

Probabilidade

Teorema de Bayes

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto

Instituto Metr pole Digital - UFRN

Sala A224, ramal 182

Email: tetsu@imd.ufrn.br





Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/





Na aula passada...

- Probabilidade condicional
 - $P(E | F) = P(E \cap F) / P(F)$
- Independência dos eventos
 - **Independentes** → A ocorrência de um evento **não** altera a probabilidade do segundo evento;
 - **Dependentes** → A ocorrência de um evento altera a probabilidade do segundo evento;



Exemplo: Super-poder

Uma pesquisa entrevistou 100 pessoas e perguntou qual super-poder ela gostaria de ter. A pesquisa gerou a seguinte tabela de contingência:

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

Se selecionarmos uma pessoa aleatoriamente, e esta ser homem, qual seria a probabilidade dele escolher “voar” como seu super-poder?

Resolução:

$$P(\text{voar} \mid \text{homem}) = ?$$

$$P(A) = P(\text{voar})$$

$$P(B) = P(\text{homem})$$

$$P(A \mid B) = P(A \cap B) / P(B)$$

$$P(A \mid B) = 30/100 / 52/100$$

$$P(A \mid B) = 30/52$$

$$P(A \mid B) = 0.5769$$



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$



Exemplo: Super-poder

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100

$$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$$

Resolução:

$$P(\text{homem} \mid \text{voar}) = ?$$

$$P(A) = P(\text{voar})$$

$$P(B) = P(\text{homem})$$

$$P(B \mid A) = P(A \cap B) / P(A)$$

$$P(B \mid A) = 30/100 / 40/100$$

$$P(B \mid A) = 30/40$$

$$P(B \mid A) = 0.75$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

poder/sexo	Masc	Fem	Total
Voar	30	10	40
Invisibilidade	12	32	44
Outros	10	6	16
Total	52	48	100



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$



P(A | B) e P(B | A)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

$$P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap A)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$



Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes (1701 - 1761):

- Pastor e matemático inglês;
- Idealizou a fórmula.

Richard Price (1723-1791):

- Matemático, filósofo inglês;
- Descobriu os estudos de Bayes e contribuiu significativamente na sua publicação;
- “Essay toward solving a Problem in the Doctrine of Chances” (1763).



Exemplo: Duas moedas

Duas moedas justas (ordem importa):

- $Ca_1 \rightarrow$ primeira moeda ser cara;
- $\exists Ca \rightarrow$ existe cara;

$$|\Omega| = ?$$

$$P(\exists Ca \mid Ca_1) = ?$$

$$P(Ca_1 \mid \exists Ca) = ?$$



Exemplo: Doença rara

Uma doença rara acomete 1 a cada 1000 pessoas. Um teste para detectar esta doença possui uma taxa de falso positivo de 5%. Assuma que o teste possui uma taxa de falso negativo de 0%. Se pegarmos uma pessoa aleatória que apresentou o resultado positivo para o teste, qual a probabilidade dele ter realmente a doença?

- a) 95%
- b) 56%
- c) 5%
- d) 2%



Exemplo: Doença rara



Exemplo: Produto defeituoso

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual a probabilidade dele ter sido produzido pela máquina 3?



Exemplo: Produto defeituoso



Exemplo: Produto defeituoso (2)

Os produtos de uma fábrica é produzido por três máquinas. A porcentagem de produção e dos produtos defeituosos produzidos por cada máquina está listado na tabela abaixo:

	Máquina 1	Máquina 2	Máquina 3
% produzido do total	20	30	50
% defeituosos	5	3	1

Se um item é selecionado aleatoriamente e for verificado que ele é defeituoso, qual das máquinas é o mais provável de ter produzido este produto?



Exemplo: Produto defeituoso (2)



Revisão

Teorema de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A).P(A)}{P(B)}$$