

《数值分析》复习题

Ex1. 证明方程 $1 - x - \sin x = 0$ 在区间 $[0, 1]$ 上有一根。使用二分法求误差不大于 0.5×10^{-4} 的根需二分多少次？

Ex2. 牛顿迭代格式有何特点？如何计算？对于非线性方程组 $F(x)=0$ ，试构造针对该方程组的牛顿迭代格式。

Ex3. 如何判定求解非线性方程迭代法的收敛性？各主要迭代法的收敛性如何？极小化方法的等价性是怎么回事？证明的主要思想是什么？

Ex5.若方程 $f(x) = 0$ 有 m 重根 $a(m \in \mathbb{Z})$,证明牛顿迭代法是线性收敛的,而改用修改的格式

$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} (k \geq 0)$ 是局部平方收敛的.

Ex6.证明矩阵 A 的谱半径与 A 的范数有如下关系

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

其中, $\|A\|$ 为 A 的任何一种算子范数。

Ex 7.

1. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, 试计算

(1) A 的 1, 2, 无穷范数;

(2) A 的谱半径 $\rho(A)$,

(3) A 的谱条件数 $\text{cond}(A)_2$,

2. 已知向量 $x = (1, 4, -3, 0)^T$, $y = (3, 6, 1, 2)^T$,
求 x, y 之间的距离 $\rho(x, y)$.

Ex 8. 用高斯消元法对下列矩阵做LU分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Ex 9. 求上三角(下三角)矩阵的条件数

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ & 1 & 1 & 2 \\ & & 3 & -3 \\ & & & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ -2 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex10. 对任意 $x, y \in R^n$, 利用向量范数的三角形不等式证明:

$$||x|| - ||y|| \leq ||x - y||$$

Ex11. 什么是向量的范数等价? 一般如何证明?

Ex12. 常用的插值法有哪些, 特点是什么? 几种插值法的关系怎么样? 如何计算?

Ex13. 拟合的基本思想、插值、拟合、函数逼近三者的区别的联系? 拟合的残差大小有何意义?

Ex14. 试构造一个不高于4次的*Hermite*插值多项式

$H_4(x)$,使其满足条件

$$H_4(0) = 0, \quad H_4(1) = 1, \quad H_4(2) = 1,$$

$$H_4'(0) = 0, \quad H_4'(1) = 1,$$

EX15. 已知 $f(x)=e^x$ 的数据点如下:

x_i	0	1	2
e^{x_i}	1	2.7183	7.3891

- (1) 用 x_1, x_2, x_3 构造二次Lagrange插值多项式 $L_2(x)$,
并计算 $e^{1.5}$ 的近似值 $L_2(1.5)$ 。
- (2) 用事后误差估计方法估计 $L_2(1.5)$ 的误差。

Ex16. 求经过 $A(0, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 3)$ 三个样点的插值多项式

Ex 17. 已知函数 $y = f(x)$ 的数据如下表

x	-1	0	1
y	-1	0	1
y'		0	

确定三次插值多项式 $P_3(x)$ 及其插值误差 $R(x)$

Ex18.求证:两点Hermite插值的误差

$$R(x) = f(x) - H_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} [(x - x_0)(x - x_1)]^2$$

Ex19. 已知函数 $f(x)$ 在三个相异结点 x_0, x_1, x_2 , 处的函数值 y_0, y_1, y_2 , 且函数在点 x_1 处的导数值为 m_1 , 推导三次插值多项式 $P(x)$ 及其插值余项 $R(x)$ 的表达式.

Ex 20. 已知实验数据如下:

x	1	2	3	4
y	10	30	50	80

求二次多项式拟合函数 $P(x) = a + b x^2$

Ex 21 利用数据表

t	-2	-1	0	1	2
y	y_{k-2}	y_{k-1}	y_k	y_{k+1}	y_{k+2}

求线性拟合函数 $P(t) = a_0 + a_1 t$ 的常数项系数 a_0 。

Ex22. 已知数据表 $x_i = x_0, x_1, \dots, x_m,$

$$y_i = y_0, y_1, \dots, y_m,$$

用公式 $s(x) = ae^{bx}$ 拟合所给数据。

Ex23. 推导左矩形求积公式

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(a) + \frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$$

Ex24. 求复合中矩形公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{j=0}^{n-1} f(a + (j + 0.5)h)$$

的截断误差。那高斯公式呢？

Ex25. 取 $h=(b-a)/3$, 令 $x_0=a$, $x_j=a+jh$ ($j=0, 1, 2, 3$)。利用两点插值公式求下面开型数值求积公式的系数 A_1 、 A_2

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

Ex26. 给定积分 $\int_1^3 e^x \sin x dx$

当要求误差小于 10^{-3} 时用复合梯形公式计算时, 需要计算多少次函数值?

Ex27. 验证, 复合梯形公式与复合Simpson 公式之间有如下关系

$$S_m = \frac{1}{3}[4T_{2m} - T_m]$$

Ex28.试推导数值微分公式

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)]$$

的截断误差。

Ex 29 将积分上限函数

$$f(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(t^2) dt$$

转化为常微分方程初值问题。并确定一种可求解的二阶方法

Ex 30 Euler法，改进的Euler有何特点？如何用有限差分求解下面的常方程组呢？

$$\frac{d^n f(x)}{dx} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

第一章 思考题

- 1.在科学计算中，一般误差的来源有几种？列出部分数值分析课中主要讨论误差。
- 2.有效数字的概念是如何抽象而来的，简单给予叙述
- 3.什么样的算法被称为是不稳定的算法？试举一个例子说明。
- 4.刻画计算准确性的概念都有哪些？有何特点？

第二章 思考题

- 1.二分法收敛定理对于迭代数列的误差是如何估计的？
- 2.牛顿迭代法和割线法各有什么特点？
- 3.描述将牛顿迭代法推广到二元非线性方程组求解问题的算法时，主要的不同是什么？能否给一个实际的例子来说明。

第三章 思考题

1. 高斯消元法消元过程的目标是什么？消元过程需用多少次乘除法？有何数学理论支持？
2. 解三对角方程组的消元过程有何特点？
3. 矩阵的范数和向量的范数有何联系，条件数是如何定义的？

第四章 思考题

1. 解线性方程组的迭代法有何特点？它与解方程组的直接法有何不同？
2. 解线性方程组的迭代法收敛定理对迭代产生的向量序列的误差是如何估计的？
3. 迭代法求解线性方程组的本质是什么？
4. 迭代法想要收敛，充分必要条件是什么？

第五章 思考题

1. 代数插值问题的存在唯一性定理是如何叙述的？
2. 拉格朗日插值和牛顿插值方法各有何特点？
3. Runge反例主要说明一个什么样的问题？ 如何改进？
4. 有哪些方法可以改进插值中的Runge现象？

特征值

1. 幂法的主要思想是什么？ 为什么要做标准化？
2. 幂法加速法有那些？ 特点如何？
3. 什么是反幂法，基本原理是什么？
4. 如何计算和某个数最为接近的特征值？
5. QR方法的基本思想是什么？

第六章 思考题

1. 多项式拟合与代数插值问题有何差异？拟合函数有何特点？
2. 曲线拟合的最小二乘法有何特点？
3. 拟合方法为何和插值法不同？在对数据处理时候，如何选择？
4. 最小二乘法的基本思想是什么？
5. 求一个超定方程组的最小二乘解有哪些主要方法？
6. 正交函数有何作用？

第七章 思考题

1. 插值型求积公式有何特点？
2. 什么是复合积分？复合梯形公式有何特点？有哪些可以提高其精度的方法？
3. 高斯型求积公式是如何构造的？在应用中需要注意哪些问题？
4. 如何进行插值的误差分析？
5. 如何对大区间进行较为准确的积分？
6. 积分的外推法主要有那些？有何特点？

第八章 思考题

1. 求解常微分方程的数值方法有几种主要方法，列出主要几种，它们各有何特点？
2. 求常微分方程初值问题的数值求解公式的局部截断误差、全局截断误差是指什么？
3. 什么是数值积分的稳定性和收敛性？他们和什么因素有关？
4. 数值微分的局部截断误差和计算精度有个关系？
5. 什么是数值微分的精度，收敛阶有何特点？
6. 如何用有限差分法求解二阶常微分方程？
7. 如何利用数值方法求常微分方程组和高阶微分方程的数值解？如何用龙格-库塔方法求解高阶常微分方程(组)初值问题？