

Probabilidade

Teorema de Bayes

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada...

- Probabilidade condicional
 - $P(E | F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Independência dos eventos
 - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
 - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;



Exemplo: Super-poder

Uma pesquisa entrevistou 100 pessoas e perguntou qual super-poder ela gostaria de ter. A pesquisa gerou a seguinte tabela de contingência:

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?

Resolução:

$$P(\text{voar} \mid \text{homem}) = ?$$

$$P(A) = P(\text{voar})$$

$$P(B) = P(\text{homem})$$

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(A \mid B) = 30/100 / 52/100$$

$$P(A \mid B) = 30/52$$

$$P(A \mid B) = 0.5769$$



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

$$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$$

Resolução:

$$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$$

$$P(A) = P(\text{voar})$$

$$P(B) = P(\text{homem})$$

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$$

$$P(B \mid A) = 30/100 / 40/100$$

$$P(B \mid A) = 30/40$$

$$P(B \mid A) = 0.75$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes (1701 - 1761):

- Pastor e matemático inglês;
- Idealizou a fórmula.

Richard Price (1723-1791):

- Matemático, filósofo inglês;
- Descobriu os estudos de Bayes e contribuiu significativamente na sua publicação;
- “Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances” (1763).



Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $Ca_1 \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists Ca \rightarrow$ existe cara;

$$|\Omega| = ?$$

$$P(\exists Ca \mid Ca_1) = ?$$

$$P(Ca_1 \mid \exists Ca) = ?$$



Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $\text{Ca1} \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists \text{Ca} \rightarrow$ existe cara;

$|\Omega| = 4$ ($\Omega = \{\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}, \text{CoCo}\}$)

$P(\text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$; $P(\exists \text{Ca}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}, \text{CoCa}) = \frac{3}{4}$

$P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) = P(\text{CaCa}, \text{CaCo}) = \frac{1}{2}$

$P(\exists \text{Ca} \mid \text{Ca1}) = P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) / P(\text{Ca1}) = \frac{1}{2} / \frac{1}{2} = 1$

$P(\text{Ca1} \mid \exists \text{Ca}) = P(\exists \text{Ca} \cap \text{Ca1}) / P(\exists \text{Ca}) = \frac{1}{2} / \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$



Exemplo: Doença rara

Uma doença rara acomete 1 a cada 1000 pessoas. Um teste para detectar esta doença possui uma taxa de falso positivo de 5%. Assuma que o teste possui uma taxa de falso negativo de 0%. Se pegarmos uma pessoa aleatória que apresentou o resultado positivo para o teste, qual a probabilidade dele ter realmente a doença?

- a) 95%
- b) 56%
- c) 5%
- d) 2%



Exemplo: Doença rara

$D = doente$

$+$ = teste positivo

$$P(D) = 0,001$$

$$P(+|D^c) = 0,05$$

$$P(+|D) = 1$$

$$P(D|+) = ?$$

$$P(+) = P(D \cap +) + P(D^c \cap +)$$

$$P(+) = P(+|D) \cdot P(D) + P(+|D^c) \cdot P(D^c)$$

$$P(+) = 1 * 0,001 + 0,05 * (1 - 0,001)$$

$$P(+) = 0,05095$$

$$P(D|+) = \frac{P(+|D) \cdot P(D)}{P(+)}$$

$$P(D|+) = \frac{1 * 0,001}{0,05095}$$

$$P(D|+) = 0.0196$$



Exemplo: Produto defeituoso

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela máquina 3?



Exemplo: Produto defeituoso

$D = \text{defeituoso}$

$M_n = \text{produzido por máquina } n$

$P(M_3|D) = ?$

$$P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3).P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_3|D) = \frac{0,01*0,5}{0,024}$$

$$P(M_3|D) = 0,2083$$

$$P(D) = P(D \cap M_1) + P(D \cap M_2) + P(D \cap M_3)$$

$$P(D) = P(D|M_1).P(M_1) + P(D|M_2).P(M_2) + P(D|M_3).P(M_3)$$

$$P(D) = 0,05 * 0,2 + 0,03 * 0,3 + 0,01 * 0,5$$

$$P(D) = 0,024$$



Exemplo: Produto defeituoso (2)

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual das máquinas é o mais provável de ter produzido este produto?



Exemplo: Produto defeituoso (2)

$D = \text{defeituoso}$

$M_n = \text{produzido por máquina } n$

$\max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) = ?$

$$P(M_1|D) = \frac{P(D|M_1) \cdot P(M_1)}{P(D)} \quad P(M_2|D) = \frac{P(D|M_2) \cdot P(M_2)}{P(D)} \quad P(M_3|D) = \frac{P(D|M_3) \cdot P(M_3)}{P(D)}$$

$$P(M_1|D) = \frac{0,05 \cdot 0,2}{0,024} \quad P(M_2|D) = \frac{0,03 \cdot 0,3}{0,024} \quad P(M_3|D) = \frac{0,01 \cdot 0,5}{0,024}$$

$$P(M_1|D) = 0,4167 \quad P(M_2|D) = 0,375 \quad P(M_3|D) = 0,2083$$

$$\max(P(M_1|D), P(M_2|D), P(M_3|D)) = P(M_1|D)$$



Revisão

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$