Probabilidade

Exercícios

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Tópicos da segunda prova

- Teoria de conjuntos;
- Métodos de contagem;
- Probabilidade;

Teoria de conjuntos

Isto é um conjunto?

$A = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$A = (0, 1, 2, \ldots)$

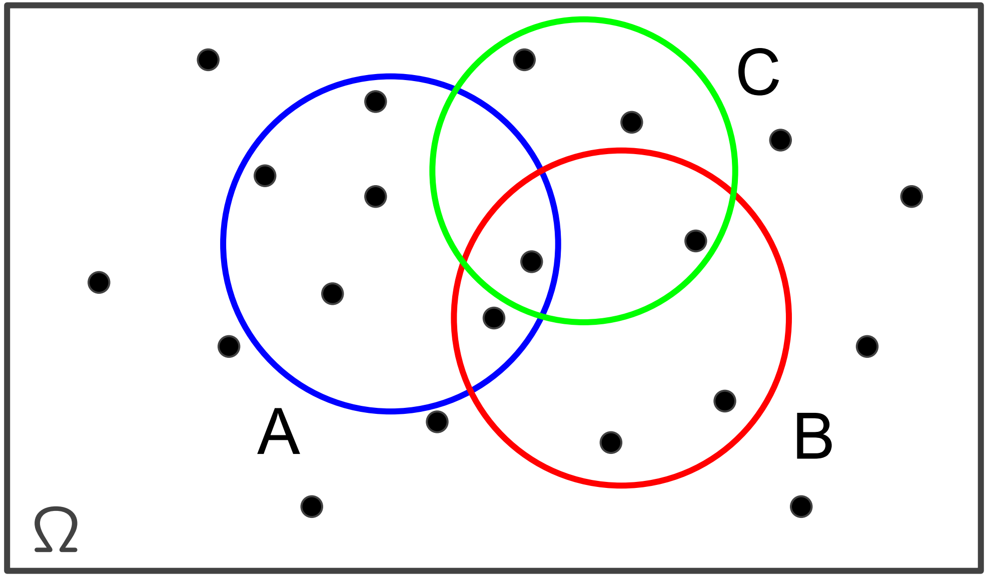
Isto é verdade?

$\{0, 1, 2\} = \{2, 1, 0\}$

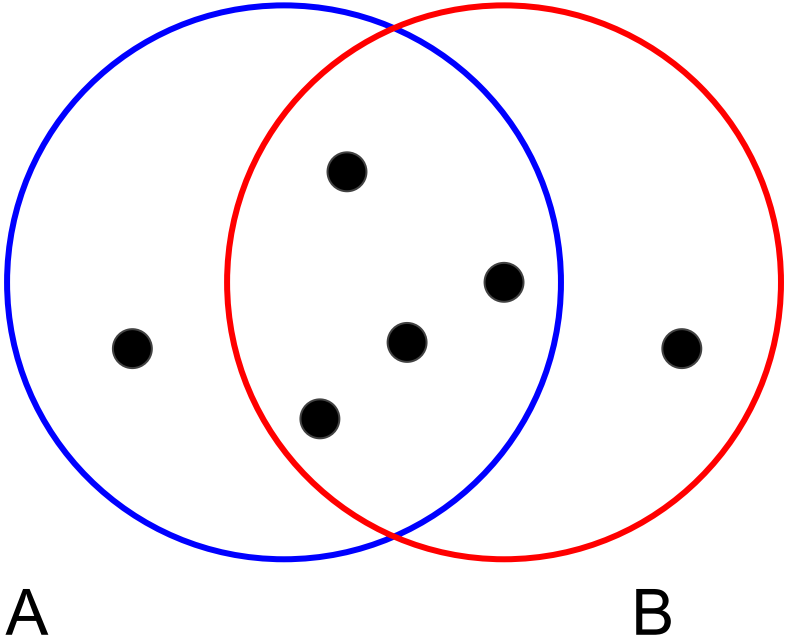
Isto é verdade?

$\{0, 1, 2\} = \{2, 2, 1, 1, 0\}$

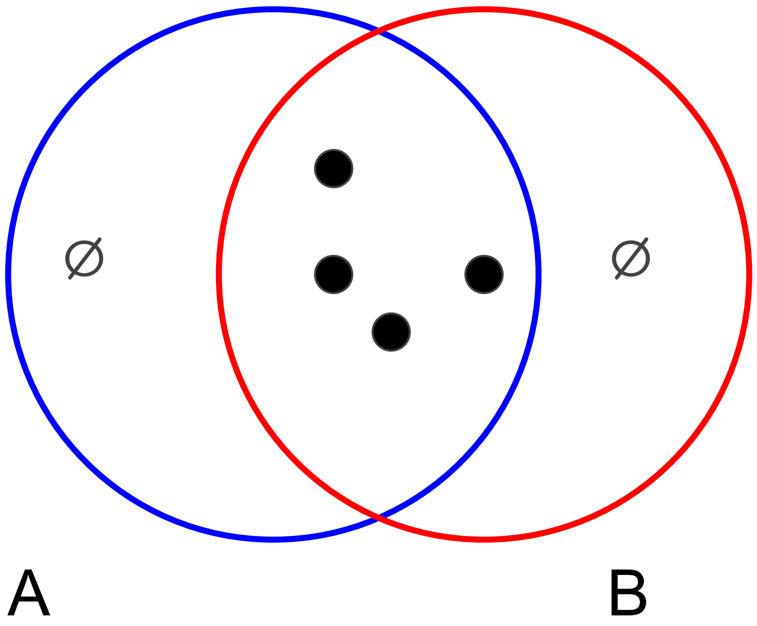
O que é isso?



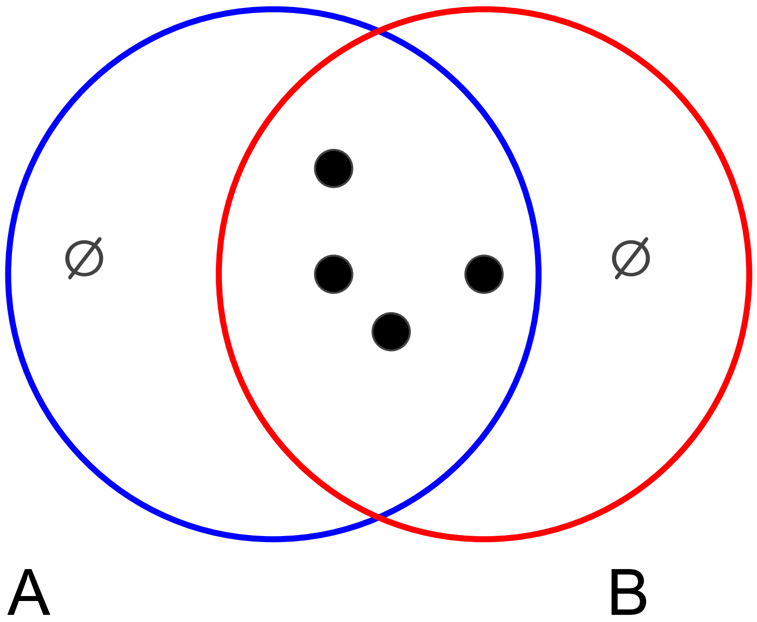
A = B ?



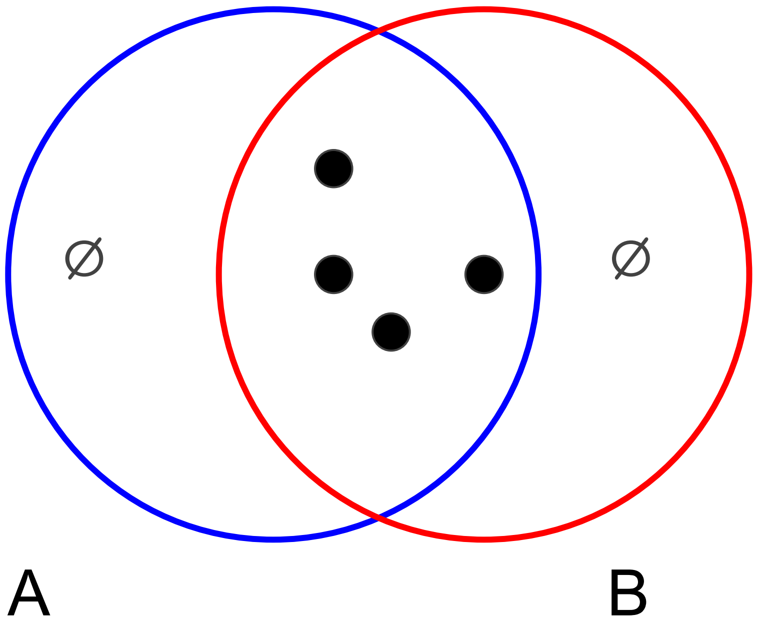
A ≠ B ?



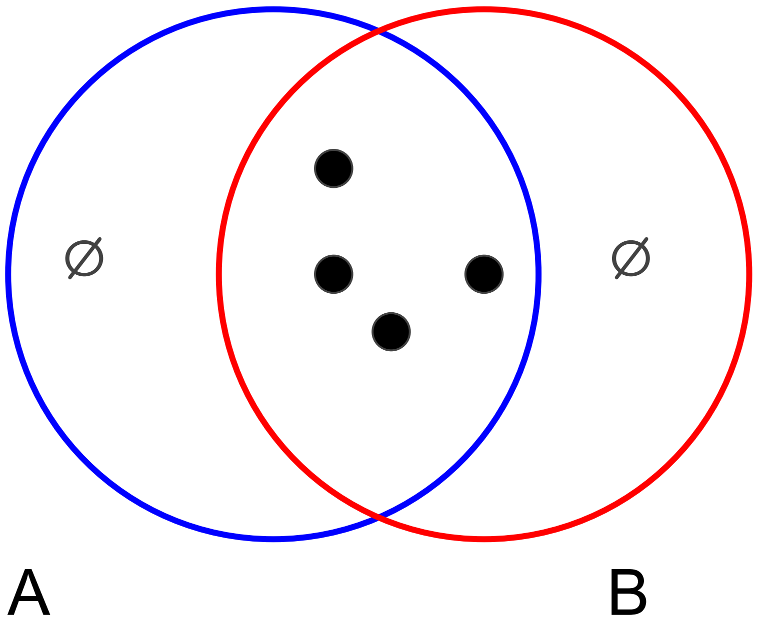
$A \subseteq B$?



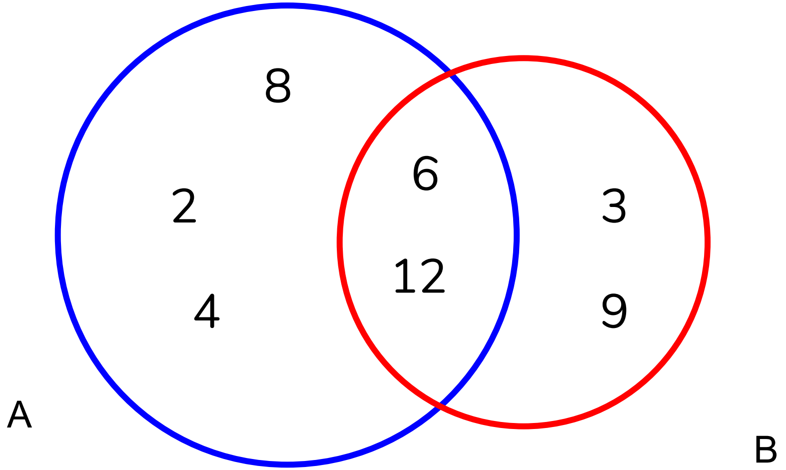
A ⊇ B ?



$A \subset B$?



$6 \in B$?



Qual a diferença entre $\subseteq$ e $\in$?

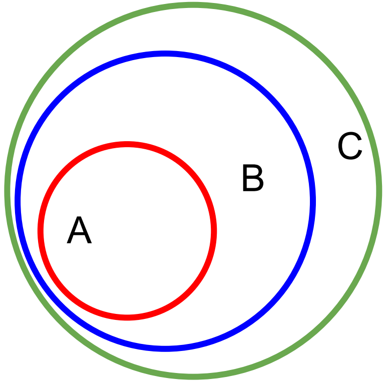
∈ (pertence a) vs ⊆ (contém)

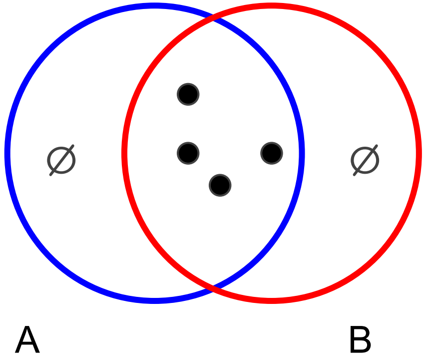
- ∈ → relação entre um elemento e um conjunto;
    - $x \in A$ → elemento x pertence ao conjunto A;
    - $0 \in \{ 0 , 1 \}$
    - $\{ 0 \} \notin \{ 0, 1 \}$

- ⊆ → relação entre dois conjuntos;
    - $A \subseteq B$ → o conjunto A é um subconjunto do conjunto B
    - $\{ 0 \} \subseteq \{ 0 , 1 \}$
    - $0 \nsubseteq \{ 0, 1 \}$

Propriedades do subconjunto

- $\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq \Omega$
- $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (transitividade)
- $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, então $A = B$

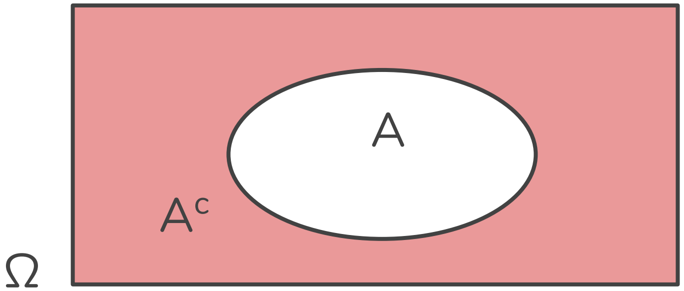




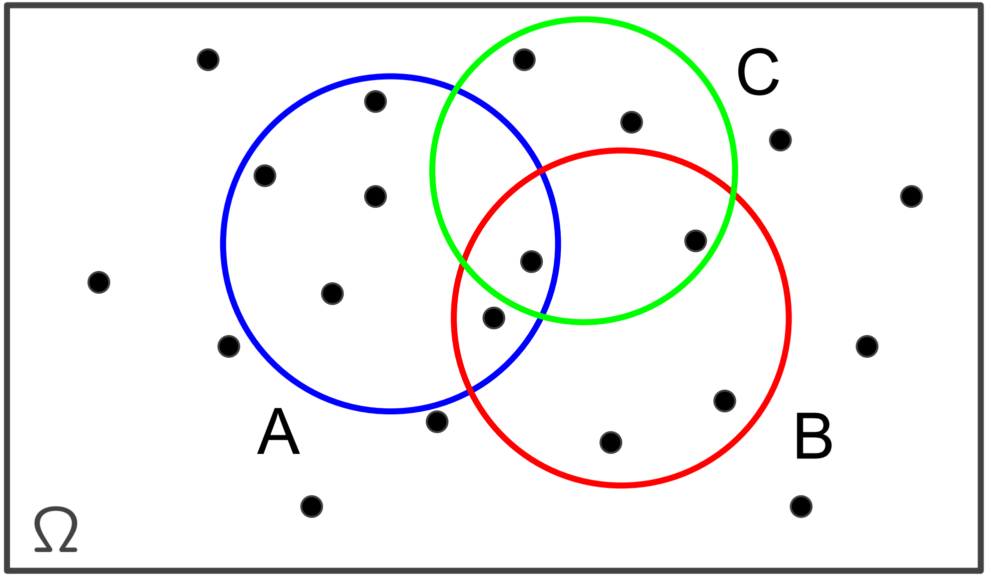
$$X = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$$

Complemento

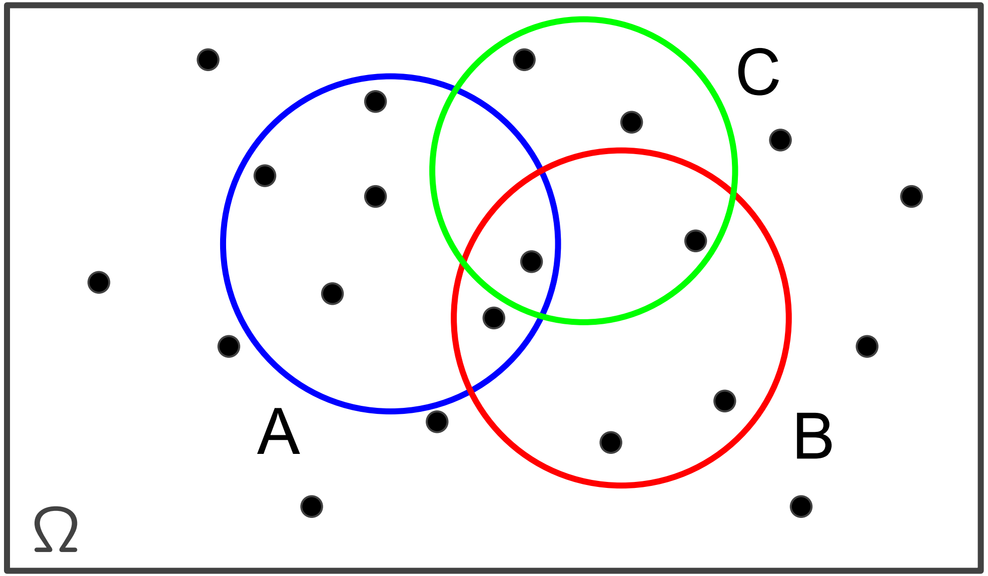
- $\Omega^c = \varnothing \qquad \varnothing^c = \Omega$
- A e A^c são sempre disjuntos
- $(A^c)^c = A \rightarrow$ involução



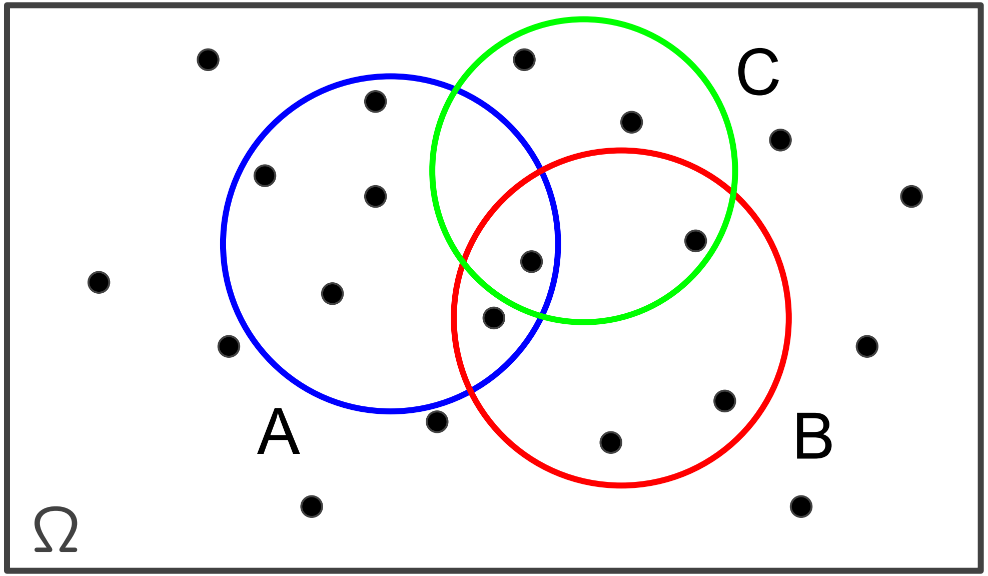
$A \cap B$



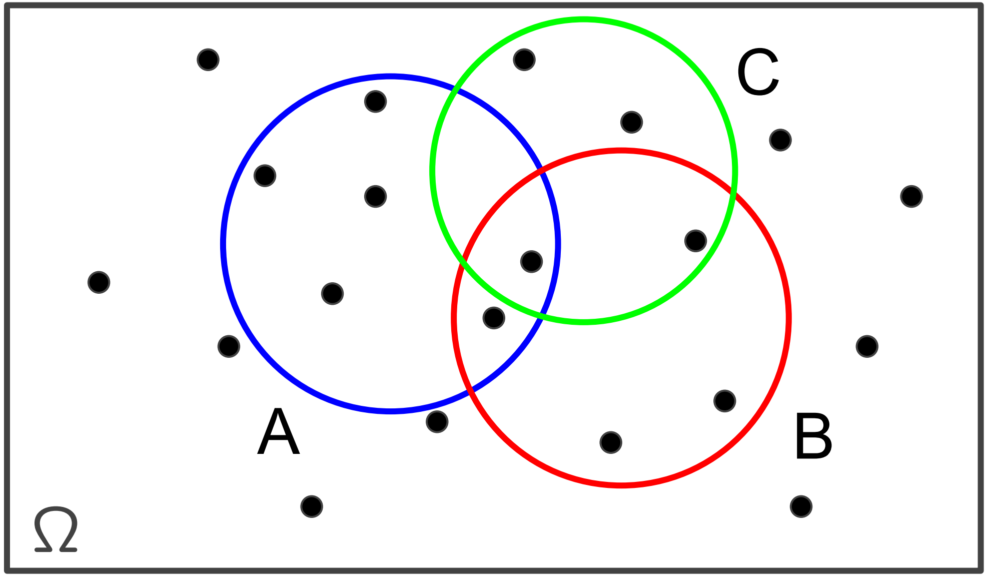
A ∪ B



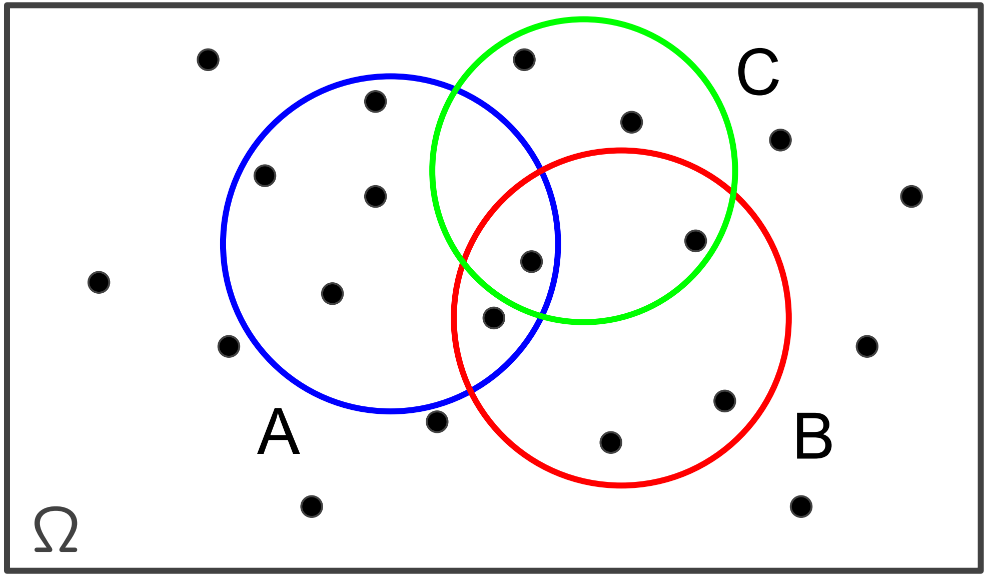
A - B



A Δ B



$(A \cap B)^c$



Métodos de contagem

Métodos de contagem

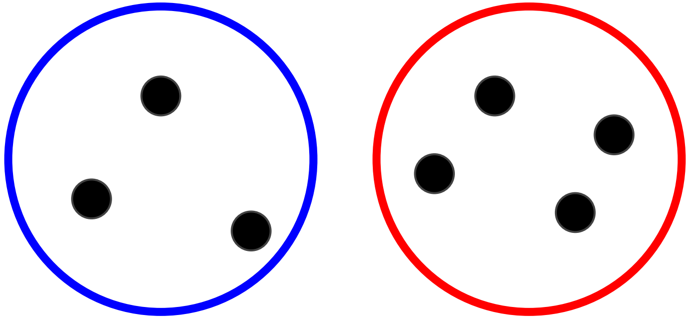
- Regra da soma;
- Regra da inclusão e exclusão;
- Regra da multiplicação (produto cartesiano);
- Potência cartesiana;
- Conjunto de partes (power set);
- Árvores;
- Permutação;
- Permutação parcial;
- Análise combinatória.

Quando

$|A \cup B| = |A| + |B|$?

União disjunta

$|A| = 3$ $|B| = 4$



$$|A \cup B| = |A| + |B| = 7$$

Para conjuntos disjuntos, o tamanho da união é a soma dos tamanhos dos conjuntos.

Regra da soma

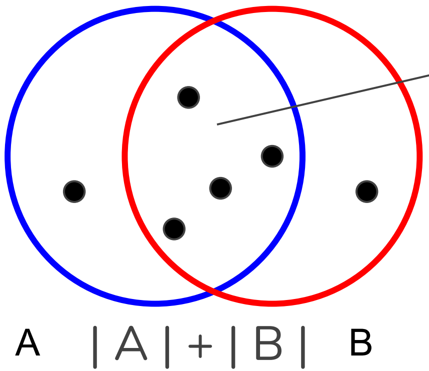
Quando
$|A \cup B| \neq |A| + |B|$?

União geral

Se A e B são disjuntos, $| A \cup B | = | A | + | B |$

Em geral: $| A \cup B | \neq | A | + | B |$

$| \{1\} \cup \{1\} | = |\{1\}| = 1 \neq |\{1\}| + |\{1\}| = 2$



Elementos nesta área ($A \cap B$) são contados 2X

Princípio da Inclusão e Exclusão:

$| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

Múltiplos de 2 números

$D = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \vee 2 \mid i \} = \{ 2, 3, 4, 6, 8, \ldots 100 \}$

$|D| = ?$

$A = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \}$

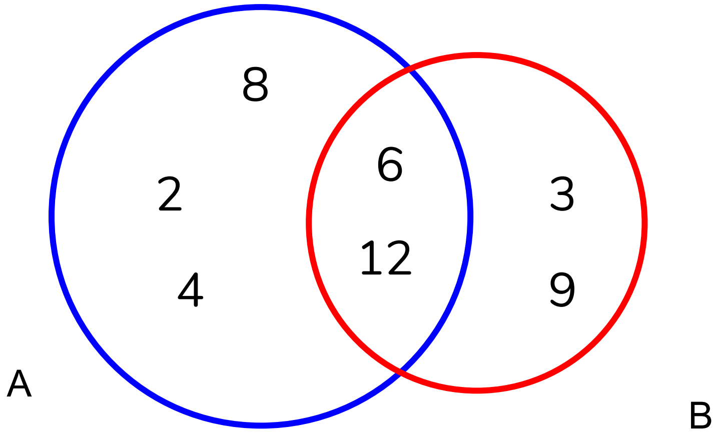
$B = \{ 1 \leq i \leq 100 : 3 \mid i \}$

$|A| = \lfloor 100 / 2 \rfloor = 50$

$|B| = \lfloor 100 / 3 \rfloor = 33$

$|A \cap B| = \{ 1 \leq i \leq 100 : 2 \mid i \wedge 3 \mid i \} = \{ 1 \leq i \leq 100 : 6 \mid i \}$

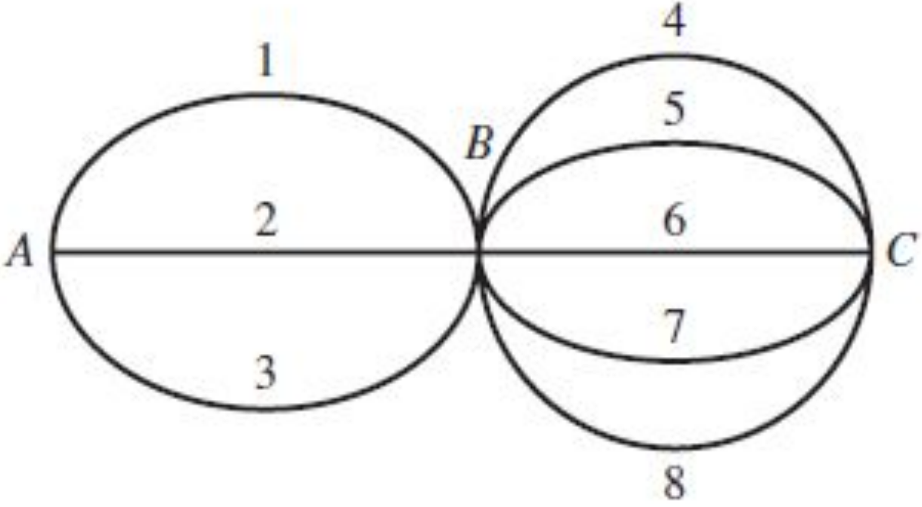
$|A \cap B| = \lfloor 100 / 6 \rfloor = 16$



$|D| = |A| + |B| - |A \cap B| = 67$

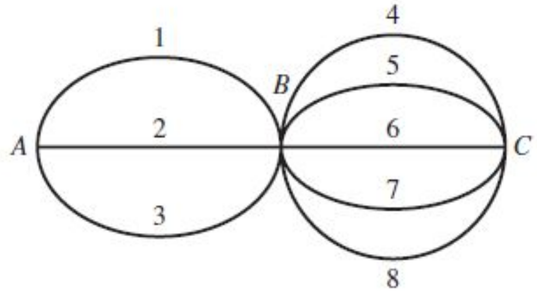
- Produto cartesiano
- Potência cartesiana
- Permutação
- Permutação parcial (arranjo)
- Combinação

Quantas rotas possíveis de A para C?



Regra da multiplicação

Possíveis rotas: (1,4), (1,5), (1,6), ..., (3,8)



Produto cartesiano

rAB = { 1 ,2 3 }

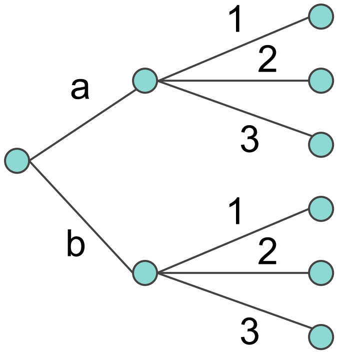
rBC = { 4 ,5, 6, 7, 8 }

	4	5	6	7	8
1	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
2	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8

rAB X rBC = { (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8)
(2, 4), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8)
(3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8) }

| rAB X rBC |= |A| X |B|

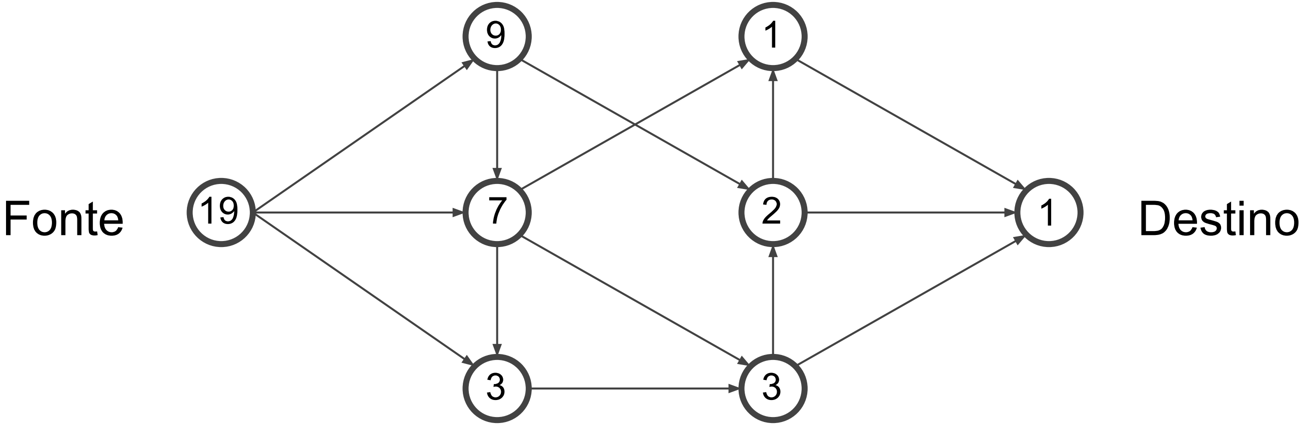
Produto cartesiano como árvores

Árvore	Sequência	Produto cartesiano
	{a, 1} {a, 2} {a, 3} {b, 1} {b, 2} {b, 3}	{a, b} × {1, 2, 3}
2 × 3 = 6		|{a, b} × {1, 2, 3}| = 2 × 3 = 6

Usado apenas quando, em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.

Caminhos da fonte até o destino

Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :



“Potência cartesiana” de um conjunto

Produto cartesiano de um conjunto com ela mesma.

$A^2 = A \times A$ $\rightarrow$ quadrado cartesiano

$A^n = A \times A \times \ldots \times A$ $\rightarrow$ n-ésima potência cartesiana

$|\ A^n\ | = |A \times A \times \ldots \times A| = |A| \times |A| \times \ldots \times |A| = |A|^n$

Aplicações teóricas e práticas.

Potência em conjunto de binário

$\{ 0 ,1 \}$

$\{ 0, 1 \}^n$ = { string binário de tamanho n} = { string de n-bit }

n	Conjunto	String
1	$\{0,1\}^1$	0, 1
2	$\{0,1\}^2$	00, 01, 10, 11
3	$\{0,1\}^3$	000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111
…	…	…
n	$\{0,1\}^n$	0 … 0, …, 1 … 1

$| \{0, 1\}^n | = | \{0, 1\}|^n = 2^n$

Conjunto de partes (power set)

Conjunto de partes de S é a coleção de todos os subconjuntos de S.

$\mathbb{P}(\{a, b\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$

$|\mathbb{P}(S)| = ?$

$\mathbb{P}(S)$ possui uma correspondência com $\{0, 1\}^{|S|}$.

Conjunto de partes

Correspondência entre $\mathbb{P}(S)$ e $\{ 0, 1 \}^{|S|}$:

$\mathbb{P}(\{a,b\})$ e $\{ 0, 1 \}^2$.

$| \mathbb{P}(S) | = | \{ 0, 1 \}^{|S|} | = 2^{|S|}$

Tamanho do conjunto de partes é a potência de base 2 elevado ao tamanho do conjunto.

$\mathbb{P}(\{a,b\})$	a	b	$\{ 0, 1 \}^2$
{}	X	X	00
{a}	O	X	10
{b}	X	O	01
{a,b}	O	O	11

Permutação

Permutação: diferentes formas de ordenar um conjunto de objetos.

Interesse: fórmula que calcule o número de permutações em função do número de objetos em um conjunto.

# de letras	permutações	# de permutações
1	a	1
2	a,b b,a	2
3	a,b,c a,c,b b,a,c b,c,a c,a,b c,b,a	6

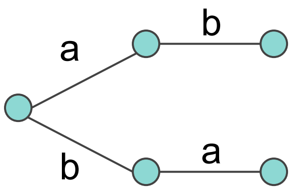
Permutação

Para **2** objetos:

a, b
b, a

2 escolhas

1 escolha



2 x 1 = 2

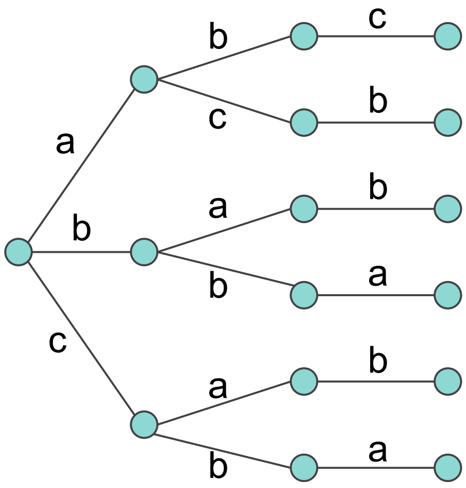
Para **3** objetos:

a, b, c
a, c, b
b, a, c
b, c, a
c, a, b
c, b, a

3 escolhas

2 escolhas

1 escolha



3 x 2 x 1 = 6

de permutações de n-objetos = n x (n - 1) x … x 2 x 1 = **n!**

Anagramas com restrição

1. A, R ser adjacente nesta ordem (P**AR**SE, ESP**AR**):

   Permutação de conjunto de 4 objetos: P, S, E e AR   4! = 24

2. A, R ser adjacente em qualquer ordem (P**AR**SE, ESP**RA**):

   Duas formas de ordenar {A,R}: (A,R) e (R,A)   2*4! = 48

3. A, R não serem adjacentes (PE**R**S**A**,P**R**ES**A**):

   Regra da subtração: 5! - 2*4! = 120 - 48 = 72

Permutação parcial (arranjo)

	Qualquer dígito	Dígitos distintos
Identificador de 2 dígitos	10 65 33	10 65 ~~33~~
	10 x 10	10 x 9

	Qualquer letra	Letras distintas
Anagramas com 3 letras	abc voa pop	abc voa ~~pop~~
	26 x 26 x 26	26 x 25 x 24

de permutações parciais (arranjos)

número de permutações de tamanho k em um conjunto n:

$$n.\,(n-1).\,(n-2).\;\ldots\;.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Exemplo do anagrama de 3 letras distintas: n = 26 e k = 3

$$\frac{26!}{(26-3)!} = 26.25.24$$

Combinação

Número de subconjuntos de tamanho k;

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

$$\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

$$\binom{[3]}{2} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

Os diferentes **subconjuntos** correspondem à diferentes combinações.

Interesse: Contar o número de k-subconjuntos em [n].

Número de combinações

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right| \longrightarrow$$ Coeficiente binomial

Número inteiro

k-subconjuntos

$$\binom{3}{2} = \left|\binom{[3]}{2}\right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de combinações

$$\binom{3}{2} = \left|\binom{[3]}{2}\right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de arranjos $= \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

perm.	bin.
{1,2}	110
{1,3}	101
{2,1}	110
{2,3}	011
{3,1}	101
{3,2}	011

Permutação de {1,2}

Permutação de {1,3}

Permutação de {2,3}

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \mathbf{35}$$

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas, dois homens e duas mulheres. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê, 4 homens e 3 mulheres. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!}\frac{3!}{(3-2)!2!} = 18$$

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. João e Maria não se dão bem, por isso eles não devem fazer parte da comissão juntos. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

Comitês com João e Maria:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$$

$$35 - 10 = 25$$

Regra da subtração: