Note

以下答案均为个人作答，很可能不正确，欢迎和我讨论

统计算法期中复习：

- 如何求数值积分：F(x)，其中F为N(0,1)的累积分布函数；同时让数值积分更稳定

$$用MonteCarlo方法，同时运用对偶变量法，控制变量法，重要抽样法，分层抽样法等进行方差缩减$$
$$当然数值积分中的Gauss积分也可以使用$$

数学分析期中复习：

- $f(x)$可微，$\forall a \le x_1 < x_2 \le b$, $f(x_1) \le f(x_2)$，且$f'(x)$仅在有限个点上为 0。求证：f(x)在[a,b]上严格递增。

$$用积分证明$$

- $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$显然连续，可导$$

- $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0 & ,x=0 \end{cases}$在0处的连续，可微性

$$连续但不可导$$

- 判断二元函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}$在 (0,0) 处是否连续、可导以及可微。

$$连续性显然，可导是因为\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0, 不可微是因为：\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}不趋向于0$$

- 求极限 $\lim_{x\to a}\frac{sinx-sina}{x-a}$。

$$洛必达或者泰勒展开$$

- $\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\frac{1/4}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$

$$换元\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta, I=1/4*\int_0^1\int_0^\pi 2\pi\rho^2 sin\varphi/\rho^2 d\varphi = 2\cdot 2\pi\cdot 1/4=\pi \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases}$$

- 求 $\int_0^\infty x^2\left(1+x^{2024}\right)e^{-x}dx$。

$$记对于x^ke^{-x}积分为F(k), 则有F(k)=kF(k-1)$$

- 求 $\int_{-k}^k x^6\left(1+x^{2024}\right)(e^x-e^{-x})dx$。

$$奇函数，积分为0$$

线性代数期中复习：

- 设 A 是一个 $n\times m$ 实数矩阵, $\mathbf{x}\in R^m$, 证明 $A\mathbf{x}=0 \Leftrightarrow A^\top A\mathbf{x}=0.$

$$PF: \begin{array}{l} \forall\vec{x}\text{ st. }A\vec{x}=\overrightarrow{0}\Rightarrow A^\top A\vec{x}=\overrightarrow{0} \\ \forall\vec{x}\text{ st. }A^\top A\vec{x}=\overrightarrow{0}\Rightarrow \vec{x}^\top A^\top A\vec{x}=0=\|A\vec{x}\|_2^2\Rightarrow A\vec{x}=\overrightarrow{0}. \end{array} \quad 证毕$$

- 若 $A_1^\top A_1 B A_2^\top A_2=0$, 则 $A_1 B A_2^\top=0$, 其中 A_1, A_2, B 都是矩阵。

$$\text{解：记} S=A_1 B A_2^\top \text{于是} \operatorname{tr}\left(S S^\top\right)=\sum_{i, j}\left|S_{i j}\right|^2$$

$$\text{且} \operatorname{tr}\left(S S^\top\right)=\operatorname{tr}\left(A_1 B A_2^\top A_2 B^\top A_1^\top\right)=\operatorname{tr}\left(A_1^\top A_1 B A_2^\top A_2 B^\top\right)=\operatorname{tr}\left(\bigcirc \cdot B^\top\right)=0$$

$$\text{于是} S=0$$

- 假设 $A_{n \times m}$ 有奇异值分解 $A=U D V^\top$, 其中 U, V, D 分别是 $n \times r, m \times r, r \times r$矩阵 $(r=\operatorname{rank}(A))$,满足 $U^\top U=V^\top V=I_r, D=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}\right)$(可逆), 证明 $C(U)=C(A), C(V)=C\left(A^\top\right)$ 。

$$\text{注}: C(A):=\left\{A \vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^m\right\}=\operatorname{span}\left\{\overrightarrow{a_i} \mid A=\left(\overrightarrow{a_1}, \cdots, \overrightarrow{a_m}\right)\right\}$$

$$\text{定理}: C(A) \oplus \operatorname{Ker}\left(A^\top\right)=\mathbb{R}^n. \text{其中} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\left\{\vec{y} \mid A^\top \vec{y}=\overrightarrow{0}\right\}$$

$$PF:$$

$$(1) A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow V^\top V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2) U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow V D U^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \text{于是} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{Ker}\left(U^\top\right) \text{于是} C(A)=C(U).$$

- 假设 A 是一个实数矩阵, $P_A=A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top$为对应的投影阵, 证明 $C\left(P_A\right)=C(A)$。

$$PF: \text{下证} \operatorname{ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{ker}\left(P^\top\right);$$

$$\operatorname{Rmk}: P=P^\top; P^2=P$$

$$(1) \forall \vec{x} st. A^\top \vec{x}=0 \Rightarrow P \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2) \forall \vec{x} st. P \vec{x}=0 \Leftrightarrow A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow A^\top A\left(A^\top A\right)^{-1} A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0} \Rightarrow A^\top \vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker}\left(A^\top\right)=\operatorname{Ker}(P)$$

$$\text{进而} C(A)=C\left(P^\top\right)=C(P)$$

- 假设矩阵 A{*n \times m}=B*{n \times r} C*{r \times m} , 假设 C 是行满秩的, 证明 C(A)=C(B), P*{A}=P_{B} 。

$$\text{下证：}\operatorname{Ker}\left(A^{\top}\right)=\operatorname{Ker}\left(B^{\top}\right)\text{进而}C(A)=C(B)$$

$$(1)\forall\vec{x}\quad A^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow C^{\top}B^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}\Rightarrow\left(CC^{\top}\right)B^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}\stackrel{CC^{\top}\text{政}}{=}B^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$(2)\forall\vec{x}\quad B^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}\Rightarrow A^{\top}\vec{x}=\overrightarrow{0}$$

$$\text{下证：}P_A=P_B\text{：即证列向量空间的投影矩阵唯一}$$

$$PF\text{：设}\left\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n\right\}\text{为}\mathbb{R}^n-\text{组基列向量空间}C=\operatorname{span}\left\{\overrightarrow{a_1},\cdots,\overrightarrow{a_r}\right\}$$

$$\text{设}P,Q\text{为向}C\text{空间上的投影矩阵}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\forall\quad i\leqslant r & P\overrightarrow{a_i}=Q\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{a_i}\\ \forall\quad i\geqslant r+1 & P\overrightarrow{a_i}=Q\overrightarrow{a_i}=\overrightarrow{0}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\text{于是}(P-Q)\left(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n\right)=O_{n\times n}$$

$$\xrightarrow{\left(\overrightarrow{a_i}\right)\text{是基}}\quad P-Q=O_{n\times n}\Rightarrow P=Q\quad\Rightarrow\text{投影矩阵是唯一的}$$

- 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$,假设 $A_1^{\top}A_2=0$, 证明$P_A=P_{A_1}+P_{A_2}$。

$$\text{由题：}C(A)=C\left(A_1\right)\oplus C\left(A_2\right)$$

$$A^{\top}A=\begin{pmatrix}A_1^{\top}\\A_2^{\top}\end{pmatrix}\left(A_1A_2\right)=\begin{pmatrix}A_1^{\top}A_1 & 0\\ 0 & A_2^{\top}A_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_A=\left(A_1,A_2\right)\begin{pmatrix}\left(A_1^{\top}A_1\right)^{-1} & 0\\ 0 & \left(A_2^{\top}A_2\right)^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^{\top}\\A_2^{\top}\end{pmatrix}=P_{A_1}+P_{A_2}$$

- 按列划分 $A_{n\times m}=(A_1,A_2)$, 令$A_2^{\perp}=A_2-P_{A_1}A_2$, 证明 $P_A=P_{A_1}+P_{A_2^{\perp}}$

$$(1)A_1^{\top}A_2^{\perp}=A_1^{\top}A_2-A_1^{\top}P_{A_1}\cdot A_2=0$$

$$(2)\text{记}\widetilde{A}=\left(A_1,A_2^{\perp}\right)=\left(A_1,A_2\right)\begin{pmatrix}I & -P_{A_1}\\ 0 & I\end{pmatrix}$$

$$\text{于是}C(\widetilde{A})=C(A)$$

$$\text{进而}P_A=P_{\widetilde{A}}=P_{A_1}+P_{A_2^{\perp}}(\text{由前几题可知})$$

- 首先介绍一些记号或定义:
  (1) A $\geq$0 (A 是半正定矩阵); A>0 (A 是正定矩阵);
  $A\geq B\Leftrightarrow A-B\geq 0; A>B\Leftrightarrow A-B>0$ 。
  (2) 定义平方根矩阵: 若 $A_{n\times n}\geq 0$的谱分解为 $A=O\Lambda O^{\top}$, 其中对角阵 $\Lambda=\operatorname{diag}\left(\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$ 的对角元为 A 的特征根, O 是正交矩阵, 则半正定矩阵的 (唯一) 平方根定义为 $A^{1/2}=O\Delta O^{\top}$, 其中 $\Delta=\operatorname{diag}\left(\sqrt{\lambda_1},\ldots,\sqrt{\lambda_n}\right)$。定义 $A^{-1/2}=\left(A^{1/2}\right)^{-1}$。证明如下事实:
    - (a) 以 $\lambda(A)$ 表示 A 的任一特征根, 则 $A\leq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\leq 1$,且 $A\geq I_n\Leftrightarrow\lambda(A)\geq 1$.

$$(a)\begin{cases}I_n-A\geqslant 0\ (\text{半正定})\ \Rightarrow\lambda(I-A)\geqslant 0\Rightarrow\lambda(A)\leqslant 1\\ A-I_n\geqslant 0\ (\text{半正定})\ \Rightarrow\lambda\left(A-I_n\right)\geqslant 0\Rightarrow\lambda(A)\geqslant 1\end{cases}$$

    - (b) 若 $0<A\leq I_n$, 则$A^{-1}\geq I_n$.

$$(b)ifA\text{正定};I_n-A\text{半正定}\Rightarrow\lambda(A)\leqslant 1$$

$$\Rightarrow\lambda\left(A^{-1}\right)\geqslant 1\Rightarrow A^{-1}-I_n\geqslant 0$$

    - (c) 若 $A\geq B>0$, 则对任何$k\times n$ 矩阵 C 有 $CAC^{\top}\geq CBC^{\top}\geq 0$, 特别地, $B^{-1/2}AB^{-1/2}\geq I_n$.

$$(c). A-B \geqslant 0 \Rightarrow \forall C, C(A-B)C^{\top} \geqslant 0$$

$$\text{这是因为} \vec{x}^{\top} C(A-B)\vec{C}^{\top}\vec{x}=y^{\top}(A-B)y \geqslant 0$$

- (d) 若 $A \geq B>0$,则 $B^{-1} \geq A^{-1}>0$。

$$\begin{gathered}(d) if A-B \geqslant 0 \text{且} A \cdot B \text{正定} \\ \Rightarrow A\text{，}B\text{同时正交对解化后,} \\ \text{记为} \operatorname{diag}\left(\lambda_i^A\right) \operatorname{diag}\left(\lambda_i^B\right) \\ \text{有} \lambda_i^A>\lambda_i^B>0(i=1, \cdots, n)(\text{对应该置的} \lambda) \\ \Rightarrow \quad \text{于是 } 0<1 / \lambda_i^A \leqslant 1 / \lambda_i^B \\ \Rightarrow \quad 0<A^{-1} \leqslant B^{-1}\end{gathered}$$

- (e) 若$A \geq B>0$, 则 $A^{1 / 2} \geq B^{1 / 2}>0$。

$$\begin{gathered}(e)\text{正交分解}(\text{因} AB \text{正定} \Rightarrow \text{可以同时正交对角化，即用同一个正交矩阵} P \text{来对角化}) \\ A=P^{\top} \operatorname{diag}\left(\lambda_i^A\right) P ; \quad B=P^{\top} \operatorname{diag}\left(\lambda_i^B\right) P \\ \text{有 } \lambda_i^A \geqslant \lambda_i^B \quad i=1, \cdots, n \\ \text{于是 } \left(\lambda_i^A i^{1 / 2} \geqslant\left(\lambda_i^B\right)^{1 / 2} \quad \text{进而 } A^{\frac{1}{2}}-B^{\frac{1}{2}} \geqslant 0\right.\end{gathered}$$

(待完成)举例说明 $A \geq B \geq 0$ 未必蕴含$A^2 \geq B^2$ 。

- $\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & D \end{pmatrix}$正定, 求证:$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix} \leq |A||D|$

$Lemma$: 对于两个对称阵A，而言：若有$AB=BA$, 或者A，B有一个是正定矩阵，则二者可以同时正交对角化

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B^T & D \end{vmatrix}=det(A) * det(D-B^T A^{-1} B)$$

$$\text{显然，} A, D \text{正定；于} \tilde{A}=B^T A^{-1} B \text{正定；于是} D \text{与} \tilde{A} \text{可以同时正交对角化}$$

$$\text{于是} det(D)>=det(D-\tilde{A}); \text{证毕}$$

- $A=\beta \beta^t+\mu I$，分析A的特征值及其重数

$$\beta \beta^t \text{的非零特征值为} \|\beta\|^2, \text{进而} A \text{的特征值为} n-1 \text{重} \mu, 1 \text{重} \mu+\|\beta\|^2$$

- 3维实对称矩阵的一个二重非零特征根为 λ, 对应两个特征向量为 $(0,-1,-1),(1,0,-1)$, 求另一特征根对应的特征向量

根据对阵实对称阵的性质，可以知道第三个特征向量和不同特征值的特征向量是正交的，于是$answer=(1,-1,1)$

- A为实矩阵且 $A^k=\mathbb{0}$,k为整数, 求A的特征值

$$\text{化零多项式} x^2=0\text{，于是} A \text{的特征值只有} 0$$

- $A^k=\mathbb{0}$, I_n+A是否可逆?

$$\text{显然可逆，其逆为} I_n+A+A^2+...+A^{k-1}$$

- 问: $ABx=0$,$BAy=0$是否有一定有解? 期中$x \in R^n ; y \in R^m ; A \in R^{n * m} ; B \in R^{m * n}$,m>n

前者不一定，后者一定有解

概统期中复习：

- 一个均匀的骰子，投掷许多次

  (1) 6 次就集齐{1,...,6}的概率？ (2) 7 次就集齐{1,...,6}的概率？ (3) 8 次就集齐{1,...,6}的概率？ (4) 平均需几次能够集齐{1,...,6}?

$tips: X_i$定义为在出现$i-1$个数字之后，首次出现第i个新的数字所需要的次数，$X_i iid$几何分布$Geo(1-(i-1)/6)$

$$1.P_1 = P(X_i = 1, i = 1, .., 6) = 1 * \frac{5}{6} * \frac{4}{6} * \frac{3}{6} * \frac{2}{6} * \frac{1}{6}$$

$$2.P_2 = P(5个i, 1个j, X_i = 1, X_j = 2) = \sum \frac{i}{6} * P_1$$

$$3.P_3 = P(4个i, 2个j, X_i = 1, X_j = 2; 或者5个i, 1个j, X_i = 1, X_j = 3) = P_1 * \sum_{i,j} \frac{ij}{36} + P_1 * \sum_i (\frac{i}{6})^2$$

$$P_1 * ()4.E[\sum_{i=1}^{6} X_i] = \sum_{i=1}^{6} \frac{6}{i}$$

- 在某城市，有两种颜色的汽车：红色和蓝色。红色汽车占所有汽车的 70%，蓝色汽车占 30%。老王的视力不是很好，他在观察到的情况下有 90% 的概率正确地辨别出红色汽车，但也有 20% 的概率会错误地将蓝色汽车看成红色。现在，老王说他看到了一辆红色的汽车。求在这种情况下，这辆汽车实际上是红色的概率。

$$贝叶斯公式$$

- 给出样本 $(x_1, x_2, x_3 ..., x_n)$ 的均值，方差无偏估计量

$$\bar{X}, S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

- $X, Y \sim N(0,1), Cov(X,Y) = \rho$求$aX + bY$和$bX - aY$的相关系数

$$lemma: cov(Ax, Bx) = AVar(x)B^t$$

- 一天的消耗量X为连续型随机变量，pdf为f(x)，初始剩余量为θ；求一天后消耗完的概率；求一天后剩余量的期望；求消耗完需要的天数的期望

$$1.P(X >= \theta)$$
$$2.E[\theta - x]$$
$$3.E[N| \sum_{i=1}^{N} X_i >= \theta]$$

微分方程期中复习：

- 求解二阶常微分方程 $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = e^x$

$$y = e^x + c_1 x + c_2$$