



DEPARTAMENTO  
DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

## Trabajo Práctico III

---

Algoritmos y Estructura de Datos III  
Primer Cuatrimestre de 2015

| Integrante      | LU     | Correo electrónico      |
|-----------------|--------|-------------------------|
| Iván Arcuschin  | 678/13 | iarcuschin@gmail.com    |
| Martín Jedwabny | 885/13 | martiniedva@gmail.com   |
| José Massigoge  | 954/12 | jmmassigoge@gmail.com   |
| Lucas Puterman  | 830/13 | lucasputerman@gmail.com |



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

<http://www.fcen.uba.ar>

# Índice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. Ejercicio 1 - Demostración</b>                                     | <b>4</b>  |
| 1.1. Definiciones . . . . .  | 4         |
| 1.2. Ejercicio A . . . . .   | 4         |
| 1.3. Ejercicio B . . . . .   | 6         |
| 1.4. Ejercicio C . . . . .   | 6         |
| <b>2. Ejercicio 2 - Algoritmo exacto</b>                                 | <b>7</b>  |
| 2.1. Ejercicio A . . . . .   | 7         |
| 2.1.1. Estrategia . . . . .  | 7         |
| 2.1.2. Podas . . . . .   | 7         |
| 2.1.3. Pseudocódigo . . . . .  | 8         |
| 2.2. Ejercicio B . . . . .   | 8         |
| 2.3. Ejercicio C . . . . .   | 10        |
| <b>3. Ejercicio 3 - Heurística constructiva golosa</b>                   | <b>13</b> |
| 3.1. Ejercicio A . . . . .   | 13        |
| 3.2. Pseudocódigo . . . . .  | 13        |
| 3.2.1. Implementación sobre listas de adyacencia . . . . .               | 13        |
| 3.2.2. Implementación sobre matriz de adyacencia . . . . .               | 14        |
| 3.3. Ejercicio B . . . . .   | 14        |
| 3.4. Ejercicio C . . . . .   | 15        |
| 3.5. Ejercicio D . . . . .   | 17        |
| 3.5.1. Experimentación sobre grafo completo . . . . .                    | 17        |
| 3.5.2. Experimentación sobre el complemento del grafo completo . . . . . | 23        |
| <b>4. Ejercicio 4 - Heurística de búsqueda local</b>                     | <b>30</b> |
| 4.1. Ejercicio A . . . . .   | 30        |
| 4.1.1. Algoritmo implementado . . . . .                                  | 30        |
| 4.1.2. Procedimiento BFS modificado: . . . . .                           | 30        |
| 4.1.3. Primer Criterio de Vecindad . . . . .                             | 31        |
| 4.1.4. Segundo Criterio de Vecindad . . . . .                            | 31        |
| 4.2. Ejercicio B . . . . .   | 33        |
| 4.3. Ejercicio C . . . . .   | 34        |
| <b>5. Ejercicio 5 - Metaheurística GRASP</b>                             | <b>40</b> |
| 5.1. Ejercicio A . . . . .   | 40        |
| 5.1.1. Idea general . . . . .  | 40        |
| 5.1.2. Criterios de parada . . . . .                                     | 40        |
| 5.1.3. Selección de lista de candidatos (RCL) . . . . .                  | 40        |
| 5.1.4. Pseudocódigo . . . . .  | 41        |
| 5.2. Ejercicio B . . . . .   | 42        |
| <b>6. Ejercicio 6 - Experimentación final</b>                            | <b>43</b> |
| 6.1. Experimentación con Grafos completos . . . . .                      | 43        |
| 6.1.1. Tiempos de ejecución . . . . .                                    | 44        |
| 6.1.2. Calidad de las soluciones . . . . .                               | 44        |
| 6.2. Experimentación con Complemento de Grafos completos . . . . .       | 45        |
| 6.2.1. Tiempos de ejecución . . . . .                                    | 45        |
| 6.2.2. Calidad de las soluciones . . . . .                               | 46        |
| 6.3. Experimentación con Caminos . . . . .                               | 46        |
| 6.3.1. Tiempos de ejecución . . . . .                                    | 46        |
| 6.3.2. Calidad de las soluciones . . . . .                               | 47        |
| 6.4. Experimentación con Ciclos . . . . .                                | 47        |

|  |           |
|--|-----------|
| 6.4.1. Tiempos de ejecución . . . . .                    | 48        |
| 6.4.2. Calidad de las soluciones . . . . .               | 48        |
| <b>A. Implementación algoritmo exacto</b>                | <b>49</b> |
| <b>B. Implementación algoritmo goloso</b>                | <b>52</b> |
| B.1. Implementación sobre matriz de adyacencia . . . . . | 52        |
| B.2. Implementación sobre listas de adyacencia . . . . . | 53        |
| <b>C. Implementación algoritmo de búsqueda local</b>     | <b>56</b> |
| <b>D. Implementación metaheurística GRASP</b>            | <b>62</b> |

# 1. Ejercicio 1 - Demostración

## 1.1. Definiciones

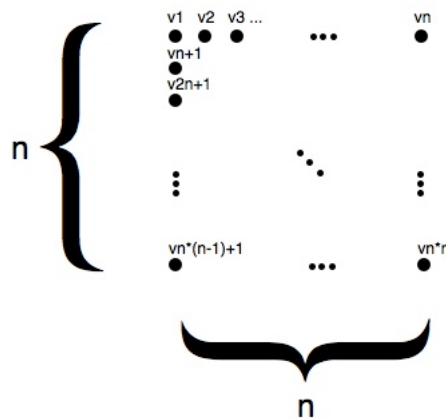
Sea  $G=(V,E)$  un grafo simple:

- Definición 1:  $D \subseteq V$  es un **conjunto dominante** (CD)  $\iff \forall v \in V, v \in D \text{ ó } \exists w \in D \text{ tal que } (v,w) \in E$  (tiene un vecino en D).
- Definición 2:  $D \subseteq V$  es un **conjunto independiente** (CI)  $\iff \forall v,w \in D, (v,w) \notin E$ .
- Definición 3:  $D \subseteq V$  es un **conjunto independiente dominante** (CID)  $\iff D$  es dominante e independiente.
- Definición 4:  $D \subseteq V$  es un **conjunto independiente dominante mínimo** (CIDM)  $\iff D$  es el conjunto independiente dominante de  $V$  con menos nodos. Es decir que  $\forall D' \subseteq V$  tal que  $D'$  es independiente dominante,  $\#(D) \leq \#(D')$ .
- Definición 5:  $D \subseteq V$  es un **conjunto independiente maximal** (CIMax)  $\iff D$  es independiente y  $\nexists D' \subseteq V$  independiente tal que  $D \subset D'$  ( $\subset$  estricto).

## 1.2. Ejercicio A

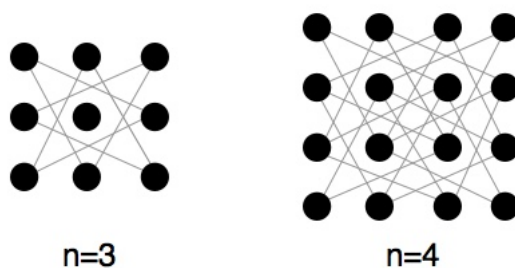
Relacionar el problema de CIDM con el problema 3 del TP 1 (i.e., similitudes y diferencias):

Si definimos a  $G=(V,E)$  grafo simple para que represente al tablero de ajedrez que se forma en el ejercicio 3 del tp1, los nodos serían una cuadrícula de la pinta (sin considerar los ejes, eso lo hacemos después):



Donde 'n' es el parámetro del ejercicio que indica el tamaño de lado del tablero.

Ahora, como el ejercicio consiste en poner la mínima cantidad de caballos para que todas las casillas tengan un caballo o bien estén amenazadas, podemos representar las 'amenazas' como los ejes del grafo, por ejemplo:



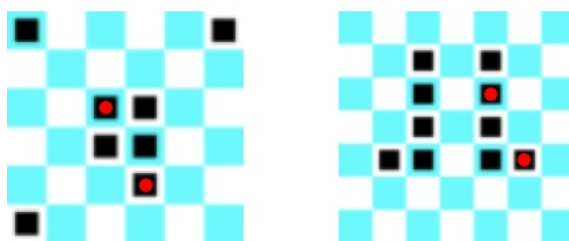
*Observación:* como cualquier posición  $x$  que amenaza a otra posición  $y$  sería amenazada si pongo un caballo en  $y$ , podemos representar el problema con un grafo simple y no un digrafo.

Entonces los ejercicios son similares ya que lo que estamos buscando en el ejercicio del TP1 es la mínima cantidad de caballos para que todas las posiciones (nodos) tengan un caballo o estén amenazadas (dominadas).

Es decir, si los caballos son un conjunto  $D$  de vértices en  $V$ , queremos hallar  $\#(D)$  tal que:

- $\forall v \in V, v \in D \text{ o } \exists w \in D \text{ tal que } (v,w) \in E \iff D \text{ es dominante.}$
- $\forall D' \subseteq V \text{ tal que } D' \text{ es dominante, } \#(D) \leq \#(D') \iff D \text{ es mínimo entre los conjuntos dominantes de } V.$

Por lo tanto el problema consiste en hallar un conjunto dominante mínimo pero, a diferencia del problema en este TP, puede o no ser independiente. Esto se debe a que existen respuestas para el problema del TP1 donde hay caballos en ciertas posiciones que se amenazan entre sí:



*Observación:* estos graficos fueron extraidos de la página: <http://home.earthlink.net/~morgenstern/solution/knsols1.htm>. El primero representa una solución óptima del ejercicio del TP1 con un tablero de 6x6 y la segunda imagen es para un tablero de 7x7. En ambas, se marcan con un punto negro los casilleros que tienen un caballo y, como vemos señalado en rojo, hay caballos en posiciones que se amenazan entre sí.

Mas alla de eso, ambos problemas son de optimización combinatoria. Los conjuntos factibles son los vertices de un grafo que cumplen ciertas condiciones (si bien como dijimos antes, no son las mismas para los dos problemas) y la función de optimalidad consiste en minimizar la cantidad de vértices del conjunto.

### 1.3. Ejercicio B

*Demostrar que todo conjunto independiente maximal es un conjunto dominante:*

Sea  $G=(V,E)$  un grafo simple y  $D \subseteq V$  un conjunto independiente maximal, quiero ver que  $D$  es un conjunto dominante.

Supongamos (por absurdo) que  $D$  no es un conjunto dominante:

$\Rightarrow \exists v \in V$  tal que  $v \notin D \wedge \forall w \in D, (v,w) \notin E$  (no es vecino de ningún nodo en  $D$ ).

$\Rightarrow D \cup \{v\}$  es independiente ya que como  $D$  es independiente sucede que  $\forall w \in D \cup \{v\} \nexists x \in D$  tal que  $(x,w) \in E$ .

$\Rightarrow$  Absurdo! pues  $D$  era maximal y  $\exists D' = D \cup \{v\}$  tal que  $D'$  es independiente y  $D \subset D'$ , así contradiciendo el hecho de que  $D$  es un conjunto independiente maximal.

Este absurdo vino de suponer que  $D$  no era dominante.

Por lo tanto, si  $D$  es un conjunto independiente maximal  $\Rightarrow D$  es dominante.

### 1.4. Ejercicio C

*Describir situaciones de la vida real que puedan modelarse utilizando CIDM:*

- **El turista:** tenemos un conjunto de ciudades que forman un grafo simple conexo donde los nodos son las ciudades y dos nodos están conectados si y solo si las ciudades son vecinas. Suponiendo que queremos conocer tantas culturas distintas como sea posible, decidimos que no queremos visitar ningún par de ciudades vecinas ya que sus culturas son muy similares. Como el problema que proponemos consiste en hallar un conjunto mínimo de ciudades (nodos en el mapa) tal que toda ciudad sea visitada o bien una ciudad vecina sea visitada pero no ambas (el conjunto de nodos sea independiente y dominante), podemos decir que estamos buscando un CIDM.
- **Spamear una red social:** supongamos que tenemos un virus que se ocupa de spamear Facebook de manera que un mensaje sea propagado por toda la red. Asumimos que los usuarios de Facebook son nodos en un grafo simple conexo y que dos nodos están conectados si y solo si esos dos usuarios son amigos en la red. Ahora, el virus no quiere ser descubierto, así que lo que debe hacer es infectar la menor cantidad de cuentas que no sean amigas, ya que si spamea demasiadas cuentas o un par de cuentas que son amigas, sería mucho más fácil de descubrirlo. Luego, estamos buscando el mínimo conjunto de nodos en la red de usuarios tal que todos los usuarios vean el mensaje (dominación) y dos amigos no sean infectados a la vez (independencia), el cual es un CIDM.
- **Cámaras de seguridad en un barrio:** tenemos casas en un barrio que representan los nodos de un grafo simple conexo, donde dos nodos están conectados si y solo si sus casas respectivas son vecinas. Queremos poner cámaras de seguridad en el barrio de manera que toda casa tenga una cámara de seguridad o la tenga una casa vecina, ya que el rango de cobertura de la cámara es amplio y puede filmar la casa donde está y también las vecinas (dominación). No queremos poner cámaras en dos casas vecinas (independencia) para que no sea tan notorio y arruine el paisaje. A la vez, tenemos un presupuesto limitado, por lo cual queremos poner tan pocas cámaras como sea posible (minimalidad). Por lo tanto, el conjunto de casas que estamos buscando para ponerles cámaras es un CIDM.

## 2. Ejercicio 2 - Algoritmo exacto

*Diseñar e implementar un algoritmo exacto para CIDM.*

### 2.1. Ejercicio A

*Explicar detalladamente el algoritmo implementado. Elaborar podas y estrategias que permitan mejorar los tiempos de resolución.*

#### 2.1.1. Estrategia

El algoritmo implementado se basa en la Técnica Algorítmica de *Backtracking*.

En primer lugar notese que un conjunto dominante 'D' trivial es el conjunto de todos los nodos del grafo. Si bien este conjunto en principio no es independiente (a menos que  $X(G) = \emptyset$ ), es el conjunto dominante más grande posible (no hay ningún nodo que quede afuera, es decir:  $V(G) \setminus D = \emptyset$ ).

Luego, la idea principal del algoritmo es empezar con este primer conjunto dominante e ir sacando nodos recursivamente mientras chequeamos dominancia e independencia. Cada vez que encontramos un conjunto dominante e independiente, nos fijamos su cardinal. Si el cardinal de este nuevo conjunto es menor que el mínimo hasta ese momento nos quedamos con el nuevo y lo guardamos como mínimo. En caso de que el cardinal sea mayor, seguimos quitando nodos para encontrar un conjunto más chico.

#### 2.1.2. Podas

Antes de mostrar cuales son las podas que utilizamos en el algoritmo, veamos algunos Lemas.

**Lema 2.1.** *Sea C un conjunto dominante e independiente de un grafo G. Entonces, cualquier subconjunto de C (distinto de C) es no-dominante respecto a G.*

*Demostración.* Veamos que vale por absurdo. Supongamos H un subconjunto propio de C tal que  $H \subset C$  y H es dominante de G. Como H está estrictamente incluido en C, entonces  $\exists v \in C$  tal que  $v \notin H$ .

Ahora, como C es independiente, no hay nodos de C que sean adyacentes en G, en particular:  $\forall w \in C, (v, w) \notin X(G)$ .

Entonces,  $v \in V(G)$  pero  $v \notin H$  y  $\forall w \in H \subset C, (v, w) \notin X(G)$ . Luego, H no es dominante, ya que el nodo v no está en H ni tiene algún vecino que esté en H. Absurdo.  $\square$

**Lema 2.2.** *Sea C un conjunto no-dominante respecto a G. Entonces, cualquier subconjunto de C es no-dominante respecto a G.*

*Demostración.* Trivial. Sea H un subconjunto de C ( $H \subseteq C$ ).

Como C es no-dominante,  $\exists v \in V(G)$  tal que  $v \notin C$  y  $\forall w \in C, (v, w) \notin X(G)$ .

Pero como  $H \subseteq C, v \notin H$  y  $\forall w \in H, (v, w) \notin X(G)$ .

Luego H es no-dominante respecto a G.  $\square$

Usando los resultados de estos dos lemas podemos optimizar el algoritmo cortando ramas en el árbol de recursión.

- **Poda A:** por el primer Lema, cada vez que encontramos un conjunto dominante e independiente podemos ahí mismo devolver el que tenga menor cardinal entre ese conjunto y el mínimo encontrado hasta ese momento. Esto es así ya que sabemos que cualquier subconjunto del nuevo conjunto es no-dominante.
- **Poda B:** por el segundo Lema, al momento de sacar un nodo de un conjunto podemos chequear si el subconjunto es dominante o no. En caso de que no lo sea, ni siquiera lo procesamos, ya que no es dominante y ninguno de sus subconjuntos lo será.

### 2.1.3. Pseudocódigo

```
funcion resolver:
    Creamos un vector de n elementos, llenandolo con los nodos desde 0 a n-1.
    llamamos a resolver_aux pasandole como parametro la matriz de adyacencia, el vector
        recién creado y la cantidad de nodos en el grafo.

funcion resolver_aux:
    Llamemos dom al conjunto dominante pasado por parametro.
    Llamemos cidm al conjunto dominante e independiente con menor cardinal encontrado
        hasta ahora.
    Si el cidm tiene tamaño 1 hacer
        Devuelvo cidm
    Sino hacer
        // Chequeamos si dom es independiente:
        Para i desde 0 hasta |dom| hacer:
            Para j desde i+1 hasta |dom| hacer:
                Si matriz_adyacencia[dom[i]][dom[j]] == TRUE hacer
                    dom NO es independiente
            Si es independiente hacer
                Devolvemos el conjunto con menor cardinal entre cidm y dom.
        Para i desde 0 hasta |dom| hacer
            Crear un vector nuevo llamado copia con los mismos nodos que dom.
            Borrar el nodo en la posicion i del vector copia.
            // Chequeamos si el conjunto copia es dominante:
            Para i desde 0 hasta n hacer:
                Si i no pertenece a copia hacer
                    Bool nodo_valido = FALSE
                    Para j desde 0 hasta |copia| hacer:
                        Si copia[j] == i hacer
                            nodo_valido = TRUE
                        Si matriz_adyacencia[i][copia[j]] == TRUE hacer
                            nodo_valido = TRUE
                    Si nodo_valido == FALSE hacer
                        copia NO es dominante
            Si copia es dominante hacer
                Hacer un llamado recursivo a resolver_aux, pasando como parametro la matriz
                    de adyacencia, cidm, copia y la cantidad de nodos en el grafo.
                Llamemos nuevo_cidm al conjunto que devuelve el llamado recursivo.
                Devolvemos el conjunto con menor cardinal entre cidm y nuevo_cidm.
```

## 2.2. Ejercicio B

*Calcular el orden de complejidad temporal de peor caso del algoritmo.*

Veamos el costo de las distintas partes del algoritmo.

En la función *resolver* tenemos un ciclo de  $\Theta(n)$  más un llamado al constructor de la estructura vector para construir el primer conjunto dominante que se realiza solo una vez. Este constructor tiene costo  $\Theta(n)$ <sup>1</sup>, y dentro del ciclo solo tenemos operaciones constantes (asignación), por lo que el costo, sin contar el llamado a la función *resolver\_aux*, es de  $\Theta(n)$ .

En la función *resolver\_aux* tenemos 5 ciclos distintos, 2 anidados entre sí y otros 3 anidados entre sí. Veamos los primeros:

---

<sup>1</sup>Referencia: <http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/vector/>



```

Para i desde 0 hasta |dom| hacer:
    Para j desde i+1 hasta |dom| hacer:
        Si matriz_adyacencia[dom[i]][dom[j]] == TRUE hacer
            dom NO es independiente

```

Estos ciclos anidados corresponden al chequeo de independencia. Dentro de ellos solo hay operaciones de costo constante (una asignación y dos comparaciones) y se repiten cada uno  $|dom|$  veces, donde  $dom$  es el conjunto dominante actual. Luego, el chequeo de independencia toma:  $\mathcal{O}(|dom| * |dom|)$ , que en el peor caso es  $\mathcal{O}(n^2)$ .

Y los ciclos restantes:

```

Para i desde 0 hasta |dom| hacer
    Crear un vector nuevo llamado copia con los mismos nodos que dom.
    Borrar el nodo en la posición i del vector copia.
    // Chequeamos si el conjunto copia es dominante:
    Para i desde 0 hasta n hacer:
        Si i no pertenece a copia hacer
            Bool nodo_valido = FALSE
            Para j desde 0 hasta |copia| hacer:
                Si copia[j] == i hacer
                    nodo_valido = TRUE
                Si matriz_adyacencia[i][copia[j]] == TRUE hacer
                    nodo_valido = TRUE
            Si nodo_valido == FALSE hacer
                copia NO es dominante
    Si copia es dominante hacer
        Hacer un llamado recursivo a resolver_aux, pasando como parametro la matriz
            de adyacencia, cidm, copia y la cantidad de nodos en el grafo.
        Llamemos nuevo_cidm al conjunto que devuelve el llamado recursivo.
        Devolvemos el conjunto con menor cardinal entre cidm y nuevo_cidm.

```

De estos 3 ciclos anidados, el primero corresponde a la iteración sobre el conjunto  $dom$  mientras vamos probando quitar distintos nodos, y los otros 2 corresponden al chequeo de dominancia de los nuevos conjuntos generados. El primer ciclo se ejecuta  $|dom|$  veces, mientras que el segundo y el tercero  $n$  y  $|copia|$  veces respectivamente, donde  $copia$  es el nuevo conjunto generado (como se muestra en el pseudocódigo). Además dentro del primer ciclo utilizamos la función *erase* de vectores que permite borrar un elemento dado su índice y el constructor de la estructura vector por copia. Ambas operaciones tienen costo en el peor caso lineal en la cantidad de elementos del vector original<sup>2</sup>. El resto de las operaciones en los 3 ciclos es de costo constante (comparaciones y asignaciones).

Luego, la complejidad de los 3 ciclos nos queda:  $\mathcal{O}(|dom| * (|dom| + |copia| + |n| * (|copia|)))$ , que asintóticamente equivale a  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Fuera de los ciclos en la función *resolver\_aux* solo tenemos operaciones constantes (comparaciones y asignaciones, más la función *size* de vectores, que tiene costo constante<sup>3</sup>). Entonces, el costo de ejecutar una vez la función *resolver\_aux*, sin tener en cuenta el llamado recursivo a sí misma, es de  $\mathcal{O}(n^3)$ .

Ahora, como vimos en el pseudocódigo, la función *resolver\_aux* parte del conjunto  $dom$  y hace en el peor caso  $|dom|$  llamados recursivos a sí misma, cada uno quitando un nodo posible de  $|dom|$ .

Luego, el peor caso posible es que revisemos todas las posibles combinaciones de nodos. Es decir, pasar por *resolver\_aux* la cantidad de veces del cardinal del Conjunto de Partes de  $V(G)$ . O sea, en el peor caso *resolver\_aux* toma:  $\mathcal{O}(2^n * n^3)$ .

Entonces, la complejidad final del algoritmo es:

$$\mathcal{O}(2^n * n^3)$$

<sup>2</sup>Referencias: <http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/erase/> y <http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/vector/>

<sup>3</sup>Referencia: <http://www.cplusplus.com/reference/vector/vector/size/>

## 2.3. Ejercicio C

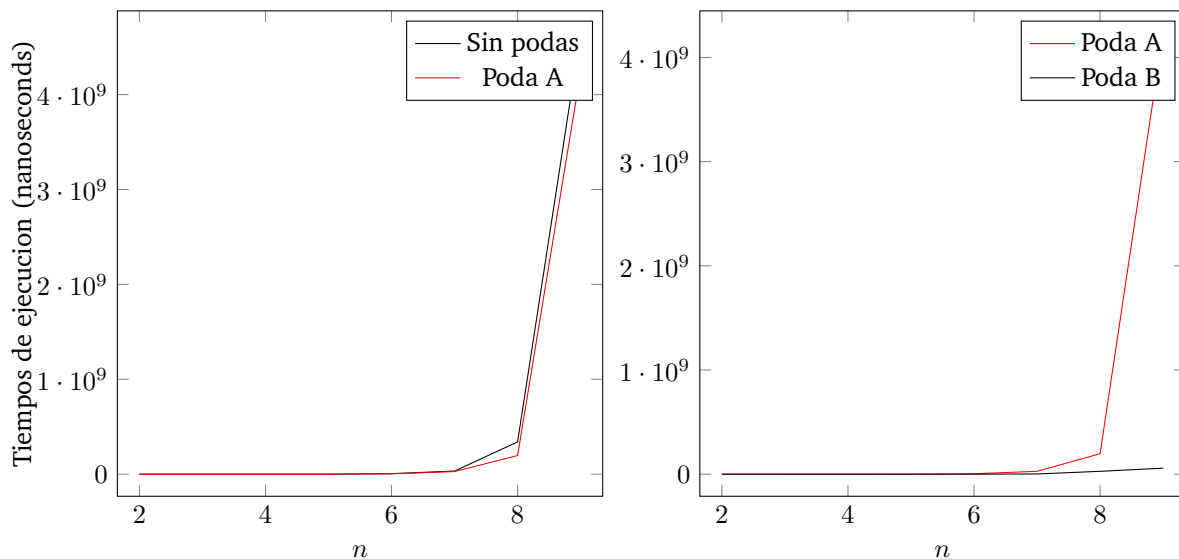
Realizar una experimentación que permita observar los tiempos de ejecución del algoritmo en función de los parámetros de la entrada y de las podas y/o estrategias implementadas.

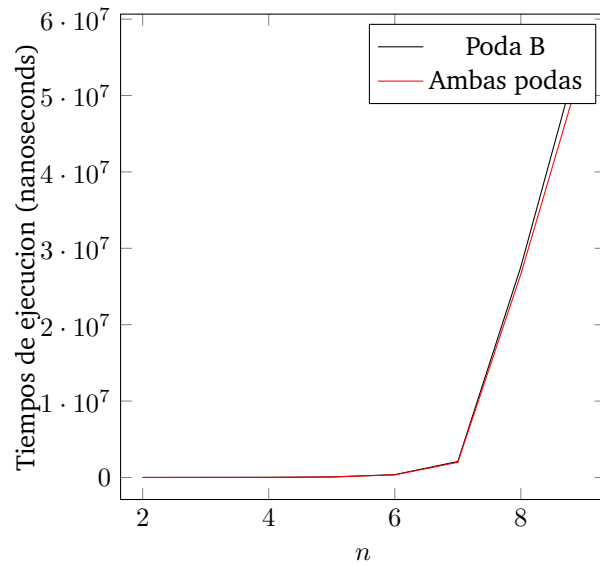
Consideraciones:

- Los casos de tests para esta experimentación corresponden a grafos generados aleatoriamente, variando la cantidad de nodos y ejes.
- Los tiempos de ejecución se midieron con la biblioteca chrono y estos fueron convertidos a nanosegundos.
- Los valores aleatorios que fuimos tomando fueron generados con una distribución uniforme para el rango requerido.
- Los detalles de los parametros son:
  - $2 \leq n \leq 9$
  - $0 \leq m \leq n * (n - 1) / 2$
  - Luego, para cada eje, se eligieron 2 nodos tales que  $1 \leq v \leq n$ ,  $1 \leq w \leq n$  y  $(v, w) \notin X(G)$  donde  $G$  es el grafo que estamos armando. Esto permite que el grafo tenga exactamente  $m$  ejes (y no una cantidad menor que se podría dar al poner ejes que ya estaban).
- Para cada caso de test, se midió la ejecución del algoritmo con y sin podas.
- Para cada  $n$  se promediaron los resultados obtenidos para cada variaciones del algoritmo, con y sin podas.

Luego, queremos ver que el costo del algoritmo es, en el peor caso, el detallado en la sección Complejidad. La cota teórica calculada es  $\mathcal{O}(2^n * n^3)$ .

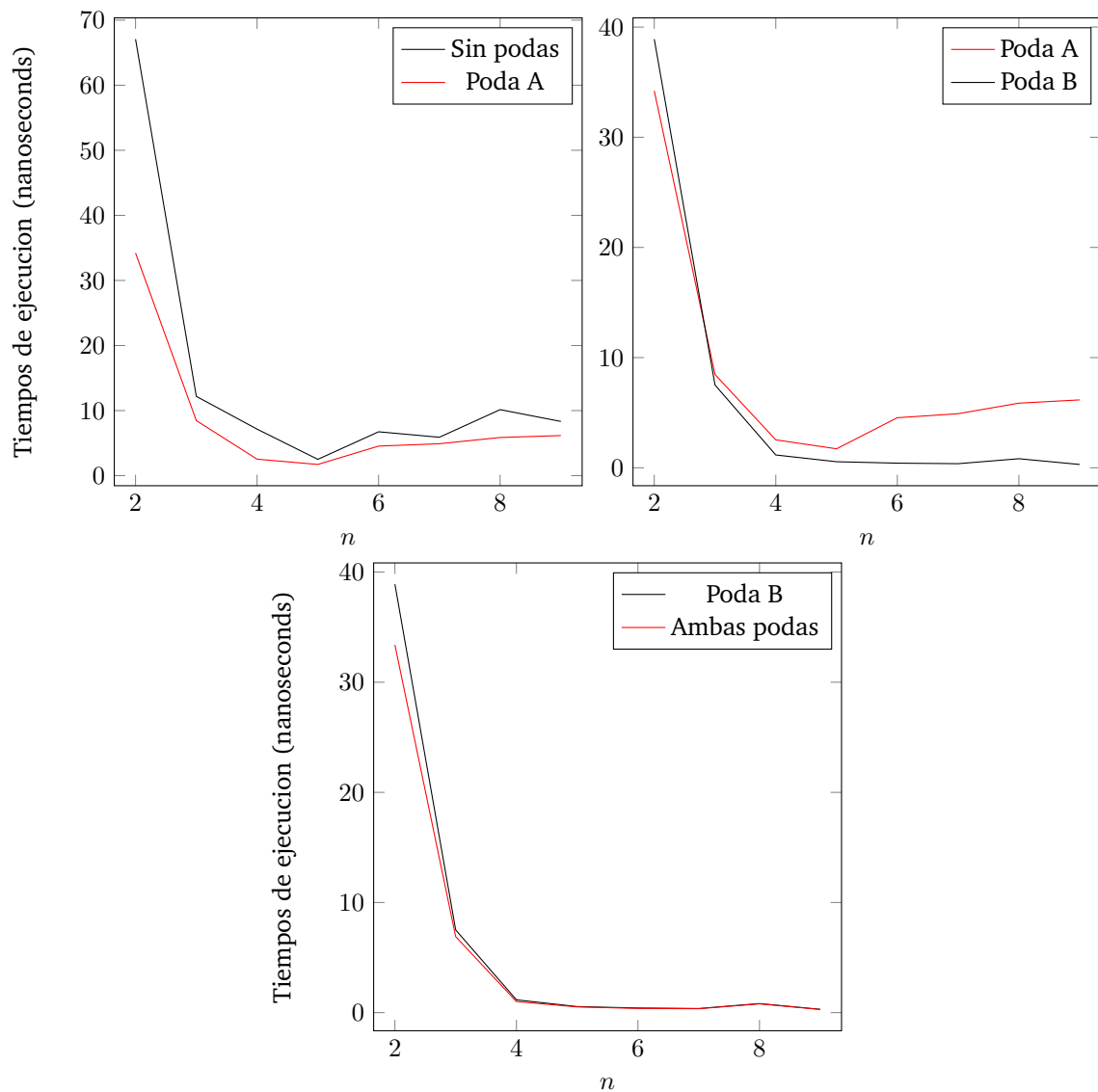
Los resultados obtenidos fueron los siguientes:





Como se puede ver en los gráficos, los tiempos medidos tienen pinta exponencial, que se condice con la complejidad teórica calculada. Además, es claro que la poda B produce tiempos mucho mejores que la poda A, lo cual en principio no se esperaba.

Veamos que pasa cuando los dividimos por  $2^n * n^3$ :



Al realizar la división, podemos ver que los gráficos tienden a una constante arriba de cero, lo cual es lo esperado. Por lo tanto, el algoritmo tendría una complejidad  $\mathcal{O}(c * 2^n * n^3)$ , donde  $c$  es la constante a la cual converge el gráfico.

### 3. Ejercicio 3 - Heurística constructiva golosa

#### 3.1. Ejercicio A

Realizamos una heurística golosa para resolver el problema. Lo que hace el algoritmo es lo siguiente. Primero toma los datos de entrada del problema, y se arma la matriz o las listas de adyacencia del grafo (según la implementación elegida). Además, se crea un vector de nodos de tamaño  $n$  donde cada nodo contiene guardado su número de nodo y el grado que tiene en el grafo.

Una vez que se procesaron los datos de entrada, se procede a resolver el problema. Para esto, se ordena el arreglo de nodos según sus grados de mayor a menor. Luego, se crea un arreglo de booleanos de tamaño  $n$ , donde cada uno está inicializado en *false*. En este arreglo se guarda si el nodo ya fue visitado o no. También se crea un arreglo llamado *cidm* donde se guardará la solución.

Por último, se recorre en orden el arreglo de nodos ordenados según su grado. Si un nodo no fue visitado, se agrega el nodo a *cidm* y luego se marcan como visitados a todos sus adyacentes (ya que queremos que sea dominante y mínimo). Una vez que se recorre todo el arreglo, ya tenemos el *cidm*, solo resta mostrarlo por pantalla.

#### 3.2. Pseudocódigo

##### 3.2.1. Implementación sobre listas de adyacencia

```
Crear listas de adyacencia con el input
Crear arreglo nodos que guarda numero de nodo y grado para cada nodo

Ordenar arreglo nodos segun su grado
Crear vector de booleanos visitado de tamano n para guardar nodos visitados
Crear vector cidm para guardar la solucion

Para cada nodo u en el arreglo ordenado:
    Si el nodo no fue visitado:
        agregar el nodo a cidm
        Para cada nodo w en su lista de adyacencia:
            marcar w como visitado
        fin Para
    fin Si
fin Para

mostrar cidm
```

### 3.2.2. Implementación sobre matriz de adyacencia

```

Crear matriz de adyacencia con el input
Crear arreglo nodos que guarda numero de nodo y grado para cada nodo

Ordenar arreglo nodos segun su grado
Crear vector de booleanos visitado de tamaño n para guardar nodos visitados
Crear vector cidm para guardar la solución

Para cada nodo u en el arreglo ordenado:
    Si el nodo no fue visitado:
        agregar el nodo a cidm
        Para cada nodo w en su fila de la matriz de adyacencia:
            Si el nodo w es adyacente:
                marcar w como visitado
            fin Si
        fin Para
    fin Si
fin Para

mostrar cidm

```

### 3.3. Ejercicio B

Calculemos la complejidad del algoritmo. Para esto vamos a calcular la complejidad para una implementación sobre matriz de adyacencia y una sobre listas de adyacencia. A su vez dividiremos el algoritmo en tres etapas, la entrada de datos, la resolución del problema y la salida de datos.

#### ■ Matriz de adyacencia

En la entrada de datos, se crea la matriz de adyacencia, esto tiene costo temporal  $\mathcal{O}(n^2)$ , a la vez, se crea el vector de Nodos, con costo  $\mathcal{O}(n)$ . Por lo tanto, la entrada de datos tiene costo  $\mathcal{O}(n + n^2) \in \mathcal{O}(n^2)$ .

La resolución del problema, comienza ordenando el arreglo de nodos, esto tiene costo  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ . Luego, crea los vectores con costo constante. Por último, recorre todos los nodos ( $n$ ), y por cada nodo, si no fue visitado, lo agrega a la solución con costo constante y se fija en su fila en la matriz de adyacencia quienes son sus vecinos y los marca como visitados. Esto tiene un costo de  $\mathcal{O}(n^2)$ . Por lo tanto todo el proceso tiene costo  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n) + n^2) \in \mathcal{O}(n^2)$ .

Por último, se muestra el *cidm* aproximado por pantalla, para eso se recorre el vector *cidm* calculado en la resolución, que tiene a lo sumo tamaño  $n$ , por lo que tiene costo  $\mathcal{O}(n)$ .

Por lo tanto, juntando las tres etapas nos queda un costo total de  $\mathcal{O}(n^2 + n^2 + n) \in \mathcal{O}(n^2)$ .

#### ■ Listas de adyacencia

Primero se deben crear las listas de adyacencia, como tengo  $m$  aristas y por cada una agrego en tiempo constante un elemento a 2 listas, esto tiene costo  $\mathcal{O}(2m) \in \mathcal{O}(m)$ .

La resolución del problema, comienza ordenando el arreglo de nodos, esto tiene costo  $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$ . Luego, tenemos  $n$  listas pero la suma del tamaño de todas es de a lo sumo  $2m$ , por lo tanto, se realizarán a lo sumo  $2m$  operaciones en todo el ciclo, por lo que todo el proceso tiene costo  $\mathcal{O}(n + 2m) \in \mathcal{O}(n + m)$ .

Por último, se muestra el *cidm* aproximado por pantalla, para eso se recorre el vector *cidm* calculado en la resolución, que tiene a lo sumo tamaño  $n$ , por lo que tiene costo  $\mathcal{O}(n)$ .

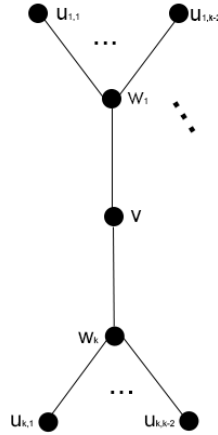
Por lo tanto, juntando las tres etapas nos queda un costo total de  $\mathcal{O}(n * \log(n) + n + m + n) \in \mathcal{O}(n * \log(n) + m)$

Entonces, la complejidad del algoritmo sobre listas de adyacencia es menor y es de:

$$\mathcal{O}(n * \log(n) + m)$$

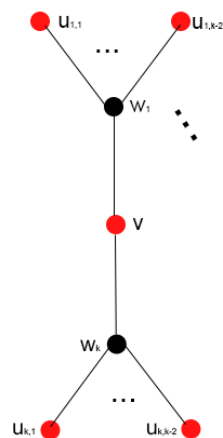
### 3.4. Ejercicio C

Veamos un ejemplo de instancias donde la heurística golosa no funciona. Supongamos que tenemos un grafo  $G$  con un nodo central  $v$  y sean  $w_i$  con  $1 \leq i \leq k$  sus  $k$  vecinos, y supongamos que todo  $w_1$  tiene a su vez  $k - 2$  vecinos de grado 1, llamemoslos  $u_{i,j}$  con  $1 \leq i \leq k$  y  $1 \leq j \leq k - 2$ .



(a)

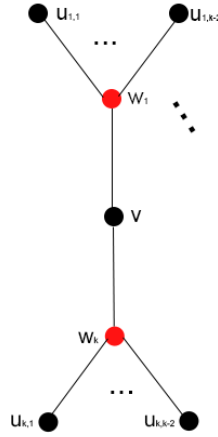
Ahora, al ordenar los nodos según su grado nos quedaría  $v$  con  $k$  vecinos, luego  $w_i$  con  $1 \leq i \leq k$ , donde cada  $w_i$  tiene grado  $k - 1$ , y por último los  $k * (k - 2)$  nodos  $u$  de grado 1. Al correr el algoritmo goloso, este arrojaría un DCIM con cardinalidad  $k * (k - 2) + 1$  ya que el algoritmo seleccionará a  $v$  y a  $u_{i,j}$  con  $1 \leq i \leq k$  y  $1 \leq j \leq k - 2$ .



(a)

Sin embargo, si seleccionamos a todos los  $w_i$  con  $1 \leq i \leq k$ , tendríamos un DCIM real con cardinalidad  $k$  que es mucho menor que el arrojado por el algoritmo.





(a)

Veamos que en este grafo  $G = (V, E)$  tenemos  $|V| = n = 1 + k * (k - 1)$  por lo tanto, los  $n$  para los cuales esta familia de instancias existe son los que satisfacen la ecuación con  $k$  entero. Ahora, el algoritmo goloso arroja una solución de tamaño  $1 + k * (k - 2)$  es decir, solo quedan sin seleccionar  $k$  nodos. Sin embargo, la solución óptima sólo utiliza  $k$  nodos.

Por lo que el error de la solución golosa es de  $1 + k * (k - 2) - k = 1 + k^2 - 2k - k = 1 + k^2 - 3k = k^2 - 3k + 1$  que es cuadrático en el tamaño de  $k$

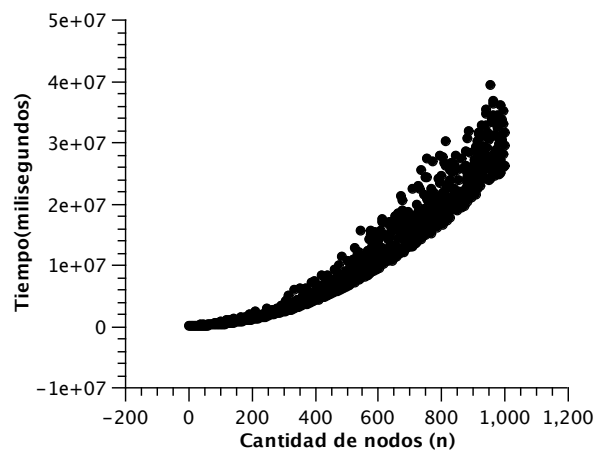
### 3.5. Ejercicio D

Para la experimentación decidimos comparar distintas familias de instancias tanto en la implementación sobre matriz como el a de listas de adyacencia y comparar la eficiencia de ambas.

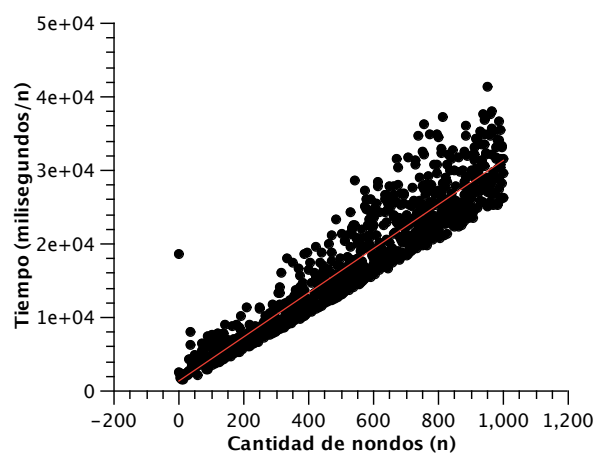
#### 3.5.1. Experimentación sobre grafo completo

Se crearon instancias de grafos completos con  $1 \leq n \leq 1000$ .

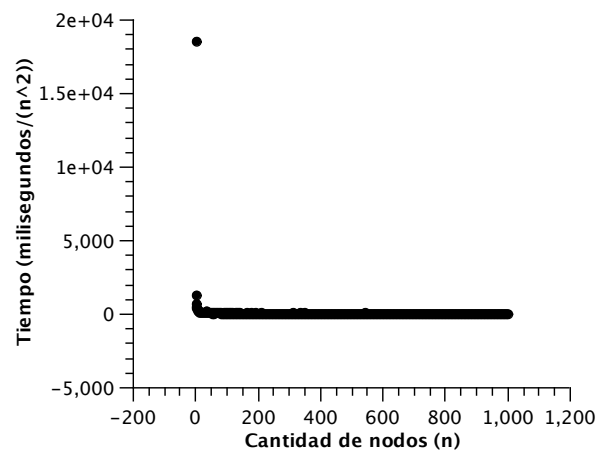
En la implementación sobre matrices arrojé los siguientes resultados:



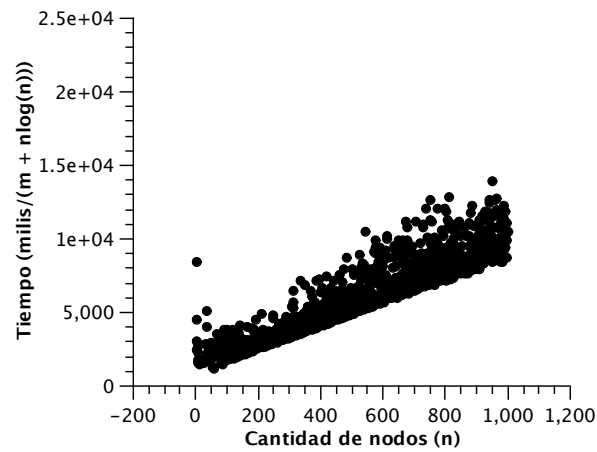
(a) Tiempos sin procesar, en miliseundos



(b) Dividiendo a los tiempos por  $n$



(a) Dividiendo a los tiempos por  $n^2$



(b) Dividiendo a los tiempos por  $m + n * \log(n)$

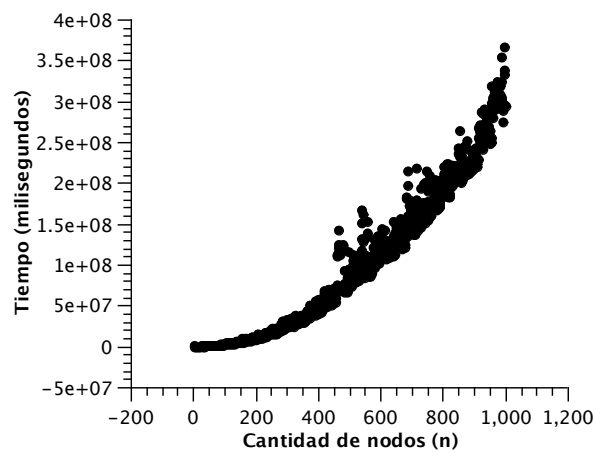
A continuación, adjuntamos una tabla con los últimos 20 valores obtenidos en las instancias, teniendo

en cuenta que los casos fueron previamente ordenados según el tamaño ( $n$ ):

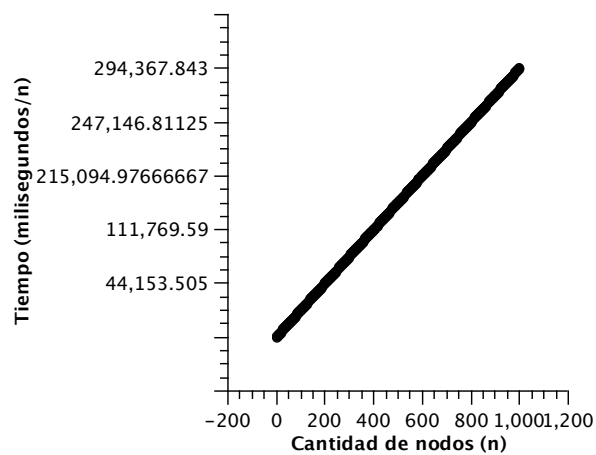
| n     | Tiempo(milis) | m      | Tiempo(mili/( $n$ )) | Tiempo(mili/( $n^2$ ))) | Tiempo(mili/( $n * \log(n) + m$ ))) |
|-------|---------------|--------|----------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 980   | 24,845,670    | 479710 | 25,352.72448979592   | 25.870127030404         | 8,475.696536553674                  |
| 981   | 33,412,818    | 480690 | 34,059.95718654434   | 34.71963015957629       | 11,384.934998666                    |
| 982   | 24,857,309    | 481671 | 25,312.94195519348   | 25.77692663461658       | 8,459.892640536484                  |
| 983   | 29,750,650    | 482653 | 30,265.15768056969   | 30.78856325592033       | 10,113.4891991821                   |
| 984   | 25,165,002    | 483636 | 25,574.18902439025   | 25.99002949633155       | 8,544.681225102551                  |
| 985   | 28,427,751    | 484620 | 28,860.66091370558   | 29.3001633641681        | 9,641.314760497822                  |
| 986   | 27,111,085    | 485605 | 27,496.02941176471   | 27.88643956568429       | 9,184.088121506702                  |
| 987   | 36,119,756    | 486591 | 36,595.49746707194   | 37.07750503249436       | 12,221.65041349897                  |
| 988   | 33,731,556    | 487578 | 34,141.25101214575   | 34.5559220770706        | 11,400.34121094489                  |
| 989   | 30,542,586    | 488566 | 30,882.29120323559   | 31.22577472521294       | 10,310.60678389385                  |
| 990   | 31,176,002    | 489555 | 31,490.91111111111   | 31.80900112233446       | 10,512.26503410799                  |
| 991   | 30,168,178    | 490545 | 30,442.15741675076   | 30.71862504212993       | 10,160.68392416765                  |
| 992   | 25,911,896    | 491536 | 26,120.86290322581   | 26.33151502341311       | 8,717.090324045907                  |
| 993   | 35,168,815    | 492528 | 35,416.73212487412   | 35.6663969031965        | 11,817.59489008868                  |
| 994   | 28,113,874    | 493521 | 28,283.5754527163    | 28.45430126027797       | 9,436.079245553556                  |
| 995   | 33,158,039    | 494515 | 33,324.66231155779   | 33.49212292618873       | 11,116.28719039287                  |
| 996   | 26,079,861    | 495510 | 26,184.59939759036   | 26.28975843131563       | 8,733.26701997587                   |
| 997   | 33,013,519    | 496506 | 33,112.85757271815   | 33.21249505789183       | 11,042.42206178822                  |
| 998   | 29,605,093    | 497503 | 29,664.42184368737   | 29.72386958285308       | 9,891.007222031083                  |
| 999   | 26,197,019    | 498501 | 26,223.24224224224   | 26.24949173397622       | 8,742.346964977023                  |
| 1,000 | 31,613,146    | 499500 | 31,613.146           | 31.613146               | 10,537.71533333333                  |

Como podemos ver la experimentación se condice con el cálculo teórico de la complejidad y arroja que es de  $\mathcal{O}(n^2)$ .

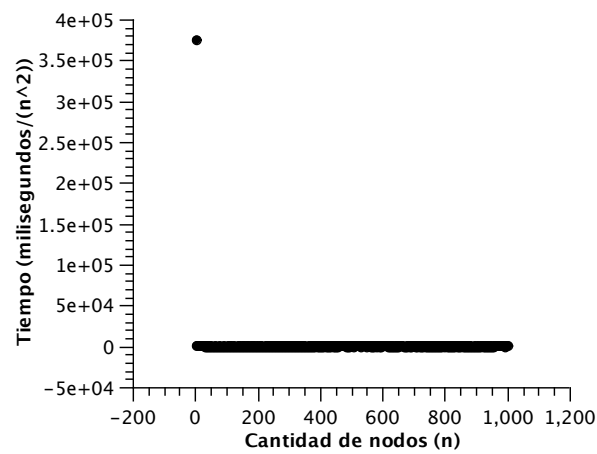
Veamos ahora los resultados en la implementación sobre listas de adyacencia:



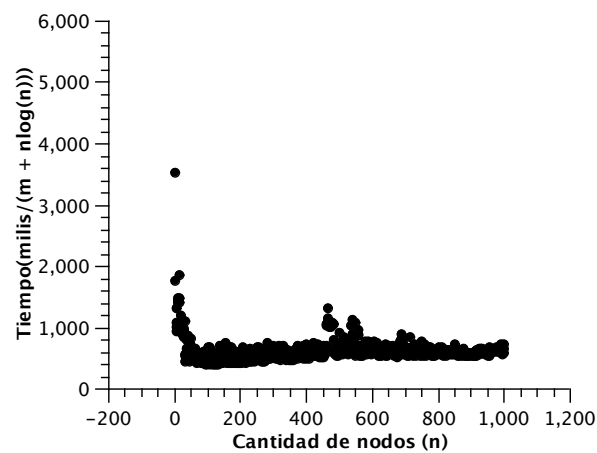
(a) Tiempos sin procesar, en milisegundos



(b) Dividiendo a los tiempos por  $n$



(a) Dividiendo a los tiempos por  $n^2$



(b) Dividiendo a los tiempos por  $m + n * \log(n)$

A continuación, adjuntamos una tabla con los últimos 20 valores obtenidos en las instancias, teniendo

en cuenta que los casos fueron previamente ordenados según el tamaño ( $n$ ):

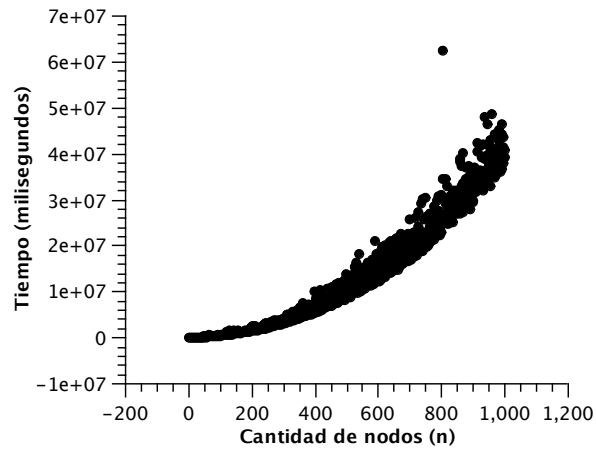
| n     | Tiempo(milis) | Tiempo(mili/( $n$ )) | Tiempo(mili/( $n^2$ ))) | Tiempo(mili/( $n * \log(n) + m$ ))) | m       |
|-------|---------------|----------------------|-------------------------|-------------------------------------|---------|
| 980   | 296,879,716   | 302,938.48571429     | 309.1209037900875       | 615.1144826034448                   | 479,710 |
| 981   | 323,033,524   | 329,290.03465851     | 335.667721364436        | 667.9423920520295                   | 480,690 |
| 982   | 292,431,614   | 297,791.86761711     | 303.2503743555071       | 603.4379490268261                   | 481,671 |
| 983   | 297,273,430   | 302,414.47609359     | 307.6444314278647       | 612.1842807953875                   | 482,653 |
| 984   | 318,286,205   | 323,461.59044715     | 328.7211285032058       | 654.1277503491588                   | 483,636 |
| 985   | 308,937,975   | 313,642.6142132      | 318.4188976783736       | 633.6298448756557                   | 484,620 |
| 986   | 323,384,902   | 327,976.57403651     | 332.6334422276989       | 661.9185207263685                   | 485,605 |
| 987   | 304,973,689   | 308,990.56636272     | 313.0603509247369       | 622.9719891480256                   | 486,591 |
| 988   | 302,281,783   | 305,953.22165992     | 309.6692526922257       | 616.2264905731232                   | 487,578 |
| 989   | 353,599,216   | 357,532.06875632     | 361.5086640609904       | 719.3873732062154                   | 488,566 |
| 990   | 292,805,769   | 295,763.4030303      | 298.7509121518212       | 594.5045184459034                   | 489,555 |
| 991   | 289,577,857   | 292,207.72653885     | 294.8614798575678       | 586.7671292958553                   | 490,545 |
| 992   | 289,158,638   | 291,490.5625         | 293.841292842742        | 584.7394227940042                   | 491,536 |
| 993   | 293,229,428   | 295,296.50352467     | 297.3781505787238       | 591.7801781541916                   | 492,528 |
| 994   | 275,111,868   | 276,772.50301811     | 278.443161990049        | 554.102004459966                    | 493,521 |
| 995   | 333,606,954   | 335,283.37085427     | 336.9682119138405       | 670.5696612605566                   | 494,515 |
| 996   | 338,319,005   | 339,677.71586345     | 341.041883397042        | 678.679115312912                    | 495,510 |
| 997   | 332,699,588   | 333,700.69007021     | 334.7048044836616       | 666.0709764219323                   | 496,506 |
| 998   | 366,440,239   | 367,174.58817635     | 367.9104089943414       | 732.1539875453961                   | 497,503 |
| 999   | 296,662,430   | 296,959.38938939     | 297.2566460354248       | 591.5530805302149                   | 498,501 |
| 1,000 | 294,367,843   | 294,367.843          | 294.367843              | 585.8066527363184                   | 499,500 |

Como podemos ver, la experimentación se condice con el cálculo teórico de la complejidad y arroja que es de  $\mathcal{O}(n * \log(n) + m)$ , aunque en un grafo completo es casi  $\mathcal{O}(n^2)$ .

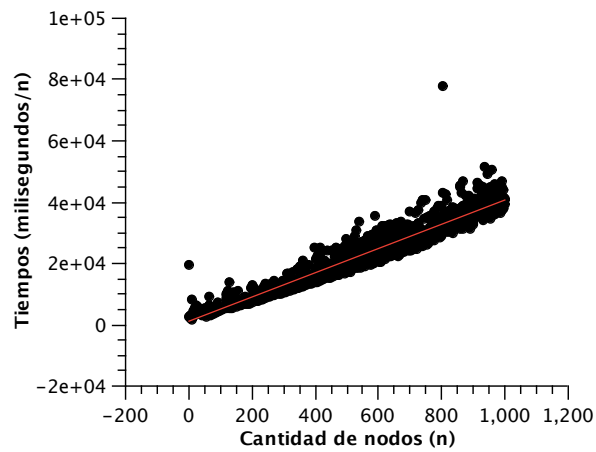
### 3.5.2. Experimentación sobre el complemento del grafo completo

Se crearon instancias de complementos grafos completos con  $1 \leq n \leq 1000$  y  $m = 0$ .

En la implementación sobre matrices arrojo los siguientes resultados:

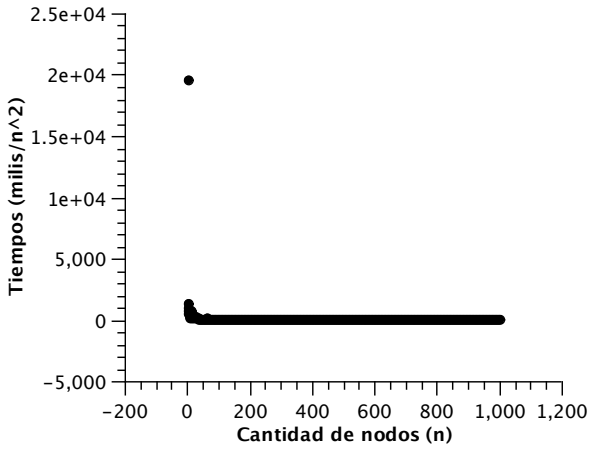


(a) Tiempos sin procesar, en milisegundos

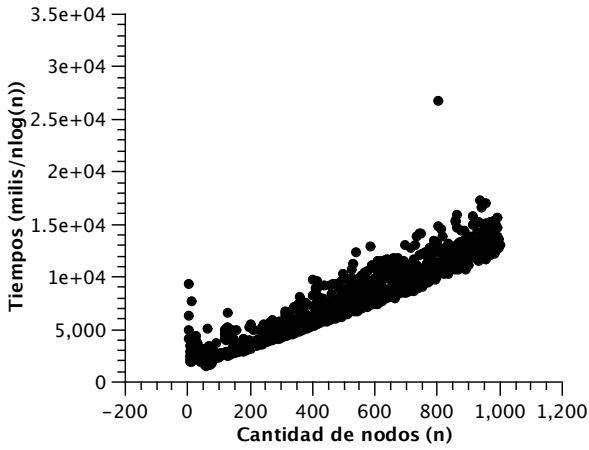


(b) Dividiendo a los tiempos por  $n$





(a) Dividiendo a los tiempos por  $n^2$



(b) Dividiendo a los tiempos por  $m + n * \log(n)$

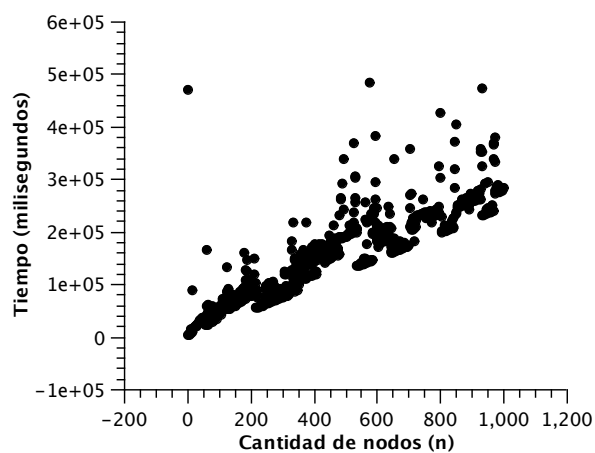
A continuación, adjuntamos una tabla con los últimos 20 valores obtenidos en las instancias, teniendo

en cuenta que los casos fueron previamente ordenados según el tamaño ( $n$ ):

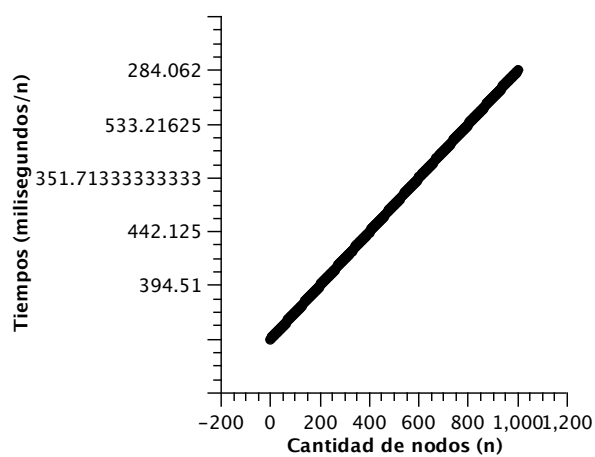
| n   | Tiempo(milis) | Tiempo(mili/( $n$ )) | Tiempo(mili/( $n^2$ ))) | Tiempo(mili/( $n * \log(n) + m$ ))) |
|-----|---------------|----------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 980 | 41,753,937    | 42,606.0581632653    | 43.47556955435235       | 14,243.67703581269                  |
| 981 | 37,549,011    | 38,276.25993883792   | 39.01759422919258       | 12,794.28300537819                  |
| 982 | 39,391,112    | 40,113.14867617108   | 40.84842024050008       | 13,406.30148305065                  |
| 983 | 45,239,903    | 46,022.28179043744   | 46.81819103808488       | 15,378.93358170479                  |
| 984 | 36,000,279    | 36,585.6493902439    | 37.18053799821535       | 12,223.75853853513                  |
| 985 | 43,702,767    | 44,368.29137055838   | 45.0439506300085        | 14,821.85954673998                  |
| 986 | 40,825,343    | 41,405.01318458418   | 41.99291398030849       | 13,829.89827602756                  |
| 987 | 38,862,643    | 39,374.5116514691    | 39.89312224059685       | 13,149.74655118415                  |
| 988 | 36,831,350    | 37,278.6943319838    | 37.73147199593502       | 12,447.98660517573                  |
| 989 | 44,397,040    | 44,890.83923154702   | 45.39013066890497       | 14,987.61178273532                  |
| 990 | 39,102,722    | 39,497.69898989899   | 39.89666564636262       | 13,185.08310395429                  |
| 991 | 40,118,814    | 40,483.16246215944   | 40.85081984072598       | 13,512.07184160979                  |
| 992 | 46,471,583    | 46,846.35383064516   | 47.22414700669875       | 15,633.62968546942                  |
| 993 | 41,389,046    | 41,680.81168177241   | 41.97463412061673       | 13,907.7469205387                   |
| 994 | 43,743,891    | 44,007.93863179074   | 44.27358011246553       | 14,682.10400263076                  |
| 995 | 38,823,308    | 39,018.4             | 39.21447236180904       | 13,015.57795408459                  |
| 996 | 37,960,325    | 38,112.77610441767   | 38.26583946226674       | 12,711.63425257771                  |
| 997 | 39,036,157    | 39,153.61785356068   | 39.27143215001071       | 13,056.88500714597                  |
| 998 | 40,876,628    | 40,958.54509018036   | 41.0406263428661        | 13,656.80637315606                  |
| 999 | 40,732,820    | 40,773.59359359359   | 40.81440800159519       | 13,593.16666151807                  |

Como podemos ver, la experimentación se condice con el cálculo teórico de la complejidad y, aunque el no haya aristas en el grafo, la complejidad que arroja es de  $\mathcal{O}(n^2)$ .

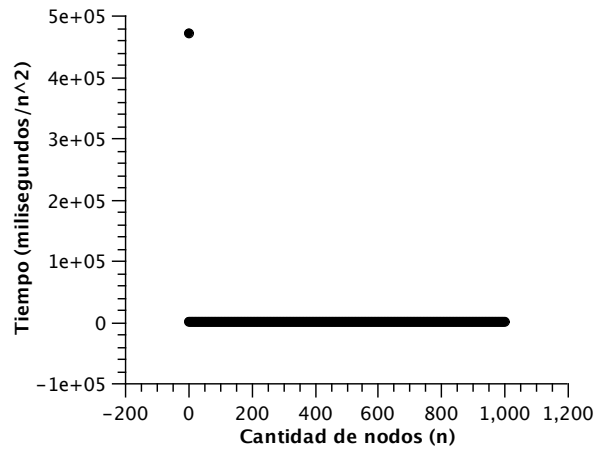
Veamos ahora los resultados en la implementación sobre listas de adyacencia:



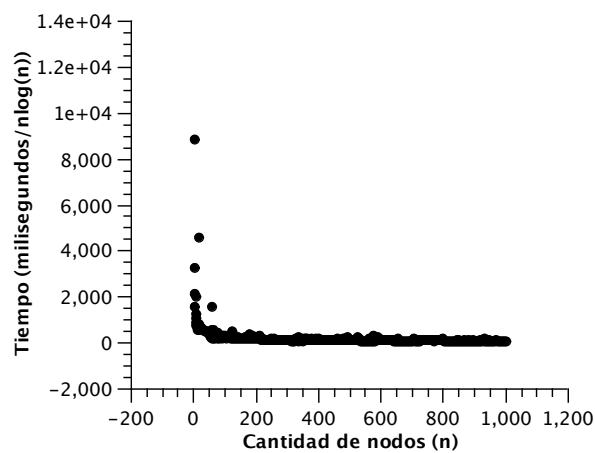
(a) Tiempos sin procesar, en milisegundos



(b) Dividiendo a los tiempos por  $n$



(a) Dividiendo a los tiempos por  $n^2$



(b) Dividiendo a los tiempos por  $m + n * \log(n)$

A continuación, adjuntamos una tabla con los últimos 20 valores obtenidos en las instancias, teniendo

en cuenta que los casos fueron previamente ordenados según el tamaño ( $n$ ):

| n     | Tiempo(milis) | Tiempo(mili/( $n$ )) | Tiempo(mili/( $n^2$ ))) | Tiempo(mili/( $n * \log(n) + m$ ))) |
|-------|---------------|----------------------|-------------------------|-------------------------------------|
| 980   | 283,093       | 288.87040816327      | 0.2947657226155768      | 96.57257621237783                   |
| 981   | 279,943       | 285.36493374108      | 0.2908918794506428      | 95.38653274714977                   |
| 982   | 280,415       | 285.5549898167       | 0.290789195332689       | 95.43594581360509                   |
| 983   | 288,893       | 293.88911495422      | 0.2989716327102968      | 98.20680338813817                   |
| 984   | 276,797       | 281.29776422764      | 0.2858717116134576      | 93.98537417420873                   |
| 985   | 277,190       | 281.41116751269      | 0.2856966167641526      | 94.00940786565884                   |
| 986   | 276,617       | 280.54462474645      | 0.2845280169842295      | 93.70613178730468                   |
| 987   | 277,663       | 281.3201621074       | 0.2850254935231977      | 93.95135777670718                   |
| 988   | 281,872       | 285.2955465587       | 0.2887606746545592      | 95.26500875949687                   |
| 989   | 282,107       | 285.24469160768      | 0.2884172817064555      | 95.23405608103857                   |
| 990   | 277,617       | 280.42121212121      | 0.283253749617386       | 93.60993375526336                   |
| 991   | 278,533       | 281.06256306761      | 0.2836150989582326      | 93.81029823710891                   |
| 992   | 278,372       | 280.61693548387      | 0.2828799752861603      | 93.64786998548107                   |
| 993   | 278,950       | 280.91641490433      | 0.2828966917465562      | 93.73412480887504                   |
| 994   | 279,345       | 281.03118712274      | 0.2827275524373606      | 93.75874548093792                   |
| 995   | 279,336       | 280.73969849246      | 0.2821504507461933      | 93.64785410306024                   |
| 996   | 278,955       | 280.07530120482      | 0.2812001016112644      | 93.41263366232546                   |
| 997   | 283,107       | 283.95887662989      | 0.2848133165796286      | 94.69414583300491                   |
| 998   | 283,434       | 284.00200400802      | 0.2845711463006173      | 94.69477906957285                   |
| 999   | 283,640       | 283.92392392392      | 0.2842081320559799      | 94.65501754783944                   |
| 1,000 | 284,062       | 284.062              | 0.284062                | 94.68733333333333                   |

Como podemos ver, la experimentación se condice con el cálculo teórico de la complejidad y arroja que es de  $\mathcal{O}(n * \log(n) + m)$ , sin embargo, como el grafo no tiene aristas, aquí la complejidad es de  $\mathcal{O}(n * \log(n))$  siendo así más eficiente que en la implementación sobre matriz de adyacencia.

## 4. Ejercicio 4 - Heurística de búsqueda local

*Diseñar e implementar una heurística de búsqueda local para CIDM.*

### 4.1. Ejercicio A

*Explicar detalladamente el algoritmo implementado. Plantear al menos dos vecindades distintas para la búsqueda y al menos dos soluciones iniciales.*

#### 4.1.1. Algoritmo implementado

Sea  $G=(V,E)$  un grafo simple, la heurística de búsqueda local propuesta genera una solución inicial válida, es decir un  $V' \subseteq V$  que es dominante e independiente (CID), de dos formas:

1. **Heurística constructiva golosa:** procedimiento descrito en el ejercicio anterior.
2. **Procedimiento BFS modificado:** detallado a continuación.

#### 4.1.2. Procedimiento BFS modificado:

Partimos de incluir un vértice inicial  $v$  a  $V'$  y luego vamos a ir agregando vértices a  $V'$  determinando si el vértice analizado debe incluirse en  $V'$ . El BFS modificado funciona de la siguiente manera:

Los vértices están numerados de 0 a  $n-1$ .

Creamos un vector, llamado `solucionInicial`, de tamaño  $n$  para guardar el estado de los vértices (si fue VISITADO o no)

Creamos un vector de tamaño  $n$  en donde para cada posición guardamos si pertenece al CID (INCLUIDO o no)

Al vértice inicial  $v$  lo ponemos como VISITADO y INCLUIDO y lo incluimos en la cola.

Luego mientras no este vacía la cola:

Sacamos el primer elemento de la cola ( $w$ ) y lo ponemos INCLUIDO.

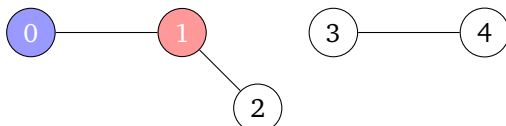
Revisamos cada adyacente a  $w$ :

Si algún adyacente esta INCLUIDO entonces hacemos  $w = \text{NO INCLUIDO}$ .

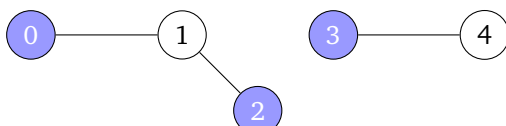
Si el adyacente no fue VISITADO entonces lo ponemos como VISITADO y lo agregamos a la cola.

Repetimos el procedimiento para el resto de las componentes conexas, empezando por el vértice de menor numeración de la componente analizada.

A continuación mostramos un ejemplo del recorrido BFS, en donde el vértice 0 ya fue visitado y se esta analizando sus adyacentes, en particular el vértice 1, el cual es provisoriamente INCLUIDO:



Para luego ser desmarcado debido a la presencia de un adyacente INCLUIDO, siendo la solución generada la siguiente:

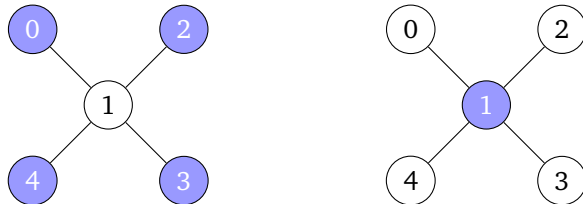


### 4.1.3. Primer Criterio de Vecindad

El primer criterio de vecindad implementado consiste en generar soluciones vecinas a partir de quitar  $k$  vértices que pertenecen al subconjunto CID de la solución inicial y agregar 1 vértice al subconjunto, donde  $k \in \mathbb{N}$  y  $k \geq 2$ . Logrando de esta manera una reducción en el cardinal del subconjunto CID de, al menos, un vértice.

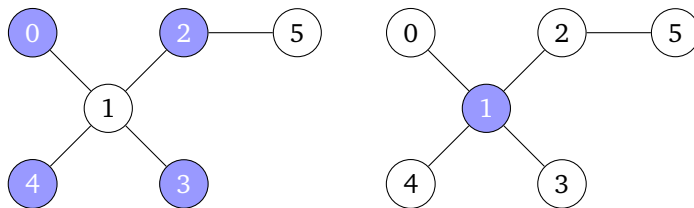
Para llevar adelante exitosamente este intercambio, debemos buscar aquellos vértices no incluidos en CID en la solución inicial, que tengan, al menos, dos vértices adyacentes incluidos en CID, para poder incluir ese vértice en la solución vecina y quitar sus adyacentes.

- Ejemplo de un cambio 4 por 1:



Sin embargo, para lograr una solución válida, los vértices quitados no pueden tener otros vértices adyacentes no incluidos en el subconjunto que, a su vez, no sean adyacentes al vértice agregado y no sean dominados por otro vértice.

- Ejemplo de solución inválida:



El procedimiento de búsqueda de los posibles soluciones vecinas funciona de la siguiente manera:

```

Para todo vertice, u, en el Grafo:
  Creamos un vector de tamaño n, llamado solucionAuxiliar, al cual le copiamos
  el contenido de la solucionInicial.
  Si solucionInicial[u] = NO INCLUIDO y |adyacentes a u| > 1 entonces:
    solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO
    cantAdyacentesIncluidos = 0
    Para todo adyacente, v, de u:
      Si solucionInicial[v] = INCLUIDO entonces:
        cantAdyacentesIncluidos ++
        solucionAuxiliar[v] = NO INCLUIDO

  Si cantAdyacentesIncluidos > 1 entonces:
    Si esSolucion?(solucionAuxiliar) entonces:
      Buscar Nuevos Vecinos a partir de la solucionAuxiliar
      Interrumpir el ciclo
  
```

En el procedimiento descrito anteriormente falta detallar el comportamiento de la función auxiliar *esSolucion?*, la cual será descrita en el apartado siguiente, ya que es utilizado por ambos criterios.

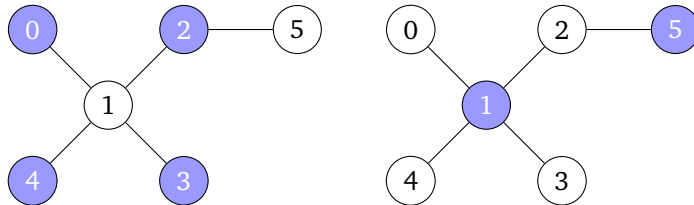
### 4.1.4. Segundo Criterio de Vecindad

El segundo criterio de vecindad implementado consiste en generar soluciones vecinas a partir de quitar  $k$  vértices que pertenecen al subconjunto CID de la solución inicial y agregar, hasta,  $k-1$  vértices al subconjunto, donde  $k \in \mathbb{N}$  y  $k \geq 2$ . Logrando de esta manera, una reducción en el cardinal del subconjunto

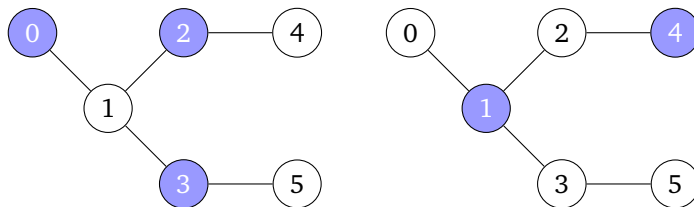
CID de, al menos, un vértice. El caso donde  $k = 2$  no difiere del criterio aplicado en la primer vecindad, ya que  $k - 1 = 1$ . Sin embargo a partir de  $k \geq 3$  se observa un comportamiento distinto, ya que podemos agregar  $k-2$  vértices para arreglar la solución, además del candidato original.

En este caso, para los casos no contemplados en el criterio anterior, debemos buscar vértices no incluidos en CID en la solución inicial, que tengan, al menos  $k$  vértices adyacentes incluidos en CID, donde  $k \geq 3$ , y que a su vez tengan hasta  $k-2$  vértices que son adyacentes a los adyacentes del vértice buscado que no están incluidos y no son dominados por otro vértice.

- Ejemplo de un caso 4-2, el cual fallaba en el criterio anterior:



- Caso donde falla el segundo criterio:



El procedimiento de búsqueda de los posibles soluciones vecinas funciona de la siguiente manera:

```

Para todo vértice, u, en el Grafo:
  Creamos un vector de tamaño n, llamado solucionAuxiliar, al cual le copiamos
  el contenido de la solucionInicial.
  Si solucionInicial[u] = NO INCLUIDO y |adyacentes a u| > 1 entonces:
    solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO
    cantAdyacentesIncluidos = 0
    Para todo adyacente, v, de u:
      Si solucionInicial[v] = INCLUIDO entonces:
        cantAdyacentesIncluidos ++
        solucionAuxiliar[v] = NO INCLUIDO

  Si cantAdyacentesIncluidos > 1 entonces:
    cantCambiosPosibles = cantAdyacentesIncluidos - 2
    arreglarSolucion(solucionAuxiliar, cantCambiosPosibles)
    Si esSolucion?(solucionAuxiliar) entonces:
      Buscar Nuevos Vecinos a partir de la solucionAuxiliar
      Interrumpir el ciclo
  
```

Falta detallar los procedimientos *arreglarSolucion* y *esSolucion?*, los cuales se pueden realizar en una sola función que llamaremos *esSolucion?* cuyo comportamiento es el siguiente:

- La función recibe como parámetros un vector con la solución a analizar y un entero con la cantidad de cambios posibles a realizar
- Miramos cada vértice del grafo, los cuales o están INCLUIDOS o NO INCLUIDOS en el subconjunto CID.
- Si el vértice está INCLUIDO, sus adyacentes NO pueden estar INCLUIDOS. En caso de encontrar algún adyacente INCLUIDO, sabemos que el subconjunto analizado no es solución válida.
- Si el vértice NO está INCLUIDO, entonces, al menos, 1 vértice adyacente tiene que estar INCLUIDO. En caso de no encontrar algún vértice adyacente INCLUIDO, tenemos dos casos:



1. La variable entera que representa la cantidad de cambios posibles es 0. En este caso sabemos que el subconjunto analizado no es solución válida.
2. La variable entera que representa la cantidad de cambios posibles es mayor a 0. En este caso el vértice pasa a estar INCLUIDO en el subconjunto, manteniéndose la validez de la solución, ya que el vértice NO tiene adyacentes INCLUIDOS. También reducimos la cantidad de cambios posibles en una unidad.

■ En pseudocódigo:

Como entrada tenemos el vector `solucionAuxiliar` con la solución a analizar y el entero `cantCambiosPosibles`, que tiene la cantidad de vértices que podemos incluir.

Creamos una variable booleana, `esSolucion` inicializada en `true`.

Luego, para todo vértice, `u`, en el Grafo:

Si `solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO` y `|adyacentes a u| > 0` entonces:

Para todo adyacente, `v`, de `u`:

Si `solucionInicial[v] = INCLUIDO` entonces:

`esSolucion = false`

Interrumpir el ciclo

Sino Si `|adyacentes a u| > 0`, entonces:

`adyacenteIncluido = false`

Para todo adyacente, `v`, a `u`:

Si `solucionInicial[v] = INCLUIDO` entonces:

`adyacenteIncluido = true`

Si `not(adyacenteIncluido)` y `cantCambiosPosibles = 0` entonces:

`esSolucion = false`

Interrumpir el ciclo

Sino Si `not(adyacenteIncluido)` entonces:

`solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO`

`cantCambiosPosibles --`

Sino entonces:

`esSolucion = (solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO)`

Es necesario aclarar que para el primer criterio de vecindad, la cantidad de cambios posibles es 0.

## 4.2. Ejercicio B

*Calcular el orden de complejidad temporal de peor caso de una iteración del algoritmo.*

La estructura de datos que utilizamos para representar los grafos son vectores con listas, donde cada posición del vector representa un vértice y las listas contienen los adyacentes a ese vértice.

A partir de los procedimientos expuestos en el punto anterior, pasamos a analizar la complejidad de la heurística propuesta, para solo una iteración:

### 1. Solución Inicial

- Heurística Golosa:  $\mathcal{O}(n * \log(n) + m)$ . Justificada anteriormente.
- BFS modificado: Los cambios implementados en el BFS no alteran su complejidad original, siendo la misma  $\mathcal{O}(n + m)$ .<sup>4</sup>

### 2. Primer Criterio de Vecindad

Tenemos un ciclo que se repite  $n$  veces, el cual tiene varias operaciones que se realizan internamente:

<sup>4</sup>Referencia [https://en.wikipedia.org/wiki/Breadth-first\\_search](https://en.wikipedia.org/wiki/Breadth-first_search)

- Creación de un vector tamaño  $n$  y copia de contenido:  $\Theta(n)$
- Comparaciones y Asignaciones:  $\mathcal{O}(1)$
- Ciclo de los adyacentes, cuya complejidad, sumada a la del ciclo principal, es  $\mathcal{O}(n + m)$ .
- Complejidad de la función `esSolucion?`:  $\mathcal{O}(n + m)$ . Detallada en el punto 4.

Por lo tanto la complejidad total de este procedimiento es:  $\mathcal{O}(n * (n + n + m) + n + m)$ , lo cual es:  $\mathcal{O}(n * (n + m))$

### 3. Segundo Criterio de Vecindad

Misma situación que el punto anterior, tenemos un ciclo que se repite  $n$  veces, el cual tiene varias operaciones que se realizan internamente:

- Creación de un vector tamaño  $n$  y copia de contenido:  $\Theta(n)$
- Comparaciones y Asignaciones:  $\mathcal{O}(1)$
- Ciclo de los adyacentes, cuya complejidad, sumada a la del ciclo principal, es  $\mathcal{O}(n + m)$ .
- Complejidad de la función `esSolucion?`:  $\mathcal{O}(n + m)$ . Detallada en el punto 4.

Por lo tanto la complejidad total de este procedimiento es:  $\mathcal{O}(n * (n + n + m) + n + m)$ , lo cual es:  $\mathcal{O}(n * (n + m))$

### 4. Procedimiento `esSolucion?`

Tenemos un ciclo que se repite  $n$  veces, el cual tiene varias operaciones que se realizan internamente:

- Comparaciones y Asignaciones:  $\mathcal{O}(1)$
- Ciclo de los adyacentes, cuya complejidad, sumada a la del ciclo principal, es  $\mathcal{O}(n + m)$ .

Por lo tanto la complejidad total de este procedimiento es:  $\mathcal{O}(n + m)$ .

Podemos concluir que la complejidad temporal de la heurística es independiente del procedimiento utilizado para armar la solución inicial, y que utilizando el primer o segundo criterio de vecindad la complejidad es la misma:  $\mathcal{O}(n * (n + m))$ .

### Cota superior para la cantidad de iteraciones:

Sabemos que cada iteración de las vecindades reduce, como mínimo, en 1 el cardinal del subconjunto CID. Por lo tanto, si partimos de una solución inicial en donde el cardinal del subconjunto es asintóticamente igual a la cantidad de vértices del Grafo, es posible que iteraremos hasta  $n-1$  veces, hasta alcanzar una solución de 1 vértice. Es evidente que este es un caso extremo, de difícil realización, sin embargo brinda una cota superior a la cantidad de iteraciones.

## 4.3. Ejercicio C

*Realizar una experimentación que permita observar la performance del algoritmo comparando los tiempos de ejecución y la calidad de las soluciones obtenidas.*

La función que utilizamos para llevar a cabo las mediciones fue `std::clock`<sup>5</sup>. La unidad temporal que utilizamos para este ejercicio fue nanosegundos. La complejidad teórica calculada es de  $\mathcal{O}(n * (n + m))$  para cualquier combinación de solución inicial y criterio de vecindad.

Para generar las instancias aleatorias utilizamos la función `std::rand`<sup>6</sup> con determinados intervalos de valores para la variables, para obtener instancias coherentes. El detalle de intervalos es el siguiente:

1. Cantidad de nodos  $n$ :  $2 \leq n \leq 50$ .

---

<sup>5</sup>Referencia <http://en.cppreference.com/w/cpp/chrono/c/clock>

<sup>6</sup>Referencia <http://en.cppreference.com/w/cpp/numeric/random/rand>

2. Cantidad de aristas  $m$ :  $0 \leq m \leq \frac{n*(n-1)}{2}$ .

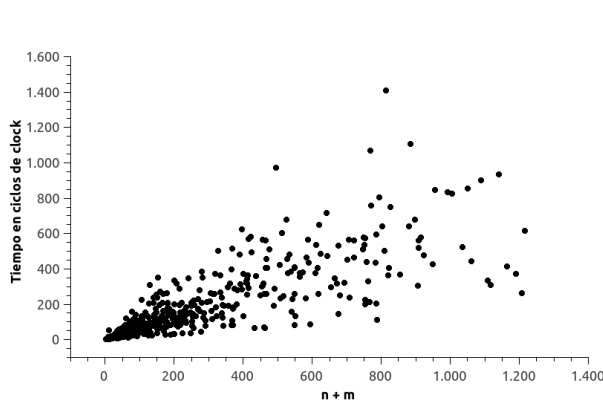
3. Se generan  $m$  ejes, asegurándose la validez de los mismos, es decir que no haya ejes repetidos ni loops.

Se generaron 500 instancias construidas de esta forma, en donde se midió no solo el tiempo de ejecución, sino también el tamaño del subconjunto generado, para los 4 tipos contemplados en la heurística:

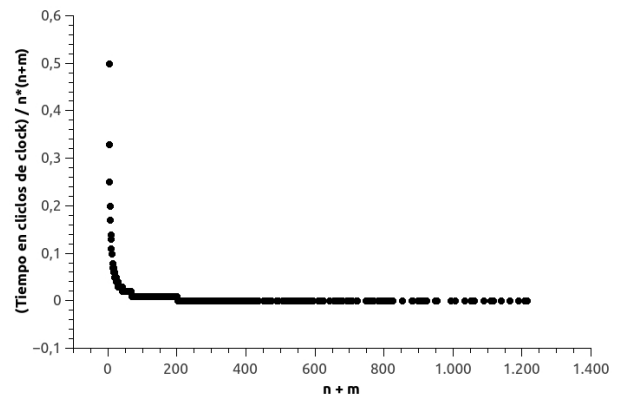
- Tipo B1: Utilizamos el BFS modificado para la solución original, y el primer criterio de vecindad.
- Tipo G1: Utilizamos la heurística golosa para la solución original, y el primer criterio de vecindad.
- Tipo B2: Utilizamos el BFS modificado para la solución original, y el segundo criterio de vecindad.
- Tipo G2: Utilizamos la heurística golosa para la solución original, y el segundo criterio de vecindad.

La medición de tiempos de los distintos tipos, arroja los siguientes gráficos para cada tipo:

#### 1. Tipo B1: BFS-Primer Criterio de Vecindad

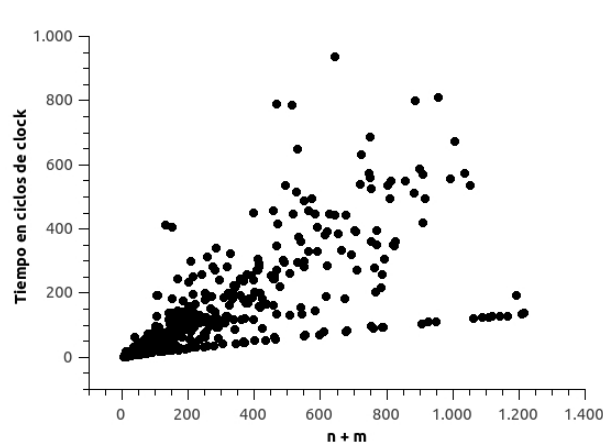


(a) Tiempos sin procesar

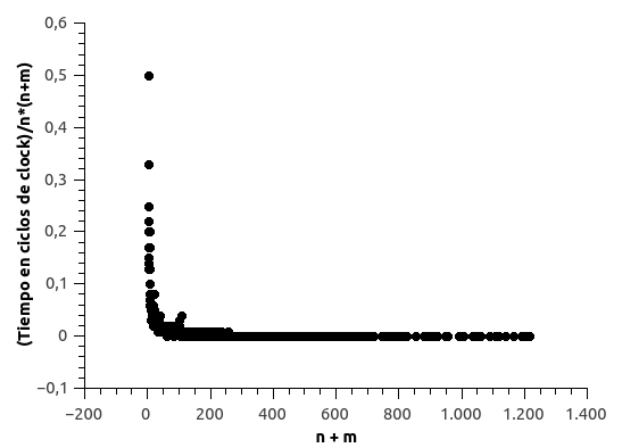


(b) figura (a) /  $n^*(n+m)$

#### 2. Tipo G1: Goloso-Primer Criterio de Vecindad

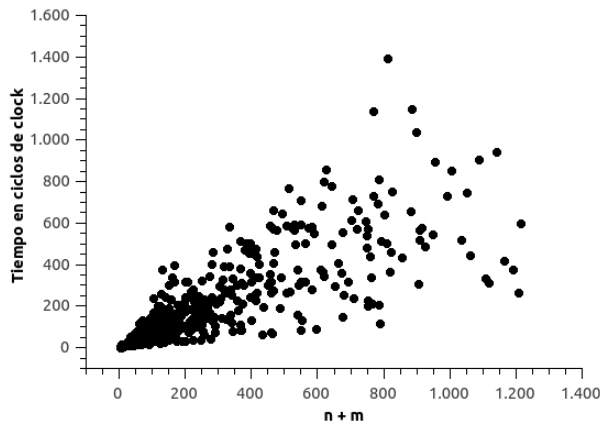


(a) Tiempos sin procesar

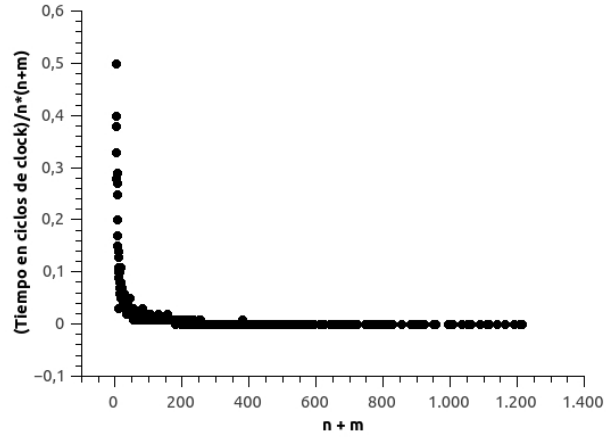


(b) figura (a) /  $n^*(n+m)$

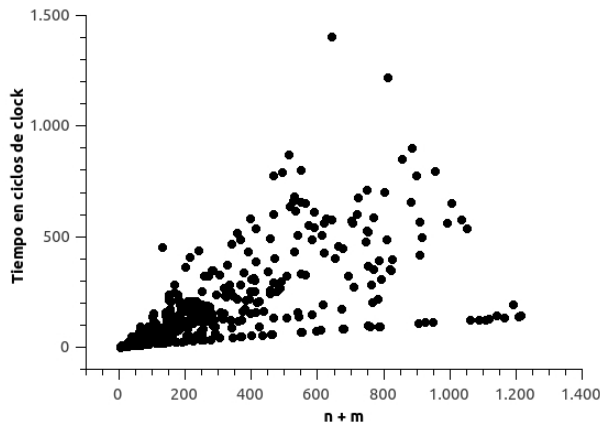
#### 3. Tipo B2: BFS-Segundo Criterio de Vecindad



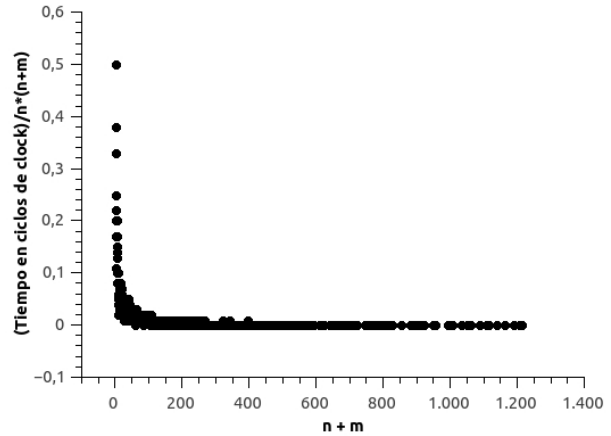
(a) Tiempos sin procesar

(b) figura (a) /  $n^*(n+m)$ 

#### 4. Tipo G2: Goloso-Segundo Criterio de Vecindad



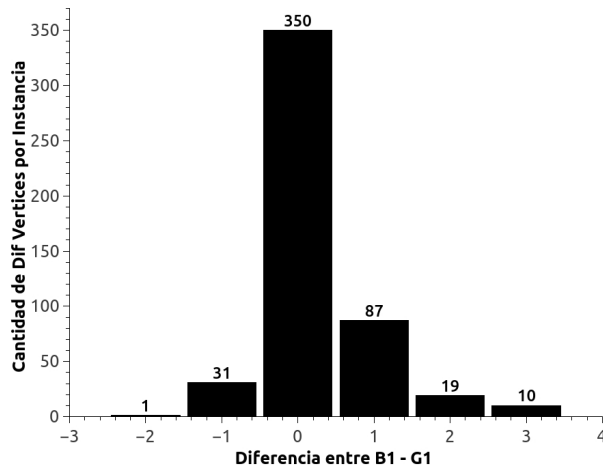
(a) Tiempos sin procesar

(b) figura (a) /  $n^*(n+m)$ 

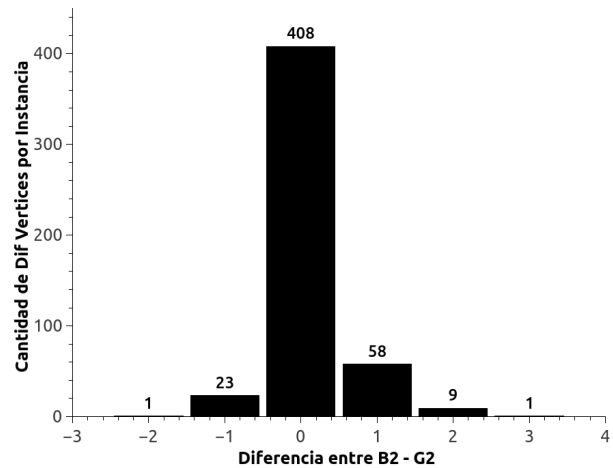
Como podemos ver de los 4 gráficos, al dividir los tiempos por  $n * (n + m)$ , tienden a un número constante mayor a cero. Entonces nuestro algoritmo tendría complejidad  $\mathcal{O}(c * n * (n + m))$ , donde  $c$  es la constante a la cual converge el gráfico. Por lo tanto concluimos que la complejidad temporal experimental coincide con nuestra predicción de complejidad.

Por el lado de la calidad de las soluciones obtenidas con cada combinación, debemos comparar por un lado el uso del BFS modificado o de la heurística golosa como solución inicial y por el otro el uso del primer criterio de vecindad o el del segundo criterio de vecindad como método de mejora de la solución inicial:

- **BFS modificado vs Heurística golosa como solución inicial.** Para realizar la comparación, tomamos el tamaño de la solución final para cada instancia, usando primero el BFS modificado como solución inicial y luego la heurística golosa, para después restar al tamaño de la solución final del tipo B1/B2, el tamaño de la solución final del tipo G1/G2. :



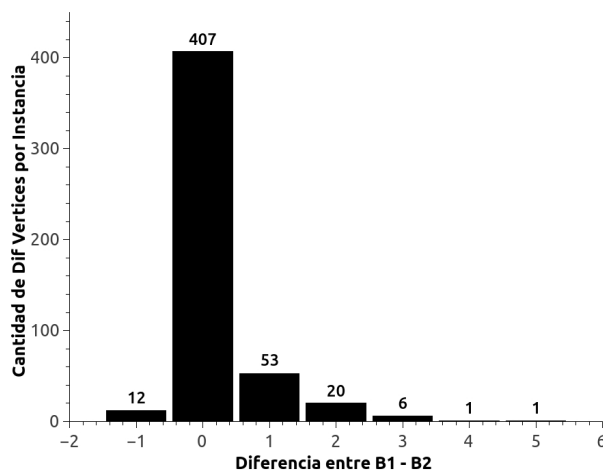
(a) Usando el Primer Criterio de Vecindad



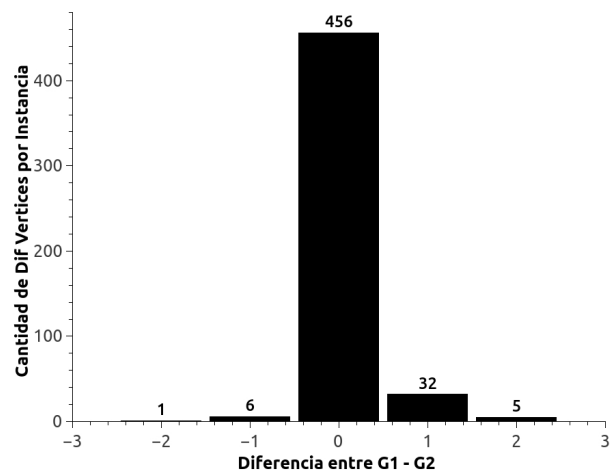
(b) Usando el Segundo Criterio de Vecindad

En ambos casos, se aprecia una paridad entre ambas soluciones, sin embargo hay una leve tendencia hacia la heurística golosa como mejor procedimiento para construir la solución inicial.

- **Criterio de Vecindad.** El análisis comparado es el siguiente (utilizando la misma metodología que en el caso de BFS vs Golosa):



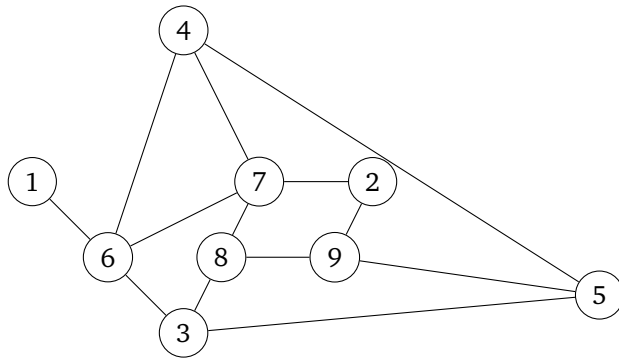
(a) Usando BFS como solución inicial



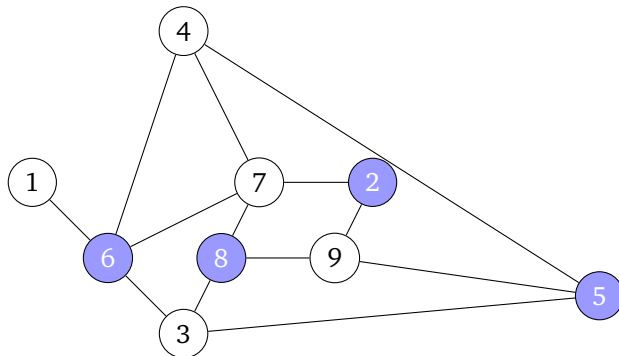
(b) Usando Goloso como solución inicial

Estos resultados nos inclinan a pensar que el segundo criterio de vecindad es el mejor criterio, lo cual es coherente con el hecho que el segundo criterio de vecindad es capaz de arreglar soluciones que el primer criterio de vecindad da como inválidas. Es decir, podríamos argumentar que como el primer criterio de vecindad es un caso particular del segundo criterio de vecindad (cuando no incluimos ningún vértice al subconjunto, más allá del candidato) debería ser siempre mejor al primero. Sin embargo, la experimentación muestra casos donde el primer criterio es mejor, y eso se da en instancias donde arreglar una solución inválida nos inhibe de seguir explorando la solución original en búsqueda de un mejor caso. Por ejemplo:

- Grafo de  $n = 9$  y  $m = 13$

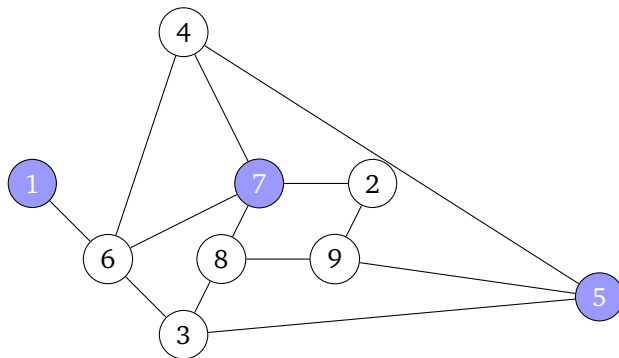


- **Solución Golosa:** como el mayor grado, 3, es compartido por varios vertices, empezamos por el menor numero de etiqueta, que es el 5, y asi sucesivamente.

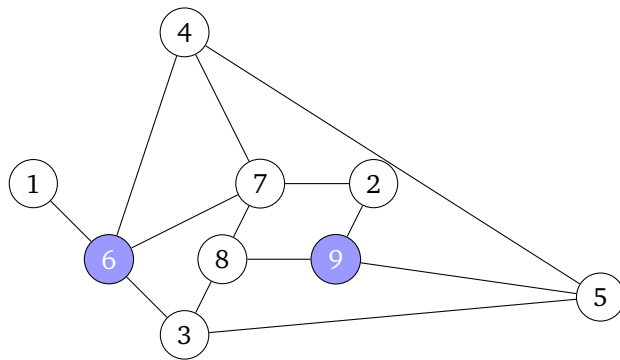


- **Solución aplicando el segundo criterio de vecindad a la solución golosa:** tenemos 4 candidatos que cumplen con el hecho de tener 2 o mas adyacentes incluidos: 3, 4, 7, 9.

1. Vértice 3: incluimos el 3, quitamos el 5, 6 y 8, por lo tanto podemos incluir un vértice mas, que sera el 1. Sin embargo el 4 no es dominado por nadie, por lo cual no es una solución valida.
2. Vértice 4: incluimos el 4, y quitamos el 5 y el 6. No podemos incluir ningún vértice mas, por lo tanto el 1 no es dominado por nadie, no es una solución valida.
3. Vértice 7: incluimos el 7 y quitamos el 2, 6 y 8. Incluimos el 1, y nos queda una solución valida.
4. Vértice 9: no es contemplado, ya que obtuvimos una solución mejor con el vértice 7. Solución que ya no es posible mejorar.



- **Solución aplicando el primer criterio de vecindad a la solución golosa:** los candidatos son los mismos que en el segundo criterio, sin embargo al no poder incluir vértice mas allá del candidato, la solución probando con el vértice 7 es invalida, ya que el 1 no es dominado por nadie. Por lo tanto probamos con incluir el 9, y quitar el 2, 5 y 8. Al hacer esto nos queda una solución valida de menor cardinal que en la solución golosa original y que si hubiésemos utilizado el segundo criterio



Sin embargo estos tipos de instancias son muy particulares, por lo cual podemos afirmar que la **mejor combinación** para la **heurística de búsqueda local** planteada es aquella que toma como **solución inicial** la generada por la **heurística golosa** y luego es mejorada por el **segundo criterio de vecindad**.

## 5. Ejercicio 5 - Metaheurística GRASP

*Diseñar e implementar un algoritmo para CIDM que use la metaheurística GRASP.*

### 5.1. Ejercicio A

*Explicar detalladamente el algoritmo implementado. Plantear distintos criterios de parada y de selección de la lista de candidatos (RCL) de la heurística golosa aleatorizada.*

#### 5.1.1. Idea general

Como pide el enunciado, la idea general del algoritmo es usar la metaheurística GRASP, para lo cual es necesario tener implementaciones de: heurística constructiva golosa y heurística de búsqueda local, que fueron convenientemente implementadas en los puntos anteriores.

La estructura general de un algoritmo GRASP es:

1. Poner en `mejor_solucion` una primera solución Random.
2. Mientras no se cumpla el criterio de parada hacer:
  3. Poner en `nueva_solucion` una solución usando la función `ConstruirGreedyRandom()`
  4. Intentar mejorar la `nueva_solucion` usando la función `BusquedaLocal()`
  5. Si `costo(nueva_solucion) < costo(mejor_solucion)` hacer:
    6. Poner en `mejor_solucion` la `nueva_solucion`

En nuestro algoritmo se implementó de la siguiente forma:

1. Se utilizó para la primera 'mejor solución' Random el mismo método `ConstruirGreedyRandom` que se utiliza al generar una solución golosa randomizada.
2. Los criterios de parada considerados se detallan más adelante.
3. La función `ConstruirGreedyRandom` es una variación del algoritmo goloso implementado para el Ejercicio 3 (agregando lista de candidatos), detallado más adelante.
4. La función `BusquedaLocal` es idéntica al algoritmo implementado para el Ejercicio 4. En la experimentación se probó con los criterios de vecindad 1 y 2 expuestos en ese mismo Ejercicio.
5. Definimos el costo de una solución como la cantidad de nodos de dicha solución, por lo que decimos que una es mejor que otra si la primera tiene menor cantidad de nodos.
6. Si encontramos una solución con menor cantidad de nodos que la mejor hasta ese momento, la guardamos como mejor solución.

#### 5.1.2. Criterios de parada

Los criterios de parada que se utilizaron para la implementación se pensaron en función de la cantidad de nodos del grafo original:

1. Criterio 1: realizar  $n$  iteraciones, con  $n$  la cantidad de nodos del grafo.
2. Criterio 2: sea  $k$  una constante, seguir iterando hasta que la mejor solución parcial no se mejore durante  $k$  ciclos seguidos.

#### 5.1.3. Selección de lista de candidatos (RCL)

Al algoritmo con heurística constructiva golosa del Ejercicio 3 se lo modificó de la siguiente forma:

- En vez de iterar en los elementos del array de nodos ordenados por grado, iteramos hasta que hayamos visitado  $n$  nodos usando un contador, ya que no necesariamente vamos a visitar secuencialmente todos los nodos desde el índice 0 hasta el  $(n-1)$ -ésimo.



- Dentro del ciclo principal, lo primero que hacemos es elegir el índice de un nodo para agregar a la solución.

A diferencia del algoritmo goloso original, que elegíamos siempre el nodo con grado más alto no visitado hasta ese momento, ahora vamos a tener una lista de candidatos (nodos) a agregar a la solución, y de todos ellos vamos a elegir alguno de manera aleatoria.

La lista de candidatos se construye de dos formas posibles:

1. Criterio 1: tomando como referencia el nodo con grado más alto no visitado hasta ese momento. Si  $d_{max}$  es dicho grado, agregaremos a la lista de candidatos todos los nodos que tengan grado al menos  $\alpha * d_{max}$  ( $\alpha$  constante). Es decir, sea  $d$  el grado del nodo, los consideramos si  $d \geq d_{max} * \alpha$ . Donde  $\alpha$  es un valor entre 0 y 1.
2. Criterio 2: en vez de tomar como referencia el grado de mayor elemento, simplemente tomamos los  $k$  elementos de mayor grado no visitados hasta el momento, con  $k$  un valor constante entero.

Esto nos asegura que, si bien el nodo a agregar a la solución es aleatorio, se encuentra dentro de cierto grupo de nodos mejores que otros.

- Luego de que se eligió un nodo, se lo agrega a la solución, y luego se lo borra de los nodos posibles para futuras iteraciones (se lo marca como *visitado*). Además, se aumenta en uno la cantidad de nodos visitados.
- Por último, se itera sobre todos los nodos adyacentes al elegido, borrándolos de los nodos posibles y aumentando en uno el contador de nodos visitados.

#### 5.1.4. Pseudocódigo

El esquema general del algoritmo GRASP ya se mostró en la sección Idea General, y el algoritmo de Búsqueda Local es idéntico al utilizado en el Ejercicio 4, por lo que mostraremos aquí solo el pseudocódigo de la función `ConstruirGreedyRandom` (con el primer criterio de lista de candidatos, el segundo simplemente elige los  $k$  nodos de mayor grado, con  $k$  una constante):

```
Poner nodos = un vector de structs Nodo, que tiene el indice del nodo y su grado
    en el grafo, de tamaño n.
Ordenar dicho conjunto de mayor a menor grado.
Poner solucion = un vector de enteros inicializados en 0. El valor en cada indice
    representa si el nodo con dicho indice pertenece o no a la solución.
Poner nodos_visitados = 0
Mientras nodos_visitados < n hacer:
    Poner mejor_grado = nodos[0].grado
    Poner limite_indice = 0
    Para i desde 0 hasta |nodos| hacer:
        Si nodos[i].grado >= mejor_grado - mejor_grado * alpha hacer:
            limite_indice = i
        Sino
            Salir ciclo Para
        Fin Si
    Fin Para

    Poner indice_nuevo = random_in_range(0, min(limite_indice, |nodos|-1))
    Poner nodo_nuevo = nodos[indice_nuevo].indice
    Agrego nodo_nuevo al vector solucion y lo borro del vector nodos
    Incrementar nodos_visitados en uno

    Para v en Adyacentes(nodo_nuevo) hacer:
        Si v esta en nodos hacer:
            Borrar v del vector nodos
            Incrementar nodos_visitados en uno
        Fin Si
    Fin Para
Fin Mientras
Devolver solucion
```

## 5.2. Ejercicio B

*Realizar una experimentación que permita observar los tiempos de ejecución y la calidad de las soluciones obtenidas.*

## 6. Ejercicio 6 - Experimentación final

*Realizar una experimentación sobre un conjunto nuevo de instancias para observar la performance de los métodos comparando nuevamente la calidad de las soluciones obtenidas y los tiempos de ejecución en función de los parámetros de la entrada.*

En este ejercicio se busca comparar los tiempos de ejecución de los distintos algoritmos implementados así como la calidad de las soluciones que devuelven.

Al contrario que en las experimentaciones anteriores donde se utilizaban grafos aleatorios, en esta experimentación se busco concentrarnos en distintas familias de grafos, ya que cada una hace que ciertas implementaciones funcionen mejores que otras. Las familias de grafos elegidas fueron:

- Grafos completos ( $K_n$ ).
- Grafos de nodos aislados, es decir, el complemento de los grafos completos.
- Grafos de caminos ( $P_n$ ).
- Grafos de ciclos ( $C_n$ ).

Algunas consideraciones generales:

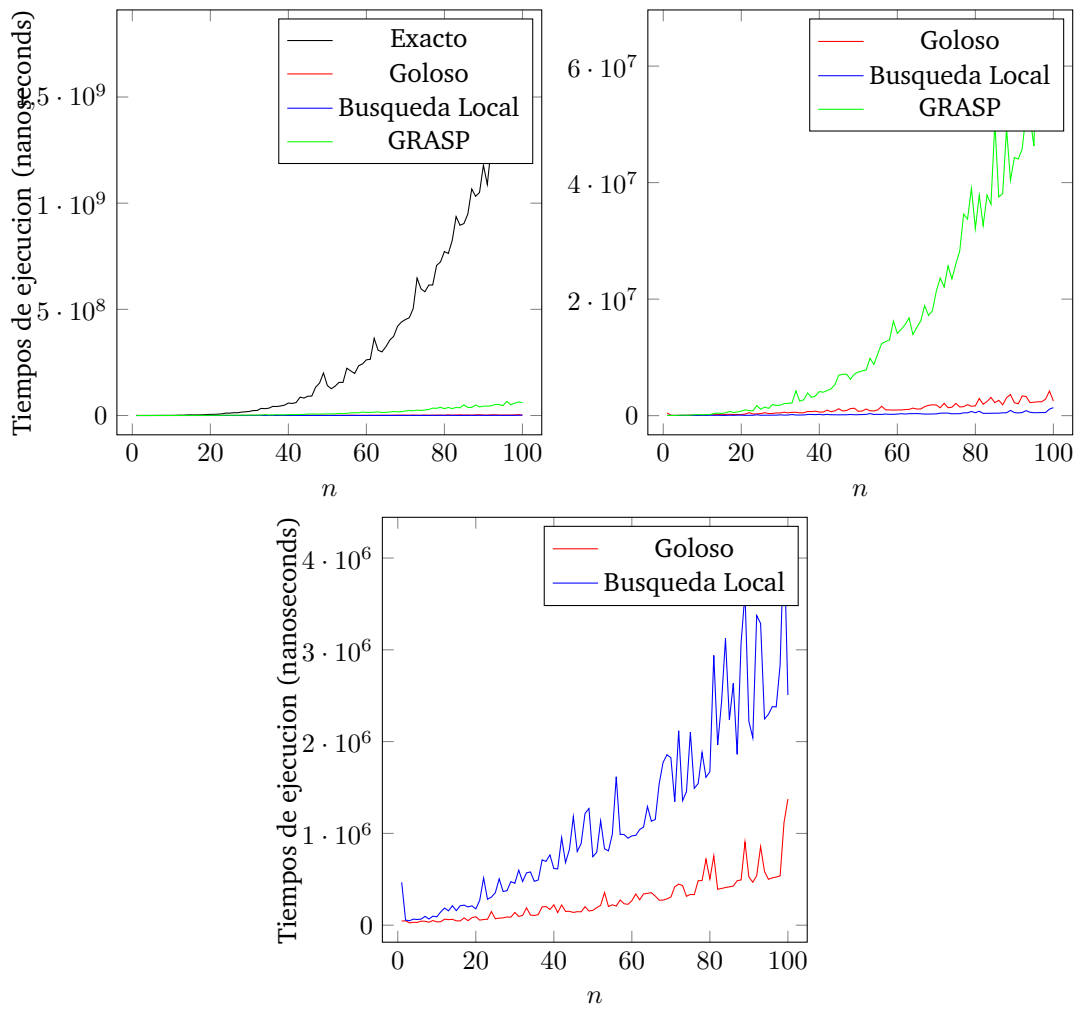
- Los tiempos de ejecución se midieron con la biblioteca chrono y estos fueron convertidos a nanosegundos.
- Para el algoritmo Exacto se utilizaron todas las podas planteadas en el Ejercicio 2.
- Para el algoritmo Goloso se utilizó su implementación en listas de adyacencia.
- Para el algoritmo de Búsqueda Local se utilizó como solución inicial el algoritmo Goloso y el criterio de vecindad 2, que genera soluciones vecinas a partir de quitar k vertices y agregar hasta k-1 vertices.
- Para el algoritmo GRASP, se utilizó el criterio de parada 2, que sigue buscando soluciones hasta que pasan 10 iteraciones sin que cambie el cardinal de la mejor solución. Además, se utilizaron las siguientes versiones de los algoritmos:
  - Búsqueda Local utilizando el criterio de vecindad 1, que genera soluciones vecinas a partir de quitar k vertices y agregar 1 vertice.
  - Goloso utilizando listas de adyacencia.
- Para todas las familias de grafos, nos abstuvimos de comparar el algoritmo Exacto a partir de  $n \geq 12$  ya que la cantidad de tiempo que requiere a partir de ese valor es prohibitivo.

### 6.1. Experimentación con Grafos completos

Consideraciones particulares de la familia de grafos:

- Se generaron 100 casos de tests, con:
- $1 \leq n \leq 100$
- $m = \frac{n*(n-1)}{2}$ .

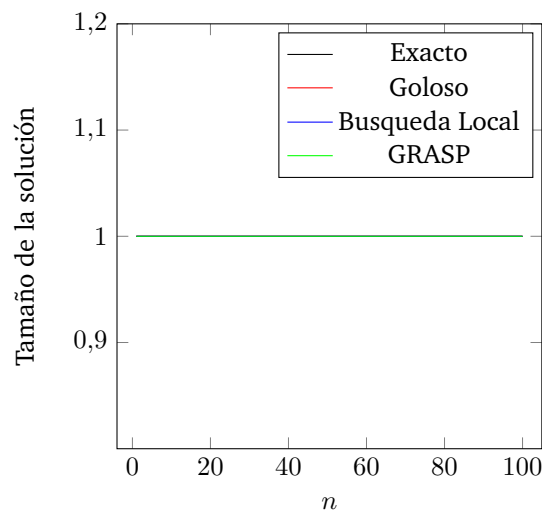
## 6.1.1. Tiempos de ejecución



Como se puede ver en los gráficos presentados, para esta familia de Grafos tenemos una clara diferencia de performance:

1. En primer lugar con menor tiempo se encuentra la Busqueda Local.

## 6.1.2. Calidad de las soluciones

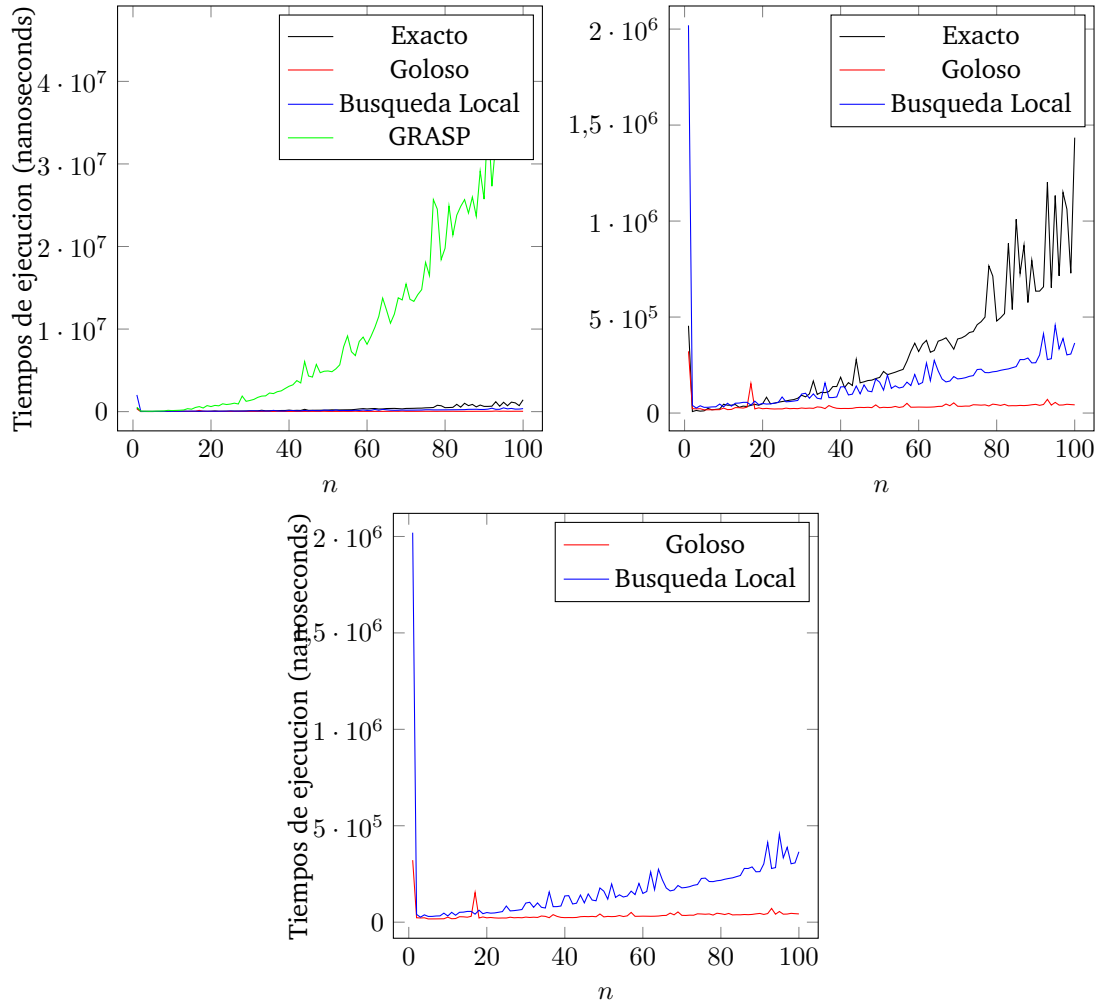


## 6.2. Experimentación con Complemento de Grafos completos

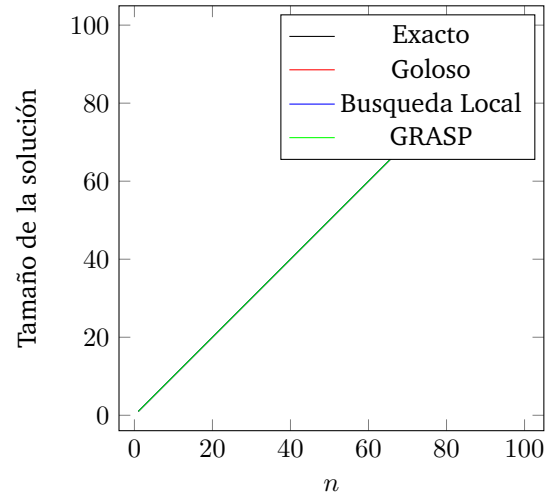
Consideraciones particulares de la familia de grafos:

- Se generaron 100 casos de tests, con:
- $1 \leq n \leq 100$
- $m = 0$ .

### 6.2.1. Tiempos de ejecución



### 6.2.2. Calidad de las soluciones

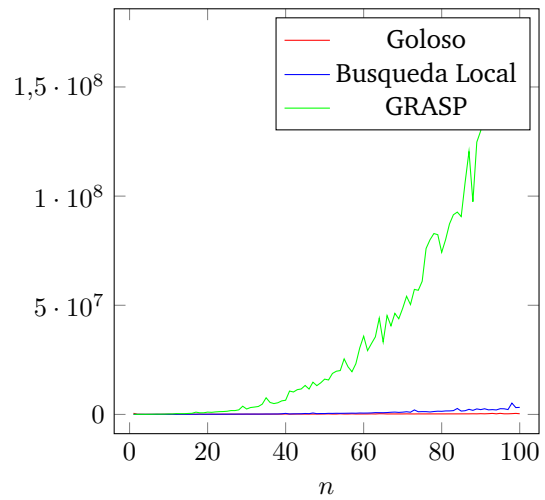
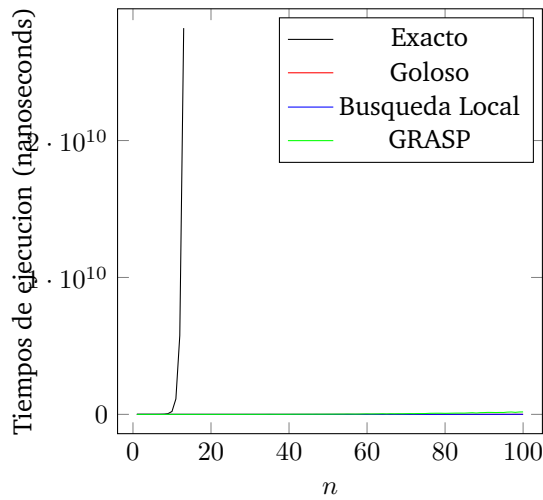


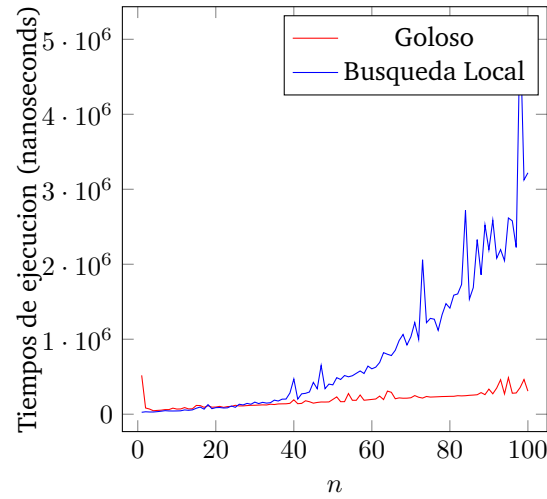
## 6.3. Experimentación con Caminos

Consideraciones particulares de la familia de grafos:

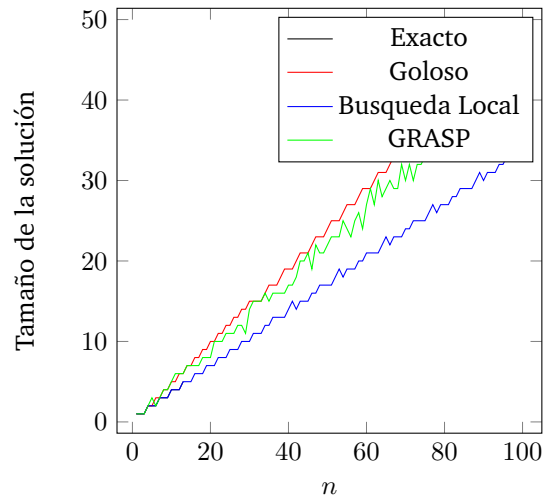
- Se generaron 100 casos de tests, con:
- $1 \leq n \leq 100$
- $m = n - 1$ .

### 6.3.1. Tiempos de ejecución





### 6.3.2. Calidad de las soluciones

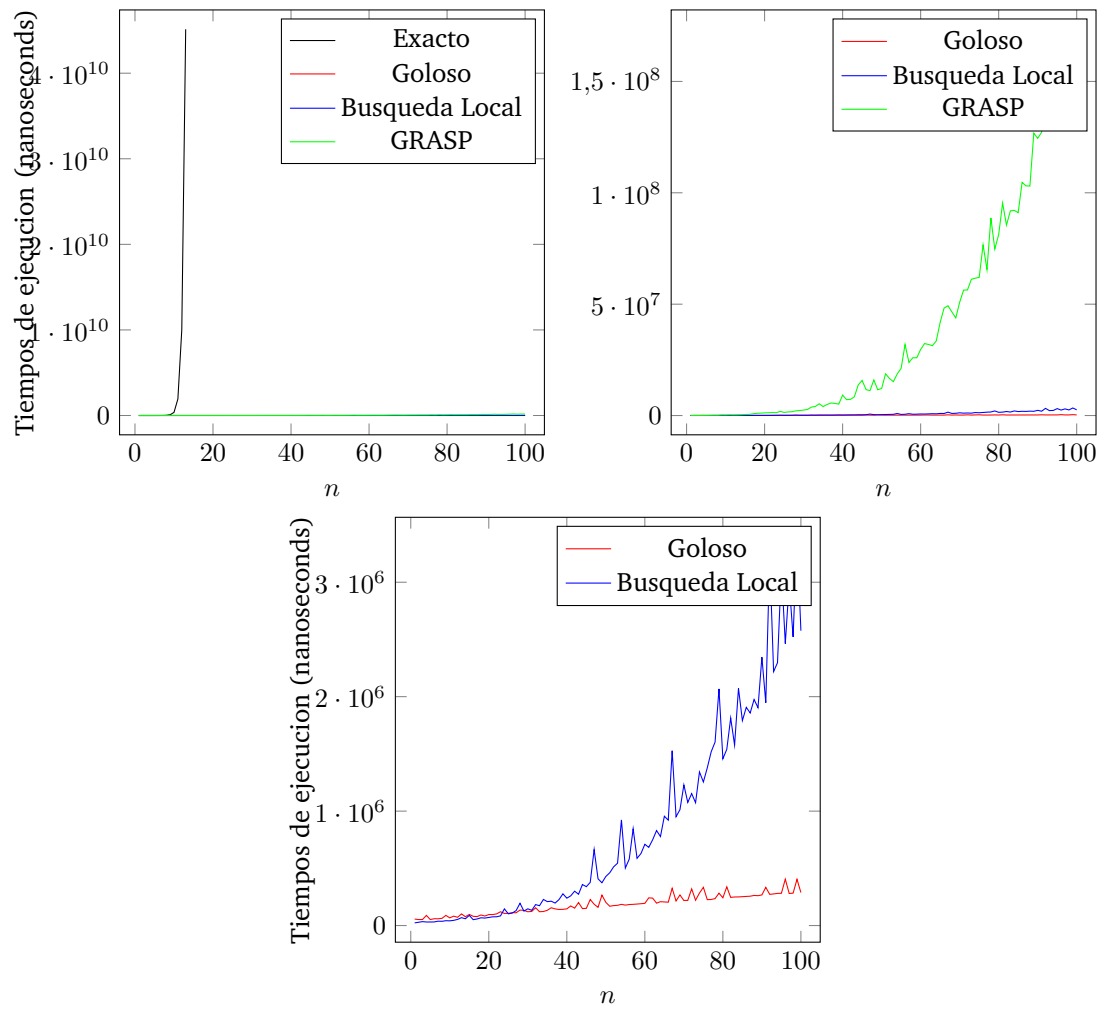


## 6.4. Experimentación con Ciclos

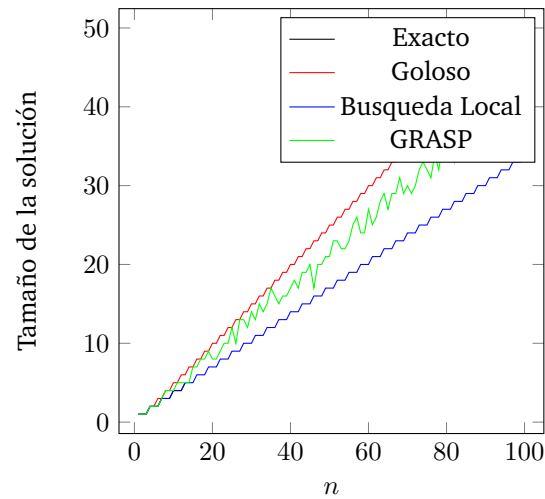
Consideraciones particulares de la familia de grafos:

- Se generaron 100 casos de tests, con:
- $1 \leq n \leq 100$
- $m = n$ .

## 6.4.1. Tiempos de ejecución



## 6.4.2. Calidad de las soluciones





## A. Implementación algoritmo exacto

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <stack>
#include <algorithm>
using namespace std;

#define INFINITO -1

typedef vector<int> Vec;
typedef vector<Vec> Matriz;

vector<int> resolver(int n, Matriz matriz);
vector<int> resolver_aux(int n, Matriz matriz, vector<int> dom, vector<
    int> cidm);

// Implementacion.
int main() {
    int n, m;
    cin >> n;
    cin >> m;

    Matriz matriz(n, Vec(n, 0));

    int v, w;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        cin >> v;
        cin >> w;
        matriz[v-1][w-1] = 1;
        matriz[w-1][v-1] = 1;
    }

    vector<int> cidm = resolver(n, matriz);

    cout << cidm.size() << "␣";
    for (int i = 0; i < cidm.size(); i++) {
        cout << cidm[i] << "␣";
    }
    cout << endl;

    return 0;
}

vector<int> resolver(int n, Matriz matriz) {
    // inicializo el primer conjunto a evaluar con todos los vertices
    // del grafo
    // Este primer conjunto es dominante (pero no necesariamente
    // independiente)
    vector<int> dom(n, 0);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dom[i] = i;
    }
}
```

```
    return resolver_aux(n, matriz, dom, dom);
}

vector<int> resolver_aux(int n, Matriz matriz, vector<int> dom, vector<
int> cidm) {
    int dom_size = dom.size();
    int cidm_size = cidm.size();
    if (cidm_size == 1) {
        return cidm;
    } else {
        // chequeo si dom es independiente
        bool indep = true;
        for (int i = 0; i < dom_size; i++) {
            for (int j = i+1; j < dom_size; j++) {
                if (matriz[dom[i]][dom[j]] == 1) {
                    indep = false;
                    break;
                }
            }
            if(!indep) {
                break;
            }
        }

        if(indep) {
            // Sabemos que si Dom es dominante e independiente,
            // entonces cualquier subconjunto de Dom es no-dominante
            // Luego, devolvemos el que tiene menor cardinal entre dom y
            cidm
            if (dom_size < cidm_size) {
                return dom;
            } else {
                return cidm;
            }
        }
    }

    for (int i = 0; i < dom_size; i++) {
        // copio dom y borro el i-esimo nodo de la copia
        //(no es el nodo numero i, sino el nodo en la posicion i del
        vector)
        vector<int> copia(dom);
        copia.erase(copia.begin() + i);
        // chequeo si la copia es dominante
        bool copia_dominante = true;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            // chequeo si el nodo i esta en copia o es adyacente a
            alguno en copia
            bool nodo = false;
            for (int j = 0; j < copia.size(); j++) {
                if (copia[j] == i) {
                    // el nodo i esta en copia
                    nodo = true;
                    break;
                }
            }
        }
    }
}
```

```
        } else if (matriz[i][copia[j]] == 1) {
            // el nodo i es adyacente a alguno en copia
            nodo = true;
            break;
        }
    }
    if (!nodo) {
        copia_dominante = false;
        break;
    }
}
// Sabemos que si Copia no es dominante, entonces ningun
// subconjunto de Copia es dominante,
// por lo que ni siquiera los evaluo
if (copia_dominante) {
    vector<int> nuevo_cdm = resolver_aux(n, matriz, copia, cdm
    );
    if (nuevo_cdm.size() < cdm_size) {
        cdm = nuevo_cdm;
        cdm_size = nuevo_cdm.size();
    }
}
}
return cdm;
}
```

## B. Implementación algoritmo goloso

### B.1. Implementación sobre matriz de adyacencia

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
using namespace std;

struct Nodo {
    int numero;
    int grado;
    Nodo() : numero(0), grado(0) {};
    Nodo(const int n, const bool v, const int g) : numero(n) , grado(g)
        {};
};

struct orden
{
    inline bool operator() (const Nodo& n1, const Nodo& n2)
    {
        return (n1.grado > n2.grado);
    }
};

typedef vector<int> Vec;
typedef vector<Vec> Matriz;
typedef vector<Nodo> Nodos;

vector<int> resolver(int n, Matriz matriz, Nodos nodos);

// Implementacion.
int main() {
    int n, m;
    cin >> n;
    cin >> m;

    Matriz matriz(n, Vec(n, 0));
    Nodos nodos(n, Nodo());
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        nodos[i].numero = i;
    }

    int v, w;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        cin >> v;
        cin >> w;
        matriz[v-1][w-1] = 1;
        matriz[w-1][v-1] = 1;
        nodos[v-1].grado = nodos[v-1].grado + 1;
        nodos[w-1].grado = nodos[w-1].grado + 1;
    }

    vector<int> cidm = resolver(n, matriz, nodos);
```

```
        cout << cidm.size() << "␣";
    for (int i = 0; i < cidm.size(); i++) {
        cout << cidm[i]+1 << "␣";
    }
    cout << endl;

    return 0;
}

vector<int> resolver(int n, Matriz matriz, Nodos nodos) {
    // Ordeno a los nodos segun su grado
    std::sort(nodos.begin(), nodos.end(), orden());

    vector<bool> visitado(n, false);
    vector<int> cidm;
    cidm.reserve(n);

    for(int i = 0; i < n ; i++){
        if(visitado[nodos[i].numero] == false){
            visitado[nodos[i].numero] = true;
            cidm.push_back(nodos[i].numero);
            for(int j = 0; j<n; j++){
                if(matriz[nodos[i].numero][j] == 1){
                    visitado[j] = true;
                }
            }
        }
    }

    return cidm;
}
```

## B.2. Implementación sobre listas de adyacencia

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <stack>
#include <list>
#include <queue>
using namespace std;

struct Nodo {
    int numero;
    int grado;
    Nodo() : numero(0), grado(0) {};
    Nodo(const int n, const bool v, const int g) : numero(n) , grado(g)
        {};
};

struct orden
{
    inline bool operator() (const Nodo& n1, const Nodo& n2)
```

```
{
    return (n1.grado > n2.grado);
}

};

typedef vector<Nodo> Nodos;
typedef list<int> listaAdyacencia;
typedef vector<listaAdyacencia> Grafo;

vector<int> resolver(int n, Grafo G, Nodos nodos);

// Implementacion.
int main() {
    int n, m;
    cin >> n;
    cin >> m;

    Grafo G(n, listaAdyacencia());

    Nodos nodos(n, Nodo());
    for(int i = 0; i < n; i++) {
        nodos[i].numero = i;
    }

    int v, w;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        cin >> v;
        cin >> w;
        G[v-1].push_back(w-1);
        G[w-1].push_back(v-1);
        nodos[v-1].grado = nodos[v-1].grado + 1;
        nodos[w-1].grado = nodos[w-1].grado + 1;
    }

    vector<int> cidm = resolver(n, G, nodos);

    cout << cidm.size() << " ";
    for (int i = 0; i < cidm.size(); i++) {
        cout << cidm[i]+1 << " ";
    }
    cout << endl;

    return 0;
}

vector<int> resolver(int n, Grafo G, Nodos nodos) {
    // Ordeno a los nodos segun su grado
    std::sort(nodos.begin(), nodos.end(), orden());

    vector<bool> visitado(n, false);
    vector<int> cidm;
    cidm.reserve(n);
```

```
for(int u = 0; u < n ; u++){
    if(visitado[nodos[u].numero] == false){
        visitado[nodos[u].numero] = true;
        cidm.push_back(nodos[u].numero);
        for (list<int>::iterator itAdyU=G[nodos[u].numero].begin();
            itAdyU != G[nodos[u].numero].end(); ++itAdyU) {
            int j = *itAdyU;
            cout << j << endl ;
            visitado[j] = true;
        }
    }
}

return cidm;
}
```

## C. Implementación algoritmo de búsqueda local

```
#include <vector>
#include <iostream>
#include <stack>
#include <list>
#include <queue>
#include <algorithm>
using namespace std;

#define VISITADO 1
#define NO_VISITADO 0
#define INCLUIDO 1
#define NO_INCLUIDO 0

// Esta version tiene vecindades k-1 o k-k-1 vertices de diferencia
struct Nodo {
    int numero;
    int grado;
    Nodo() : numero(0), grado(0) {};
    Nodo(const int n, const int g) : numero(n) , grado(g) {};
};

struct orden
{
    inline bool operator() (const Nodo& n1, const Nodo& n2)
    {
        return (n1.grado > n2.grado);
    }
};

typedef vector<Nodo> Nodos;
typedef list<int> listaAdyacencia;
typedef vector<listaAdyacencia> Grafo;

void bfs_cdi(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial, int inicio);
void goloso(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial);
bool solucion_posible(Grafo& G, vector<int>& solucionAuxiliar, int
    cantCambios);
void vecindad_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial);
void vecindad_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial);
void imprimir_resultado(vector<int>& cidm);

// Implementacion.
int main() {
    int n, m;
    cin >> n;
    cin >> m;

    Grafo G(n, listaAdyacencia());

    int v, w;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
```



```
        cin >> v;
        cin >> w;
        G[v-1].push_back(w-1);
        G[w-1].push_back(v-1);
    }

    vector<int> solucionInicial(n, NO_INCLUIDO);
    //Solucion Inicial 1: empiezo por el nodo 0
    //int inicio = 0;
    //bfs_cdi(G, solucionInicial, inicio);
    // Solucion Inicial 2: Heuristica golosa
    goloso(G, solucionInicial);
    //vecindad_primer_criterio(G, solucionInicial);

    vecindad_segundo_criterio(G, solucionInicial);

    imprimir_resultado(solucionInicial);

    return 0;
}

void bfs_cdi(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial, int inicio) {
    // O(m + n)
    int n = G.size();
    vector<int> estado(n, NO_VISITADO);
    // Primera componente conexas
    estado[inicio] = VISITADO;
    solucionInicial[inicio] = INCLUIDO;
    queue<int> cola;
    cola.push(inicio);

    while(!cola.empty()) {
        int v = cola.front();
        cola.pop();
        solucionInicial[v] = INCLUIDO;
        for (list<int>::iterator it=G[v].begin(); it != G[v].end(); ++it) {
            int w = *it;
            if (solucionInicial[w] == INCLUIDO) {
                solucionInicial[w] = NO_INCLUIDO;
            }
            if (estado[w] == NO_VISITADO) {
                estado[w] = VISITADO;
                cola.push(w);
            }
        }
    }
}

// Resto de las componentes conexas
for (int u = 0; u < n; u++) {
    if (estado[u] == NO_VISITADO) {
        estado[u] = VISITADO;
        solucionInicial[u] = INCLUIDO;
        queue<int> cola;
        cola.push(u);
    }
}
```

```
        while(!cola.empty()) {
            int v = cola.front();
            cola.pop();
            solucionInicial[v] = INCLUIDO;
            for (list<int>::iterator it=G[v].begin(); it != G[v].end
                (); ++it) {
                int w = *it;
                if (solucionInicial[w] == INCLUIDO) {
                    solucionInicial[w] = NO_INCLUIDO;
                }
                if (estado[w] == NO_VISITADO) {
                    estado[w] = VISITADO;
                    cola.push(w);
                }
            }
        }
    }
}

void goloso(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial) {
    int n = G.size();
    Nodos nodos(n, Nodo());

    for(int u = 0; u < n; u++) {
        nodos[u].numero = u;
        nodos[u].grado = G[u].size();
    }

    sort(nodos.begin(), nodos.end(), orden());

    vector<bool> visitado(n, false);

    for(int u = 0; u < n ; u++){
        if(visitado[nodos[u].numero] == false){
            visitado[nodos[u].numero] = true;
            solucionInicial[nodos[u].numero] = INCLUIDO;
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[nodos[u].numero].begin();
                itAdyU != G[nodos[u].numero].end(); ++itAdyU) {
                int v = *itAdyU;
                visitado[v] = true;
            }
        }
    }
}

void vecindad_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial) {
    // Criterio de Vecindad 1: Cambiamos k vertices por 1 vertice,
    // donde k > 1
    int n = G.size();
```

```
// Genero soluciones vecinas
for (int u = 0; u < n; u++) {
    vector<int> solucionAuxiliar = solucionInicial;
    if (solucionInicial[u] == NO_INCLUIDO && G[u].size() > 1) {
        int cantINCLUIDOS = 0;
        solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO;
        // Me fijo si el vectice NO INCLUIDO tiene al menos
        // dos vectores adyacentes INCLUIDOS
        for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
            ; ++itAdyU) {
            int v = *itAdyU;
            if (solucionInicial[v] == INCLUIDO) {
                cantINCLUIDOS ++;
                solucionAuxiliar[v] = NO_INCLUIDO;
            }
        }
        // Necesito al menos 2 INCLUIDOS
        if (cantINCLUIDOS > 1) {
            int cantCambiosPosibles = 0;
            bool esSolucion = solucion_posible(G, solucionAuxiliar,
                cantCambiosPosibles);
            if (esSolucion) {
                // Encuentre una solucion Vecina mejor, fin del ciclo
                vecindad_primer_criterio(G, solucionAuxiliar);
                solucionInicial = solucionAuxiliar;
                break;
            }
        }
    }
}

}

}

void vecindad_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial) {
    // Criterio de Vecindad 2: Cambiamos k vertices por, a lo sumo,
    // k-1 vertices, , donde k > 1
    int n = G.size();
    // Genero soluciones vecinas
    for (int u = 0; u < n; u++) {
        vector<int> solucionAuxiliar = solucionInicial;
        if (solucionInicial[u] == NO_INCLUIDO && G[u].size() > 1) {
            // Para los INCLUIDOS en la solucionInicial me fijo en sus
            // adyacentes
            // para encontrar algun adyacente que tambien esta INCLUIDO
            int cantINCLUIDOS = 0;
            solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO;
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
                ; itAdyU++) {
                int v = *itAdyU;
                if (solucionInicial[v] == INCLUIDO) {
                    cantINCLUIDOS ++;
                    solucionAuxiliar[v] = NO_INCLUIDO;
                }
            }
        }
    }
}
```

```
    }
    // Necesito al menos 2 INCLUIDOS
    if (cantINCLUIDOS > 1) {
        int cantCambiosPosibles = cantINCLUIDOS - 2;
        bool esSolucion = solucion_posible(G, solucionAuxiliar,
            cantCambiosPosibles);
        if(esSolucion){
            // Encuentre una solucion Vecina mejor, fin del ciclo
            vecindad_segundo_criterio(G, solucionAuxiliar);
            solucionInicial = solucionAuxiliar;
            break;
        }
    }
}
}
}

bool solucion_posible(Grafo& G, vector<int>& solucionAuxiliar, int
    cantCambios) {

    int n = G.size();
    bool esSolucion = true;
    bool finCiclo = false;

    for (int u = 0; u < n && !finCiclo; u++) {
        // Si esta INCLUIDO, sus adyacentes no pueden estar INCLUIDOS
        if (solucionAuxiliar[u] == INCLUIDO && G[u].size() > 0) {
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
                && !finCiclo; ++itAdyU) {
                int v = *itAdyU;
                if (solucionAuxiliar[v] == INCLUIDO) {
                    esSolucion = false;
                    finCiclo = true;
                }
            }
        }
        else if (G[u].size() > 0) {
            // Si esta NO INCLUIDO, al menos uno de sus adyacentes
            // tiene que estar INCLUIDO
            bool adyINCLUIDO = false;
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
                && !finCiclo; ++itAdyU) {
                int v = *itAdyU;
                if (solucionAuxiliar[v] == INCLUIDO) {
                    adyINCLUIDO = true;
                }
            }
        }
        if (!adyINCLUIDO && cantCambios == 0) {
            esSolucion = false;
            finCiclo = true;
        }
        else if(!adyINCLUIDO) {
            // Salvo la solucion al marcar el vertice
            solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO;
            cantCambios --;
        }
    }
}
```

```
    } else {
        // Si es un K1, tiene que estar INCLUIDO
        esSolucion = solucionAuxiliar[u] == INCLUIDO;
        finCiclo = !(solucionAuxiliar[u] == INCLUIDO);
    }
}
return esSolucion;
}

void imprimir_resultado(vector<int>& cidm) {
    vector<int> solucion;
    solucion.reserve(cidm.size());
    for (int i = 0; i < cidm.size(); i++) {
        if(cidm[i] == INCLUIDO) {
            solucion.push_back(i+1);
        }
    }

    cout << solucion.size() << "␣";
    for (int i = 0; i < solucion.size(); i++) {
        cout << solucion[i] << "␣";
    }
    cout << endl;
}
```

## D. Implementación metaheurística GRASP

```
// INCLUDES
#include <vector>
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <stack>
#include <list>
#include <queue>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
using namespace std;

// DEFINES
#define VISITADO 1
#define NO_VISITADO 0
#define INCLUIDO 1
#define NO_INCLUIDO 0
#define GREEDY_RANDOM_ALPHA 0.4
#define GREEDY_RANDOM_BETA 10
#define GRASP_MAX_ITER_COUNTER 10
#define PRIMER_CRITERIO 0
#define SEGUNDO_CRITERIO 1

// ESTRUCTURAS
struct Nodo {
    int numero; //indica el indice con el que fue creado
    int grado;
    Nodo() : numero(0), grado(0) {};
    Nodo(const int n, const int g) : numero(n) , grado(g) {};
};

struct orden {
    inline bool operator() (const Nodo& n1, const Nodo& n2) {
        return (n1.grado > n2.grado);
    }
};

// TYPEDEF
typedef vector<Nodo> Nodos;
typedef list<int> listaAdyacencia;
typedef vector<listaAdyacencia> Grafo;

// FUNCIONES
void recibir_parametros(Grafo& G);
void imprimir_resultado(vector<int>& cidm);

void grasp(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool criterio_grasp, bool
    criterio_greedy, bool criterio_busqueda);
void grasp_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool
    criterio_greedy, bool criterio_busqueda);
void grasp_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool
    criterio_greedy, bool criterio_busqueda);
```

```
void construir_greedy_random(Grafo& G, vector<int>& solucion, bool
    criterio_greedy);
void construir_greedy_random_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucion);
void construir_greedy_random_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucion);

void busqueda_local(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial, bool
    criterio_busqueda);
void busqueda_local_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucionInicial);
void busqueda_local_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucionInicial);

bool solucion_posible(Grafo& G, vector<int>& solucionCambiar, int
    cantCambios);
int get_indice_nodo(Nodos& nodos, int v);
int random_in_range(int min, int max);

// IMPLEMENTACION
int main() {
    srand(time(0)); // configuro el seed del random generator

    Grafo G;
    vector<int> cidm;

    recibir_parametros(G);
    grasp(G, cidm, PRIMER_CRITERIO, PRIMER_CRITERIO, PRIMER_CRITERIO);
    imprimir_resultado(cidm);

    return 0;
}

void recibir_parametros(Grafo& G) {
    int n, m;
    cin >> n;
    cin >> m;

    G = Grafo(n, listaAdyacencia());

    int v, w;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        cin >> v;
        cin >> w;
        G[v-1].push_back(w-1);
        G[w-1].push_back(v-1);
    }
}

void imprimir_resultado(vector<int>& cidm) {
    vector<int> solucion;
    solucion.reserve(cidm.size());
    for (int i = 0; i < cidm.size(); i++) {
```

```
        if(cidm[i] == INCLUIDO) {
            solucion.push_back(i+1);
        }
    }

    cout << solucion.size() << "␣";
    for (int i = 0; i < solucion.size(); i++) {
        cout << solucion[i] << "␣";
    }
    cout << endl;
}

void grasp(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool criterio_grasp, bool
criterio_greedy, bool criterio_busqueda) {
    if (criterio_grasp == PRIMER_CRITERIO) {
        grasp_primer_criterio(G, cidm, criterio_greedy,
            criterio_busqueda);
    } else {
        grasp_segundo_criterio(G, cidm, criterio_greedy,
            criterio_busqueda);
    }
}

void grasp_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool
criterio_greedy, bool criterio_busqueda) {
    vector<int> mejor_solucion;
    construir_greedy_random(G, mejor_solucion, criterio_greedy);
    // Criterio de parada 1: hace tantas iteraciones como nodos en el
    grafo.
    for (int i = 0; i < G.size(); i++) {
        // Construir Solucion Greedy Random
        vector<int> nueva_solucion;
        construir_greedy_random(G, nueva_solucion, criterio_greedy);
        // Hacer busqueda local
        busqueda_local(G, nueva_solucion, criterio_busqueda);
        // Actualizar Mejor Solucion
        if (nueva_solucion.size() < mejor_solucion.size()) {
            mejor_solucion = nueva_solucion;
        }
    }
    cidm = mejor_solucion;
}

void grasp_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>& cidm, bool
criterio_greedy, bool criterio_busqueda) {
    vector<int> mejor_solucion;
    construir_greedy_random(G, mejor_solucion, criterio_greedy);
    // Criterio de parada 2: sigue iterando hasta que no mejore la mejor
    solucion durante 'GRASP_MAX_ITER_COUNTER' cantidad de ciclos.
    int counter = GRASP_MAX_ITER_COUNTER;
    while (counter > 0) {
        // Construir Solucion Greedy Random
        vector<int> nueva_solucion;
        construir_greedy_random(G, nueva_solucion, criterio_greedy);
```



```
// Hacer busqueda local
busqueda_local(G, nueva_solucion, criterio_busqueda);
// Actualizar Mejor Solucion
if (nueva_solucion.size() < mejor_solucion.size()) {
    mejor_solucion = nueva_solucion;
    counter = GRASP_MAX_ITER_COUNTER;
} else {
    counter--;
}
}
cidm = mejor_solucion;
}

void construir_greedy_random(Grafo& G, vector<int>& solucion, bool
criterio_greedy) {
    if (criterio_greedy == PRIMER_CRITERIO) {
        construir_greedy_random_primer_criterio(G, solucion);
    } else {
        construir_greedy_random_segundo_criterio(G, solucion);
    }
}

void construir_greedy_random_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>&
solucion) {
    // Criterio de Restricted Candidate List 1: los nodos que cumplan la
    // condicion
    // de que su grado es por lo menos mejor_grado (de todos los nodos)
    * GREEDY_RANDOM_ALPHA.
    int n = G.size();
    Nodos nodos(n, Nodo());

    for(int u = 0; u < n; u++) {
        nodos[u].numero = u;
        nodos[u].grado = G[u].size();
    }

    sort(nodos.begin(), nodos.end(), orden());

    solucion = vector<int>(n, NO_INCLUIDO);

    int nodos_visitados = 0;
    while (nodos_visitados < n) {
        int mejor_grado = nodos[0].grado;
        int window_size = 0; // el maximo indice posible, la RCL va a
        ser nodos[0...window_size]
        for (int i = 0; i < nodos.size(); i++) {
            if (nodos[i].grado >= mejor_grado * GREEDY_RANDOM_ALPHA) {
                window_size = i;
            } else {
                break;
            }
        }
    }
}
```

```
        int indice = random_in_range(0, min(window_size, (int)nodos.size()
            -1));

        int nodo = nodos[indice].numero;
        solucion[nodo] = INCLUIDO;
        nodos_visitados++;
        nodos.erase(nodos.begin()+indice);

        for (list<int>::iterator itAdyU=G[nodo].begin(); itAdyU != G[
            nodo].end(); itAdyU++) {
            int v = *itAdyU;
            int index = get_indice_nodo(nodos, v);
            if (index != -1) {
                // v no esta en el vector de nodos
                nodos.erase(nodos.begin()+index);
                nodos_visitados++;
            }
        }
    }
}

void construir_greedy_random_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucion) {
    // Criterio de Restricted Candidate List 2: los nodos que cumplan la
        condicion
    // de estar entre los 'GREEDY_RANDOM_BETA' (definido antes) mejores
        nodos.
    int n = G.size();
    Nodos nodos(n, Nodo());

    for(int u = 0; u < n; u++) {
        nodos[u].numero = u;
        nodos[u].grado = G[u].size();
    }

    sort(nodos.begin(), nodos.end(), orden());

    solucion = vector<int>(n, NO_INCLUIDO);

    int nodos_visitados = 0;
    while (nodos_visitados < n) {
        int mejor_grado = nodos[0].grado;
        int window_size = GREEDY_RANDOM_BETA; // el maximo indice
            posible, la RCL va a ser nodos[0...window_size]
        int indice = random_in_range(0, min(window_size, (int)nodos.size()
            -1));

        int nodo = nodos[indice].numero;
        solucion[nodo] = INCLUIDO;
        nodos_visitados++;
        nodos.erase(nodos.begin()+indice);

        for (list<int>::iterator itAdyU=G[nodo].begin(); itAdyU != G[
            nodo].end(); itAdyU++) {
```

```
        int v = *itAdyU;
        int index = get_indice_nodo(nodos, v);
        if (index != -1) {
            // v no esta en el vector de nodos
            nodos.erase(nodos.begin()+index);
            nodos_visitados++;
        }
    }
}

void busqueda_local(Grafo& G, vector<int>& solucionInicial, bool
criterio_busqueda) {
    if (criterio_busqueda == PRIMER_CRITERIO) {
        busqueda_local_primer_criterio(G, solucionInicial);
    } else {
        busqueda_local_segundo_criterio(G, solucionInicial);
    }
}

void busqueda_local_primer_criterio(Grafo& G, vector<int>&
solucionInicial) {
    // Criterio de Vecindad 1: Cambiamos k vertices por 1 vertice, donde
    // k > 1
    int n = G.size();
    // Genero soluciones vecinas
    for (int u = 0; u < n; u++) {
        vector<int> solucionAuxiliar = solucionInicial;
        if (solucionInicial[u] == NO_INCLUIDO && G[u].size() > 1) {
            int cantINCLUIDOS = 0;
            solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO;
            // Me fijo si el vectice NO INCLUIDO tiene al menos dos vectores
            // adyacentes INCLUIDOS
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
                ; ++itAdyU) {
                int v = *itAdyU;
                if (solucionInicial[v] == INCLUIDO) {
                    cantINCLUIDOS ++;
                    solucionAuxiliar[v] = NO_INCLUIDO;
                }
            }
            // Necesito al menos 2 INCLUIDOS
            if (cantINCLUIDOS > 1) {
                int cantCambiosPosibles = 0;
                bool esSolucion = solucion_posible(G, solucionAuxiliar,
                    cantCambiosPosibles);
                if (esSolucion) {
                    // Encuentro una solucion Vecina mejor, fin del ciclo
                    busqueda_local_primer_criterio(G, solucionAuxiliar);
                    solucionInicial = solucionAuxiliar;
                    break;
                }
            }
        }
    }
}
```

```
    }
}
}

void busqueda_local_segundo_criterio(Grafo& G, vector<int>&
    solucionInicial) {
    // Criterio de Vecindad 2: Cambiamos k vertices por, a lo sumo, k-1
    // vertices, , donde k > 1
    int n = G.size();
    // Genero soluciones vecinas
    for (int u = 0; u < n; u++) {
        vector<int> solucionAuxiliar = solucionInicial;
        if (solucionInicial[u] == NO_INCLUIDO && G[u].size() > 1) {
            // Para los INCLUIDOS en la solucionInicial me fijo en sus
            // adyacentes para encontrar algun adyacente que tambien esta
            // INCLUIDO
            int cantINCLUIDOS = 0;
            solucionAuxiliar[u] = INCLUIDO;
            for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
                ; itAdyU++) {
                int v = *itAdyU;
                if (solucionInicial[v] == INCLUIDO) {
                    cantINCLUIDOS ++;
                    solucionAuxiliar[v] = NO_INCLUIDO;
                }
            }

            // Necesito al menos 2 INCLUIDOS
            if (cantINCLUIDOS > 1) {
                int cantCambiosPosibles = cantINCLUIDOS - 2;
                bool esSolucion = solucion_posible(G, solucionAuxiliar,
                    cantCambiosPosibles);
                if(esSolucion){
                    // Encuentre una solucion Vecina mejor, fin del ciclo
                    busqueda_local_segundo_criterio(G, solucionAuxiliar);
                    solucionInicial = solucionAuxiliar;
                    break;
                }
            }
        }
    }
}

bool solucion_posible(Grafo& G, vector<int>& solucionCambiar, int
    cantCambios) {
    int n = G.size();
    bool esSolucion = true;
    bool finCiclo = false;
    list<int> verticesCambiados;

    for (int u = 0; u < n && !finCiclo; u++) {
        // Si esta INCLUIDO, sus adyacentes no pueden estar INCLUIDOS
        if (solucionCambiar[u] == INCLUIDO && G[u].size() > 0) {
```

```
    for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
        && !finCiclo; ++itAdyU) {
        int v = *itAdyU;
        if (solucionCambiar[v] == INCLUIDO) {
            esSolucion = false;
            finCiclo = true;
        }
    }
} else if (G[u].size() > 0) {
    // Si esta NO INCLUIDO, al menos uno de sus adyacentes tiene que
    // estar INCLUIDO
    bool adyINCLUIDO = false;
    for (list<int>::iterator itAdyU=G[u].begin(); itAdyU != G[u].end()
        && !finCiclo; ++itAdyU) {
        int v = *itAdyU;
        if (solucionCambiar[v] == INCLUIDO) {
            adyINCLUIDO = true;
        }
    }
    if (!adyINCLUIDO && cantCambios == 0) {
        esSolucion = false;
        finCiclo = true;
    } else if (!adyINCLUIDO) {
        // Salvo la solucion al marcar el vertice
        solucionCambiar[u] = INCLUIDO;
        cantCambios --;
    }
} else {
    // Si es un K1, tiene que estar INCLUIDO
    esSolucion = solucionCambiar[u] == INCLUIDO;
    finCiclo = !(solucionCambiar[u] == INCLUIDO);
}
}

return esSolucion;
}

int get_indice_nodo(Nodos& nodos, int v) {
    int n = nodos.size();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (nodos[i].numero == v) {
            return i;
        }
    }
    return -1;
}

int random_in_range(int min, int max) {
    return min + (rand() % (max - min + 1));
}
```