

Probabilidade

Experimentos repetitivos

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada...

Probabilidade

- Experimento;
- Espaço amostral;
- Ponto amostral;
 - Probabilidade do ponto amostral \rightarrow frequência de ocorrência do resultado em n experimentos.
- Evento
 - Probabilidade do evento \rightarrow soma das probabilidades individuais dos elementos que pertencem ao evento;
- Distribuição de probabilidade
 - Uniforme;
 - Não uniforme;



Experimento composto

Experimentos podem consistir de duas ou mais partes;



Aluno:

- Nota;
- Curso;
- Idade;
- ...



Produto de uma loja:

- preço;
- categoria do produto;
- Validade;
- ...

Apesar de composto, eles podem ser considerados como um único experimento

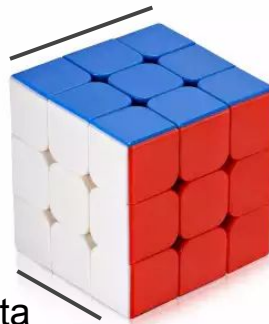
- os resultados se tornam mais complexos;

O espaço amostral seria o produto cartesiano das categorias em análise.

Curso

Idade

Nota





Experimentos repetitivos

Repetições → Lidar com o mesmo experimento repetidas vezes.

- Jogadas de moeda;
- Jogadas de dado;
- Compras de carta.

Podem ser classificadas em:

- **Independente** → que os diferentes experimentos não estão relacionados
 - Exemplo: jogada de uma moeda;
- **Dependente** → quando a probabilidade dos resultados de um experimento altera com o resultado do experimento anterior.
 - Exemplo: compra de uma carta no monte;



Repetições independentes

Em jogadas de duas moedas...

$$\Omega = \{ \text{caca, caco, coca, coco} \} = \{ \text{ca, co} \}^2$$

$$|\Omega| = 2^2 = 4$$

potência cartesiana

1a moeda

2a moeda

	Cara ($\frac{1}{2}$)	Coroa ($\frac{1}{2}$)
Cara ($\frac{1}{2}$)	(Ca,Ca) $\frac{1}{4}$	(Ca,Co) $\frac{1}{4}$
Coroa ($\frac{1}{2}$)	(Co,Ca) $\frac{1}{4}$	(Co,Co) $\frac{1}{4}$

Jogada de uma moeda possui distribuição uniforme, portanto a jogada de duas moedas implica também que seja uniforme.

$$P(\text{caca}) = P(\text{caco}) = P(\text{coca}) = P(\text{coco}) = 1/|\Omega| = \frac{1}{4}$$



Probabilidade de Eventos em repetições independentes

Eventos → Probabilidade de uma coleção de resultados

$P(E) = P(X \in E)$ = soma das probabilidades individuais de cada resultado

Quando a distribuição é uniforme → $P(E) = |E| / |\Omega|$



$$\rightarrow |\Omega| = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} P(\text{diferentes resultados}) &= P(\{ht, th\}) \\ &= |E| / |\Omega| \\ &= 2/4 \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{pelo menos uma cara}) &= P(\{ht, th, hh\}) \\ &= 3/4 \end{aligned}$$



$$\rightarrow |\Omega| = 2^3 = 8$$

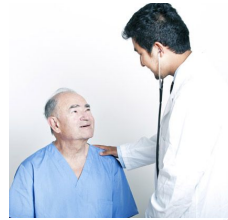
$$\begin{aligned} P(\text{Alternados}) &= P(\{hth, tht\}) \\ &= |E| / |\Omega| \\ &= 2/8 \\ &= 1/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{número ímpar de cara}) &= P(\{htt, tht, tth, hhh\}) \\ &= 4/8 \\ &= 1/2 \end{aligned}$$

Amostragem

Seleção sequencial de objetos:

- Pacientes;
- Visitantes de um site na web
- Cartas de baralho
- Bola na urna



Dois tipos de amostragem:

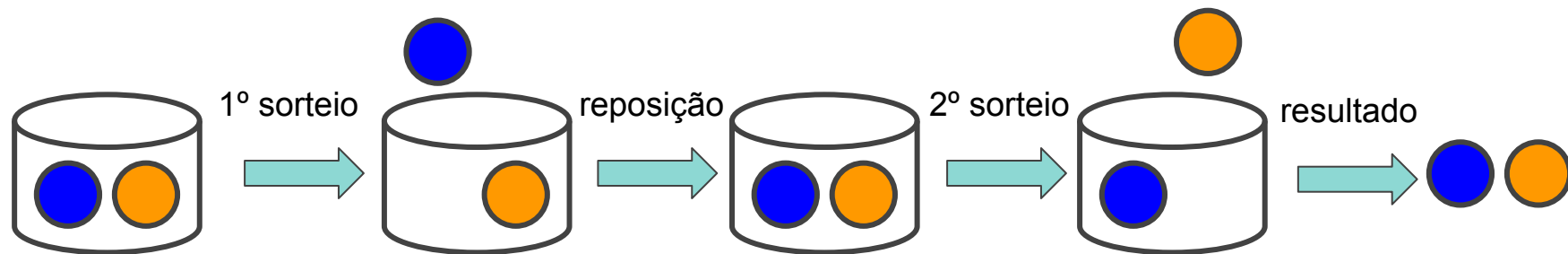
Com reposição

- Reuso do elemento selecionado;
- Resultado pode se repetir;
- Os experimentos são normalmente independentes;
- Exemplos: moeda, dado

Sem reposição

- Não há reuso do elemento selecionado;
- O resultado não pode se repetir;
- Experimento dependente;
- Exemplo: Cartas, Pessoas;




Bolas na urna com reposição



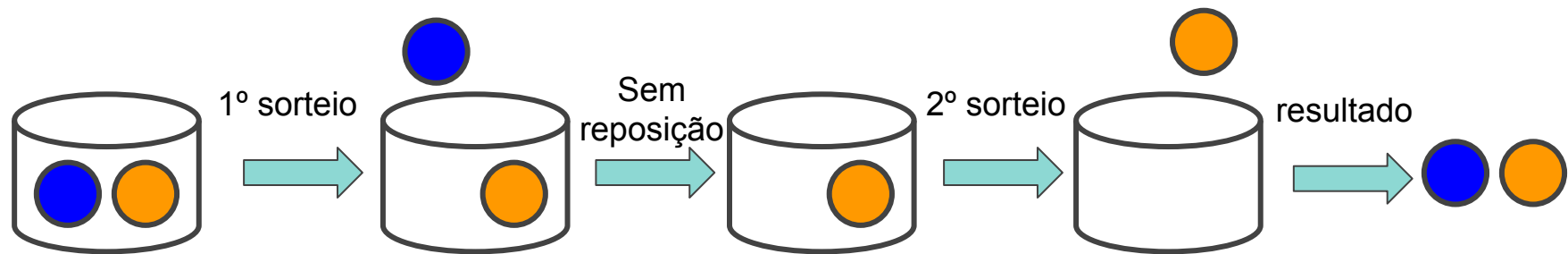
2º sorteio é feito com o mesmo conjunto do primeiro sorteio.

2º sorteio

1º sorteio

	 ($\frac{1}{2}$)	 ($\frac{1}{2}$)
 ($\frac{1}{2}$)	  $\frac{1}{4}$	  $\frac{1}{4}$
 ($\frac{1}{2}$)	  $\frac{1}{4}$	  $\frac{1}{4}$













Bolas na urna sem reposição



2º sorteio é feito com conjunto diferente do primeiro sorteio.

2º sorteio

1º sorteio

		
 ($\frac{1}{2}$)	  0	  $\frac{1}{2}$
 ($\frac{1}{2}$)	  $\frac{1}{2}$	  0



Comprando cartas



Comprar uma carta



Comprar uma 2ª carta



2º sorteio

Possíveis resultados: $\Omega = \{12, 13, \dots, 21, 23, \dots, 64, 65\}$
 $|\Omega| = A_{6,2} = 6!/(6-2)! = 30$

Probabilidade: $i = j \rightarrow$ não ocorre
 $i \neq j \rightarrow \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = 1/30$

1º sorteio

	1	2	...	6
1	0	1/30	...	1/30
2	1/30	0	...	1/30
...	1/30
6	1/30	1/30	1/30	0




E quando a ordem não importa?

Até agora analisamos as probabilidades de cada ponto amostral (resultado) quando a ordem importa.

Quando a ordem importa → tuplas de resultados;

1° sorteio

2° sorteio

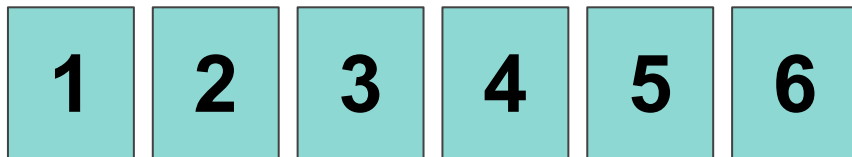
	 ($\frac{1}{2}$)	 ($\frac{1}{2}$)
 ($\frac{1}{2}$)	  $\frac{1}{4}$	  $\frac{1}{4}$
 ($\frac{1}{2}$)	  $\frac{1}{4}$	  $\frac{1}{4}$

Mas e quando a ordem não importa? **Conjunto de resultados**

Calcular a probabilidade do **conjunto de resultados** com reposição e sem reposição



Ordem não importa → Com reposição



Escolher duas cartas com reposição.

Quando a ordem importa:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^2 = \{11, 12, \dots, 66\}$$

$$|\Omega| = 6^2 = 36$$

$$P(1,1) = P(1,2) = \dots = P(6,6) = 1/36$$

Quando a ordem **não** importa:

$$P(\{1,2\}) = P(1,2) + P(2,1) = 2/36$$

$$P(\{1,1\}) = P(1,1) = 1/36$$

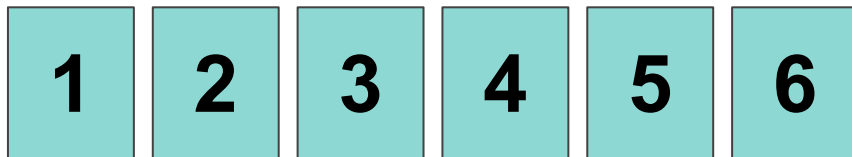
Não uniforme!

Checando se a soma das probabilidades é igual a 1:

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{2}{36} + \binom{6}{1} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$



Ordem não importa → sem reposição



Escolher duas cartas sem reposição.

Quando a ordem importa:

$$i \neq j \quad P(i,j) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = 1/30$$

$$i = j \quad P(i,j) = 0$$

Quando a ordem **não** importa:

$$P(\{1,2\}) = P(1,2) + P(2,1) = 2/30$$

$$P(\{1,1\}) = 0$$

Uniforme!

Checando se a soma das probabilidades é igual a 1:

$$\binom{6}{2} \cdot \frac{2}{30} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{2}{30} = 1$$



Revisão

- Experimento composto → Experimentos repetitivos
- Repetições independentes;
- Repetições dependentes;
- Amostragem com reposição (normalmente independentes);
- Amostragem sem reposição (dependentes);
- Ordem importa (com ou sem reposição);
- Ordem não importa (com ou sem reposição);