

# Probabilidade

## Métodos de contagem II

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





## Nas aulas passadas...

Analogia entre números e conjuntos:

Soma

União de disjuntos

Subtração

Complementos

Multiplicação

Produto cartesiano

Exponencial

“Potência cartesiana”



# “Potência cartesiana” de um conjunto

Produto cartesiano de um produto com ela mesma.

$$A^2 = A \times A \rightarrow \text{quadrado cartesiano}$$

$$A^n = A \times A \times \dots \times A \rightarrow n\text{-ésima potência cartesiana}$$

$$|A^n| = |A \times A \times \dots \times A| = |A| \times |A| \times \dots \times |A| = |A|^n$$

Aplicações teóricas e práticas.



# Potência em conjunto de binário

$\{0, 1\}$

$\{0, 1\}^n = \{ \text{string binário de tamanho } n \} = \{ \text{string de } n\text{-bit} \}$

| n   | Conjunto    | String                                    |
|-----|-------------|---|
| 1   | $\{0,1\}^1$ | 0, 1                                      |
| 2   | $\{0,1\}^2$ | 00, 01, 10, 11                            |
| 3   | $\{0,1\}^3$ | 000, 001, 010, 011, 100,<br>101, 110, 111 |
| ... | ...         | ...                                       |
| n   | $\{0,1\}^n$ | 0 ... 0, ..., 1 ... 1                     |

$$|\{0, 1\}^n| = |\{0, 1\}|^n = 2^n$$



# Conjunto de partes

Conjunto de partes de  $S$  é a coleção de todos os subconjuntos de  $S$ .

$$\mathbb{P}(\{a, b\}) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

$$|\mathbb{P}(S)| = ?$$

$\mathbb{P}(S)$  possui uma correspondência com  $\{0, 1\}^{|S|}$ .



# Conjunto de partes

Correspondência entre  $\mathbb{P}(S)$  e  $\{0, 1\}^{|S|}$ :

$\mathbb{P}(\{a,b\})$  e  $\{0, 1\}^2$ .

$$|\mathbb{P}(S)| = |\{0, 1\}^{|S|}| = 2^{|S|}$$

Tamanho do conjunto de partes é a potência de base 2 elevado ao tamanho do conjunto.

| $\mathbb{P}(\{a,b\})$ | a | b | $\{0, 1\}^2$ |
|-----------------------|---|---|--------------|
| $\{\}$                | × | × | 00           |
| $\{a\}$               | ○ | × | 10           |
| $\{b\}$               | × | ○ | 01           |
| $\{a,b\}$             | ○ | ○ | 11           |



# Em python

```
# produto cartesiano
```

```
import itertools
```

```
A = { 0, 1}
```

```
B = {"a", "b"}
```

```
for i in itertools.product(A, B):  
    print(i)
```

|          |
|----------|
| (0, 'a') |
| (0, 'b') |
| (1, 'a') |
| (1, 'b') |





## Em python

```
# potência cartesiana
```

```
import itertools
```

```
A = { 0, 1}
```

```
for i in itertools.product(A, repeat=3):  
    print(i)
```

```
(0, 0, 0)
```

```
(0, 0, 1)
```

```
(0, 1, 0)
```

```
(0, 1, 1)
```

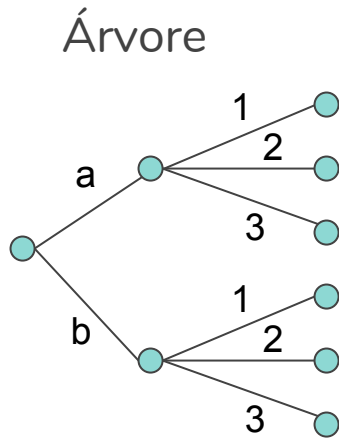
```
(1, 0, 0)
```

```
(1, 0, 1)
```

```
(1, 1, 0)
```

```
(1, 1, 1)
```

# Produto cartesiano como árvores



$$2 \times 3 = 6$$

Sequência

{a, 1}

{a, 2}

{a, 3}

{b, 1}

{b, 2}

{b, 3}

Produto cartesiano

$$\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}$$

$$|\{a, b\} \times \{1, 2, 3\}| = 2 \times 3 = 6$$

Usado apenas quando, em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.



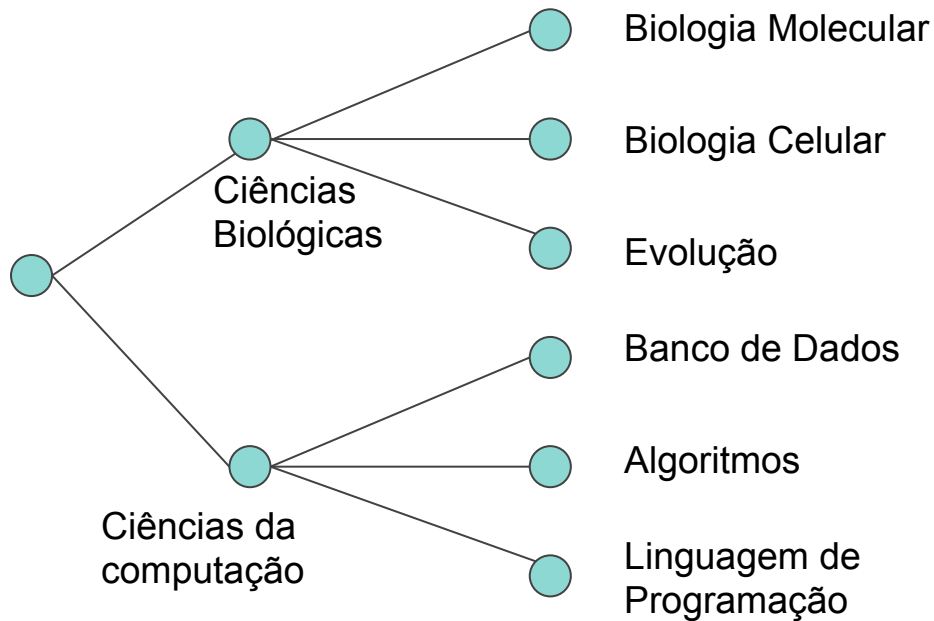
# Uso da árvore de forma generalizada

Criação de um novo curso  
(Bioinformática) envolvendo  
dois departamentos.

Se cada uma der 3 disciplinas,  
Quantas disciplinas terá no  
total?

Esta estrutura de árvore **não**  
é um produto cartesiano!

É possível aplicar a regra da multiplicação → em todos os níveis, os nós possuem o mesmo grau.





# Melhor de n

Nos esportes, times e atletas disputam entre si para saber quem é o melhor.

Como jogar uma partida é relativamente randômico



Partidas de melhor de n

Tênis:  $n = 3$  ou 5 sets

Playoffs do NBA:  $n = 7$  jogos

Objetivo: vencer a maioria dos jogos.

Uma vez que um time ou atleta vence mais que  $n/2$  → Parar a partida

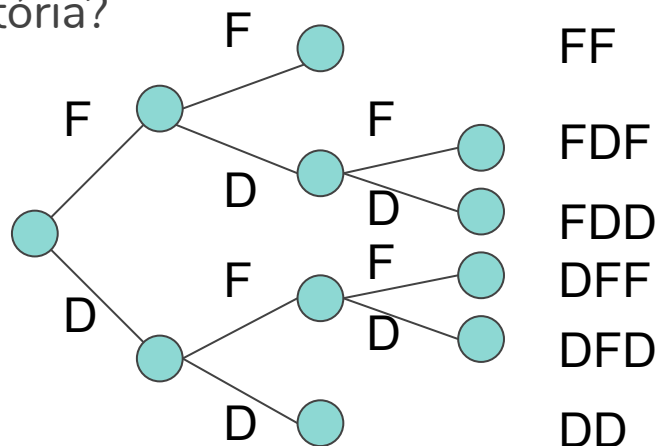


# Sequências de vitória

Suponha uma disputa de Tênis entre Federer e Djokovic.

A disputa é interrompida quando um deles vence duas partidas.

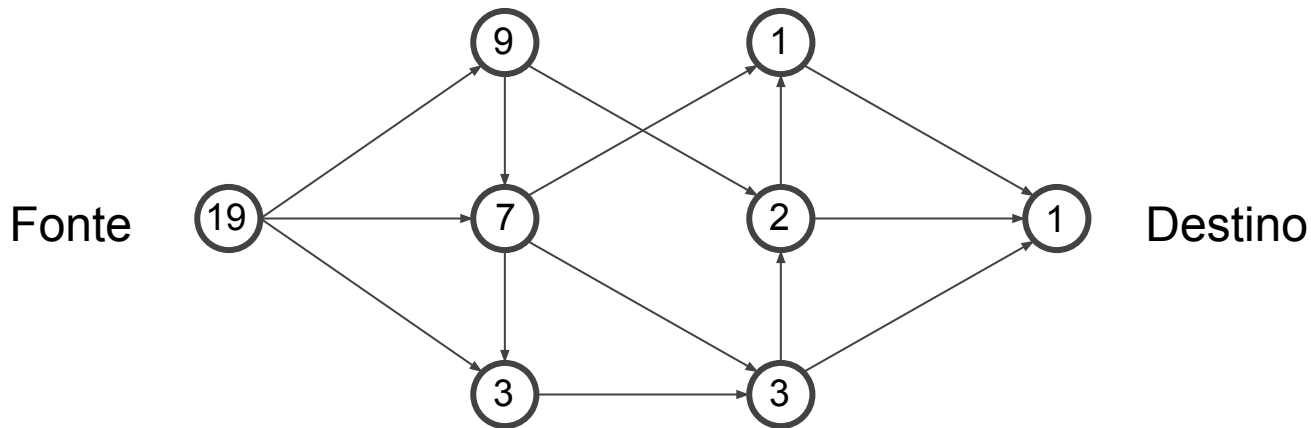
Qual o número de sequências de vitória?





# Caminhos da fonte até o destino

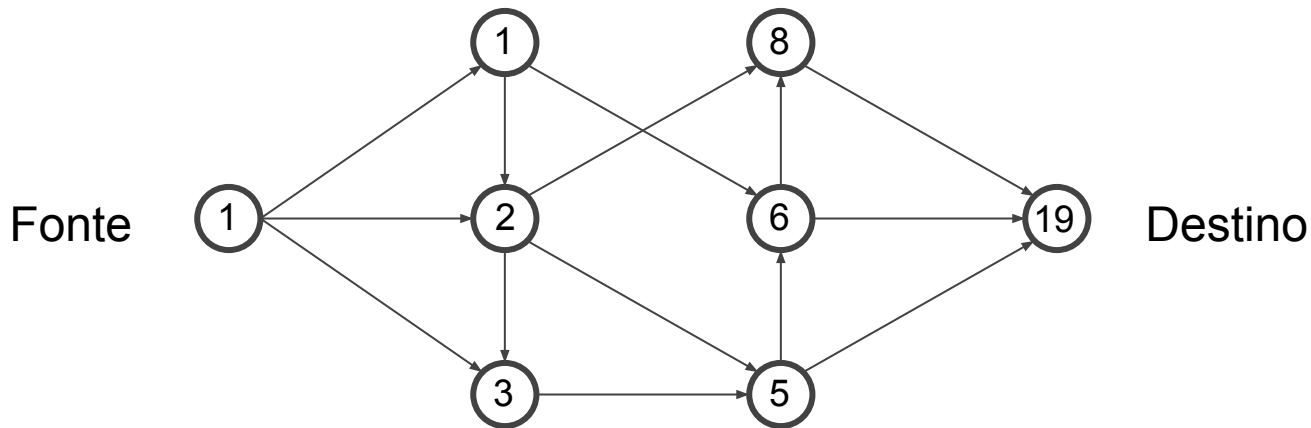
Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :





# Caminhos da fonte até o destino

Generalização da contagem de caminhos para um grafo acíclico :





# Revisão

Potência cartesiana

Conjunto de partes

itertools (produto cartesiano, potência cartesiana)

Árvores



# Exercícios do notebook

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)