Probabilidade

Análise combinatória

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada...

Permutação

- a ordem com que elementos de um conjunto podem ser dispostos → utilizando todos os elementos;
- n!

Permutação parcial (Arranjos)

- A ordem com que os elementos de um conjunto podem ser dispostos → não utilizando todos os elementos;
- n! / (n-k)!

k-subconjuntos

Subconjuntos de tamanho k;

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

$$\binom{[3]}{1} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$$

Os diferentes **subconjuntos** correspondem à diferentes combinações.

$$\binom{[3]}{2} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$$

Interesse: Contar o número de k-subconjuntos em [n].

k-subconjuntos e sequências binárias

$$\binom{[n]}{k}$$

Coleção de todos os subconjuntos de tamanho k presentes no conjunto [n] = {1,2, ..., n}

	Subconjuntos	**Sequências binárias**
$\binom{[3]}{1}$	{{1}, {2}, {3}}	100, 010, 001
$\binom{[3]}{2}$	{{1,2}, {2,3}, {1,3}}	110, 011, 101
$\binom{[4]}{2}$	{{1,2}, {1,3}, ... , {3,4}}	1100, 1010, ... , 0011

Sequência de n-bits com k-1s

Número de combinações

$$\binom{n}{k} = \left|\binom{[n]}{k}\right| \longrightarrow$$ **Coeficiente binomial**

Número inteiro

k-subconjuntos

$$\binom{3}{2} = \left|\binom{[3]}{2}\right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de combinações

$$\binom{3}{2} = \left|\binom{[3]}{2}\right| = |\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}| = 3$$

Número de permutações $= \frac{3!}{(3-2)!} = 6$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = k!\binom{n}{k}$$

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

perm.	bin.
{1,2}	110
{1,3}	101
{2,1}	110
{2,3}	011
{3,1}	101
{3,2}	011

Permutação de {1,2}

Permutação de {1,3}

Permutação de {2,3}

Exemplos

$$\binom{[3]}{1} = \left\{ \begin{matrix} 001 \\ 010 \\ 100 \end{matrix} \right\} \qquad \binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = 3$$

Escolhendo o 1 em uma das 3 posições

$$\binom{[3]}{2} = \left\{ \begin{matrix} 011 \\ 101 \\ 110 \end{matrix} \right\} \qquad \binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

Escolhendo o 0 em uma das 3 posições

$$\binom{[4]}{2} = \left\{ \begin{matrix} 0011 \\ 0101 \\ 1001 \\ 0110 \\ 1010 \\ 1100 \end{matrix} \right\} \qquad \binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$$

Escolhendo as posições dos 1s. Para o 1º há 4 opções, e para o 2º há 3 opções. Cada ordem possui duas formas de escolha.

Exemplos

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n)!0!} = 1$$

000

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{(0)!n!} = 1$$

111

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n$$

Posição de um único 1 em uma sequência binária

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Posição de dois 1s em uma sequência binária

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = 35$$

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas, dois homens e duas mulheres. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê, 4 homens e 3 mulheres. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

$$\binom{4}{2}\binom{3}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!}\frac{3!}{(3-2)!2!} = 18$$

Aplicações:

Formação de comitês:

Um comitê deve ser composto por 4 pessoas. 7 pessoas estão aptas a compor o comitê. João e Maria não se dão bem, por isso eles não devem fazer parte da comissão juntos. Quantas maneiras diferentes posso formar este comitê?

Comitês com João e Maria:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = 10$$

$$35 - 10 = 25$$

Regra da subtração:

Propriedades do coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} \qquad \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!}$$

Identidade de Pascal

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{4}{3} = \binom{3}{3} + \binom{3}{2}$$

$$\left\{\begin{matrix} 011\boxed{1} \\ 101\boxed{1} \\ 110\boxed{1} \\ 111\boxed{0} \end{matrix}\right\} \qquad \{111\boxed{0}\} \qquad \left\{\begin{matrix} 011\boxed{1} \\ 101\boxed{1} \\ 110\boxed{1} \end{matrix}\right\}$$

Triângulo de Pascal

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0}$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{1}$$

k

n

	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						
4						
5						

Triângulo de Pascal

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{2}{1} = \binom{1}{1} + \binom{1}{0}$$

$$\binom{3}{1} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0}$$

$$\binom{3}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{1}$$

k

n

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Binômio de Newton

Polinômio com duas variáveis = binômino

$(a+b)^1 = a + b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

k

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Coeficiente de polinômios

Qual o coeficiente do x^2 em $(1+x)^7$?

$$(1+x)^7 = \sum_{i=0}^{7} \binom{7}{i} 1^{7-i} x^i \qquad \binom{7}{2} = \frac{7!}{5!2!} = 21$$

Qual o coeficiente do x^3 em $(3+2x)^5$?

$$(3+2x)^5 = \sum_{i=0}^{5} \binom{5}{i} 3^{5-i} 2x^i \qquad \binom{5}{3} 3^2 2^3 = \frac{5!}{2!3!} 3^2 2^3 = 720$$

Revisão

- Subconjuntos de tamanho k de um conjunto de n elementos: diferentes combinações;
- Número de combinações distintos → coeficiente binomial;
- Identidade de Pascal;
- Triângulo de Pascal;
- Binômio de Newton;
- Coeficientes de polinômios.

Exercícios do notebook

github.com/tetsufmbio/IMD0033/