיפטר מהשברים, ומראים ששני האגפים מתלכדים באופן מושלם לביטוי האלגברי: 3n בריבוע ועוד 9n ועוד 6.

שאלות הבנה:

1. כיצד ניתן לזהות באופן ויזואלי ומבני שהאיבר הראשון בתרגיל אינדוקציה מסוים אינו קבוע אלא משתנה?
2. מדוע הוספת איבר חסר לשני האגפים אינה פוגעת בנכונות המשפט המתמטי, וכיצד היא מסייעת לנו להשתמש בהנחה?

3. האם ניתן לפתור תרגיל עם איבר ראשון משתנה באמצעות הוספה וחיסור של האיבר החסר באותו האגף בלבד (במקום להוסיף לשני האגפים)? הסבר את ההיגיון.

נושא 3: אינדוקציה של התחלקות

הסבר מקוצר:

סוג של הוכחה באינדוקציה שבו המטרה אינה להוכיח שוויון אלגברי בין טור מספרים לנוסחה, אלא להוכיח כי ביטוי מתמטי מסוים מתחלק במספר נתון ללא שארית עבור כל n טבעי.

הסבר מורחב:

בהוכחות התחלקות, שלב הבדיקה (n שווה 1) מניב בדרך כלל ערך מספרי ישיר (או את המספר 0, אשר מתחלק בכל מספר שלם ללא שארית). בשלב צעד האינדוקציה עבור n פלוס 1, האתגר המרכזי הוא אלגברי: אנו משתמשים בחוקי חזקות כדי לפרק ביטויים מהצורה של A בחזקת (n פלוס 1) לביטוי מהצורה A בחזקת n כפול A.
לאחר הפירוק, המטרה היא "לחלץ" מתוך הביטוי החדש גורם משותף שיאפשר לנו להציג חלק מהביטוי ככפולה של הנחת האינדוקציה המקורית (שכבר ידוע לנו שהיא מתחלקת במספר המבוקש). את החלק שנותר מחוץ לגורם המשותף (השארית האלגברית), אנו מפשטים ומראים כי הוא מכיל מקדם מספרי שהוא בעצמו כפולה ישירה של המספר המחלק, ובכך מוכחת התחלקות הביטוי כולו.

משפטי מפתח והגדרות למבחן:

- התחלקות ללא שארית: משמעותה שניתן לייצג את הביטוי ככפולה של המספר המחלק כפול מספר שלם כלשהו.
- פירוק מעריכים חזקתיים: טכניקה חיונית שבה מפרידים את תוספת ה-1 מהמעריך על מנת להגיע לבסיס זהה לזה שמופיע בהנחת האינדוקציה.

דוגמאות:

דוגמה 1:
יש להוכיח כי הביטוי: 5 כפול (7 בחזקת n) פחות 7 כפול (5 בחזקת n) מתחלק ב-10 ללא שארית עבור כל n טבעי.
בדיקה עבור n שווה 1:
5 כפול (7 בחזקת 1) פחות 7 כפול (5 בחזקת 1) שווה 35 פחות 35 שווה 0. המספר 0 מתחלק ב-10 ללא שארית (0 חלקי 10 שווה 0). הבדיקה עברה בהצלחה.
שלב הצעד עבור n פלוס 1:
הביטוי הופך ל- 5 כפול (7 בחזקת n פלוס 1) פחות 7 כפול (5 בחזקת n פלוס 1).
מבצעים פירוק חזקות: 5 כפול (7 בחזקת n) כפול 7 פחות 7 כפול (5 בחזקת n) כפול 5.
מסדרים את המקדמים מחדש: יש לנו 7 פעמים את האיבר הראשון ו-5 פעמים את האיבר השני.
מוציאים 5 פעמים את הביטוי המלא של הנחת האינדוקציה (שמתחלק ב-10 לפי ההנחה), ונשארים עם שארית אלגברית של: 2 כפול 5 כפול (7 בחזקת n). מכיוון ש-2 כפול 5 שווה 10, השארית היא כפולה

ישירה של 10 ומתחלקת ב-10 ללא שארית. השילוב של שני החלקים מוכיח את הטענה במלואה.

שאלות הבנה:

1. מדוע מבחינה מתמטית ולוגית המספר 0 נחשב כמי שמתחלק ב-10 (או בכל מספר אחר) ללא שארית בשלב הבסיס?
2. מהו העיקרון האלגברי המנחה שעוזר לנו להחליט איזה מספר להוציא כגורם משותף מחוץ לסוגריים בשלב הצעד של אינדוקציית התחלקות?
3. אם השארית שנותרה לנו לאחר חילוץ הנחת האינדוקציה אינה מתחלקת במספר המבוקש, אילו טעויות נפוצות כדאי לחפש בפתרון האלגברי שלנו?

טבלה מסכמת של הנושאים

נושא	הגדרות והרחבות מסכמות
אינדוקציית סכומים וסדרות	הוכחת נוסחאות של טורים קבועים על ידי בדיקת בסיס (n=1), הנחת נכונות ל-n, והוכחת נכונות ל-n+1 באמצעות זיהוי האיבר הקודם וכינוס איברים אלגברי.
אינדוקציה עם איבר ראשון משתנה	וריאציה שבה גם תחילת הסדרה משתנה עם גידול ה-n. מחייבת הוספת האיבר שנשמט לשני אגפי המשוואה כדי לאפשר את יישום הנחת האינדוקציה.
אינדוקציה של התחלקות	הוכחה שביטוי אלגברי מתחלק במספר ללא שארית. מבוססת על פירוק חזקות, חילוץ גורם משותף המכיל את הנחת האינדוקציה, והוכחה שהשארית היא כפולה של המספר המחלק.

נספח: תשובות לשאלות ההבנה

נושא 1: אינדוקציית סכומים וסדרות

1. שלב הבסיס מהווה את "אבן הדומינו הראשונה". ללא בדיקה זו, הוכחת הצעד בלבד רק אומרת ש**אם** הטענה נכונה עבור n כלשהו היא תהיה נכונה גם עבור הבא אחריו, אך ייתכן שהיא אינה נכונה עבור אף מספר בפועל (טענה ריקה).
2. אנו מביטים באיבר האחרון של שלב ה-n פלוס 1 ומחסירים ממנו את ערך הקפיצה הקבוע של הסדרה (ההפרש). פעולה זו חושפת את האיבר שלפניו, ומאפשרת לנו לראות את הטור המקורי של שלב ה-n במלואו.
3. האפשרות הראשונה היא שישנה טעות חישוב אלגברית באחד השלבים (פתיחת סוגריים, מכנה משותף או כינוס). האפשרות השנייה היא שהנוסחה המקורית שניתנה בשאלה פשוט אינה נכונה עבור כל n.

נושא 2: אינדוקציה מתמטית עם איבר ראשון משתנה

1. ניתן לזהות זאת כאשר מציבים n=1 ורואים שהסדרה מתחילה במספר מסוים (למשל 2), וכאשר מציבים n=2 רואים שהסדרה מתחילה במספר אחר (למשל 3). האיבר הראשון אינו מספר קבוע אלא ביטוי התלוי ב-n.
2. הוספת אותו ביטוי בדיוק לשני אגפי משוואה היא פעולה אלגברית חוקית שאינה משנה את תקפות השוויון. היא מסייעת לנו כיוון שהיא משלימה באגף שמאל את האיבר שהיה חסר כדי להגיע למבנה המדויק של הנחת האינדוקציה.
3. כן, ניתן להוסיף ולהחסיר את האיבר החסר באותו אגף (פעולה השקולה להוספת 0). לאחר מכן, משאירים את האיבר החיובי כחלק מהטור ומעבירים את האיבר השלילי (המוחסר) באגף אל הצד השני, מה שמוביל בדיוק לאותה משוואה.

נושא 3: אינדוקציה של התחלקות

1. המספר 0 מתחלק בכל מספר שלם (למעט אפס) ללא שארית, מכיוון שתוצאת החלוקה היא 0, שהוא מספר שלם ללא חלק שברי, ולכן הוא עומד באופן מלא בהגדרה המתמטית של התחלקות.
2. העיקרון הוא להביט במקדמים של החזקות המפורקות, ולבחור להוציא מחוץ לסוגריים מקדם שיאפשר לנו לבנות בתוך הסוגריים את המבנה המדויק של הנחת האינדוקציה (בדוגמה מהכיתה הוצאנו את המקדם 5).
3. יש לחפש טעויות בפירוק החזקות (למשל שכחה של כפל בבסיס), טעויות בסימני המינוס שמשנים את כל פתיחת הסוגריים, או חלוקה לא נכונה של המקדמים הנותרים בשלב כינוס האיברים של השארית.

כדי לסייע לך לתרגל ולראות כיצד שלבי האינדוקציה שלמדת בשיעור פועלים הלכה למעשה עבור ערכים שונים של n, מצורף כלי סימולציה אינטראקטיבי. הכלי מאפשר לבחור את סוגי הסדרות והתרגילים שנלמדו בכיתה, להזין ערכי n שונים, ולצפות בבדיקת מקרה הבסיס ובהערכת האגפים בזמן אמת.