

# Probabilidade

**Prof. Dr. Tetsu Sakamoto**  
Instituto Metr pole Digital - UFRN  
Sala A224, ramal 182  
Email: [tetsu@imd.ufrn.br](mailto:tetsu@imd.ufrn.br)





**Slides e notebook em:**

[github.com/tetsufmbio/IMD0033/](https://github.com/tetsufmbio/IMD0033/)





## Na aula passada...

- Subconjuntos de tamanho  $k$  de um conjunto de  $n$  elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos  $\rightarrow$  coeficiente binomial;
- Identidade de Pascal;
- Triângulo de Pascal;
- Binômio de Newton;
- Coeficientes de polinômios.



# Probabilidade

# Na vida existem algumas certezas...



Outros processos são incertos →  
fenômeno randômico.



# Fenômenos randômicos

Mas...

... Se repetirmos o processo muitas vezes, o resultado pode se tornar previsível!



50% = cara; 50% = coroa

**Probabilidade**



# Termos em probabilidade



**Experimentos** → Cada ocasião onde observa-se um fenômeno randômico (jogar de uma moeda);

**Ponto amostral** → Um resultado de um experimento (cara);

**Espaço amostral** → Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento, denotado como  $\Omega$  ({ cara, coroa});



# Exemplos

Experimento	Espaço amostral
Moeda	{ h, t }
Dado	{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Idade	N
Temperatura	R

**Pontos amostrais** →  
minúsculo (h, t, x ...)

Elementos, conjuntos





# Tipos de espaço amostral

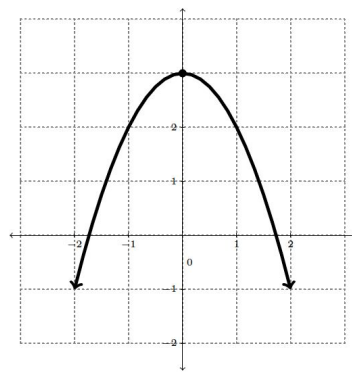
**Discreto** → Espaço amostral finito ou infinito, mas contável;

$\{h, t\}$     $\{1, 2, \dots, 6\}$     $\mathbb{N}$     $\mathbb{Z}$     $\{\text{palavras}\}$



**Contínuo** → Espaço amostral infinito incontável;

$\mathbb{R}$     $\{\text{temperatura}\}$     $\{\text{altura}\}$





# Notações



## Em algebra:

Um valor desconhecido  $\rightarrow x$ ;

$$2x - 4 = 0$$

Antes da resolução:  $x \in \mathbb{R}$

Depois da resolução:  $x = 2$

## Em probabilidade:

Valor randômico de um ponto amostral  $\rightarrow X$ ;

$X$  - resultado da jogada de uma moeda;

Antes do experimento:  $X \in \Omega$ ;

Depois do experimento:  $X = h$  (se cara),  $X = t$  (se coroa).



# Probabilidade de um ponto amostral

A **probabilidade do ponto amostral** (resultado)  $x \in \Omega$  ( $P(x)$  ou  $P(X=x)$ ) é a fração de vezes que  $x$  ocorre quando o experimento é repetido várias vezes.

## Moeda justa:

- A medida que # de experimento  $\rightarrow \infty$ , fração de cara (ou coroa) =  $\frac{1}{2}$ ;  
Cara possui uma probabilidade de  $\frac{1}{2}$       $P(h) = P(X=h) = \frac{1}{2}$

## Dado justo:

- A medida que # de experimento  $\rightarrow \infty$ , fração da face 1 =  $\frac{1}{6}$ ;  
Face 1 possui uma probabilidade de  $\frac{1}{6}$       $P(1) = P(X=1) = \frac{1}{6}$



# Função de distribuição de probabilidade

$P(x)$  é a fração de vezes que o ponto amostral  $x$  ocorre

Observando a probabilidade de todos os elementos do espaço amostral  $\rightarrow$  surge um padrão!

- Moeda:  $P(h) = \frac{1}{2}$   $P(t) = \frac{1}{2}$
- Dados:  $P(1) = \frac{1}{6}$ ,  $P(2) = \frac{1}{6}$ , ... ,  $P(6) = \frac{1}{6}$
- Tempo:  $P(\text{chuva}) = 10\%$ ,  $P(\text{sol}) = 90\%$

$$P: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad P(x) \geq 0 \quad \sum_{x \in \Omega} P(x) = 1$$

Função de distribuição de probabilidade



## **Tipos de distribuição de probabilidade**

- Uniforme
- Não uniforme



# Distribuição de probabilidade uniforme

Normalmente os pontos amostrais (resultados) de um experimento possuem diferentes probabilidades.



No entanto, existem experimentos cujos resultados são igualmente prováveis de acontecerem.



$$P(h) = P(t) = \frac{1}{2}$$



$$P(1) = P(2) = \dots$$

$$P(6) = \frac{1}{6}$$

Distribuição de probabilidade uniforme



# Distribuição de probabilidade uniforme

Todos os pontos amostrais (resultados) são igualmente prováveis.

$$\forall x \in \Omega \ P(x) = p$$

$$1 = \sum_{x \in \Omega} P(x) = \sum_{x \in \Omega} p = |\Omega| \cdot p$$

$$p = 1/|\Omega|$$

Moeda:

- $P(h) = P(t) = p$
- $1 = P(h) + P(t) = 2p$
- $p = 1/2$

**Distribuição uniforme** → todos os resultados possuem probabilidade de  $1/|\Omega|$



# Distribuição de probabilidade não uniforme

Exemplos:

- Chuva;
- Notas de prova;
- Palavras;
- Doença;
- Páginas da web;
- etc.



















































# Lançamento de dois dados



$$|\Omega| = 36$$

$$P(X = 7)$$

$$P(X = 3)$$



## Atenção na notação

$P(X = 3) \rightarrow$  dado justo:  $\frac{1}{6}$

$P(3) = P(X = 3)$

Notação correta

$P(x) \rightarrow$  especifique o  $x$ , para  $\forall x$ ,  $P(x) = \frac{1}{6}$  (dado justo)

$P(1 = 3) \rightarrow$  Probabilidade do resultado 1 ser 3 (0)

$P(X) \rightarrow$  Probabilidade de ocorrer um resultado aleatório

Pouco comum,  
reveja se é isso  
que você quer  
dizer.

$P(x = 3) \rightarrow x$  corresponde a um resultado do  
experimento, portanto ele é um valor.

Provavelmente  
está errado.



# Eventos

Até o momento nós lidamos com a probabilidade de um único ponto amostral (resultado):

- Se um determinado cavalo ganhará a corrida;
- Se um aluno tirará nota B+;

Mas normalmente estamos interessados na probabilidade de um conjunto de resultados:

- Se a temperatura  $> 25^{\circ}$ ;
- Se um aluno passará no curso;

**Conjunto de resultados** → **Subconjunto do espaço amostral** → **EVENTOS**



# Exemplos de eventos



Eventos  $\rightarrow$  subconjunto do espaço amostral;

Dado:  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \supseteq$  Eventos

Eventos	Nome
$\{1, \dots, 6\}$	$\Omega$ (certeza)
$\{2, 4, 6\}$	pares
$\{1, 4\}$	quadrados
$\{5, 6\}$	$> 4$
$\{1, 2, 5\}$	$\{1, 2, 5\}$



# Ocorrência do evento



Quando consideramos que o evento E ocorre?

O evento E ocorre quando ele contém o ponto amostral (resultado) observado.

**E ocorre se  $X \in E$**

		Resultados							
Eventos	Nome	1	2	3	4	5	6		
$\{ 1, \dots, 6 \}$	$\Omega$ (certeza)	O	O	O	O	O	O		
$\{ 2, 4, 6 \}$	pares	X	O	X	O	X	O	O	Evento ocorre
$\{ 1, 4 \}$	quadrados	O	X	X	O	X	X	X	Evento não ocorre
$\{ \}$	vazio	X	X	X	X	X	X		



# Probabilidade dos eventos

Probabilidade do evento E	$P(E)$	Probabilidade do evento E ocorrer	$P(X \in E)$
---------------------------	--------	-----------------------------------	--------------

Fração de experimentos onde E ocorre à medida que o número de experimento cresce.



$P(\text{Par})$     3 4 2 5 6 3 6 4 3 1 1 2 3 5        14

$$P(\text{Par}) \approx \text{fração} = 6/14 = 0,4285$$

Desejável: -  $P(E) = \text{fração} \rightarrow \# \text{ experimento} \rightarrow \infty$

- Escrever isso para eventos e distribuições de forma geral.



## Relacionando $P(x)$ com $P(E)$



# de vezes que **Par** ocorre = soma do # de vezes que 2, 4 e 6 ocorrem.

$P(\text{Par})$  = fração de vezes que Evento Par ocorre

$P(\text{Par})$  = soma das frações do número de vezes que 2, 4, 6 ocorrem

$$P(\text{Par}) = P(2) + P(4) + P(6)$$

Em geral:

- # de vezes que o evento  $E$  ocorre = soma do número de vezes que seus elementos ocorrem.
- $P(E)$  = soma das probabilidades de seus elementos.

$$P(E) = P(X \in E) = \sum_{x \in E} P(x)$$



## Relacionando $P(x)$ com $P(E)$

Eventos	Nome	Resultados						Probabilidades
		1	2	3	4	5	6	
$\{ 1, \dots, 6 \}$	$\Omega$ (certeza)	O	O	O	O	O	O	$P(1)+P(2)+ \dots + P(6) = 1$
$\{ 2, 4, 6 \}$	pares	X	O	X	O	X	O	$P(2)+P(4)+ P(6) = \frac{1}{2}$
$\{ 1, 4 \}$	quadrados	O	X	X	O	X	X	$P(1)+P(4) = \frac{1}{3}$
$\{ \}$	vazio	X	X	X	X	X	X	0





# Revisão

## Probabilidade

- Experimento;
- Espaço amostral;
- Ponto amostral;
  - Probabilidade do ponto amostral
- Evento
  - Probabilidade do evento