Probabilidade

Variáveis aleatórios

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada

Teorema de Bayes

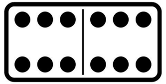
$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Até agora...



P(Cara) ou P(Coroa)

P(A K Q J 10)

P()

Variáveis aleatórias

Formal:

- Função que mapeia o espaço amostral em números reais
  $f: \Omega \rightarrow R$

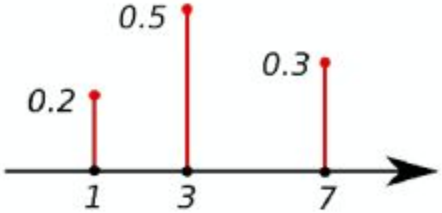
Resultado de um processo aleatório é expresso na forma de um número.

Números em alguns experimentos passado...

- Resultado de um dado (Ω = {1,2, ..., 6})
- Número de caras depois de três jogadas de moeda (Ω = {0, 1, 2, 3, 4})
- Valor da peça de dominó (Ω = {0, 1, 2, ..., 6})

Não utilizamos as características numéricas → extensivamente

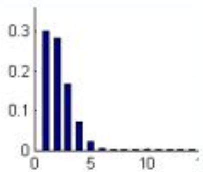
Trabalhando com números



Distribuição

P(x)

- Verificar no eixo
- Expressar na forma de uma função — $P(x) = 1/x^2$
- Verificar propriedades — Decrescente, crescente, concentrado



Variáveis aleatórios

X

- Realizar operações — $X+1$ X^2
- Combinar variáveis — $X+Y$
- Verificar propriedades — Média do valor de X

Tipos de variáveis aleatórias

Quando os valores do espaço amostral...

- possuem valores bem definido → **Discretas**;
- se encontram em um intervalo de valores que são dificilmente definidos → **Contínuas**;

Exemplos

X = {cara = 0, coroa = 1} **Discreto**

Y = {peso de um animal no zoo de SP} **Contínuo**

Z = {# de formigas que nascerá amanhã} **Discreto**

W = {ano de nascimento de um eleitor} **Discreto**

A = {tempo total para completar uma corrida de 100m} **Contínuo**

B = {tempo total para completar uma corrida de 100m com até duas casas decimais} **Discreto**

Distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta

X = {# de caras (H) depois de jogar 3 moedas}

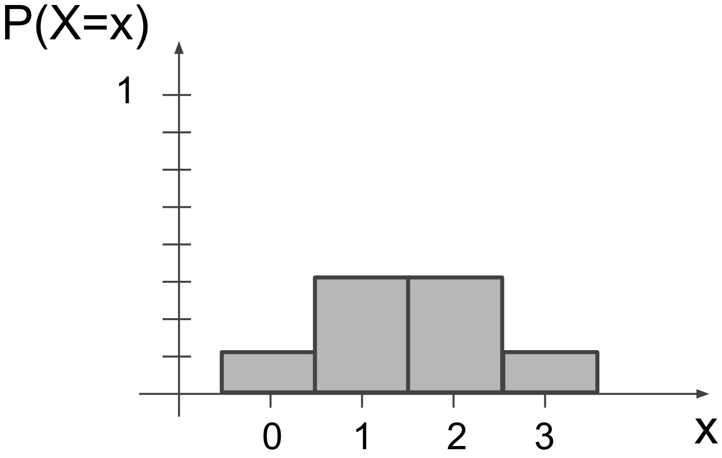
Ω = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

$P(X = 0) = 1/8$

$P(X = 1) = 3/8$

$P(X = 2) = 3/8$

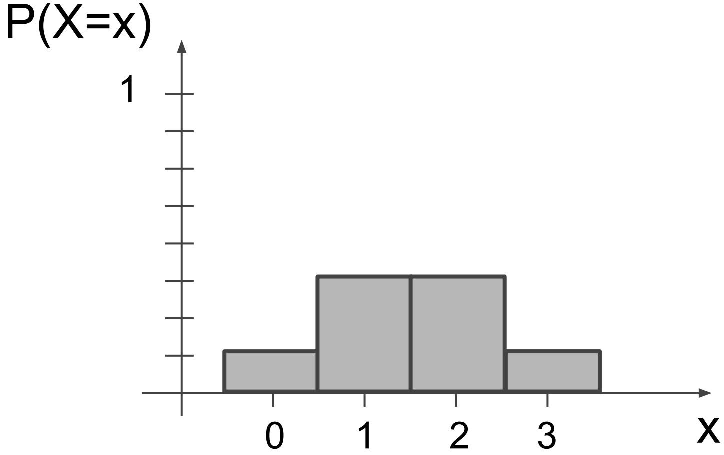
$P(X = 3) = 1/8$



Propriedades de uma distribuição de probabilidades

$$P(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$$

$$\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$



Tipos de distribuição de probabilidade discreto

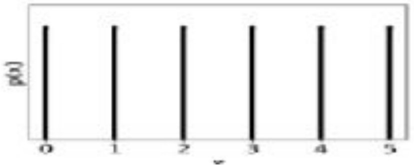
Finito $\rightarrow |\Omega| = n \in P$

Infinito $\rightarrow |\Omega| = \infty = \aleph_0$

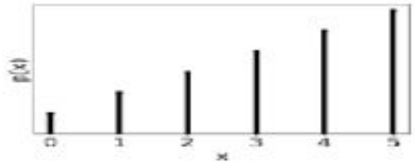
Distribuição de probabilidade discreta finita

$|\Omega| = n$ $P(x) \geq 0, \forall x \in \Omega$ $\sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$

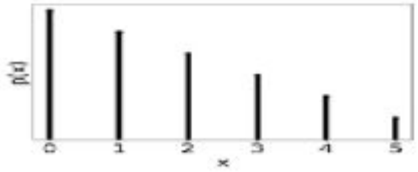
Uniforme: $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 1/n$



Crescente: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$



Decrescente: $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_n$



Distribuição de probabilidade discreta infinita

$|\Omega| = \infty$

Infinito em uma direção: p1, p2, p3 ...

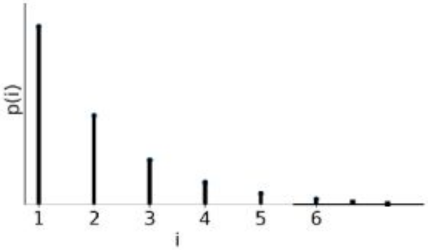
Não pode ser uniforme $p=0 \rightarrow \sum = 0$, $p > 0 \rightarrow \sum = \infty$

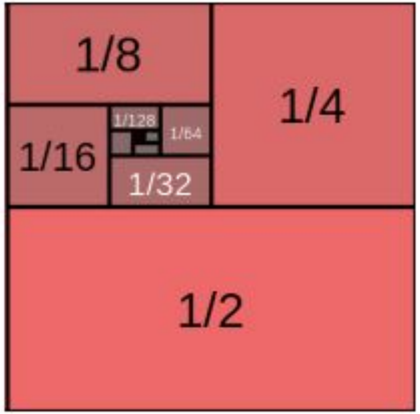
Não pode ser crescente: $p_i > 0 \rightarrow p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots > 0 \rightarrow \sum = \infty$

Pode ser decrescente: ½, ¼, ⅛, ...

Infinito nas duas direções: ..., p-2, p-1, p0, p1, p2, ...

..., ⅛, ¼, 0, ¼, ⅛, ...





Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X:

X = {# de pacotes}	1	2	3	...
P(X)	0,2	0,16	0,128	...

Represente a distribuição de probabilidades na forma de um histograma.

Exemplo:

João planeja comprar um pacote de figurinhas até ele conseguir a figurinha que ele quer, no entanto ele só tem dinheiro suficiente para comprar no máximo 4 pacotes. Suponha que cada pacote tenha 0,2 de probabilidade de conter a figurinha que João deseja.

Sendo a variável aleatória X o número de pacotes de cartões que João comprar, segue a distribuição de probabilidade para X:

X = {# de pacotes}	1	2	3	4
P(X)	0,2	0,16	0,128	?

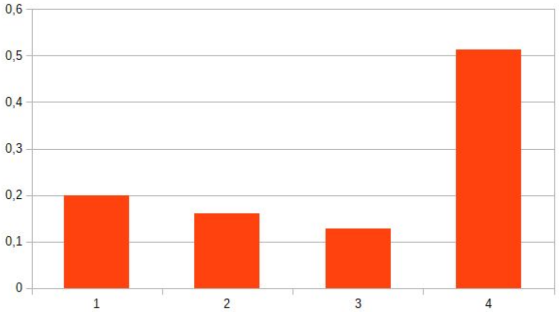
Calcule **P(X ≥ 2)**.

Função de distribuição acumulada de probabilidade

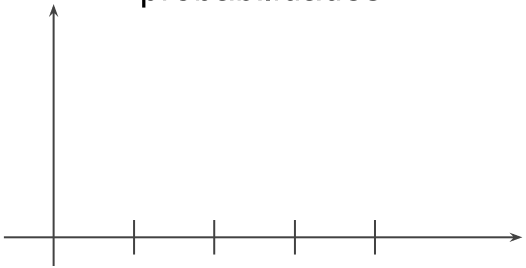
$$F(x) = P(X \le x) \\ = \sum_{u \le x} p(u) \quad .$$

X = {# de pacotes}	1	2	3	4
P(X)	0,2	0,16	0,128	0,512

Distribuição de probabilidades



Distribuição cumulativa de probabilidades



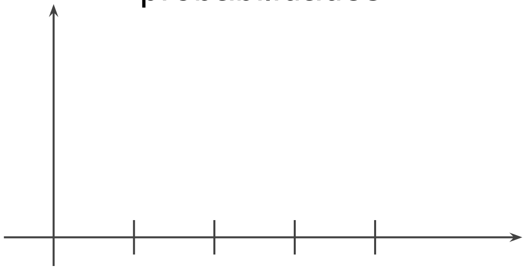
Função de distribuição acumulada de probabilidade

$$F(x) = P(X \leq x)$$
$$= \sum_{u \leq x} p(u)$$

X = {# de pacotes}	1	2	3	4
P(X)	0,2	0,16	0,128	0,512

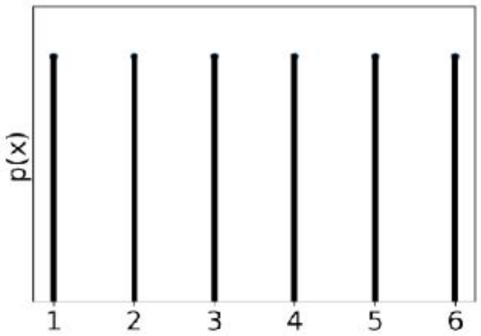
Calcule P(2 < x ≤ 3)

Distribuição cumulativa de probabilidades



Exemplo:

Depois de jogar um dado justo n vezes ($n \to \infty$), qual a média do valor observado?



Valor esperado, esperança matemática

$$\sum_x P(x) \cdot x \overset{\text{def}}{=} E(X)$$

Exemplo:

X = {# de exercícios realizado por semana por João}

Qual é o número de exercícios esperado que João faria em uma dada semana?

X	P(X)
0	0,1
1	0,15
2	0,4
3	0,25
4	0,1

Revisão

- Variáveis aleatórias
    - Discretas;
        - Finita;
        - Infinita;
    - Contínuas;
- Distribuição de probabilidade;
- Função de distribuição acumulada;
- Esperança matemática.