

# 先进控制

神经网络控制

学习方式

BP神经网络

模型预测控制

变结构控制

模糊控制

鲁棒控制

最优控制

## 神经网络控制

人工网络的特征：自学习、自适应、自组织

人工神经网络的功能：联想记忆、非线性映射、分类与识别、优化计算、知识处理、优化计算

神经网络在控制系统中的作用：

- 1) 在基于模型的各种控制结构中充当对象的模型；
- 2) 用作控制器；
- 3) 在控制系统中起优化计算的作用

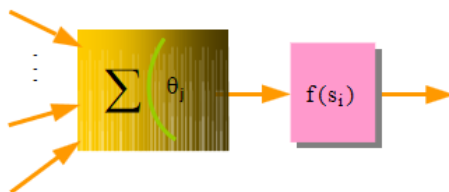
### 人工神经元数学模型

$$o_j = f\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i(t) - \theta_j\right)$$

$\theta_j$  —— 神经元j的阈值；

$w_{ij}$  —— 神经元i到j的突触连接系数或权重值；

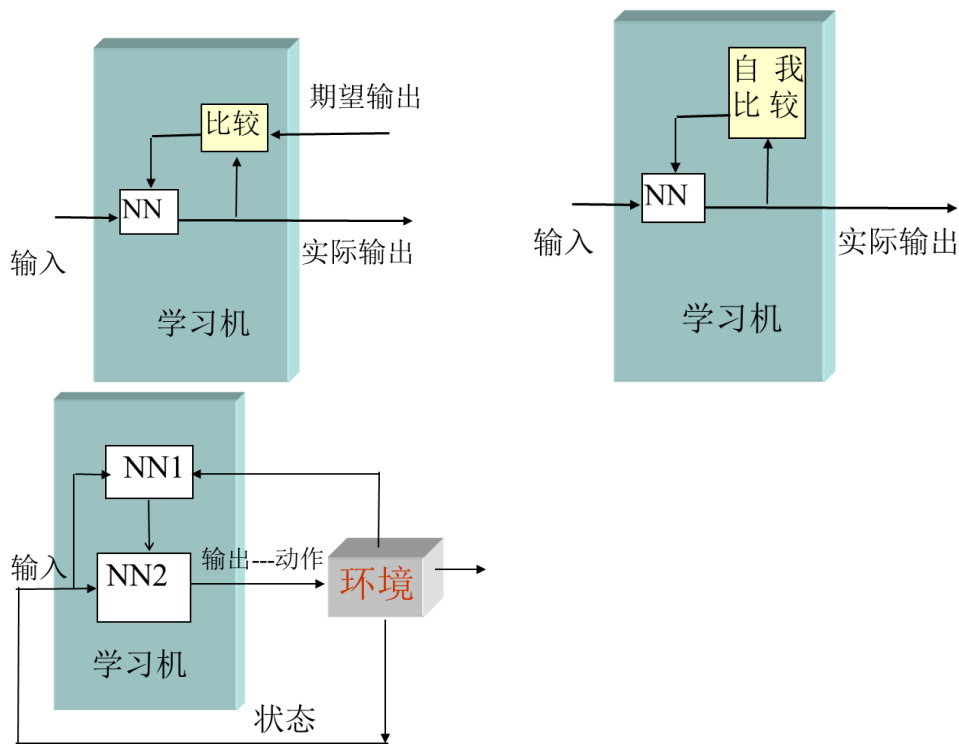
$f(\cdot)$  —— 神经元激活函数（活化函数、转移函数）。





## 学习方式

监督学习：在学习过程中，网络根据实际输出与期望输出的比较，进行联接权系数的调整，将期望输出称导师信号，是评价学习的标准。

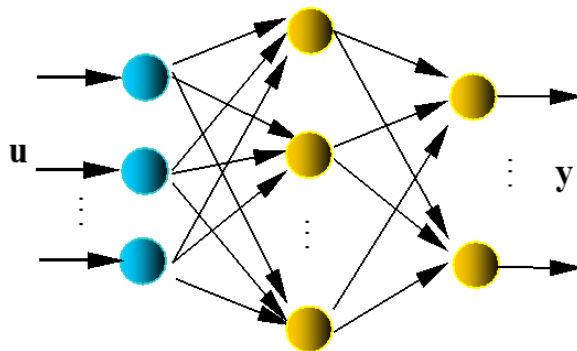


无导师学习（监督学习）：无导师信号提供给网络，网络能根据其特有的机构和学习规则，进行联接权系数的调整，此时，网络的学习评价标准隐含于其内部。

再励学习（强化学习）：把学习看为试探评价过程，学习机选择一动作作用于环境，环境的状态改变，并产生再励信号反馈至学习机，学习机依据再励信号与环境当前的状态，再选择下一动作作用于环境，选择的原理是使受到奖励的可能性增大。

## BP神经网络

$u$ 、 $y$ 是网络的输入、输出向量，神经元用节点表示，网络由输入层、隐含层和输出层节点组成，隐含层可一层，也可多层（图中是单隐含层），前层至后层节点通过权连接。



BP神经网络的特点：

是一种多层网络，包括输入层、隐含层和输出层

层与层之间采用全互连方式，同一层神经元之间不连接；

神经元激活函数经常选用S函数；

层与层的连接是单向的，信息的传播是双向的。

BP网络主要用于：函数逼近、模式识别和分类、数据压缩

BP学习算法由正向传播和反向传播组成：

正向传播是输入信号从输入层经隐含层，传向输出层，若输出层得到了期望的输出，则学习算法结束；否则，转至反向传播。

反向传播是将误差(样本输出与网络输出之差)按原连接通路反向计算，由梯度下降法调整各层节点的权值和阈值，使误差减小。

算法步骤：

(1)设置初始权系  $W(0)$  为较小的随机非零值。

(2)给定输入/输出样本对,计算网络的输出：

设第  $p$  组样本输入、输出分别为

$$\begin{aligned}u_p &= (u_{1p}, u_{2p}, \dots, u_{np}) \\d_p &= (d_{1p}, d_{2p}, \dots, d_{kp}), p = 1, 2, \dots, L\end{aligned}$$

节点  $i$  在第  $p$  组样本输入时,输出为：

$$y_{ip}(t) = f[x_{ip}(t)] = f[\sum_j w_{ij}(t) I_{jp}]$$

式中,  $I_{jp}$ —— 在第  $p$  组样本输入时,节点  $i$  的第  $j$  个输入。

$f(\cdot)$  取可微分的 S 型作用函数式

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

可由输入层经隐层至输出层,求得网络输出层节点的输出。

(3) 计算网络的目标函数  $J$ ：

设  $E_p$  为在第  $p$  组样本输入时网络的目标函数,取  $L_2$  范数,则

$$E_p(t) = \frac{1}{2} \|d_p - y_p(t)\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_i [d_{kp} - y_{kp}(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_i e_{kp}^2(t)$$

式中,  $y_{kp}(t)$ —— 在第  $p$  组样本输入时,经  $t$  次权值调整,

网络的输出,  $k$  是输出层第  $k$  个节点。

网络的总目标函数为

$$J(t) = \sum_p E_p(t)$$

作为对网络学习状况的评价。

(4)判别：

若  $J(t) \leq \epsilon$  则算法结束;否则,至步骤(5)。

式中,  $\epsilon$ —— 预先确定的,  $\epsilon > 0$ 。

(5)反向传播计算：

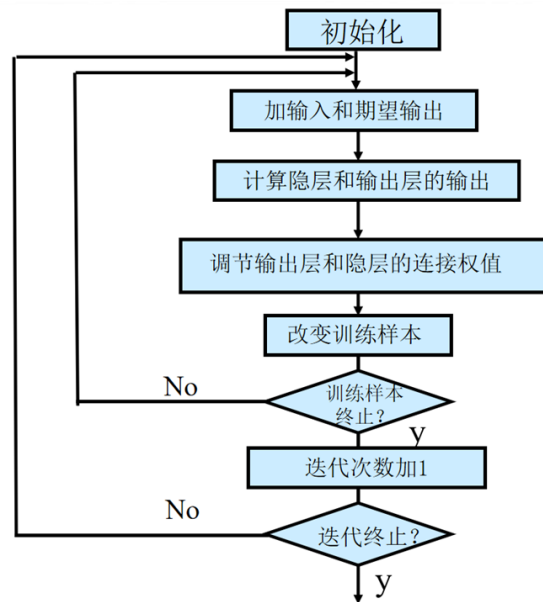
由输出层,依据  $J$ ,按“梯度下降法”反向计算,逐层调整权值。

取步长为常值,可得到神经元  $j$  到神经元  $i$  的联接权  $t+1$  次调整算式：

$$\begin{aligned}w_{ij}(t+1) &= w_{ij}(t) - \eta \frac{\partial J(t)}{\partial w_{ij}(t)} = w_{ij}(t) - \eta \sum_p \frac{\partial E_p(t)}{\partial w_{ij}(t)} = \\&w_{ij}(t) + \Delta w_{ij}(t)\end{aligned}$$

式中,  $\eta$ —— 步长,在此称学习率或学习算子。

算法流程：



BP网络的能力：非线性映射能力、泛化能力、容错能力

BP算法的局限性：

(1)存在平坦区域-----误差下降缓慢，影响收敛速度

(2)存在多个极小点-----训练经常陷入某个局部极小点而不能自拔，从而使训练无法收敛于给定误差。

BP算法的内在缺陷：

易形成局部极小而得不到全局最优；

训练次数多使得学习效率低，收敛速度慢；

隐含层节点的选取缺乏理论指导；

训练时学习新样本有遗忘旧样本的趋势。

BP算法的改进：增加动量项、自适应调节学习率、引入陡度因子

神经网络控制的研究领域：

1.基于神经网络的系统辨识

1) 将神经网络作为被辨识的模型，可在已知常规模型结构的情况下，估计模型的参数；

2) 利用神经网络的线性、非线性特性，可建立线性、非线性系统的静态、动态、逆动态及预测模型，实现非线性系统的建模和辨识。

2.神经网络控制器

神经网络作为实时控制系统的控制器，对不确定、不确知系统及扰动进行有效的控制，使控制系统达到所要求的动态、静态特性。

### 3.神经网络与其他算法相结合

将神经网络与专家系统、模糊逻辑、遗传算法等相结合，可设计新型智能控制系统。

神经网络控制的研究重点：

- 1) 神经网络的稳定性与收敛性问题；
- 2) 神经网络控制系统的稳定性与收敛性问题；
- 3) 神经网络学习算法的实时性；
- 4) 神经网络控制器和辨识度的模型和结构。

几种神经网络控制系统：

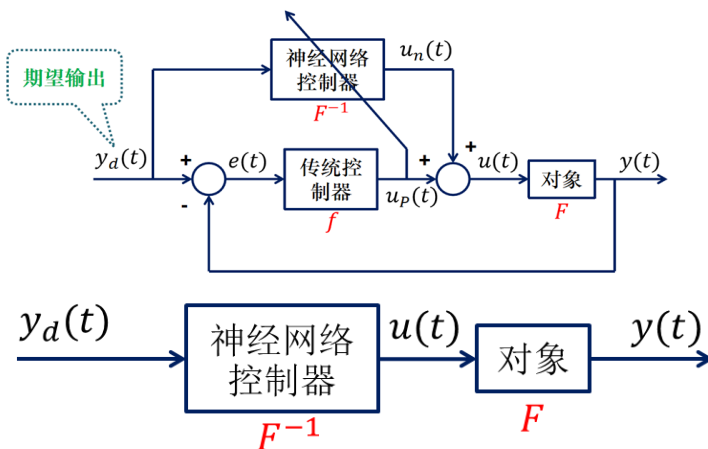
#### (1) 神经网络监督控制

ü神经网络控制器是前馈控制器，建立被控对象的逆模型；

ü神经网络控制器基于传统控制器的输出，在线学习调整网络的权值，使反馈控制输入趋近于零，从而使神经网络控制器逐渐在控制作用中占据主导地位，最终取消反馈控制器的作用；

ü一旦系统出现干扰，反馈控制器重新起作用。

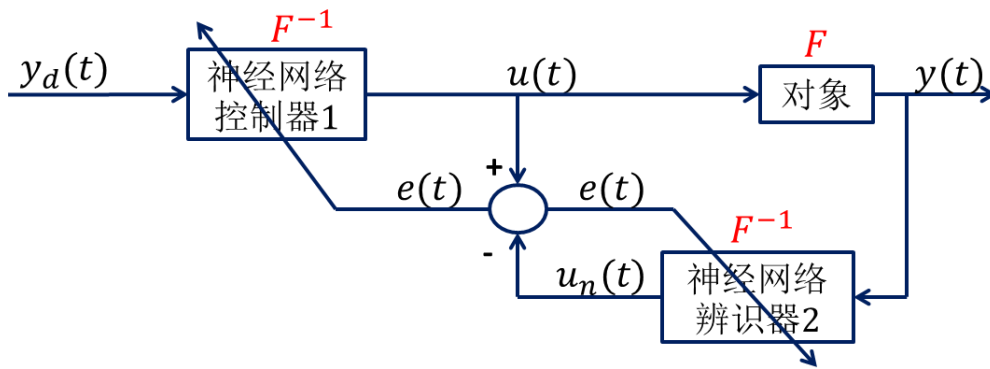
ü可确保控制系统的稳定性和鲁棒性，有效提高系统的精度和自适应能力。



当 $u_p=0$ 时，从前馈通路看，有： $y=F(u)=F(u_n)=F(F^{-1}(y_d))=y_d$ ，此时再从反馈回路看，有： $e=y_d-y=0$ 。

#### (2) 神经网络直接逆控制

将对象的神经网络逆模型直接与被控对象串联起来，使期望输出与对象实际输出之间的传递函数为1。



系统通过偏差 $e$ 调整两个网络的权值。当 $e=0$ 时，网络具有对象的逆特性，因为此时意味着 $u=u_n$ ，故

对网络2:  $u_n = F^{-1}(y)$ ;

对网络1:  $u = F^{-1}(y_d)$ ;

显然,  $F^{-1}(y) = F^{-1}(y_d) \Rightarrow y = [F(F)^{-1}(y_d)] = y_d$ 。

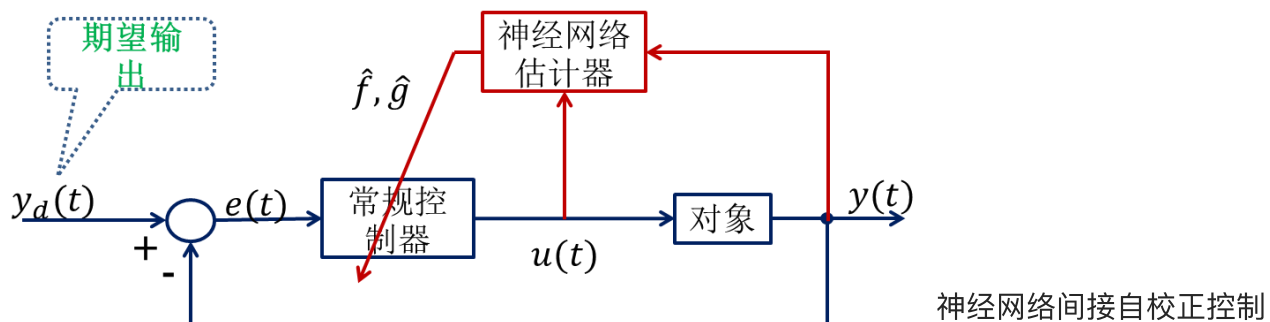
### (3) 神经网络自适应控制

**神经网络自校正控制:** 根据系统正向或逆模型的输出结果调节神经或传统控制器的内部参数, 使系统满足给定的指标。

**神经网络模型参考自适应控制:** 闭环控制系统的期望性能用一个稳定的参考模型来描述。

**直接自校正:** 调整的是神经网络控制器本身的参数, 本质等同于神经网络直接逆控制。

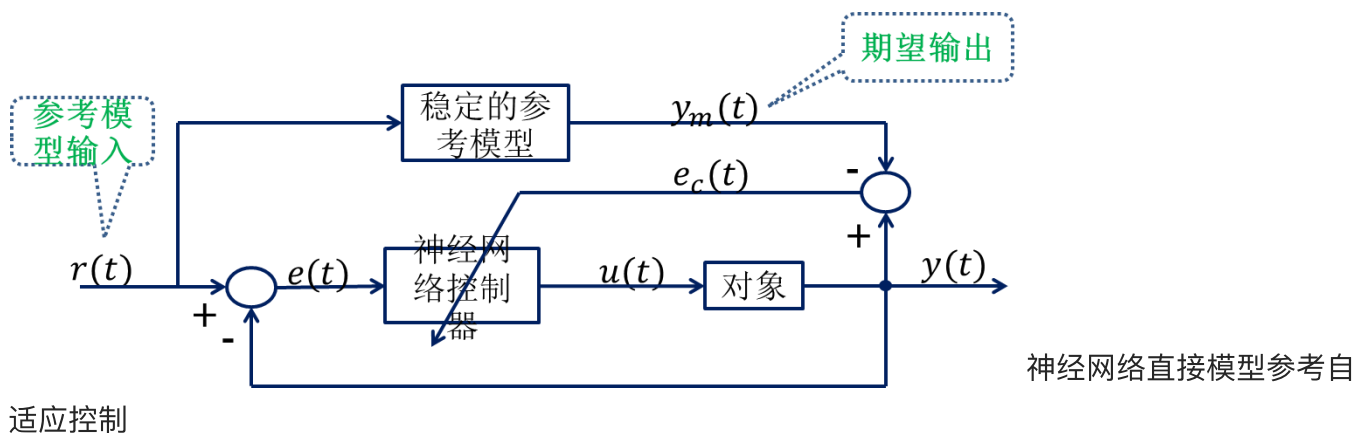
**间接自校正:** 同时使用常规控制器和神经网络估计器, 神经网络估计器主要用来调整常规控制器的参数。



假定被控对象为仿射非线性系统:  $y = f + gu$

常规控制器的映射关系通常含有非线性映射关系 $f, g$

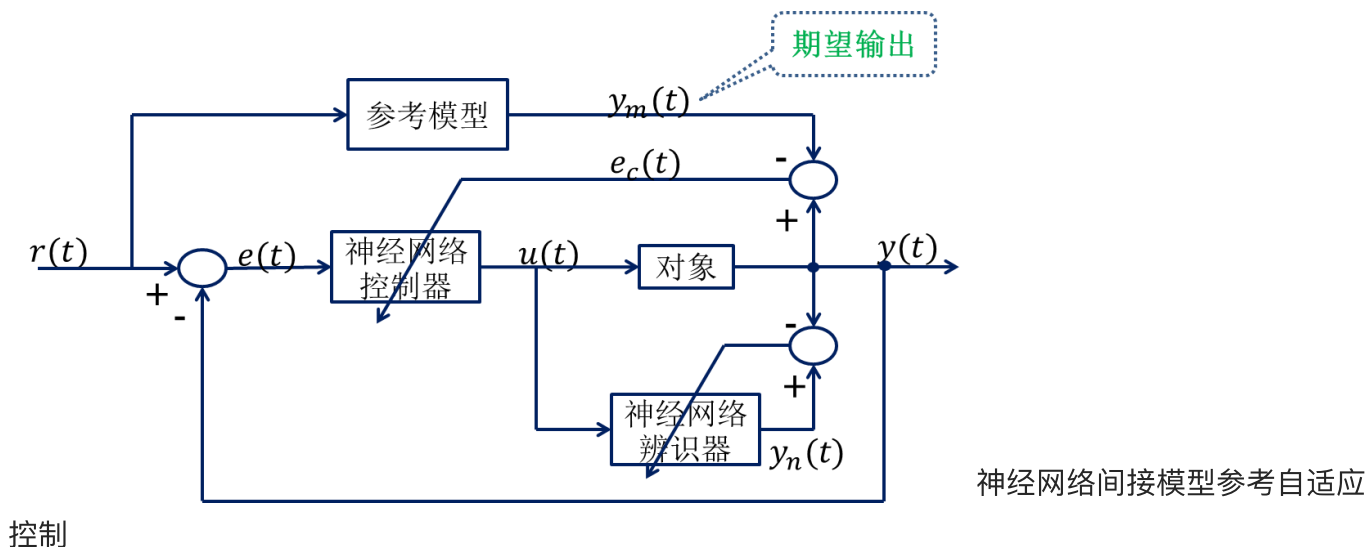
神经网络估计器主要用来逼近非线性函数 $f$ 和 $g$ , 得到 $\hat{f}$ 和 $\hat{g}$ , 此时常规控制器的输出为:  $u = (y_d - \hat{f}) / \hat{g}$



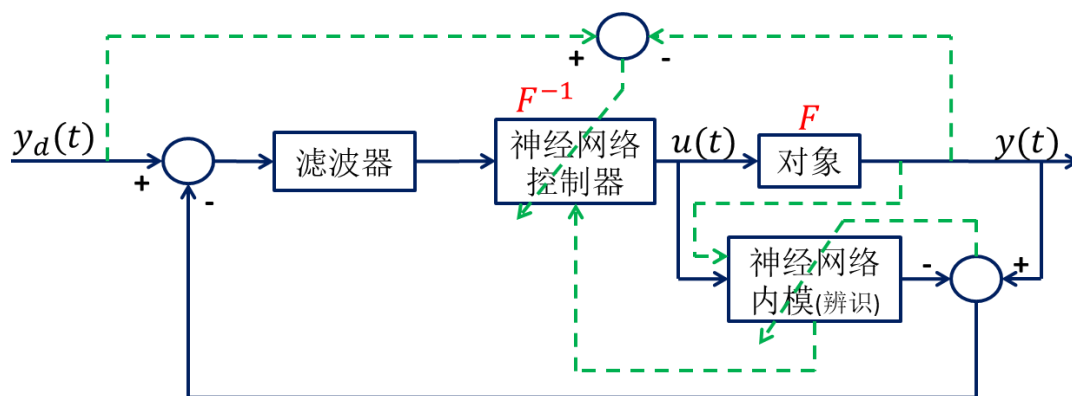
控制目的：使实际输出 $y$ 跟踪期望输出 $y_m$ 。

通过使 $e_c$ 最小，调整神经网络的权值。

若 $e_c=0$ ，则 $y=y_m$ ，进而有 $e=r-y_m$ ，该量作为神经网络控制器的输入、并产生控制作用。



#### (4) 神经网络内模控制



正向模型作为被控对象的近似模型，与实际对象并联；

控制器与对象的逆有关，可以是对象的逆；

滤波器通常为线性的，可提高系统的鲁棒性。



## 非线性系统的神经网络辨识

辨识：是在输入和输出数据的基础上，从一组给定的模型中，确定一个与所测系统等价的模型。

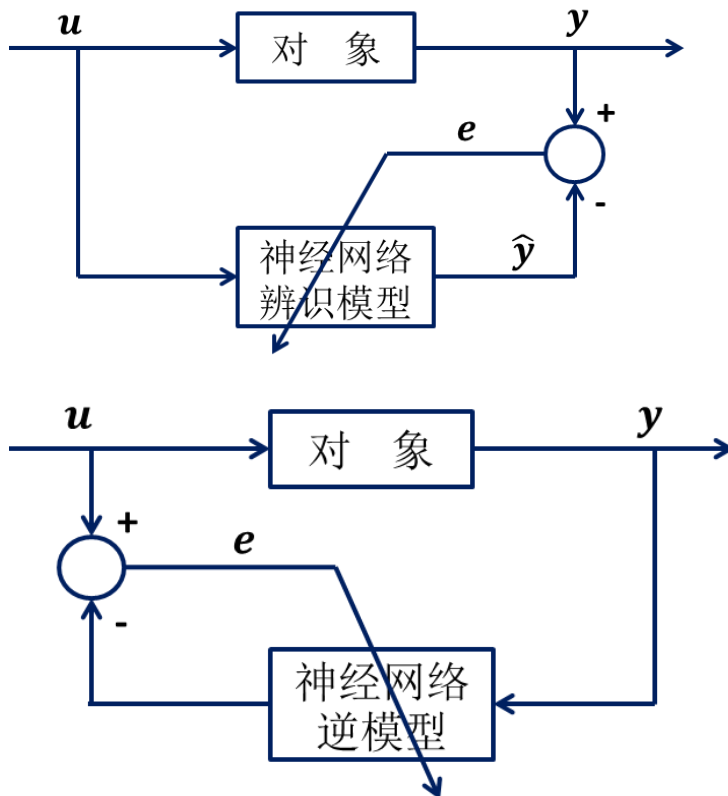
辨识三要素：数据、模型类、等价准则

神经网络辨识：用神经网络作为被辨识对象的正模型、逆模型、预测模型等，也成为神经网络建模。

①本质上，神经网络辨识的目的是建立所考查对象的模型，因此最简单的情况下，辨识只需利用对象本身的输入输出数据即可。

②神经网络建模本身不涉及诸如某一具体控制任务之类的其它目的，因此与作为神经网络控制系统的结构框图相比，辨识的原理结构图要简单得多，只要能完成建模的任务即可；一般地，辨识结构图只涉及对象系统本身和所用的神经网络两大主体。

建模的两种基本情况：前向建模（有导师学习）、逆向建模



## n 离线辨识与在线辨识

①在线辨识是在对象系统实际运行的过程中进行的，辨识过程要求实时性，即必须在一个采样周期的时间间隔内至少进行一次网络权值的调整；离线辨识则是在取得对象系统的一批输入输出数据后再进行辨识，故辨识过程与实际系统是分离的，无实时性要求。

②离线辨识在系统工作前预先完成网络的学习或训练，但输入输出训练集很难覆盖对象所有可能的工作范围、且难以适应系统在工作过程中的参数变化，故最好的辨识方式是：先进行离线训练、再进行在线学习，将离线训练得到的权值作为在线学习的初始权，以加快在线学习的速度。（由于网络具有学习能

力，故当被辨识对象的特性变化时，神经网络也能通过不断地调整权值和阈值自适应地跟踪对象系统的变化。)

③对于神经网络控制系统，其中的辨识是以系统在闭环控制下所得到的观测数据进行的，因此一般属在线辨识。对于时变系统，则只能使用在线辨识。

**n神经网络建模的考虑因素：模型的选择、输入信号的选择、等价准则的选择**

**n用什么类型的神经网络建模？**

对于静态系统，其输入输出间只是某种非线性映射关系，因此可以直接利用前向神经网络进行建模。

对于动态系统，可利用动态神经网络建模，也可利用静态前向神经网络进行建模。一般而言，后者更便于分析，但需要将动态系统的神经网络建模转化为静态系统的神经网络的建模。

**n神经网络辨识的特点(与传统辨识方法相比)**

ü神经网络本身作为一种辨识模型，其可调参数反映在网络内部的极值上，无需建立实际系统的辨识格式。

ü借助网络外部的输入/输出数据拟合系统的输入/输出关系，可对本质非线性系统进行辨识。(网络内部隐含着系统的特性)

ü辨识的收敛速度不依赖于被辨识系统的维数，只与神经网络本身所采用的学习算法有关。

ü神经网络具有大量的连接，连接权值构成神经网络模型的参数，通过调节这些权值使网络输出逼近系统输出。

ü神经网络作为实际系统的辨识模型，构成系统的一个物理实现，可用于在线控制。

**n神经网络控制器的学习类别**

(1) 监督式学习(有导师指导下的控制网络学习)：外界提供适当形式的导师信号，学习系统根据导师信号与相对应的实际输出量之差调节网络参数。

(2) 增强式学习(通过某一评价函数指定下的学习)：无导师信号，按照环境所提供数据的某些规则或适当的评价函数调节网络参数。

(2) 再励学习(强化学习)：介于上述两种情况之间，外部环境只对输出结果给出评价，而不给出具体答案，学习系统通过强化那些受奖励的动作来改善自身的性能。

**多神经网络自学习控制特点概括：**

①边控制边辨识。利用实际系统的输入输出信息更新网络辨识器的权系数，不断提高对被控对象的准确识别；利用期望输出 $y_d$ 、经神经网络逆模型得到期望的控制量，使得基于广义Delta学习规则的神经网络控制器的权系数调节得以实现。

②整个系统具有在线辨识、实时控制的能力，能满足环境或系统参数变化情况下的控制性能，具备良好的自适应、自学习能力。

③缺点是要求被控对象的动力学特性是可逆的。

## 模型预测控制

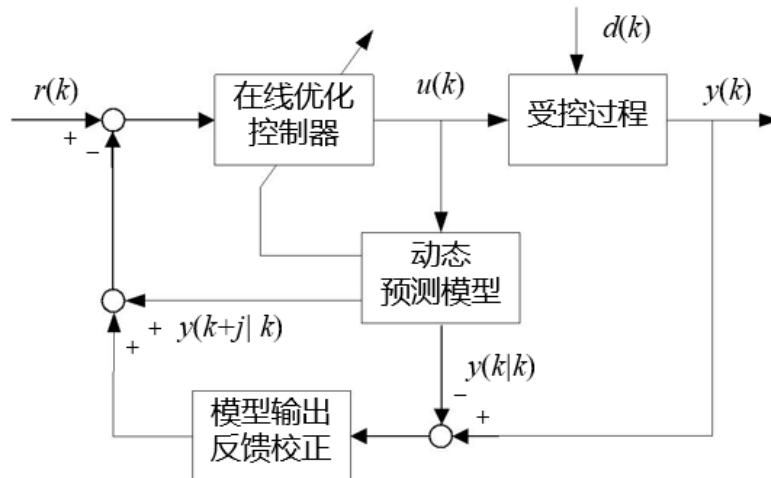
预测控制的特点：

- 1) 建模方便，对模型要求不高；
- 2) 滚动的优化策略，具有较好的动态控制效果；
- 3) 简单实用的反馈校正，有利于提高控制系统的鲁棒性；
- 4) 不增加理论困难，可推广到有约束条件、大纯滞后、非最小相位及非线性等过程；
- 5) 是一种[计算机优化控制算法](#)

**PID控制：**根据过程当前的和过去的输出测量值和给定值的偏差来确定当前的控制输入。

**预测控制：**不仅利用当前的和过去的偏差值，而且还利用预测模型来预测过程[未来的偏差值](#)。以滚动优化确定当前的最优控制策略，使未来一段时间内被控变量与期望值偏差最小。

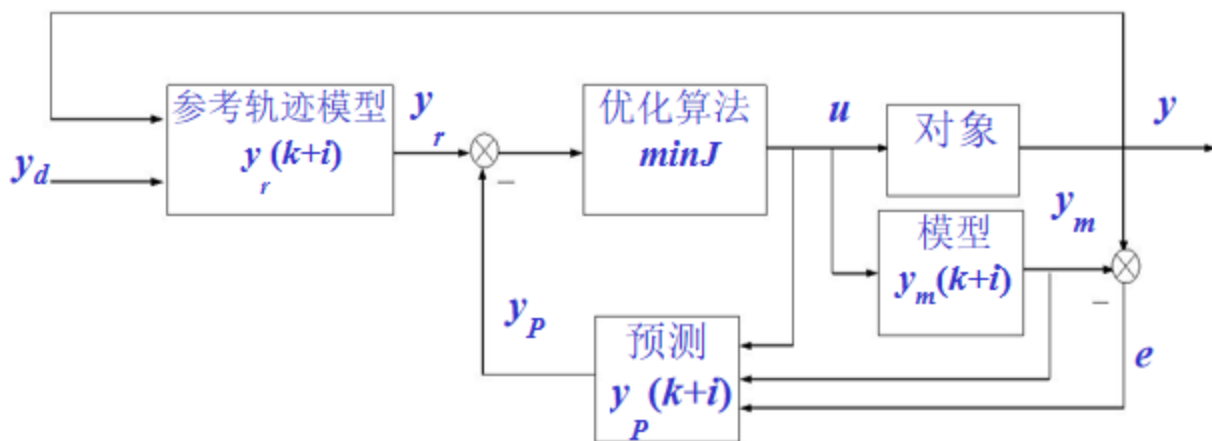
基本原理



三要素：预测模型 滚动优化 反馈校正

**预测模型：**根据被控对象的历史信息 $\{u(k-j), y(k-j) | j \geq 1\}$ 和未来输入 $\{u(k+j-1) | j=1, \dots, m\}$ ，预测系统未来响应 $\{y(k+j) | j=1, \dots, p\}$ 。

**预测模型形式：**参数模型和非参数模型



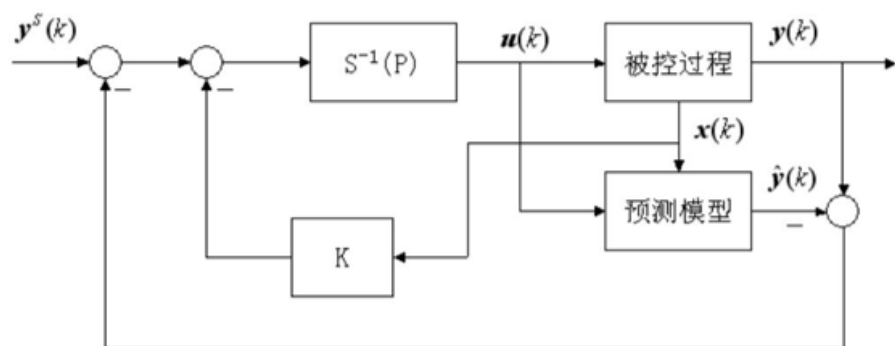
模型算法控制原理示意图

动态矩阵控制（DMC）

状态反馈预测控制

算法特点：稳定性、未知干扰的抑制、稳态无差、算法的复杂性

状态反馈预测控制



假设多变量预测控制系统的预测模型准确，即  $y(k) = \hat{y}(k)$

$$u(k) = S^{-1}(P)[y^s(k) - Kx(k)]$$

闭环预测控制系统的状态空间描述

$$x(k+1) = A_c x(k) + B_c y^s(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

$$A_c = A - BS^{-1}(P)K, \quad B_c = BS^{-1}(P)$$

闭环预测控制系统对给定值的传递函数

$$G_c(z) = C(zI - A_c)^{-1} B_c$$

# 变结构控制

本质上是一类特殊的非线性控制，其非线性表现为控制作用的不连续性。与其他控制策略的不同之处：系统的“**结构**”并不固定，而是在动态过程中，根据系统当前的状态有目的地不断变化。

广义地说，在控制过程（瞬态过程）中，系统结构（模型）可发生变化的系统，叫变结构系统。

结构的变化若能启动“**滑动模态**”运动，称这样的控制为**滑模控制**。

**滑动模态**：人为设定一经过平衡点的相轨迹，通过适当设计，系统状态点沿着此相轨迹渐近稳定到平衡点，或形象地称为滑向平衡点的一种运动。

**系统结构**：系统的一种模型，即由某一组数学方程描述的模型，称为系统的一种结构。

**滑模控制优点**：滑动模态可以设计且与对象参数和扰动无关，具有快速响应、对参数变化和扰动不灵敏（鲁棒性）、无须系统在线辨识、物理实现简单。

**滑模控制缺点**：当状态轨迹到达滑动模态面后，难以严格沿着滑动模态面向平衡点滑动，而是在其两侧来回穿越地趋近平衡点，从而产生抖振——滑模控制实际应用中的主要障碍。

**结构的定义**：它不指控制系统的物理结构，也不指系统框图形式的结构。“结构”是一种定性的概念，它能定性地反映控制系统的内在性质。

**滑模变结构控制三要素**：

- (1) 满足可达性条件，即在切换面以外的运动点都将在有限时间内到达切换面；
- (2) 滑动模态存在性；
- (3) 保证滑动模态运动的渐近稳定性并具有良好的动态品质。

**变结构控制系统设计的目标**：

- A. 所有轨迹于有限的时间内达到切换面；
- B. 切换面存在滑动模态区；
- C. 滑动运动是渐近稳定的，并具有良好的动态品质。

**变结构控制系统设计的两个问题**？

- A. 选择切换函数，或者说确定切换面  $s=0$ ；
- B. 求取控制  $u(x)$

非线性控制系统分析—相平面法

通过图解法将一和二阶系统的运动过程转化为位置和速度平面上的相轨迹，比较直观、准确地反映系统的稳定性、平衡状态和稳态精度以及初始条件及参数对系统运动的影响。

# 模糊控制

模糊控制(Fuzzy control)是指模糊理论在控制技术上的应用。

p用语言变量代替数学变量或两者结合应用;

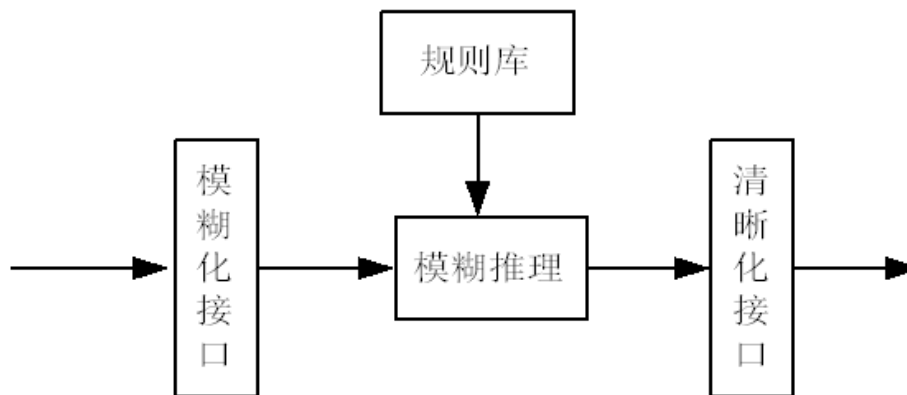
p用模糊条件语句来刻画变量间的函数关系;

p用模糊算法来刻画复杂关系, 模拟人类学习和自适应能力。

## 模糊控制器的基本工作原理

将测量得到的被控对象的状态经过模糊化接口转换为用人类自然语言描述的**模糊量**, 而后根据人类的**语言控制规则**, 经过**模糊推理**得到输出控制量的模糊取值, 控制量的模糊取值再经过**清晰化**接口转换为执行机构能够接收的精确量。

模糊控制器的基本结构通常由四个部分组成: 模糊化接口、规则库、模糊推理、清晰化接口



### 1.模糊化接口

- 1) 语言变量的确定 (e, ec) ;
- 2) 语言变量论域的设计;
- 3) 定义各语言变量的语言值 (PB, PM...);
- 4) 定于各语言值的隶属度函数;

规则库: IF AND

**模糊推理:**根据模糊输入和规则库中蕴涵的输入输出关系, 通过描述的模糊推理方法得到模糊控制器的输出模糊值.

**清晰化接口:**由模糊推理得到的模糊输出值 $C^*$ 是输出论域上的模糊子集, 只有其转化为精确控制量 $u$ , 才能施加于对象。

### 模糊控制器的工作过程:

- ①模糊控制器实时检测系统的误差和误差变化率 $e^*$ 和 $ec^*$ ;
- ②通过量化因子 $ke$ 和 $k_{ec}$ 将 $e^*$ 和 $ec^*$ 量化为控制器的精确输入 $E^*$ 和 $EC^*$ ;
- ③ $E^*$ 和 $EC^*$ 通过模糊化接口转化为模糊输入 $A^*$ 和 $B^*$ ;
- ④将 $A^*$ 和 $B^*$ 根据规则库蕴涵的模糊关系进行模糊推理, 得到模糊控制输出量 $C^*$ ;
- ⑤对 $C^*$ 进行清晰化处理, 得到控制器的精确输出量 $U^*$ ;
- ⑥通过比例因子 $ku$ 将 $U^*$ 转化为实际作用于控制对象的控制量 $u^*$ 。

### 模糊控制器的设计内容

- (1) 确定模糊控制器的输入变量和输出变量;
- (2) 确定输入, 输出的论域和 $Ke$ 、 $K_{ec}$ 、 $Ku$ 的值;
- (3) 确定各变量的语言取值及其隶属函数;
- (4) 总结专家控制规则及其蕴涵的模糊关系;
- (5) 选择推理算法;
- (6) 确定清晰化的方法;
- (7) 总结模糊查询表。

### 模糊控制的优点:

- ①设计时不需要建立被控制对象的数学模型, 只要求掌握人类的控制经验。
- ②系统的鲁棒性强, 尤其适用于非线性时变、滞后系统的控制

### 模糊控制的缺点:

- ①确立模糊化和逆模糊化的方法时, 缺乏系统的方法, 主要靠经验和试凑。
- ②总结模糊控制规则有时比较困难。
- ③控制规则一旦确定, 不能在线调整, 不能很好地适应情况的变化。
- ④模糊控制器由于不具有积分环节, 因而稳态精度不高。

### 1) 为什么进行规则的校正?

模糊控制要有更好的效果, 其前提必须具有较完善与合理的控制规则, 但控制规则和查询表都是在人工经验的基础上设计出来的, 因而难免带有主观因素, 使控制规则往往在某种程度上显得精度不高或不完善, 并且当对象的动态特性发生变化, 或受到随机干扰的影响时, 都会影响到模糊控制的效果。因此需要对控制规则和查询表不断及时地进行修正。

### 2) 如何进行规则的校正?

对于一个二维模糊控制器，当输入变量偏差E、偏差变化EC和输出控制量U的论域等级划分相同时，则其控制查询表可以近似归纳为：

$$\begin{cases} U = (E + EC)/2, E \text{ 和 } U \text{ 的极性相同时} \\ U = -(E + EC)/2, E \text{ 和 } U \text{ 的极性相反时} \end{cases}$$

在上式的基础上引入一个调整因子，则可得到一种带有调整因子的控制规则：

$$\begin{cases} U = \langle \alpha E + (1 - \alpha) EC \rangle, E \text{ 和 } U \text{ 的极性相同时} \\ U = \langle -[\alpha E + (1 - \alpha) EC] \rangle, E \text{ 和 } U \text{ 的极性相反时} \end{cases}$$

$\alpha$ 为调整因子或加权因子，它反映了误差E和误差变化EC对控制输出量U的加权程度，通过调整 $\alpha$ 值，可以达到改变控制规则的目的。

## 鲁棒控制

从某种抽象的意义上谈鲁棒性本身，而不局限于控制系统的鲁棒性。

- 首先，鲁棒性是一种性质，它应该与某种事物相关联。如控制系统、矩阵等。因而我们通常所说的控制系统的鲁棒性即是与控制系统相关的某种意义下的抗扰能力。
- 其次，鲁棒性所言及的对象并不是事物本身，而是事物的某种性质，如控制系统的稳定性、矩阵的可逆性或正定性等等。

因而通常的“控制系统的鲁棒性”这种说法并不确切。是一种很笼统的说法。如若确切地表述，则需指明“某事物的某种性质”的鲁棒性，如控制系统的稳定性的鲁棒性，简称控制系统的稳定鲁棒性；控制系统的某种性能的鲁棒性，简称控制系统的性能鲁棒性。



- 给定某种事物  $W$  及其所受的某种形式的扰动  $D$ ，如果事物  $W$  的某种性质  $P$  在事物  $W$  受到扰动  $D$  后仍然完全保持或在一定程度或范围内继续保持的话，则称事物  $W$  的性质  $P$  对于扰动  $D$  具鲁棒性。
- 根据上述定义，我们于数值分析中接触过的许多问题，如各种算法的数值稳定性分析问题、矩阵的各类扰动分析问题，都可归结为某种意义下的鲁棒性问题。
- 从总体上说，鲁棒控制包含两大部分内容：控制系统的鲁棒性分析和鲁棒控制系统设计。

第一类鲁棒性分析问题：允许的最大扰动范围

第一类鲁棒性分析问题：受扰动后是否还具有性质  $p$

- 根据用于反馈的信号是采用系统状态还是系统输出，可将反馈控制分为：状态反馈控制和输出反馈控制
  - 状态反馈控制
    - 显然状态反馈控制实现起来比较容易
    - 但在实际工程应用中，大多数系统的状态很难直接测量得到以实现反馈控制
    - 尽管可以采用状态观测器等技术来达到系统状态重构的目的，但是总非尽如人意。
  - 输出反馈控制
    - 输出反馈控制虽然实现起来相对困难一些
    - 但是大多数系统的输出可以直接测量得到，从而可以方便地构成反馈控制系统。

内稳定：

- 仅仅看输入-输出传递函数，如从  $r$  到  $y$ ，是不够的，这个传递函数可能是稳定的，因而当  $r$  有界时  $y$  也有界，但可能有内部信号是无界的，这种情况可能会引起物理系统内部结构的毁坏。
- 定义：对于基本反馈回路，当  $r, d, n$  到  $x_1, x_2, x_3$  的所有传递函数均稳定时，称系统是内稳定的。
- 内稳定的一个结果是：如果外部输入的幅值有界，那么  $x_1, x_2$  和  $x_3$  以及  $u, y$  和  $v$  都是有界的。因此，对所有有界的外部信号，内稳定确保内部信号是有界的（保证系统的安全性）。

# 内稳定性检验方法

将 $P, C, F$ 写成互质多项式的比:

$$P = \frac{N_P}{D_P}, C = \frac{N_C}{D_C}, F = \frac{N_F}{D_F}$$

反馈系统的特征多项式就是

$$D_P D_C D_F + N_P N_C N_F$$

闭环极点就是特征多项式的零点

## □ 定理1:

反馈系统是内稳定的, 当且仅当没有闭环极点在  $\text{Re } s \geq 0$

## □ 定理2:

反馈系统是内稳定的, 当且仅当下面两个条件成立:

- (1) 传递函数  $1+PCF$  没有零点在  $\text{Re } s \geq 0$
- (2) 乘积  $PCF$  在  $\text{Re } s \geq 0$  没有零极相消

## □ 定义: 鲁棒性

- 给定不确定性系统的模型 (模型族)  $\tilde{P}$
- 给定控制器  $C$
- 给定系统的性能指标  $J$
- 若  $\forall P \in \tilde{P}$ , 闭环系统性能满足  $J$ , 则称  $C$  对于  $P$  在  $J$  的意义下是鲁棒控制器, 或闭环系统在  $J$  的意义下具有鲁棒性

三大要素

## □ 定义: 鲁棒稳定性 (乘积摄动)

- 设  $\mathcal{P} = \left\{ \tilde{P} = (1 + \Delta \hat{W}_2) \hat{P} \mid \|\Delta\|_\infty \leq 1 \right\}$  为系统的不确定性模型, 则当控制器  $C$  对于  $\mathcal{P}$  中的每一个对象  $\tilde{P}$  保持闭环系统内稳定时, 则称系统是鲁棒稳定的。

# 最优控制

最优控制是系统设计的一种方法。它所研究的中心问题是如何选择控制信号才能保证控制系统的性能在某种意义下最优。

最优控制理论所要解决的问题是：按照控制对象的动态特性，选择一个容许控制，使得被控对象按照技术要求运转，同时使性能指标达到最优值。

### 最优性原理

一个多级决策过程的最优策略具有这样的性质：不管其初始状态和初始决策如何，其余的决策必须根据第一个决策所形成的状态组成一个最优策略。

## 用变分法求解最优解的必要条件：

$$\text{性能指标} \quad J = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F(x, u, t) dt$$

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$$

$$\text{系统方程} \quad \dot{x} = f(x, u, t)$$

$$\text{约束条件} \quad x(t_0) = x_0, \quad M[x(t_f), t_f] = 0$$

$$\text{正则方程} \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \quad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\text{控制方程} \quad \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

## 定理:(极小值原理)

设系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), t]$$

控制 $u(t)$ 是有第一类间断点的分段连续函数,属于 $p$ 维空间中的有界闭集 $\Omega$ ,满足不等式约束:

$$G[x(t), u(t), t] \geq 0$$

在终端时刻 $t_f$ 未知的情况下,为使状态自初态  $x(t_0) = x_0$  转移到满足边界条件  $M[x(t_f), t_f] = 0$  的终态,并使性能指标

$$J = \theta[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[x(t), u(t), t] dt$$

达极小值.设哈密而顿函数为  $H = F(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$

则最优控制 $u^*(t)$ ,最优轨线 $x^*(t)$ 和最优伴随向量 $\lambda^*(t)$ 必须满足下列条件:

(1).沿最优轨线满足正则方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ \dot{\lambda} &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^T \Gamma\end{aligned}$$

式中 $\Gamma$ 是与时间 $t$ 无关的拉格朗日乘子向量,其维数与 $G$ 相同,若 $G$ 中不包含 $x$ ,则:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

(2)横截条件及边界条件:  $\lambda(t_f) = \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)^T v\right]_{t=t_f}$

$$\left[H(x, u, \lambda, t) + \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)^T v\right]_{t=t_f} = 0$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$M[x(t_f), t_f] = 0$$

(3)在最优轨线 $x^*(t)$ 上与最优控制 $u^*(t)$ 相对应的 $H$ 函数取绝对极小值,即

$$H(x^*, \lambda^*, u^*, t) \leq H(x^*, \lambda^*, u, t)$$

并且沿最优轨线,下式成立

$$\frac{\partial H}{\partial u} = -\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^T \Gamma$$

上述条件与不等式约束下的最优控制的必要条件相比较,横截条件及端点边界条件没有改变,仅

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

这一条件不成立,而代之以与最优控制相对应的函数为绝对极小,其次是正则方程略有改变,仅当 $G$ 中不包含 $x$ 时,方程才不改变.