Probabilidade

Distribuição discreta

Prof. Dr. Tetsu Sakamoto
Instituto Metrópole Digital - UFRN
Sala A224, ramal 182
Email: tetsu@imd.ufrn.br

Slides e notebook em:

github.com/tetsufmbio/IMD0033/

Na aula passada

Variância;

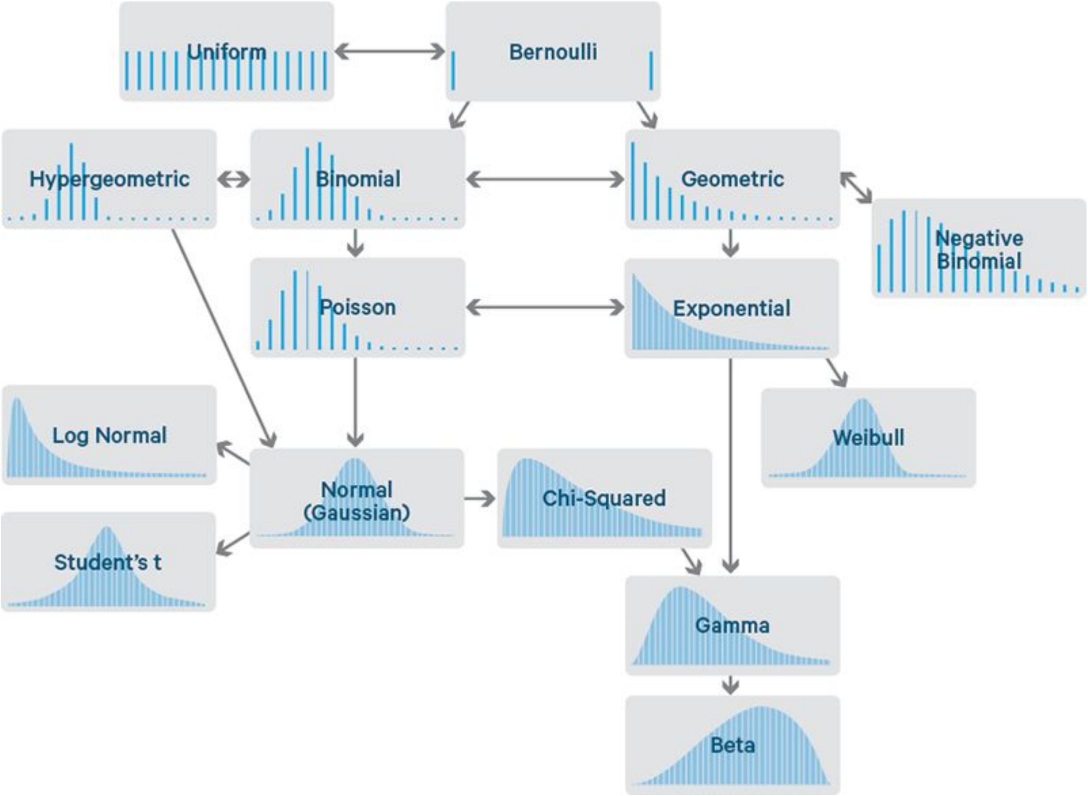
$$\sigma^2 = V(X) = E(X-\mu)^2$$
$$= E(X^2) - (E(X))^2$$

Esperança e variância com duas variáveis aleatórias;

Covariância.

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Família de distribuição



- Motivação
- Aplicação
- Fórmula
- Visualização
- Exemplos
- Propriedades

Para demonstrar que uma certa função é uma distribuição de probabilidades...

1. Não deve haver valores negativos;

2. Os valores devem somar 1.

Distribuição de Bernoulli

Distribuição não-trivial mais simples;

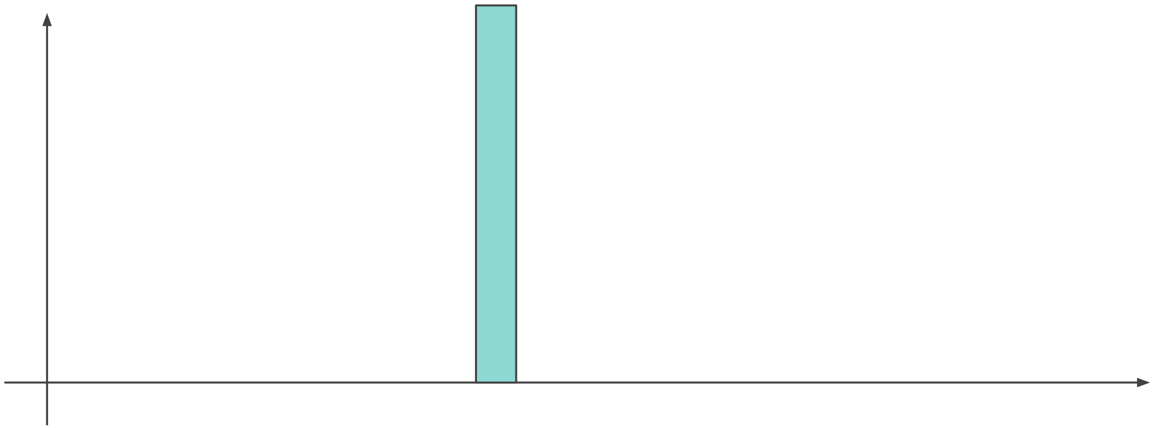
Base para várias outras distribuições;

Propriedades:

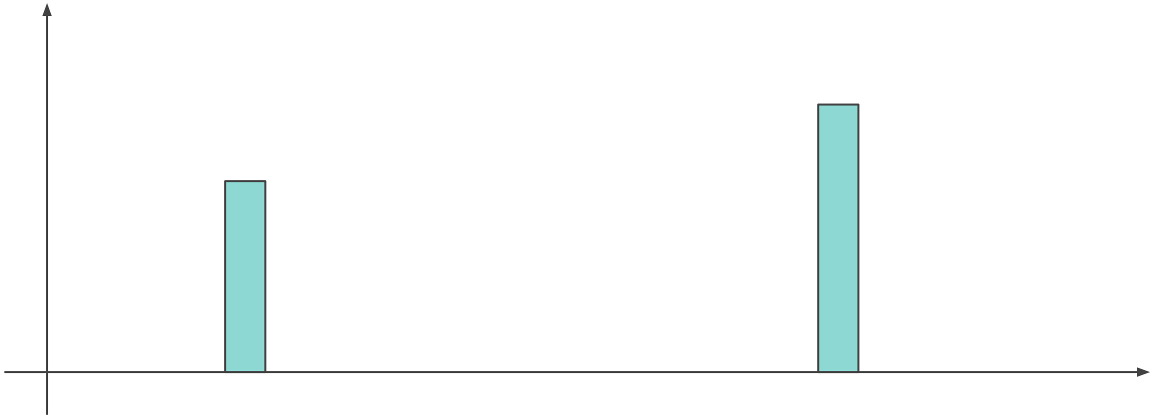
- Média
- Variância
- Desvio padrão

Experimentos repetitivos

Distribuição mais simples



Distribuição mais simples não-trivial

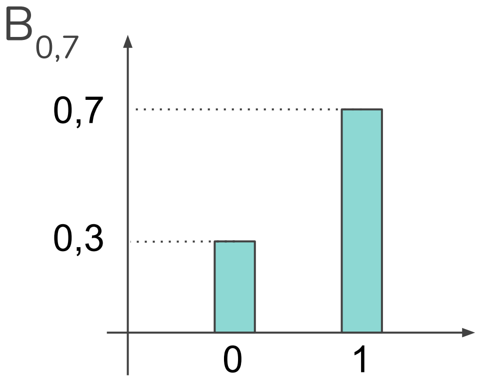


Distribuição de Bernoulli

Distribuição de Bernoulli

B_p, $0 \leq p \leq 1$

Dois valores	0	1
probabilidade	1-p	p



Somatória das probabilidades = 1?

$P(0) + P(1) = 1 - p + p = 1$

$X \sim B_p$ (Variável aleatória X distribuído de acordo com a distribuição de Bernoulli)

Quem se importa com apenas dois valores?

Versão binária de eventos complexos:

- Produtos: 80 bons e 20 defeituosos
  - Selecione um, bom ou ruim → $\sim B_{0,8}$
- Próximo bebê será menino
  - $\sim B_{0,5}$

Experimentos repetitivos

- Base para outras distribuições importantes
  - Binomial, Geométrica, Poisson, Normal...

Média de B_p

$X \sim B_p$ $\quad$ $p(0) = 1 - p$ $\quad$ $p(1) = p$

$E(X) = \sum p(x).x = (1-p).0 + p.1 = p$

$X \sim B_{0,8} \rightarrow E(X) = 0{,}8$

$E(X) = P(X=1) \rightarrow$ Fração de vezes que é esperado observar 1

Variância de B_p

$X \sim B_p$ $p(0) = 1 - p$ $p(1) = p$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

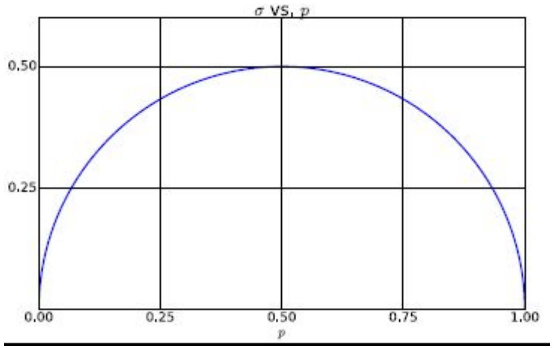
$\sum p(x^2).x^2 - p^2 = (p(1).1 + p(0).0) - p^2$

$= p - p^2$

$= p(1-p)$

$V(X) = pq$ $\sigma = \sqrt{pq}$

p	EX	V(X)	σ
0	0	0	0
1	1	0	0
½	½	¼	½



Experimentos independentes

Uma das importância da distribuição de Bernoulli se deve aos experimentos múltiplos;

O mais comum, é que estes experimentos sejam independentes;

$0 \leq p \leq 1$ $\quad X_1, X_2, X_3 \sim B_p$ $\quad q = 1- p$

$P(110) = p^2q \quad = P(101) = P(011)$

De forma geral, $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n \sim B_p$

$x^n = x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in \{0,1\}^n$ $\quad n_0 \rightarrow \#\ 0s$ e $n_1 \rightarrow \#\ 1s$

$P(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n) = p^{n1}q^{n0}$ $\quad P(10101) = p^{n1}q^{n0} = p^3q^2$

Exemplos

Distribuição	Sequência típica	Descrição	Probabilidade
B_0	0000000000	Constante 0	$1^{10} = 1$
B_1	1111111111	Constante 1	$1^{10} = 1$
$B_{0,8}$	1110111011	80% de 1s	$0,8^8.0,2^2$
$B_{0,5}$	1010101010	50% de 1s	$0,5^{10}$

Distribuição Binomial

Vários experimentos Bernoulli

Conta o número de sucesso em **n** experimentos Bernoulli

P(sucesso) = p   P(falha) = q = 1 - p

$B_{n,p}$ ou $B_{p,n}$ → distribuição do número de sucessos

n → número de jogadas de moeda

p(cara) → p

$B_{n,p}$ → distribuição do número de caras

Distribuição Binomial

Aplicações

- Resposta positiva a um medicamento
- Componentes com defeitos
- Moedas

$B_{n,p}$ - n pequeno

n experimentos B_p independentes

P(Sucesso) = p(1) = p   P(Falha) = p(0) = 1 -p

Bn,p(k) - probabilidade de k sucesso

n = 0

k	$B_{p,0}(k)$
0	1

n = 1

k	$B_{p,1}(k)$
0	q
1	p

n = 2

k	seq	$B_{p,1}(k)$
0	00	q^2
1	01,10	2pq
2	11	p^2

$B_{n,p}$ - n e k de modo geral

n experimentos B_p independentes

P(Sucesso) = p(1) = p   P(Falha) = p(0) = 1 -p

Bn,p(k) - probabilidade de k sucesso   # sucesso $0 \leq k \leq n$

Se eu tenho **k** sucesso, eu tenho **n - k** falhas

Probabilidade de uma sequência com k sucesso = $p^k q^{n-k}$

Número de sequências que possui k sucesso: $\binom{n}{k}$

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

É de fato uma distribuição?

$$B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

1. Não deve haver valores negativos;

   $0 \leq k \leq n$ $\qquad$ $0 \leq p \leq 1$

2. Os valores devem somar 1.

$$\sum_{k=0}^{n} B_{n,p}(k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= (p+q)^n = 1^n = 1$$

Teorema Binomial

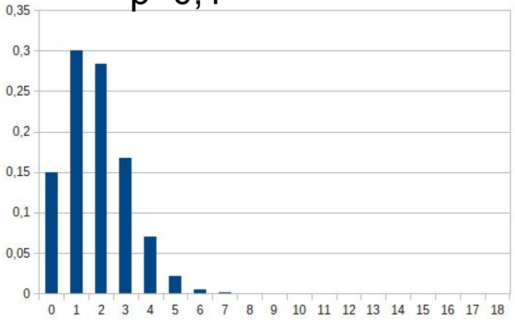
$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

Exemplos

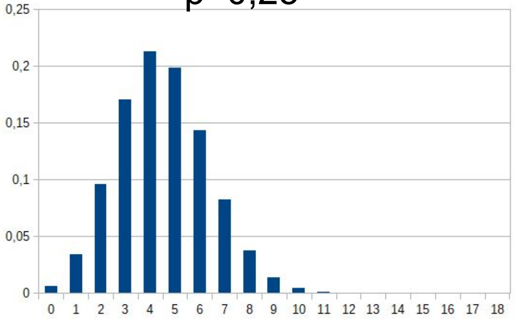
n=18

$B_{p,18}(k)$

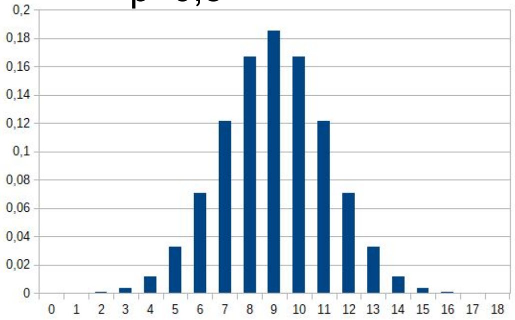
p=0,1



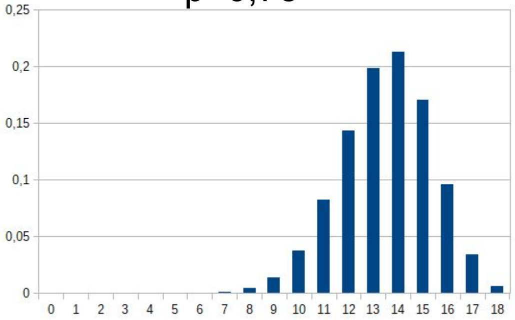
p=0,25



p=0,5



p=0,75



Múltiplas escolhas

Um exame possui 6 questões de múltiplas escolhas, cada um contendo 4 alternativas.

Em cada questão, o estudante seleciona de forma aleatória uma das 4 alternativas.

Para passar, ele necessita 4 ou mais questões corretas. Qual a probabilidade dele passar?

Múltiplas escolhas

Um exame possui 6 questões de múltiplas escolhas, cada um contendo 4 alternativas.

Em cada questão, o estudante seleciona de forma aleatória uma das 4 alternativas.

Para passar, ele necessita 4 ou mais questões corretas. Qual a probabilidade dele passar?

$$P(4) = \binom{6}{4} . \frac{1}{4}^{4} . \frac{3}{4}^{2} = 0,0329$$

$$P(5) = \binom{6}{5} . \frac{1}{4}^{5} . \frac{3}{4}^{1} = 0,00439$$

$$P(6) = \binom{6}{6} . \frac{1}{4}^{6} . \frac{3}{4}^{0} = 0,000244$$

$$P(X \geq 4) = P(4) + P(5) + P(6) = 0,03759$$

Média de $B_{n,p}$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} kP(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$= k_0\binom{n}{k_0}p^{k_0} q^{n-k_0} + k_1\binom{n}{k_1}p^{k_1} q^{n-k_1} + \ldots$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{n!}{k!(n-k)!}\right)p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\right)p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right)p.\,p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}\right).\,p^{k-1} q^{n-k}$$

$$= np\sum_{b=0}^{n} \left(\frac{(a)!}{(b)!(a-b)!}\right).\,p^{b} q^{a-b}$$

$$= np\sum_{b=0}^{n} \binom{a}{b}.\,p^{b} q^{a-b}$$

$$= np(p+q)^n$$

$$= np$$

Variância de $B_{n,p}$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

Para calcular a variância é mais fácil calcular a E(X(X-1)) para obter $E(X^2)$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

$$\begin{aligned}
E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{n} x(x-1)\binom{n}{k} p^k q^(n-k) \\
&= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)(\frac{n!}{x!(n-x)!})p^x q^{n-x} \\
&= \sum_{x=2}^{n} x(x-1)(\frac{n(n-1)(n-2)!}{x(x-1)(x-2)!(n-x)!})p^2 p^{x-2} q^{n-x} \\
&= p^2 n(n-1) \sum_{x=2}^{n} (\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!})p^{x-2} q^{n-x} \\
&= p^2 n(n-1) \sum_{b=0}^{n} (\frac{(a)!}{(b)!(a-b)!})p^b q^{a-b} \\
&= p^2 n(n-1)(p+q)^n \\
&= p^2 n(n-1)
\end{aligned}$$

Variância de $B_{n,p}$

$$E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$
$$p^2 n(n-1) = E(X^2) - np$$
$$E(X^2) = p^2 n(n-1) + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$V(X) = p^2 n(n-1) + np - n^2 p^2$$
$$V(X) = p^2 n^2 - p^2 n + np - n^2 p^2$$
$$V(X) = np(1-p)$$
$$V(X) = npq$$

Revisão

Distribuição de Bernoulli

- Média: p
- Variância: pq

Distribuição Binomial

- Média: np
- Variância: npq