Probabilidade

Teoria de conjuntos II

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Relações e operações aplicadas em conjuntos

Relação entre números:

- $=$
- $\leq$ ou $\geq$
- $<$ ou $>$

Operações entre números:

- $+$
- $-$

Relação entre conjuntos:

- $=$
- $\subseteq$ ou $\supseteq$
- $\subset$ ou $\supset$

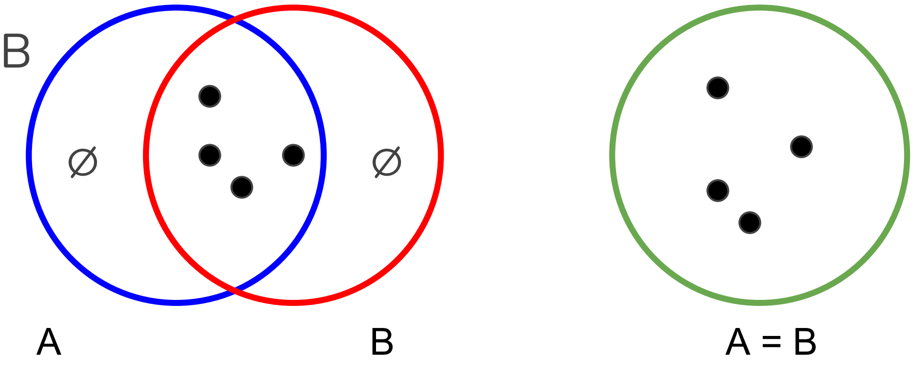
Operações entre conjuntos:

- União
- Subtração
- Interseção

Relação de igualdade

O conjunto A é dito **igual** ao conjunto B, se um contém os mesmos elementos que o outro.

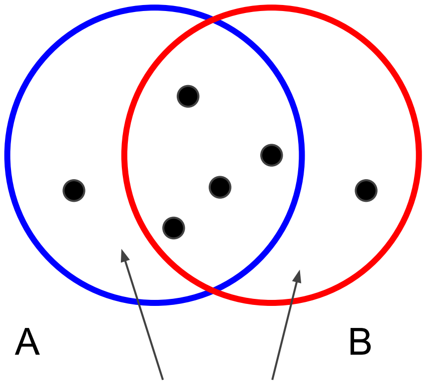
A = { 0, 1 }, B = { 1, 0 }; A = B



Relação de desigualdade

O conjunto A é dito **diferente** do conjunto B, se um contém pelo menos um elementos distinto do outro.

A = { 0, 1 }, B = { 1, 2 }; A ≠ B



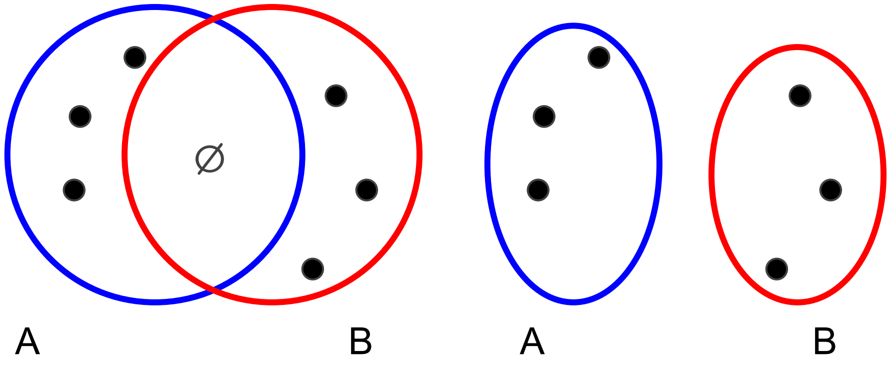
Pelo menos um deles não é ∅

Conjuntos disjuntos

A disjunção de A e B ocorre quando não há elementos elementos em comum entre A e B;

Exemplo:

- $\{ 0, 1 \} \cap \{ 2, 3 \} = \varnothing$
- $[3, 4) \cap [4, 5] = \varnothing$



Subconjuntos (⊆)

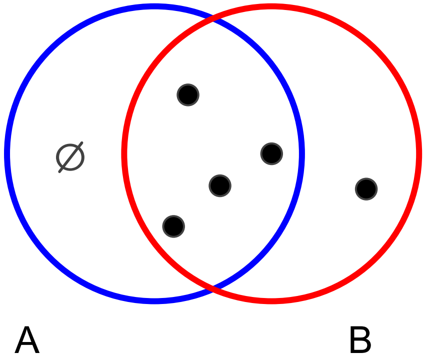
Generalização da relação $\leq$;

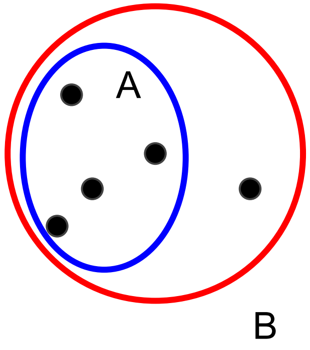
Se todos os elementos de A pertencerem a B, então A é um subconjunto de B;

- $A \subseteq B$

Exemplo:

- $\{0\} \subseteq \{0, 1\}$
- $\{0\} \subseteq \{0\}$





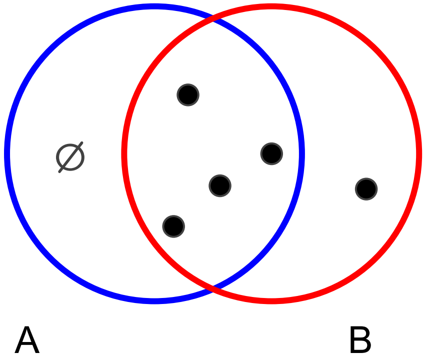
Superconjuntos (⊇)

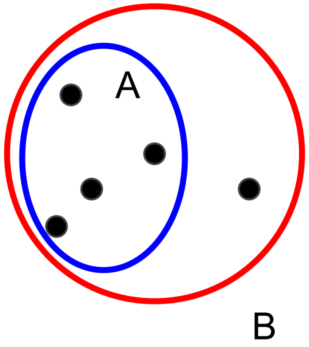
Generalização da relação $\geq$;

B é superconjunto de A se B contiver todos os elementos de A;

- $B \supseteq A$

Exemplo:

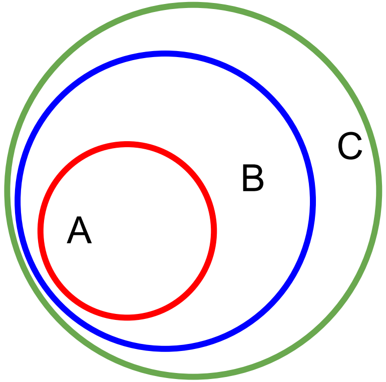


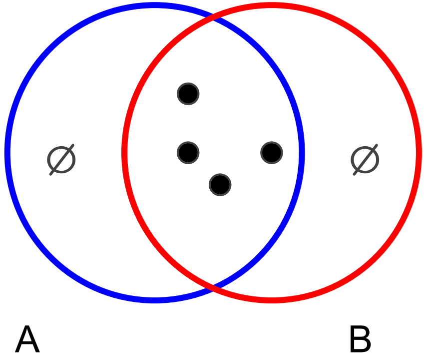


- $\{0, 1\} \supseteq \{0\}$
- $\{0\} \supseteq \{0\}$

Propriedades do subconjunto

- $\varnothing \subseteq A \subseteq A \subseteq \Omega$
- $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ (transitividade)
- $A \subseteq B$, $B \subseteq A$, então $A = B$





(Sub ou Super)conjuntos estritos (⊂)

Se A é subconjunto de B e A é diferente de B, então A é um subconjunto estrito de B;

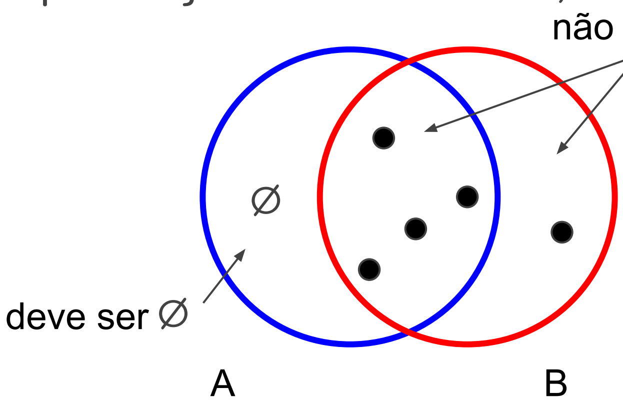
- $A \subset B$

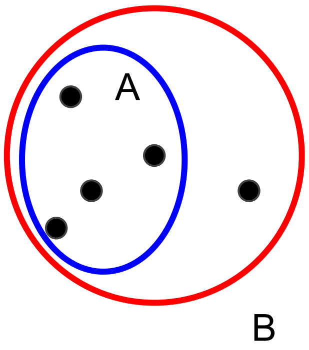
Da mesma forma, B é superconjunto estrito de A;

- $B \supset A$

Exemplo:

- $\{0\} \subset \{0, 1\}$
- $\{0, 1\} \supset \{0\}$





∈ (pertence a) vs ⊆ (contém)

- $\in$ → relação entre um elemento e um conjunto;
  - $x \in A$ → elemento x pertence ao conjunto A;
  - $0 \in \{ 0 , 1 \}$
  - $\{ 0 \} \notin \{ 0, 1 \}$

- $\subseteq$ → relação entre dois conjuntos;
  - $A \subseteq B$ → o conjunto A é um subconjunto do conjunto B
  - $\{ 0 \} \subseteq \{ 0 , 1 \}$
  - $0 \not\subseteq \{ 0, 1 \}$

Relação entre conjuntos em Python (igualdade e disjunção)

```
set1 = { 0, 1 }
set2 = set({ 0, 1 })
set3 = { 1, 0, 1 }
set4 = { 0, 2 }
```

```
# Igualdade (==)
set1 == set2 # true
set2 == set3 # true
set3 == set4 # false
```

```
# Diferente(!=)
set1 != set2 # false
set2 != set3 # false
set3 != set4 # true
```

```
# Disjunção (isDisjoint())

set1.isDisjoint(set2) # false
set1.isDisjoint({2})  # true
```

Relação entre conjuntos em Python (subconjunto e superconjunto)

```
set1 = { 0 }
set2 = set({ 0, 1 })
set3 = { 1, 0, 1 }
```

```
# ⊆ (<= ou issubset())
set1 <= set2 # true
set2.issubset(set3) # true
```

```
# ⊂ (<)
set1 < set2 # true
set2 < set3 # false
```

```
# ⊇ (>= ou issuperset())
set2 >= set1 # true
set3.issuperset(set2) # true
```

```
# ⊃ (>)
set2 > set1 # true
set3 > set2 # false
```

Operações aplicadas em conjuntos

Operações entre números:

- +
- -

Operações entre conjuntos:

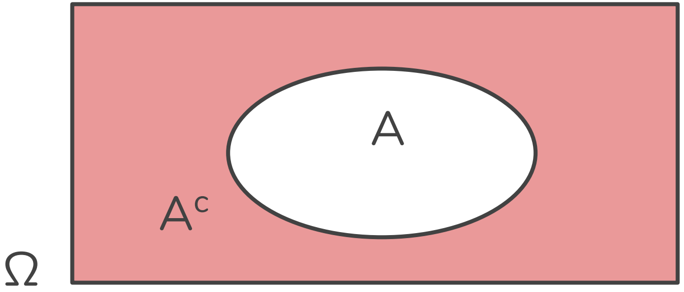
- União
- Subtração
- Interseção

Complemento

$\Omega \rightarrow$ conjunto de todos os elementos possíveis;

Complemento do conjunto A (A^c) $\rightarrow$ todo elemento em Ω que não está no A;

Em termos lógicos: $A^c = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$



$\Omega = \{ 0, 1\}$

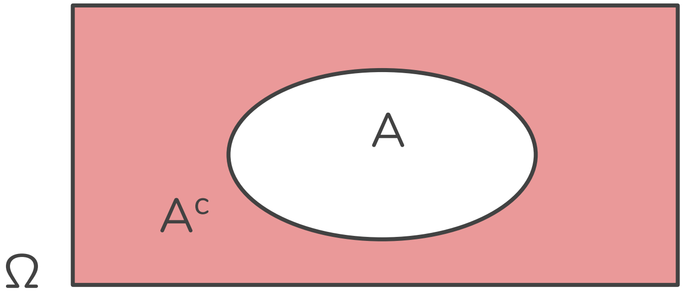
$\{ 0 \}^c = \{ 1 \}$

$\{ 0, 1 \}^c = \varnothing$

$\{ \varnothing \}^c = \Omega$

Propriedades do complemento

- $\Omega^c = \varnothing$ $\varnothing^c = \Omega$
- A e A^c são sempre disjuntos
- $(A^c)^c = A \rightarrow$ involução



Interseção (∩)

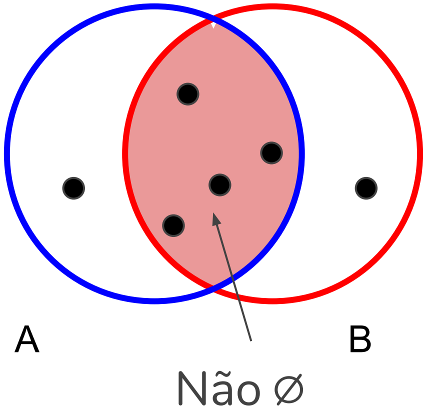
A interseção de A e B é um conjunto de elementos que simultaneamente pertencem ao conjunto A e ao conjunto B;

Em termos lógicos: $A \cap B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \wedge x \in B \}$

e

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \cap \{ 1, 2 \} = \{1\}$
- $[3, 4] \cap [2, 5] = [3, 4]$



União (U)

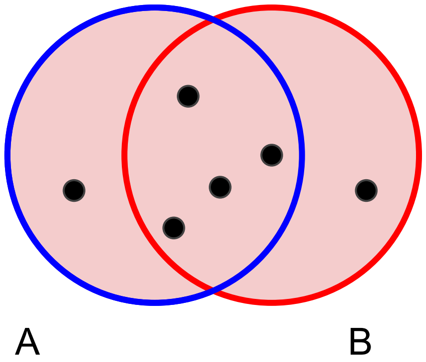
União dos conjuntos A e B corresponde a todos os elementos que pertencem aos conjuntos A e B.

Em termos lógicos: $A \cup B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \vee x \in B \}$

ou

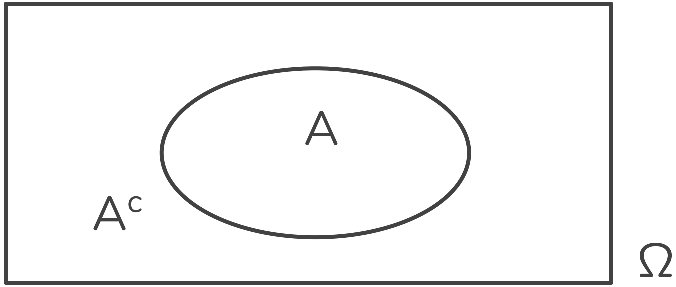
Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \cup \{ 1, 2 \} = \{0, 1, 2\}$
- $[3, 4] \cup [2, 5] = [2, 5]$



Propriedades (∪ e ∩)

Identidade	$A \cap \Omega = A$	$A \cup \Omega = \Omega$
Limite universal	$A \cap \varnothing = \varnothing$	$A \cup \varnothing = A$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Complemento	$A \cap A^c = \varnothing$	$A \cup A^c = \Omega$



∪ e ∩ em Python

```
A = { 1, 2 }

B = { 2, 3 }
```

```
# União

print(A | B)
{ 1, 2, 3 }

print(A.union(B))
{ 1, 2, 3 }
```

```
# Interseção

print(A & B)
{ 2 }

print(A.intersection(B))
{ 2 }
```

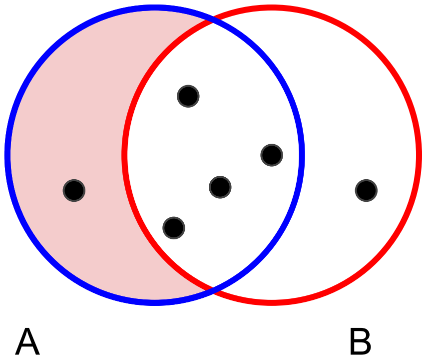
Subtração de conjuntos

Subtração do conjunto A por B (A - B) corresponde a todos os elementos em A que não estejam em B.

Em termos lógicos: $A - B = \{ x \in \Omega \mid x \in A \land x \notin B \}$

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} - \{ 1 \} = \{0\}$
- $[3, 4] - [2, 5] = \varnothing$



$A - B = A \cap B^c$

Subtração simétrica (Δ)

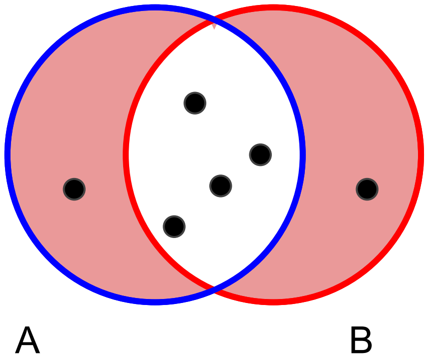
Subtração simétrica de dois conjuntos correspondem aos elementos que ocorrem exatamente em um dos conjuntos.

Em termos lógicos: $A \, \Delta \, B = \{ x \in \Omega \mid (x \in A \lor x \notin B) \land (x \notin A \lor x \in B)\}$

Exemplos:

- $\{ 0, 1 \} \, \Delta \, \{ 1, 2 \} = \{0, 2\}$
- $[0, 2] - [1, 3] = [0, 1) \cup (2, 3]$

$A \, \Delta \, B = (A-B) \cup (B-A)$



Diferença e diferença simétrica em Python

```
A = { 1, 2 }
B = { 2, 3 }
```

```
# Diferença

print(A - B)
{ 1 }

print(B.difference(A))
{ 3 }
```

```
# Dif. simétrica

print(A ^ B)
{ 1, 3 }

print(A.symmetric_difference(B))
{ 3, 1 }
```

Exercícios do notebook

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Propriedades ($\cup$ e $\cap$)

Comutativo	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Associativo	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
Distributivo	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$