习题1−1

1. 设*A*=(−∞, −5)∪(5, +∞), *B*=[−10, 3), 写出*A*∪*B*, *A*∩*B*, *A*\*B*及*A*\(*A*\*B*)的表达式.

解 *A*∪*B*=(−∞, 3)∪(5, +∞),

*A*∩*B*=[−10, −5),

*A*\*B*=(−∞, −10)∪(5, +∞),

*A*\(*A*\*B*)=[−10, −5).

2. 设*A*、*B*是任意两个集合, 证明对偶律: (*A*∩*B*)*C*=*AC* ∪*BC*.

证明 因为

*x*∈(*A*∩*B*)*C*⇔*x*∉*A*∩*B*⇔ *x*∉*A*或*x*∉*B*⇔ *x*∈*AC*或*x*∈*BC*⇔ *x*∈*AC* ∪*BC*,

所以 (*A*∩*B*)*C*=*AC* ∪*BC*.

3. 设映射*f* : *X* →*Y*, *A*⊂*X*, *B*⊂*X* . 证明

(1)*f*(*A*∪*B*)=*f*(*A*)∪*f*(*B*);

(2)*f*(*A*∩*B*)⊂*f*(*A*)∩*f*(*B*).

证明 因为

*y*∈*f*(*A*∪*B*)⇔∃*x*∈*A*∪*B*, 使*f*(*x*)=*y*

⇔(因为*x*∈*A*或*x*∈*B*) *y*∈*f*(*A*)或*y*∈*f*(*B*)

⇔ *y*∈*f*(*A*)∪*f*(*B*),

所以 *f*(*A*∪*B*)=*f*(*A*)∪*f*(*B*).

(2)因为

*y*∈*f*(*A*∩*B*)⇒∃*x*∈*A*∩*B*, 使*f*(*x*)=*y*⇔(因为*x*∈*A*且*x*∈*B*) *y*∈*f*(*A*)且*y*∈*f*(*B*)⇒ *y*∈ *f*(*A*)∩*f*(*B*),

所以 *f*(*A*∩*B*)⊂*f*(*A*)∩*f*(*B*).

4. 设映射*f* : *X*→*Y*, 若存在一个映射*g*: *Y*→*X*, 使, , 其中*IX*、*IY*分别是*X*、*Y*上的恒等映射, 即对于每一个*x*∈*X*, 有*IX x*=*x*; 对于每一个*y*∈*Y*, 有*IY**y*=*y*. 证明: *f*是双射, 且*g*是*f*的逆映射: *g*=*f* −1.

证明 因为对于任意的*y*∈*Y*, 有*x*=*g*(*y*)∈*X*, 且*f*(*x*)=*f*[*g*(*y*)]=*Iy* *y*=*y*, 即*Y*中任意元素都是*X*中某元素的像, 所以*f*为*X*到*Y*的满射.

又因为对于任意的*x*1≠*x*2, 必有*f*(*x*1)≠*f*(*x*2), 否则若*f*(*x*1)=*f*(*x*2)⇒*g*[ *f*(*x*1)]=*g*[*f*(*x*2)] ⇒ *x*1=*x*2.

因此*f*既是单射, 又是满射, 即*f*是双射.

对于映射*g*: *Y*→*X*, 因为对每个*y*∈*Y*, 有*g*(*y*)=*x*∈*X*, 且满足*f*(*x*)=*f*[*g*(*y*)]=*Iy* *y*=*y*, 按逆映射的定义, *g*是*f*的逆映射.

5. 设映射*f* : *X*→*Y*, *A*⊂*X* . 证明:

(1)*f* −1(*f*(*A*))⊃*A*;

(2)当*f*是单射时, 有*f* −1(*f*(*A*))=*A* .

证明 (1)因为*x*∈*A* ⇒ *f*(*x*)=*y*∈*f*(*A*) ⇒ *f* −1(*y*)=*x*∈*f* −1(*f*(*A*)),

所以 *f* −1(*f*(*A*))⊃*A*.

(2)由(1)知*f* −1(*f*(*A*))⊃*A*.

另一方面, 对于任意的*x*∈*f* −1(*f*(*A*))⇒存在*y*∈*f*(*A*), 使*f* −1(*y*)=*x*⇒*f*(*x*)=*y* . 因为*y*∈*f*(*A*)且*f*是单射, 所以*x*∈*A*. 这就证明了*f* −1(*f*(*A*))⊂*A*. 因此*f* −1(*f*(*A*))=*A* .

6. 求下列函数的自然定义域:

(1);

解 由3*x*+2≥0得. 函数的定义域为.

(2);

解 由1−*x*2≠0得*x*≠±1. 函数的定义域为(−∞, −1)∪(−1, 1)∪(1, +∞).

(3);

解 由*x*≠0且1−*x*2≥0得函数的定义域*D*=[−1, 0)∪(0, 1].

(4);

解 由4−*x*2>0得 |*x*|<2. 函数的定义域为(−2, 2).

(5);

解 由*x*≥0得函数的定义*D*=[0, +∞).

(6) *y*=tan(*x*+1);

解 由(*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅)得函数的定义域为(*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅).

(7) *y*=arcsin(*x*−3);

解 由|*x*−3|≤1得函数的定义域*D*=[2, 4].

(8);

解 由3−*x*≥0且*x*≠0得函数的定义域*D*=(−∞, 0)∪(0, 3).

(9) *y*=ln(*x*+1);

解 由*x*+1>0得函数的定义域*D*=(−1, +∞).

(10).

解 由*x*≠0得函数的定义域*D*=(−∞, 0)∪(0, +∞).

7. 下列各题中, 函数*f*(*x*)和*g*(*x*)是否相同？为什么？

(1)*f*(*x*)=lg *x*2, *g*(*x*)=2lg *x*;

(2) *f*(*x*)=*x*, *g*(*x*)=;

(3),.

(4)*f*(*x*)=1, *g*(*x*)=sec2*x*−tan2*x* .

解 (1)不同. 因为定义域不同.

(2)不同. 因为对应法则不同, *x*<0时, *g*(*x*)=−*x*.

(3)相同. 因为定义域、对应法则均相相同.

(4)不同. 因为定义域不同.

8. 设, 求, , , *ϕ*(−2), 并作出函数*y*=*ϕ*(*x*)的图形.

解 , , , .

9. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1), (−∞, 1);

(2)*y*=*x*+ln *x*, (0, +∞).

证明 (1)对于任意的*x*1, *x*2∈(−∞, 1), 有1−*x*1>0, 1−*x*2>0. 因为当*x*1<*x*2时,

,

所以函数在区间(−∞, 1)内是单调增加的.

(2)对于任意的*x*1, *x*2∈(0, +∞), 当*x*1<*x*2时, 有

,

所以函数*y*=*x*+ln *x*在区间(0, +∞)内是单调增加的.

10. 设 *f*(*x*)为定义在(−*l*, *l*)内的奇函数, 若*f*(*x*)在(0, *l*)内单调增加, 证明*f*(*x*)在(−*l*, 0)内也单调增加.

证明 对于∀*x*1, *x*2∈(−*l*, 0)且*x*1<*x*2, 有−*x*1, −*x*2∈(0, *l*)且−*x*1>−*x*2.

因为*f*(*x*)在(0, *l*)内单调增加且为奇函数, 所以

*f*(−*x*2)<*f*(−*x*1), −*f*(*x*2)<−*f*(*x*1), *f*(*x*2)>*f*(*x*1),

这就证明了对于∀*x*1, *x*2∈(−*l*, 0), 有*f*(*x*1)< *f*(*x*2), 所以*f*(*x*)在(−*l*, 0)内也单调增加.

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间(−*l*, *l*)上的, 证明:

(1)两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2)两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

证明 (1)设*F*(*x*)=*f*(*x*)+*g*(*x*). 如果*f*(*x*)和*g*(*x*)都是偶函数, 则

*F*(−*x*)=*f*(−*x*)+*g*(−*x*)=*f*(*x*)+*g*(*x*)=*F*(*x*),

所以*F*(*x*)为偶函数, 即两个偶函数的和是偶函数.

如果*f*(*x*)和*g*(*x*)都是奇函数, 则

*F*(−*x*)=*f*(−*x*)+*g*(−*x*)=−*f*(*x*)−*g*(*x*)=−*F*(*x*),

所以*F*(*x*)为奇函数, 即两个奇函数的和是奇函数.

(2)设*F*(*x*)=*f*(*x*)⋅*g*(*x*). 如果*f*(*x*)和*g*(*x*)都是偶函数, 则

*F*(−*x*)=*f*(−*x*)⋅*g*(−*x*)=*f*(*x*)⋅*g*(*x*)=*F*(*x*),

所以*F*(*x*)为偶函数, 即两个偶函数的积是偶函数.

如果*f*(*x*)和*g*(*x*)都是奇函数, 则

*F*(−*x*)=*f*(−*x*)⋅*g*(−*x*)=[−*f*(*x*)][−*g*(*x*)]=*f*(*x*)⋅*g*(*x*)=*F*(*x*),

所以*F*(*x*)为偶函数, 即两个奇函数的积是偶函数.

如果*f*(*x*)是偶函数, 而*g*(*x*)是奇函数, 则

*F*(−*x*)=*f*(−*x*)⋅*g*(−*x*)=*f*(*x*)[−*g*(*x*)]=−*f*(*x*)⋅*g*(*x*)=−*F*(*x*),

所以*F*(*x*)为奇函数, 即偶函数与奇函数的积是奇函数.

12. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数？

(1)*y*=*x*2(1−*x*2);

(2)*y*=3*x*2−*x*3;

(3);

(4)*y*=*x*(*x*−1)(*x*+1);

(5)*y*=sin *x*−cos *x*+1;

(6).

解 (1)因为*f*(−*x*)=(−*x*)2[1−(−*x*)2]=*x*2(1−*x*2)=*f*(*x*), 所以*f*(*x*)是偶函数.

(2)由*f*(−*x*)=3(−*x*)2−(−*x*)3=3*x*2+*x*3可见*f*(*x*)既非奇函数又非偶函数.

(3)因为, 所以*f*(*x*)是偶函数.

(4)因为*f*(−*x*)=(−*x*)(−*x*−1)(−*x*+1)=−*x*(*x*+1)(*x*−1)=−*f*(*x*), 所以*f*(*x*)是奇函数.

(5)由*f*(−*x*)=sin(−*x*)−cos(−*x*)+1=−sin *x*−cos *x*+1可见*f*(*x*)既非奇函数又非偶函数.

(6)因为, 所以*f*(*x*)是偶函数.

13. 下列各函数中哪些是周期函数？对于周期函数, 指出其周期:

(1)*y*=cos(*x*−2);

解 是周期函数, 周期为*l*=2*π*.

(2)*y*=cos 4*x*;

解 是周期函数, 周期为.

(3)*y*=1+sin *πx*;

解 是周期函数, 周期为*l*=2.

(4)*y*=*x*cos *x*;

解 不是周期函数.

(5)*y*=sin2*x*.

解 是周期函数, 周期为*l*=*π*.

14. 求下列函数的反函数:

(1);

解 由得*x*=*y*3−1, 所以的反函数为*y*=*x*3−1.

(2);

解 由得, 所以的反函数为.

(3)(*ad*−*bc*≠0);

解 由得, 所以的反函数为.

(4) *y*=2sin3*x*;

解 由*y*=2sin 3*x*得, 所以*y*=2sin3*x*的反函数为.

(5) *y*=1+ln(*x*+2);

解 由*y*=1+ln(*x*+2)得*x*=*ey*−1−2, 所以*y*=1+ln(*x*+2)的反函数为*y*=*ex*−1−2.

(6).

解 由得, 所以的反函数为.

15. 设函数*f*(*x*)在数集*X*上有定义, 试证: 函数*f*(*x*)在*X*上有界的充分必要条件是它在*X*上既有上界又有下界.

证明 先证必要性. 设函数*f*(*x*)在*X*上有界, 则存在正数*M*, 使|*f*(*x*)|≤*M*, 即−*M*≤*f*(*x*)≤*M*. 这就证明了*f*(*x*)在*X*上有下界−*M*和上界*M*.

再证充分性. 设函数*f*(*x*)在*X*上有下界*K*1和上界*K*2, 即*K*1≤*f*(*x*)≤ *K*2 . 取*M*=max{|*K*1|, |*K*2|}, 则 −*M*≤ *K*1≤*f*(*x*)≤ *K*2≤*M* ,

即 |*f*(*x*)|≤*M*.

这就证明了*f*(*x*)在*X*上有界.

16. 在下列各题中, 求由所给函数复合而成的函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值*x*1和*x*2的函数值:

(1) *y*=*u*2, *u*=sin *x*, , ;

解 *y*=sin2*x*, ,.

(2) *y*=sin *u*, *u*=2*x*, ,;

解 *y*=sin2*x*, ,.

(3), *u*=1+*x*2, *x*1=1, *x*2= 2;

解 , , .

(4) *y*=*eu*, *u*=*x*2, *x*1 =0, *x*2=1;

解 , , .

(5) *y*=*u*2 , *u*=*ex* , *x*1=1, *x*2=−1.

解 *y*=*e*2*x*, *y*1=*e*2⋅1=*e*2, *y*2=*e*2⋅(−1)=*e*−2.

17. 设*f*(*x*)的定义域*D*=[0, 1], 求下列各函数的定义域:

(1) *f*(*x*2);

解 由0≤*x*2≤1得|*x*|≤1, 所以函数*f*(*x*2)的定义域为[−1, 1].

(2) *f*(sin*x*);

解 由0≤sin *x*≤1得2*nπ*≤*x*≤(2*n*+1)*π* (*n*=0, ±1, ±2⋅ ⋅ ⋅), 所以函数*f*(sin *x*)的定义域为

[2*nπ*, (2*n*+1)*π*] (*n*=0, ±1, ±2⋅ ⋅ ⋅) .

(3) *f*(*x*+*a*)(*a*>0);

解 由0≤*x*+*a*≤1得−*a*≤*x*≤1−*a*, 所以函数*f*(*x*+*a*)的定义域为[−*a*, 1−*a*].

(4) *f*(*x*+*a*)+*f*(*x*−*a*)(*a*>0).

解 由0≤*x*+*a*≤1且0≤*x*−*a*≤1得: 当时, *a*≤*x*≤1−*a*; 当时, 无解. 因此当时函数的定义域为[*a*, 1−*a*], 当时函数无意义.

18. 设, *g*(*x*)=*ex*, 求*f*[*g*(*x*)]和*g*[*f*(*x*)], 并作出这两个函数的图形.

解 , 即.

, 即.

19. 已知水渠的横断面为等腰梯形, 斜角*ϕ*=40°(图1−37). 当过水断面*ABCD*的面积为定值*S*0时, 求湿周*L*(*L*=*AB*+*BC*+*CD*)与水深*h*之间的函数关系式, 并指明其定义域.

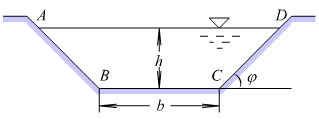


图1−37

解 , 又从得, 所以

.

自变量*h*的取值范围应由不等式组

*h*>0, 

确定, 定义域为.

20. 收敛音机每台售价为90元, 成本为60元. 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过100台以上的, 每多订购1台, 售价就降低1分, 但最低价为每台75元.

(1)将每台的实际售价*p*表示为订购量*x*的函数;

(2)将厂方所获的利润*P*表示成订购量*x*的函数;

(3)某一商行订购了1000台, 厂方可获利润多少？

解 (1)当0≤*x*≤100时, *p*=90.

令0.01(*x*0−100)=90−75, 得*x*0=1600. 因此当*x*≥1600时, *p*=75.

当100<*x*<1600时,

*p*=90−(*x*−100)×0.01=91−0. 01*x*.

综合上述结果得到

.

(2).

(3) *P*=31×1000−0.01×10002=21000(元).

习题1−2

1. 观察一般项*xn*如下的数列{*xn*}的变化趋势, 写出它们的极限:

(1);

解 当*n*→∞时, →0, .

(2);

解 当*n*→∞时, →0, .

(3);

解 当*n*→∞时, →2, .

(4);

解 当*n*→∞时, →0, .

(5) *xn*=*n*(−1)*n*.

解 当*n*→∞时, *xn*=*n*(−1)*n*没有极限.

2. 设数列{*xn*}的一般项. 问=? 求出*N*, 使当*n*>*N*时, *xn*与其极限之差的绝对值小于正数*ε* ,当*ε* =0.001时, 求出数*N*.

解 .

. ∀*ε* >0, 要使|*x**n*−0|<*ε* , 只要, 也就是. 取,

则∀*n*>*N*, 有|*xn*−0|<*ε* .

当*ε* =0.001时, =1000.

3. 根据数列极限的定义证明:

(1);

分析 要使, 只须, 即.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当*n*>*N*时, 有, 所以.

(2);

分析 要使, 只须, 即.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当*n*>*N*时, 有, 所以.

(3);

分析 要使, 只须.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当∀*n*>*N*时, 有, 所以.

(4).

分析 要使|0.99 ⋅ ⋅ ⋅ 9−1|, 只须<*ε* , 即.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当∀*n*>*N*时, 有|0.99 ⋅ ⋅ ⋅ 9−1|<*ε* , 所以.

4. , 证明. 并举例说明: 如果数列{|*xn*|}有极限, 但数列{*xn*}未必有极限.

证明 因为, 所以∀*ε*>0, ∃*N*∈**N**, 当*n*>*N*时, 有, 从而

||*un*|−|*a*||≤|*un*−*a*|<*ε* .

这就证明了.

数列{|*xn*|}有极限, 但数列{*xn*}未必有极限. 例如, 但不存在.

5. 设数列{*xn*}有界, 又, 证明: .

证明 因为数列{*xn*}有界, 所以存在*M*, 使∀*n*∈**Z**, 有|*xn*|≤*M*.

又, 所以∀*ε*>0, ∃*N*∈***N***, 当*n*>*N*时, 有. 从而当*n*>*N*时, 有

,

所以.

6. 对于数列{*xn*}, 若*x*2*k*−1→*a*(*k*→∞), *x*2*k* →*a*(*k*→∞),

证明: *xn*→*a*(*n*→∞).

证明 因为*x*2*k*−1→*a*(*k*→∞), *x*2*k* →*a*(*k*→∞), 所以∀*ε*>0,

∃*K*1, 当2*k*−1>2*K*1−1时, 有| *x*2*k*−1−*a*|<*ε* ;

∃*K*2, 当2*k*>2*K*2时, 有|*x*2*k*−*a*|<*ε* .

取*N*=max{2*K*1−1, 2*K*2}, 只要*n*>*N*, 就有|*xn*−*a*|<*ε* .

因此*xn*→*a* (*n*→∞).

习题1−3

1. 根据函数极限的定义证明:

(1);

分析 因为

|(3*x*−1)−8|=|3*x*−9|=3|*x*−3|,

所以要使|(3*x*−1)−8|<*ε* , 只须.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当0<|*x*−3|<*δ*时, 有

|(3*x*−1)−8|<*ε* ,

所以.

(2);

分析 因为

|(5*x*+2)−12|=|5*x*−10|=5|*x*−2|,

所以要使|(5*x*+2)−12|<*ε* , 只须.

证明 因为∀*ε* >0, ∃, 当0<|*x*−2|<*δ*时, 有

|(5*x*+2)−12|<*ε* ,

所以.

(3);

分析 因为

,

所以要使, 只须.

证明 因为∀*ε* >0, ∃, 当0<|*x*−(−2)|<*δ*时, 有

,

所以.

(4).

分析 因为

,

所以要使, 只须.

证明 因为∀*ε* >0, ∃, 当时, 有

,

所以.

2. 根据函数极限的定义证明:

(1);

分析 因为

,

所以要使, 只须, 即.

证明 因为∀*ε* >0, ∃, 当|*x*|>*X*时, 有

,

所以.

(2).

分析 因为

.

所以要使, 只须, 即.

证明 因为∀*ε*>0, ∃, 当*x*>*X*时, 有

,

所以.

3. 当*x*→2时, *y*=*x*2→4. 问*δ*等于多少, 使当|*x*−2|<*δ*时, |*y*−4|<0.001？

解 由于当*x*→2时, |*x*−2|→0, 故可设|*x*−2|<1, 即1<*x*<3.

要使

|*x*2−4|=|*x*+2||*x*−2|<5|*x*−2|<0.001,

只要.

取*δ*=0.0002, 则当0<|*x*−2|<*δ*时, 就有|*x*2−4|<0. 001.

4. 当*x*→∞时, , 问*X*等于多少, 使当|*x*|>*X*时, |*y*−1|<0.01?

解 要使, 只要, 故.

5. 证明函数*f*(*x*)=|*x*|当*x*→0时极限为零.

证明 因为

|*f*(*x*)−0|=||*x*|−0|=|*x*|=|*x*−0|,

所以要使|*f*(*x*)−0|<*ε*, 只须|*x*|<*ε*.

因为对∀*ε*>0, ∃*δ*=*ε*, 使当0<|*x*−0|<*δ*, 时有

|*f*(*x*)−0|=||*x*|−0|<*ε*,

所以.

6. 求 当*x*→0时的左﹑右极限, 并说明它们在*x*→0时的极限是否存在.

证明 因为

,

,

,

所以极限存在.

因为

,

,

,

所以极限不存在.

7. 证明: 若*x*→+∞及*x*→−∞时, 函数*f*(*x*)的极限都存在且都等于*A*, 则.

证明 因为, , 所以∀*ε*>0,

∃*X*1>0, 使当*x*<−*X*1时, 有|*f*(*x*)−*A*|<*ε* ;

∃*X*2>0, 使当*x*>*X*2时, 有|*f*(*x*)−*A*|<*ε* .

取*X*=max{*X*1, *X*2}, 则当|*x*|>*X*时, 有|*f*(*x*)−*A*|<*ε* ,即.

8. 根据极限的定义证明: 函数*f*(*x*)当*x*→*x*0 时极限存在的充分必要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

证明 先证明必要性. 设*f*(*x*)→*A*(*x*→*x*0), 则∀*ε*>0, ∃*δ*>0, 使当0<|*x*−*x*0|<*δ* 时, 有

|*f*(*x*)−*A*|<*ε* .

因此当*x*0−*δ*<*x*<*x*0和*x*0<*x*<*x*0+*δ* 时都有

|*f*(*x*)−*A*|<*ε* .

这说明*f*(*x*)当*x*→*x*0时左右极限都存在并且都等于*A* .

再证明充分性. 设*f*(*x*0−0)=*f*(*x*0+0)=*A*, 则∀*ε*>0,

∃*δ*1>0, 使当*x*0−*δ*1<*x*<*x*0时, 有| *f*(*x*)−*A*<*ε* ;

∃*δ*2>0, 使当*x*0<*x*<*x*0+*δ*2时, 有| *f*(*x*)−*A*|<*ε* .

取*δ*=min{*δ*1, *δ*2}, 则当0<|*x*−*x*0|<*δ* 时, 有*x*0−*δ*1<*x*<*x*0及*x*0<*x*<*x*0+*δ*2 , 从而有

| *f*(*x*)−*A*|<*ε* ,

即*f*(*x*)→*A*(*x*→*x*0).

9. 试给出*x*→∞时函数极限的局部有界性的定理, 并加以证明.

解 *x*→∞时函数极限的局部有界性的定理: 如果*f*(*x*)当*x*→∞时的极限存在, 则存在*X*>0及*M*>0, 使当|*x*|>*X*时, |*f*(*x*)|<*M*.

证明 设*f*(*x*)→*A*(*x*→∞), 则对于*ε* =1, ∃*X*>0, 当|*x*|>*X*时, 有|*f*(*x*)−*A*|<*ε* =1. 所以

|*f*(*x*)|=|*f*(*x*)−*A*+*A*|≤|*f*(*x*)−*A*|+|*A*|<1+|*A*|.

这就是说存在*X*>0及*M*>0, 使当|*x*|>*X*时, |*f*(*x*)|<*M*, 其中*M*=1+|*A*|.

习题1−4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小？举例说明之.

解 不一定.

例如, 当*x*→0时, *α*(*x*)=2*x*, *β*(*x*)=3*x*都是无穷小, 但, 不是无穷小.

2. 根据定义证明:

(1)当*x*→3时为无穷小;

(2)当*x*→0时为无穷小.

证明 (1)当*x*≠3时. 因为∀*ε*>0, ∃*δ*=*ε* , 当0<|*x*−3|<*δ*时, 有

,

所以当*x*→3时为无穷小.

(2)当*x*≠0时. 因为∀*ε*>0, ∃*δ*=*ε* , 当0<|*x*−0|<*δ*时, 有

,

所以当*x*→0时为无穷小.

3. 根据定义证明: 函数为当*x*→0时的无穷大. 问*x*应满足什么条件, 能使|*y*|>104？

证明 分析, 要使|*y*|>*M*, 只须, 即.

证明 因为∀*M*>0, ∃, 使当0<|*x*−0|<*δ*时, 有,

所以当*x*→0时, 函数是无穷大.

取*M*=104, 则. 当时, |*y*|>104.

4. 求下列极限并说明理由:

(1);

(2).

解 (1)因为, 而当*x*→∞ 时是无穷小, 所以.

(2)因为(*x*≠1), 而当*x*→0时*x*为无穷小, 所以.

5. 根据函数极限或无穷大定义, 填写下表:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *f*(*x*)→*A* | *f*(*x*)→∞ | *f*(*x*)→+∞ | *f*(*x*)→−∞ |
| *x*→*x*0 | ∀*ε*>0, ∃*δ*>0, 使  当0<|*x*−*x*0|<*δ*时,  有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. |  |  |  |
| *x*→*x*0+ |  |  |  |  |
| *x*→*x*0− |  |  |  |  |
| *x*→∞ |  | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当|*x*|>*X*时,  有恒|*f*(*x*)|>*M*. |  |  |
| *x*→+∞ |  |  |  |  |
| *x*→−∞ |  |  |  |  |

解

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *f*(*x*)→*A* | *f*(*x*)→∞ | *f*(*x*)→+∞ | *f*(*x*)→−∞ |
| *x*→*x*0 | ∀*ε*>0, ∃*δ*>0, 使当0<|*x*−*x*0|<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<|*x*−*x*0|<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<|*x*−*x*0|<*δ*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<|*x*−*x*0|<*δ*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |
| *x*→*x*0+ | ∀*ε*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*−*x*0<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*−*x*0<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*−*x*0<*δ*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*−*x*0<*δ*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |
| *x*→*x*0− | ∀*ε*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*0−*x*<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*0−*x*<*δ*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*0−*x*<*δ*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*M*>0, ∃*δ*>0, 使当0<*x*0−*x*<*δ*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |
| *x*→∞ | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当|*x*|>*X*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当|*x*|>*X*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当|*x*|>*X*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当|*x*|>*X*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |
| *x*→+∞ | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*>*X*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*>*X*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*>*X*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*>*X*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |
| *x*→−∞ | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*<−*X*时, 有恒|*f*(*x*)−*A*|<*ε*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*<−*X*时, 有恒|*f*(*x*)|>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*<−*X*时, 有恒*f*(*x*)>*M*. | ∀*ε*>0, ∃*X*>0, 使当*x*<−*X*时, 有恒*f*(*x*)<−*M*. |

6. 函数*y*=*x*cos *x*在(−∞, +∞)内是否有界？这个函数是否为当*x*→+∞ 时的无穷大？为什么？

解 函数*y*=*x*cos *x*在(−∞, +∞)内无界.

这是因为∀*M*>0, 在(−∞, +∞)内总能找到这样的*x*, 使得|*y*(*x*)|>*M*. 例如

*y*(2*kπ*)=2*kπ* cos2*kπ*=2*kπ* (*k*=0, 1, 2, ⋅ ⋅ ⋅),

当*k*充分大时, 就有| *y*(2*kπ*)|>*M*.

当*x*→+∞ 时, 函数*y*=*x*cos *x*不是无穷大.

这是因为∀*M*>0, 找不到这样一个时刻*N*, 使对一切大于*N*的*x*, 都有|*y*(*x*)|>*M*. 例如

(*k*=0, 1, 2, ⋅ ⋅ ⋅),

对任何大的*N*, 当*k*充分大时, 总有, 但|*y*(*x*)|=0<*M*.

7. 证明: 函数在区间(0, 1]上无界, 但这函数不是当*x*→0+时的无穷大.

证明 函数在区间(0, 1]上无界. 这是因为

∀*M*>0, 在(0, 1]中总可以找到点*xk*, 使*y*(*xk*)>*M*. 例如当

(*k*=0, 1, 2, ⋅ ⋅ ⋅)

时, 有

,

当*k*充分大时, *y*(*xk*)>*M*.

当*x*→0+ 时, 函数不是无穷大. 这是因为

∀*M*>0, 对所有的*δ*>0, 总可以找到这样的点*xk*, 使0<*xk*<*δ*, 但*y*(*xk*)<*M*. 例如可取

(*k*=0, 1, 2, ⋅ ⋅ ⋅),

当*k*充分大时, *xk*<*δ*, 但*y*(*xk*)=2*kπ*sin2*kπ*=0<*M*.

习题1−5

1. 计算下列极限:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 .

(4);

解 .

(5);

解 .

(6);

解 .

(7);

解 .

(8);

解 (分子次数低于分母次数, 极限为零).

或 .

(9);

解 .

(10);

解 .

(11);

解 .

(12);

解 .

(13);

解  (分子与分母的次数相同, 极限为

最高次项系数之比).

或 .

(14);

解 

.

2. 计算下列极限:

(1);

解 因为, 所以.

(2);

解  (因为分子次数高于分母次数).

(3).

解 (因为分子次数高于分母次数).

3. 计算下列极限:

(1);

解 (当*x*→0时, *x*2是无穷小, 而是有界变量).

(2).

解 (当*x*→∞时, 是无穷小,

而arctan *x*是有界变量).

4. 证明本节定理3中的(2).

习题1−6

1. 计算下列极限:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 .

(4);

解 .

(5);

解 .

或 .

(6)(*x*为不等于零的常数).

解 .

2. 计算下列极限:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 .

(4)(*k*为正整数).

解 .

3. 根据函数极限的定义, 证明极限存在的准则I′. 

证明 仅对*x*→*x*0的情形加以证明.

设*ε*为任一给定的正数, 由于, 故由定义知, 对*ε*>0, 存在*δ*1>0, 使得当0<|*x*−*x*0|<*δ*1时, 恒有|*g*(*x*)−*A*|<*ε*, 即

*A*−*ε*<*g*(*x*)<*A*+*ε*.

由于, 故由定义知, 对*ε*>0, 存在*δ*2>0, 使得当0<|*x*−*x*0|<*δ*2时, 恒有|*h*(*x*)−*A*|<*ε*, 即

*A*−*ε*<*h*(*x*)<*A*+*ε*.

取*δ*=min{*δ*1, *δ*2}, 则当0<|*x*−*x*0|<*δ*时,

*A*−*ε*<*g*(*x*)<*A*+*ε*与*A*−*ε*<*h*(*x*)<*A*+*ε*

同时成立, 又因为

*g*(*x*)≤*f*(*x*)≤*h*(*x*),

所以 *A*−*ε*<*f*(*x*)<*A*+*ε*,

即 |*f*(*x*)−*A*|<*ε*,

因此.

证明 仅对*x*→*x*0的情形加以证明.

因为

, ,

所以对任一给定的*ε*>0, 存在*δ*>0, 使得当0<|*x*−*x*0|<*δ*时, 恒有

|*g*(*x*)−*A*|<*ε*及|*h*(*x*)−*A*|<*ε*,

即 *A*−*ε*<*g*(*x*)<*A*+*ε*及*A*−*ε*<*h*(*x*)<*A*+*ε*.

又因为 *g*(*x*)≤*f*(*x*)≤*h*(*x*),

所以 *A*−*ε*<*f*(*x*)<*A*+*ε*,

即 |*f*(*x*)−*A*|<*ε*,

因此.

4. 利用极限存在准则证明:

(1);

证明 因为,

而 且,

由极限存在准则I, .

(2);

证明 因为

,

而 , ,

所以 .

(3)数列, , , ⋅ ⋅ ⋅ 的极限存在;

证明 , (*n*=1, 2, 3, ⋅ ⋅ ⋅).

先证明数列{*xn*}有界.

当*n*=1时, 假定*n*=*k*时*xk*<2, 则当*n*=*k*+1时,

,

所以*xn*<2(*n*=1, 2, 3, ⋅ ⋅ ⋅), 即数列{*xn*}有界.

再证明数列单调增. 因为

,

而*xn*−2<0, *xn*+1>0, 所以*xn*+1−*xn*>0, 即数列{*xn*}单调增.

因为数列{*xn*}单调增加有上界, 所以此数列是有极限的.

(4);

证明 当|*x*|≤1时, 则有

1+*x*≤1+|*x*|≤(1+|*x*|)*n* ,

1+*x*≥1−|*x*|≥(1−|*x*|)*n*,

从而有 .

因为 ,

根据夹逼准则, 有

.

(5).

证明 因为, 所以.

又因为, 根据夹逼准则, 有.

习题 1−7

1. 当*x*→0时, 2*x*−*x*2 与*x*2−*x*3相比, 哪一个是高阶无穷小？

解 因为,

所以当*x*→0时, *x*2−*x*3是高阶无穷小, 即*x*2−*x*3=*o*(2*x*−*x*2).

2. 当*x*→1时, 无穷小1−*x*和(1)1−*x*3, (2)是否同阶？是否等价？

解 (1)因为,

所以当*x*→1时, 1−*x*和1−*x*3是同阶的无穷小, 但不是等价无穷小.

(2)因为,

所以当*x*→1时, 1−*x*和是同阶的无穷小, 而且是等价无穷小.

3. 证明: 当*x*→0时, 有:

(1) arctan *x*~*x*;

(2).

证明 (1)因为(提示: 令*y*=arctan *x*, 则当*x*→0时, *y*→0),

所以当*x*→0时, arctan*x*~*x*.

(2)因为,

所以当*x*→0时, .

4. 利用等价无穷小的性质, 求下列极限:

(1);

(2)(*n*, *m*为正整数);

(3);

(4).

解 (1).

(2).

(3).

(4)因为

(*x*→0),

(*x*→0),

(*x*→0),

所以 .

5. 证明无穷小的等价关系具有下列性质:

(1) *α* ~*α* (自反性);

(2) 若*α* ~*β*, 则*β*~*α*(对称性);

(3)若*α* ~*β*, *β*~*γ*, 则*α*~*γ*(传递性).

证明 (1), 所以*α* ~*α* ;

(2) 若*α* ~*β*, 则, 从而. 因此*β*~*α* ;

(3) 若*α* ~*β*, *β*~*γ*, . 因此*α*~*γ*.

习题1−8

1. 研究下列函数的连续性, 并画出函数的图形:

(1);

解 已知多项式函数是连续函数, 所以函数*f*(*x*)在[0, 1)和(1, 2]内是连续的.

在*x*=1处, 因为*f*(1)=1, 并且

, .

所以, 从而函数*f*(*x*)在*x*=1处是连续的.

综上所述，函数*f*(*x*)在[0, 2]上是连续函数.

(2).

解 只需考察函数在*x*=−1和*x*=1处的连续性.

在*x*=−1处, 因为*f*(−1)=−1, 并且

,

,

所以函数在*x*=−1处间断, 但右连续.

在*x*=1处, 因为*f*(1)=1, 并且

=*f*(1), =*f*(1),

所以函数在*x*=1处连续.

综合上述讨论, 函数在(−∞, −1)和(−1, +∞)内连续, 在*x*=−1处间断, 但右连续.

2. 下列函数在指出的点处间断, 说明这些间断点属于哪一类, 如果是可去间断点, 则补充或改变函数的定义使它连续:

(1), *x*=1, *x*=2;

解 . 因为函数在*x*=2和*x*=1处无定义, 所以*x*=2和*x*=1是函数的间断点.

因为, 所以*x*=2是函数的第二类间断点;

因为, 所以*x*=1是函数的第一类间断点, 并且是可去间断点. 在*x*=1处, 令*y*=−2, 则函数在*x*=1处成为连续的.

(2), *x*=*k*,  (*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅);

解 函数在点*x*=*kπ*(*k*∈Z)和(*k*∈Z)处无定义, 因而这些点都是函数的间断点.

因(*k*≠0), 故*x*=*kπ*(*k*≠0)是第二类间断点;

因为, (*k*∈Z), 所以*x*=0和(*k*∈Z) 是第一类间断点且是可去间断点.

令*y*|*x*=0=1, 则函数在*x*=0处成为连续的;

令时, *y*=0, 则函数在处成为连续的.

(3), *x*=0;

解 因为函数在*x*=0处无定义, 所以*x*=0是函数的间断点. 又因为不存在, 所以*x*=0是函数的第二类间断点.

(4), *x* =1.

解 因为, 所以*x*=1是函数的第一类不可去间断点.

3. 讨论函数的连续性, 若有间断点, 判别其类型.

解 .

在分段点*x*=−1处, 因为, , 所以*x*=−1为函数的第一类不可去间断点.

在分段点*x*=1处, 因为, , 所以*x*=1为函数的第一类不可去间断点.

4. 证明: 若函数*f*(*x*)在点*x*0连续且*f*(*x*0)≠0, 则存在*x*0的某一邻域*U*(*x*0), 当*x*∈*U*(*x*0)时, *f*(*x*)≠0.

证明 不妨设*f*(*x*0)>0. 因为*f*(*x*)在*x*0连续, 所以, 由极限的局部保号性定理, 存在*x*0的某一去心邻域, 使当*x*∈时*f*(*x*)>0, 从而当*x*∈*U*(*x*0)时, *f*(*x*)>0. 这就是说, 则存在*x*0的某一邻域*U*(*x*0), 当*x*∈*U*(*x*0)时, *f*(*x*)≠0.

5. 试分别举出具有以下性质的函数*f*(*x*)的例子:

(1)*x*=0, ±1, ±2, , ⋅ ⋅ ⋅, ±*n*, , ⋅ ⋅ ⋅是*f*(*x*)的所有间断点, 且它们都是无穷间断点;

解 函数在点*x*=0, ±1, ±2, , ⋅ ⋅ ⋅, ±*n*, , ⋅ ⋅ ⋅处是间断的

且这些点是函数的无穷间断点.

(2)*f*(*x*)在**R**上处处不连续, 但|*f*(*x*)|在**R**上处处连续;

解 函数在**R**上处处不连续, 但|*f*(*x*)|=1在**R**上处处连续.

(3)*f*(*x*)在**R**上处处有定义, 但仅在一点连续.

解 函数在**R**上处处有定义, 它只在*x*=0处连续.

习题1−9

1. 求函数的连续区间, 并求极限, 及.

解 , 函数在(−∞, +∞)内除点*x*=2和*x*=−3外是连续的, 所以函数*f*(*x*)的连续区间为(−∞, −3)、(−3, 2)、(2, +∞).

在函数的连续点*x*=0处, .

在函数的间断点*x*=2和*x*=−3处,

, .

2. 设函数*f*(*x*)与*g*(*x*)在点*x*0连续, 证明函数

*ϕ*(*x*)=max{*f*(*x*), *g*(*x*)}, *ψ*(*x*)=min{*f*(*x*), *g*(*x*)}

在点*x*0也连续.

证明 已知, .

可以验证

,

.

因此 ,

.

因为





=*ϕ*(*x*0),

所以*ϕ*(*x*)在点*x*0也连续.

同理可证明*ψ*(*x*)在点*x*0也连续.

3. 求下列极限:

(1);

(2);

(3);

(4);

(5);

(6);

(7).

解 (1)因为函数是初等函数, *f*(*x*)在点*x*=0有定义, 所以

.

(2)因为函数*f*(*x*)=(sin 2*x*)3是初等函数, *f*(*x*)在点有定义, 所以

.

(3)因为函数*f*(*x*)=ln(2cos2*x*)是初等函数, *f*(*x*)在点有定义, 所以

.

(4)

.

(5)

.

(6)

.

(7)

.

4. 求下列极限:

(1);

(2);

(3);

(4);

(5);

(6).

解 (1) .

(2) .

(3) .

(4) .

(5). 因为

, ,

所以.

(6)



.

5. 设函数 应当如何选择数*a*, 使得*f*(*x*)成为在(−∞, +∞)内的连续函数？

解 要使函数*f*(*x*)在(−∞, +∞)内连续, 只须*f*(*x*)在*x*=0处连续, 即只须

.

因为, , 所以只须取*a*=1.

习题1−10

1. 证明方程*x*5−3*x*=1至少有一个根介于1和2之间.

证明 设*f*(*x*)=*x*5−3*x*−1, 则*f*(*x*)是闭区间[1, 2]上的连续函数.

因为*f*(1)=−3, *f*(2)=25, *f*(1)*f*(2)<0, 所以由零点定理, 在(1, 2)内至少有一点*ξ*

(1<*ξ*<2), 使*f*(*ξ*)=0, 即*x*=*ξ* 是方程*x*5−3*x*=1的介于1和2之间的根.

因此方程*x*5−3*x*=1至少有一个根介于1和2之间.

2. 证明方程*x*=*a*sin*x*+*b*, 其中*a*>0, *b*>0, 至少有一个正根, 并且它不超过*a*+*b*.

证明 设*f*(*x*)=*a*sin *x*+*b*−*x*, 则*f*(*x*)是[0, *a*+*b*]上的连续函数.

*f*(0)=*b*, *f*(*a*+*b*)=*a* sin (*a*+*b*)+*b*−(*a*+*b*)=*a*[sin(*a*+*b*)−1]≤0.

若*f*(*a*+*b*)=0, 则说明*x*=*a*+*b*就是方程*x*=*a*sin*x*+*b*的一个不超过*a*+*b*的根;

若*f*(*a*+*b*)<0, 则*f*(0)*f*(*a*+*b*)<0, 由零点定理, 至少存在一点*ξ*∈(0, *a*+*b*), 使*f*(*ξ*)=0, 这说明*x*=*ξ* 也是方程*x*=*a*sin*x*+*b*的一个不超过*a*+*b*的根.

总之, 方程*x*=*a*sin*x*+*b*至少有一个正根, 并且它不超过*a*+*b*.

3. 设函数*f*(*x*)对于闭区间[*a*, *b*]上的任意两点*x*、*y*, 恒有|*f*(*x*)−*f*(*y*)|≤*L*|*x*−*y*|, 其中*L*为正常数, 且*f*(*a*)⋅*f*(*b*)<0. 证明: 至少有一点*ξ*∈(*a*, *b*), 使得*f*(*ξ*)=0.

证明 设*x*0为(*a*, *b*)内任意一点. 因为

,

所以 ,

即 .

因此*f*(*x*)在(*a*, *b*)内连续.

同理可证*f*(*x*)在点*a*处左连续, 在点*b*处右连续, 所以*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续.

因为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 且*f*(*a*)⋅*f*(*b*)<0, 由零点定理, 至少有一点*ξ*∈(*a*, *b*), 使得*f*(*ξ*)=0.

4. 若*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, *a*<*x*1<*x*2< ⋅ ⋅ ⋅ <*xn*<*b*, 则在[*x*1, *xn*]上至少有一点*ξ* , 使

.

证明 显然*f*(*x*)在[*x*1, *xn*]上也连续. 设*M*和*m*分别是*f*(*x*)在[*x*1, *xn*]上的最大值和最小值.

因为*xi*∈[*x*1, *xn*](1≤ *i*≤*n*), 所以有*m*≤*f*(*xi*)≤*M*, 从而有

,

.

由介值定理推论, 在[*x*1, *xn*]上至少有一点*ξ*  使

.

5. 证明: 若*f*(*x*)在(−∞, +∞)内连续, 且存在, 则*f*(*x*)必在(−∞, +∞)内有界.

证明 令, 则对于给定的*ε*>0, 存在*X*>0, 只要|*x*|>*X*, 就有

|*f*(*x*)−*A*|<*ε* , 即*A*−*ε*<*f*(*x*)<*A*+*ε* .

又由于*f*(*x*)在闭区间[−*X*, *X*]上连续, 根据有界性定理, 存在*M*>0, 使|*f*(*x*)|≤*M*, *x*∈[−*X*, *X*].

取*N*=max{*M*, |*A*−*ε*|, |*A*+*ε*|}, 则|*f*(*x*)|≤*N*, *x*∈(−∞, +∞), 即*f*(*x*)在(−∞, +∞)内有界.

6. 在什么条件下, (*a*, *b*)内的连续函数*f*(*x*)为一致连续？

总习题一

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)数列{*xn*}有界是数列{*xn*}收敛的\_\_\_\_\_\_\_\_条件. 数列{*xn*}收敛是数列{*xn*}有界的\_\_\_\_\_\_\_\_的条件.

(2)*f*(*x*)在*x*0的某一去心邻域内有界是存在的\_\_\_\_\_\_\_\_条件. 存在是*f*(*x*)在*x*0的某一去心邻域内有界的\_\_\_\_\_\_\_\_条件.

(3) *f*(*x*)在*x*0的某一去心邻域内无界是的\_\_\_\_\_\_\_\_条件. 是*f*(*x*)在*x*0的某一去心邻域内无界的\_\_\_\_\_\_\_\_条件.

(4)*f*(*x*)当*x*→*x*0时的右极限*f*(*x*0+)及左极限*f*(*x*0−)都存在且相等是存在的\_\_\_\_\_\_\_\_条件.

解 (1) 必要, 充分.

(2) 必要, 充分.

(3) 必要, 充分.

(4) 充分必要.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设*f*(*x*)=2*x*+3*x*−2, 则当*x*→0时, 有( ).

(*A*)*f*(*x*)与*x*是等价无穷小; (*B*)*f*(*x*)与*x*同阶但非等价无穷小;

(*C*)*f*(*x*)是比*x*高阶的无穷小; (*D*)*f*(*x*)是比*x*低阶的无穷小.

解 因为

(令2*x*−1=*t*, 3*x*−1=*u*) .

所以*f*(*x*)与*x*同阶但非等价无穷小, 故应选*B*.

3. 设*f*(*x*)的定义域是[0, 1], 求下列函数的定义域:

(1) *f*(*ex*);

(2) *f*(ln *x*);

(3) *f*(arctan *x*);

(4) *f*(cos *x*).

解 (1)由0≤*ex*≤1得*x*≤0, 即函数*f*(*ex*)的定义域为(−∞, 0].

(2) 由0≤ ln *x*≤1得1≤*x*≤*e* , 即函数*f*(ln *x*)的定义域为[1, *e*].

(3) 由0≤ arctan *x* ≤1得0≤*x*≤tan 1, 即函数*f*(arctan *x*)的定义域为[0, tan 1].

(4) 由0≤ cos *x*≤1得(*n*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅),

即函数*f*(cos *x*)的定义域为[], (*n*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅).

4. 设

, ,

求*f*[*f*(*x*)], *g*[*g*(*x*)], *f*[*g*(*x*)], *g*[*f*(*x*)].

解 因为*f*(*x*)≥0, 所以*f*[*f*(*x*)]=*f*(*x*);

因为*g*(*x*)≤0, 所以*g*[*g*(*x*)]=0;

因为*g*(*x*)≤0, 所以*f*[*g*(*x*)]=0;

因为*f*(*x*)≥0, 所以*g*[*f*(*x*)]=−*f* 2(*x*).

5. 利用*y*=sin *x*的图形作出下列函数的图形:

(1)*y*=|sin *x*|;

(2)*y*=sin|*x*|;

(3).

6. 把半径为*R*的一圆形铁片, 自中心处剪去中心角为*α*的一扇形后围成一无底圆锥. 试将这圆锥的体积表为*α*的函数.

解 设围成的圆锥的底半径为*r*, 高为*h*, 依题意有

*R*(2*π*−*α*)=2*πr* , ,

.

圆锥的体积为



 (0<*α*<2*π*).

7. 根据函数极限的定义证明.

证明 对于任意给定的*ε*>0, 要使, 只需|*x*−3|<*ε*, 取*δ*=*ε*, 当0<|*x*−3|<*δ*时, 就有|*x*−3|<*ε*, 即, 所以.

8. 求下列极限:

(1);

(2);

(3);

(4);

(5)(*a*>0, *b*>0, *c*>0);

(6).

解 (1)因为, 所以.

(2)

.

(3)



.

(4)



(提示: 用等价无穷小换).

(5), 因为

,





,

所以 .

提示: 求极限过程中作了变换*ax*−1=*t*, *bx*−1=*u*, *cx*−1=*v*.

(6), 因为

,



,

所以 .

9. 设, 要使*f*(*x*)在(−∞, +∞)内连续, 应怎样选择数*a*?

解 要使函数连续, 必须使函数在*x*=0处连续.

因为

*f*(0)=*a*, , ,

所以当*a*=0时, *f*(*x*)在*x*=0处连续. 因此选取*a*=0时, *f*(*x*)在(−∞, +∞)内连续.

10. 设, 求*f*(*x*)的间断点, 并说明间断点所属类形.

解 因为函数*f*(*x*)在*x*=1处无定义, 所以*x*=1是函数的一个间断点.

因为(提示),

(提示),

所以*x*=1是函数的第二类间断点.

又因为, ,

所以*x*=0也是函数的间断点, 且为第一类间断点.

11. 证明.

证明 因为, 且

, ,

所以.

12. 证明方程sin *x*+*x*+1=0在开区间内至少有一个根.

证明 设*f*(*x*)=sin *x*+*x*+1, 则函数*f*(*x*)在上连续.

因为, , ,

所以由零点定理, 在区间内至少存在一点*ξ*, 使*f*(*ξ*)=0.

这说明方程sin *x*+*x*+1=0在开区间内至少有一个根.

13. 如果存在直线*L*: *y*=*kx*+*b*, 使得当*x*→∞(或*x*→+∞, *x*→−∞)时, 曲线*y*=*f*(*x*)上的动点*M*(*x*, *y*)到直线*L*的距离*d*(*M*, *L*)→0, 则称*L*为曲线*y*=*f*(*x*)的渐近线. 当直线*L*的斜率*k*≠0时, 称*L*为斜渐近线.

(1)证明: 直线*L*: *y*=*kx*+*b*为曲线*y*=*f*(*x*)的渐近线的充分必要条件是

, .

(2)求曲线的斜渐近线.

证明 (1) 仅就*x*→∞的情况进行证明.

按渐近线的定义, *y*=*kx*+*b*是曲线*y*=*f*(*x*)的渐近线的充要条件是

.

必要性: 设*y*=*kx*+*b*是曲线*y*=*f*(*x*)的渐近线, 则,

于是有 ⇒⇒,

同时有 ⇒.

充分性: 如果, , 则

,

因此*y*=*kx*+*b*是曲线*y*=*f*(*x*)的渐近线.

(2)因为,

,

所以曲线的斜渐近线为*y*=2*x*+1.

习题2−1

1. 设物体绕定轴旋转, 在时间间隔[0, *t*]内转过的角度为*θ*, 从而转角*θ*是*t*的函数: *θ*=*θ*(*t*). 如果旋转是匀速的, 那么称为该物体旋转的角速度, 如果旋转是非匀速的, 应怎样确定该物体在时刻*t*0的角速度？

解 在时间间隔[*t*0, *t*0+Δ*t*]内的平均角速度为

,

故*t*0时刻的角速度为

.

2. 当物体的温度高于周围介质的温度时, 物体就不断冷却, 若物体的温度*T*与时间*t*的函数关系为*T*=*T*(*t*), 应怎样确定该物体在时刻*t*的冷却速度？

解 物体在时间间隔[*t*0, *t*0+Δ*t*]内, 温度的改变量为

Δ*T*=*T*(*t*+Δ*t*)−*T*(*t*),

平均冷却速度为

,

故物体在时刻*t*的冷却速度为

.

3. 设某工厂生产*x*单位产品所花费的成本是*f*(*x*)元, 此函数*f*(*x*)称为成本函数, 成本函数*f*(*x*)的导数*f*′(*x*)在经济学中称为边际成本. 试说明边际成本*f*′(*x*)的实际意义.

解 *f*(*x*+Δ*x*)−*f*(*x*)表示当产量由*x*改变到*x*+Δ*x*时成本的改变量.

表示当产量由*x*改变到*x*+Δ*x*时单位产量的成本.

表示当产量为*x*时单位产量的成本.

4. 设*f*(*x*)=10*x*2, 试按定义, 求*f* ′(−1).

解 

.

5. 证明(cos *x*)′=−sin *x*.

解 



.



6. 下列各题中均假定*f* ′(*x*0)存在, 按照导数定义观察下列极限, 指出*A*表示什么:

(1);

解 

.

(2), 其中*f*(0)=0, 且*f* ′(0)存在;

解 .

(3).

解 





=*f* ′(*x*0)−[−*f* ′(*x*0)]=2*f* ′(*x*0).

7. 求下列函数的导数:

(1)*y*=*x*4;

(2);

(3)*y*=*x*1. 6;

(4);

(5);

(6);

(7);

解 (1)*y*′=(*x*4)′=4*x*4−1=4*x*3 .

(2).

(3)*y*′=(*x*1. 6)′=1.6*x*1. 6−1=1.6*x* 0. 6.

(4).

(5).

(6).

(7).

8. 已知物体的运动规律为*s*=*t*3(m). 求这物体在*t*=2秒(*s*)时的速度.

解*v*=(*s*)′=3*t*2, *v*|*t*=2=12(米/秒).

9. 如果*f*(*x*)为偶函数, 且*f*(0)存在, 证明*f*(0)=0.

证明 当*f*(*x*)为偶函数时, *f*(−*x*)=*f*(*x*), 所以

,

从而有2*f* ′(0)=0, 即*f* ′(0)=0.

10. 求曲线*y*=sin *x*在具有下列横坐标的各点处切线的斜率: , *x*=*π*.

解 因为*y*′=cos *x*, 所以斜率分别为

, .

11. 求曲线*y*=cos *x*上点处的切线方程和法线方程式.

解*y*′=−sin *x*, ,

故在点处, 切线方程为,

法线方程为.

12. 求曲线*y*=*ex*在点(0,1)处的切线方程.

解*y*′=*ex*, *y*′|*x*=0=1, 故在(0, 1)处的切线方程为

*y*−1=1⋅(*x*−0), 即*y*=*x*+1.

13. 在抛物线*y*=*x*2上取横坐标为*x*1=1及*x*2=3的两点, 作过这两点的割线, 问该抛物线上哪一点的切线平行于这条割线？

解 *y*′=2*x*, 割线斜率为.

令2*x*=4, 得*x*=2.

因此抛物线*y*=*x*2上点(2, 4)处的切线平行于这条割线.

14. 讨论下列函数在*x*=0处的连续性与可导性:

(1)*y*=|sin *x*|;

(2) .

解 (1)因为

*y*(0)=0, , ,

所以函数在*x*=0处连续.

又因为

,

,

而*y*′−(0)≠*y*′+(0), 所以函数在*x*=0处不可导.

解 因为, 又*y*(0)=0, 所以函数在*x*=0处连续.

又因为

,

所以函数在点*x*=0处可导, 且*y*′(0)=0.

15. 设函数为了使函数*f*(*x*)在*x*=1处连续且可导, *a*, *b*应取什么值？

解 因为

, , *f*(1)=*a*+*b*,

所以要使函数在*x*=1处连续, 必须*a*+*b*=1 .

又因为当*a*+*b*=1时

,

,

所以要使函数在*x*=1处可导, 必须*a*=2, 此时*b*=−1.

16. 已知求*f*+′(0)及*f*−′(0), 又*f* ′(0)是否存在？

解 因为

*f*−′(0)=,

*f*+′(0)=,

而*f*−′(0)≠*f*+′(0), 所以*f* ′(0)不存在.

17. 已知*f*(*x*)=, 求*f* ′(*x*) .

解 当*x*<0时, *f*(*x*)=sin *x*, *f* ′(*x*)=cos *x* ;

当*x*>0时, *f*(*x*)=*x*, *f* ′(*x*)=1;

因为 *f*−′(0)=,

*f*+′(0)=, 所以*f* ′(0)=1, 从而

*f* ′(*x*)=.

18. 证明: 双曲线*xy*=*a*2上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于2*a*2 .

解 由*xy*=*a*2得, .

设(*x*0, *y*0)为曲线上任一点, 则过该点的切线方程为

.

令*y*=0, 并注意*x*0*y*0=*a*2, 解得, 为切线在*x*轴上的距.

令*x*=0, 并注意*x*0*y*0=*a*2, 解得, 为切线在*y*轴上的距.

此切线与二坐标轴构成的三角形的面积为

.

习题 2−2

1. 推导余切函数及余割函数的导数公式:

(cot *x*)′=−csc2*x* ; (csc *x*)′=−csc *x*cot *x* .

解 

.

.

2. 求下列函数的导数:

(1);

(2) *y*=5*x*3−2*x*+3*ex* ;

(3) *y*=2tan *x*+sec *x*−1;

(4) *y*=sin *x*⋅cos *x* ;

(5) *y*=*x*2ln *x* ;

(6) *y*=3*ex*cos *x* ;

(7);

(8);

(9) *y*=*x*2ln *x* cos *x* ;

(10);

解 (1)

.

(2) *y*′=(5*x*3−2*x*+3*ex*)′=15*x*2−2*x*ln2+3*ex*.

(3) *y*′=(2tan *x* +sec *x*−1)′=2sec2*x*+sec *x*⋅tan *x*=sec *x*(2sec *x*+tan *x*).

(4) *y*′=(sin *x*⋅cos *x*)′=(sin *x*)′⋅cos *x*+sin *x*⋅(cos *x*)′

=cos *x*⋅cos *x*+sin *x*⋅(−sin *x*)=cos 2*x*.

(5) *y*′=(*x*2ln *x*)′=2*x*⋅ln *x*+*x*2⋅=*x*(2ln *x*+1) .

(6) *y*′=(3*ex*cos *x*)′=3*ex*⋅cos *x*+3*ex*⋅(−sin *x*)=3*ex*(cos *x*−sin *x*).

(7).

(8).

(9) *y*′=(*x*2ln *x* cos *x*)′=2*x*⋅ln *x* cos *x*+*x*2⋅⋅cos *x*+*x*2 ln *x*⋅(−sin *x*)

2*x* ln *x* cos *x*+*x* cos *x*−*x*2 ln *x* sin *x* .

(10).

3. 求下列函数在给定点处的导数:

(1) *y*=sin *x*−cos *x* , 求和.

(2),求.

(3), 求*f* ′(0)和*f* ′(2) .

解 (1)*y*′=cos *x*+sin *x*,

,

.

(2),

.

(3), , .

4. 以初速*v*0竖直上抛的物体, 其上升高度*s*与时间*t*的关系是. 求:

(1)该物体的速度*v*(*t*);

(2)该物体达到最高点的时刻.

解 (1)*v*(*t*)=*s*′(*t*)=*v*0−*gt*.

(2)令*v*(*t*)=0, 即*v*0−*gt*=0, 得, 这就是物体达到最高点的时刻.

5. 求曲线*y*=2sin *x*+*x*2上横坐标为*x*=0的点处的切线方程和法线方程.

解 因为*y*′=2cos *x*+2*x*, *y*′|*x*=0=2, 又当*x*=0时, *y*=0, 所以所求的切线方程为

*y*=2*x*,

所求的法线方程为

, 即*x*+2*y*=0.

6. 求下列函数的导数:

(1) *y*=(2*x*+5)4

(2) *y*=cos(4−3*x*);

(3);

(4) *y*=ln(1+*x*2);

(5) *y*=sin2*x* ;

(6);

(7) *y*=tan(*x*2);

(8) *y*=arctan(*ex*);

(9) *y*=(arcsin *x*)2;

(10) *y*=lncos *x*.

解 (1) *y*′=4(2*x*+5)4−1⋅(2*x*+5)′=4(2*x*+5)3⋅2=8(2*x*+5)3.

(2) *y*′=−sin(4−3*x*)⋅(4−3*x*)′=−sin(4−3*x*)⋅(−3)=3sin(4−3*x*).

(3).

(4).

(5) *y*′=2sin *x*⋅(sin *x*)′=2sin *x*⋅cos *x*=sin 2*x* .

(6)

.

(7) *y*′=sec2(*x*2)⋅(*x*2)′=2*x*sec2(*x*2).

(8).

(9) *y*′.

(10)**.

7. 求下列函数的导数:

(1) *y*=arcsin(1−2*x*);

(2);

(3);

(4);

(5);

(6);

(7);

(8);

(9) *y*=ln(sec *x*+tan *x*);

(10) *y*=ln(csc *x*−cot *x*).

解 (1).

(2)

.

(3)

.

(4).

(5).

(6).

(7).

(8)

.

(9) .

(10) .

8. 求下列函数的导数:

(1);

(2);

(3);

(4);

(5)*y*=sin*nx*cos *nx* ;

(6);

(7);

(8) *y*=ln[ln(ln *x*)] ;

(9);

(10).

解 (1)



.



(2)

.

(3)



.

(4) 

.

(5) *y*′=*n* sin*n*−1*x*⋅(sin *x*)′⋅cos *nx*+sin*nx*⋅(−sin *nx*)⋅(*nx*)′

=*n* sin*n*−1*x*⋅cos *x* ⋅cos *nx*+sin*nx*⋅(−sin *nx*)⋅*n*

=*n* sin*n*−1*x*⋅(cos *x*⋅cos *nx*−sin *x*⋅sin *nx*)= *n* sin*n*−1*x*cos(*n*+1)*x* .

(6).

(7)



.

(8)

.

(9)

.

(10)

.

9. 设函数*f*(*x*)和*g*(*x*)可导, 且*f*2(*x*)+*g*2(*x*)≠0, 试求函数的导数.

解 



.

10. 设*f*(*x*)可导, 求下列函数*y*的导数**:

(1) *y*=*f*(*x*2);

(2) *y*=*f*(sin2*x*)+*f*(cos2*x*).

解 (1) *y*′=*f* ′(*x*2)⋅(*x*2)′= *f* ′(*x*2)⋅2*x*=2*x*⋅*f* ′(*x*2).

(2) *y*′=*f* ′(sin2*x*)⋅(sin2*x*)′+*f* ′(cos2*x*)⋅(cos2*x*)′

= *f* ′(sin2*x*)⋅2sin *x*⋅cos *x*+*f* ′(cos2*x*)⋅2cos*x*⋅(−sin *x*)

=sin 2*x*[*f* ′(sin2*x*)− *f* ′(cos2*x*)].

11. 求下列函数的导数:

(1) *y*=ch(sh *x* );

(2) *y*=sh *x*⋅*e*ch *x*;

(3) *y*=th(ln *x*);

(4) *y*=sh3*x* +ch2*x* ;

(5) *y*=th(1−*x*2);

(6) *y*=arch(*x*2+1);

(7) *y*=arch(*e*2*x*);

(8) *y*=arctan(th *x*);

(9);

(10)

解 (1) *y*′=sh(sh *x*)⋅(sh *x*)′=sh(sh *x*)⋅ch *x* .

(2) *y*′=ch *x*⋅*e*ch *x*+sh *x*⋅*e*ch *x*⋅sh *x*=*e*ch *x*(ch *x*+sh2*x*) .

(3).

(4) *y*′=3sh2*x*⋅ch *x*+2ch *x*⋅sh *x* =sh *x*⋅ch *x*⋅(3sh *x*+2) .

(5).

(6).

(7).

(8)

.

(9)





.

(10)

.

12. 求下列函数的导数:

(1) *y*=*e*−*x*(*x*2−2*x*+3);

(2) *y*=sin2*x*⋅sin(*x*2);

(3);

(4);

(5);

(6);

(7);

(8);

(9) ;

(10).

解 (1) *y*′=−*e*−*x*(*x*2−2*x*+3)+*e*−*x*(2*x*−2)

=*e*−*x*(−*x*2+4*x*−5).

(2) *y*′=2sin *x*⋅cos *x*⋅sin(*x*2)+sin2*x*⋅cos(*x*2)⋅2*x*

=sin2*x*⋅sin(*x*2)+2*x*⋅sin2*x*⋅cos(*x*2).

(3).

(4).

(5).

(6).

(7)

.

(8)

.

(9).

(10)

.

习题 2−3

1. 求函数的二阶导数:

(1) *y*=2*x*2+ln *x*;

(2) *y*=*e*2*x*−1;

(3) *y*=*x*cos *x*;

(4) *y*=*e*−*t* sin *t*;

(5);

(6) *y*=ln(1−*x*2)

(7) *y*=tan *x*;

(8);

(9) *y*=(1+*x*2)arctan *x* ;

(10);

(11);

(12).

解 (1), .

(2) *y*′=*e*2*x*−1 ⋅2=2*e*2*x*−1, *y*′′=2*e*2*x*−1 ⋅2=4*e*2*x*−1.

(3) *y*=*x*cos *x* ; *y*′=cos *x*−*x*sin *x*,

*y*′′=−sin *x*−sin *x*−*x*cos *x*=−2sin *x*−*x*cos *x* .

(4) *y*′=−*e*−*t*sin *t*+*e*−*t*cos *t*=*e*−*t*(cos *t*−sin *t*)

*y*′′=−*e*−*t*(cos *t*−sin *t*)+*e*−*t*(−sin *t*−cos *t*)=−2*e*−*t*cos *t* .

(5),

.

(6) ,

.

(7) *y*′=sec2 *x*,

*y*′′=2sec *x*⋅(sec *x*)′=2sec *x*⋅sec *x*⋅tan *x*=2sec2*x*⋅tan *x* .

(8),

.

(9),

.

(10),

.

(11),

.

(12),

.

2. 设*f*(*x*)=(*x*+10)6, *f* ′′′(2)=?

解*f* ′(*x*)=6(*x*+10)5, *f* ′′(*x*)=30(*x*+10)4, *f* ′′′(*x*)=120(*x*+10)3,

*f* ′′′(2)=120(2+10)3=207360.

3. 若*f* ′′(*x*)存在, 求下列函数*y*的二阶导数:

(1) *y*=*f*(*x*2);

(2) *y*=ln[*f*(*x*)] .

解 (1)*y*′= *f* ′(*x*2)⋅(*x*2)′=2*xf* ′(*x*2),

*y*′′=2*f* ′(*x*2)+2*x*⋅2*xf* ′′(*x*2)=2*f* ′(*x*2)+4*x*2*f* ′′(*x*2).

(2),

.

4. 试从导出:

(1);

(2).

解 (1).

(2)

.

5. 已知物体的运动规律为*s*=*A*sin*ωt*(*A*、*ω*是常数), 求物体运动的加速度, 并验证:

.

解 ,

.

就是物体运动的加速度.

.

6. 验证函数*y*=*C*1*eλx*+*C*2*e*−*λx*(*λ*,*C*1, *C*2是常数)满足关系式:

*y*′′−*λ*2*y*=0 .

解 *y*′=*C*1*λeλx*−*C*2*λe*−*λx*,

*y*′′=*C*1*λ*2*eλx*+*C*2*λ*2*e*−*λx*.

*y*′′−*λ*2*y*=(*C*1*λ*2*eλx*+*C*2*λ*2*e*−*λx*)−*λ*2(*C*1*eλx*+*C*2*e*−*λx*)

=(*C*1*λ*2*eλx*+*C*2*λ*2*e*−*λx*)−(*C*1*λ*2*eλx*+*C*2*λ*2*e*−*λx*)=0 .

7. 验证函数*y*=*ex*sin *x*满足关系式:

*y*′′−2*y*′+2*y*=0 .

解 *y*′=*ex*sin *x*+*ex*cos *x*=*ex*(sin *x*+cos *x*),

*y*′′=*ex*(sin *x*+cos *x*)+*ex*(cos *x*−sin *x*)=2*ex*cos *x* .

*y*′′−2*y*′+2*y*=2*ex*cos *x*−2*ex*(sin *x*+cos *x*)+2*ex*sin *x*

=2*ex*cos *x*−2*ex*sin *x*−2*ex*cos *x*+2*ex*sin *x*=0 .

8. 求下列函数的*n*阶导数的一般表达式:

(1) *y*=*xn*+*a*1*xn*−1+*a*2*xn*−2+ ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−1*x*+*an*(*a*1, *a*2, ⋅ ⋅ ⋅, *an*都是常数);

(2) *y*=sin2*x* ;

(3) *y*=*x*ln *x* ;

(4) *y*=*xex* .

解 (1) *y*′=*nxn*−1+(*n*−1)*a*1*xn*−2+(*n*−2)*a*2*xn*−3+ ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−1,

*y*′′=*n*(*n*−1)*xn*−2+(*n*−1)(*n*−2)*a*1*xn*−3+(*n*−2)(*n*−3)*a*2*xn*−4+ ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−2,

⋅ ⋅ ⋅,

*y*(*n*)=*n*(*n*−1)(*n*−2)⋅ ⋅ ⋅2⋅1*x*0=*n*! .

(2) *y*′=2sin *x* cos *x*=sin2*x* ,

,

,

,

⋅ ⋅ ⋅,

.

(3) ,

,

*y*′′′=(−1)*x*−2,

*y*(4)=(−1)(−2)*x*−3,

⋅ ⋅ ⋅,

*y*(*n*)=(−1)(−2)(−3)⋅ ⋅ ⋅(−*n*+2)*x*−*n*+1.

(4) *y*′=*ex*+*xex* ,

*y*′′=*ex*+*ex*+*xex*=2*ex*+*xex* ,

*y*′′′=2*ex*+*ex*+*xex*=3*ex*+*xex* ,

⋅ ⋅ ⋅,

*y*(*n*)=*nex*+*xex*=*ex*(*n*+*x*) .

9. 求下列函数所指定的阶的导数:

(1) *y*=*ex*cos *x*, 求*y*(4) ;

(2) *y*=*x*sh *x*, 求*y*(100) ;

(3) *y*=*x*2sin 2*x*, 求*y*(50) .

解 (1)令*u*=*ex*, *v*=cos *x* , 有

*u*′=*u*′′=*u*′′′=*u*(4)=*ex*;

*v*′=−sin *x* , *v*′′=−cos *x* , *v*′′′=sin *x*, *v*(4)=cos *x* ,

所以 *y*(4)=*u*(4)⋅*v*+4*u*′′′⋅*v*′+6*u*′′⋅*v*′′+4*u*′⋅*v*′′′+*u*⋅*v*(4)

=*ex*[cos *x*+4(−sin *x*)+6(−cos *x*)+4sin *x*+cos *x*]=−4*ex*cos *x* .

(2)令*u*=*x*, *v*=sh *x*, 则有

*u*′=1, *u*′′=0;

*v*′=ch *x*, *v*′′=sh *x*, ⋅ ⋅ ⋅ , *v*(99)=ch *x* , *v*(100)=sh *x*,

所以 

=100ch *x*+*x*sh *x* .

(3)令*u*=*x*2 , *v*=sin 2*x*, 则有

*u*′=2*x*, *u*′′=2, *u*′′′=0;

,

*v*(49)=249cos 2*x*, *v*(50)=−250sin 2*x* ,

所以 





.

习题2−4

1. 求由下列方程所确定的隐函数*y*的导数:

(1) *y*2−2*x* *y*+9=0;

(2) *x*3+*y*3−3*axy*=0;

(3) *xy*=*ex*+*y*;

(4) *y*=1−*xey*.

解 (1)方程两边求导数得

2*y* *y*′−2*y*−2*x* *y*′ =0 ,

于是 (*y*−*x*)*y*′=*y*,

.

(2)方程两边求导数得

3*x*2+3*y*2*y*′−2*ay*−3*axy*′=0,

于是 (*y*2−*ax*)*y*′=*ay*−*x*2 ,

.

(3)方程两边求导数得

*y* +*xy*′=*e**x*+*y*(1+*y*′),

于是 (*x*−*ex*+*y*)*y*′=*ex*+*y*−*y*,

.

(4)方程两边求导数得

*y*′=−*e**y*−*xeyy*′,

于是 (1+*xe**y*)*y*′=−*e**y*,

.

2. 求曲线在点处的切线方程和法线方程.

解 方程两边求导数得

,

于是 ,

在点处*y*′=−1.

所求切线方程为

, 即.

所求法线方程为

, 即*x*−*y*=0.

3. 求由下列方程所确定的隐函数*y*的二阶导数:

(1) *x*2−*y*2=1;

(2) *b*2*x*2+*a*2*y*2=*a*2*b*2;

(3) *y*=tan(*x*+*y*);

(4) *y*=1+*xey*.

解 (1)方程两边求导数得

2*x*−2*yy*′=0,

*y*′=,

.

(2)方程两边求导数得

2*b*2*x*+2*a*2*yy*′=0,

,



.

(3)方程两边求导数得

*y*′=sec2(*x*+*y*)⋅(1+*y*′),



,

.

(4)方程两边求导数得

*y*′=*e**y*+*xe**yy*′,

,

.

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) ;

(2);

(3);

(4).

解 (1)两边取对数得

ln *y*=*x*ln|*x*|−*x*ln|1+*x*|，

两边求导得

,

于是 .

(2)两边取对数得

,

两边求导得

,

于是 .

(3)两边取对数得

,

两边求导得

,

于是 

(4)两边取对数得

,

两边求导得

,

于是 

.

5. 求下列参数方程所确定的函数的导数:

(1) ;

(2) .

解 (1).

(2).

6. 已知求当时的值.

解 ,

当时, .

7. 写出下列曲线在所给参数值相应的点处的切线方程和法线方程:

(1) , 在处;

(2) , 在*t*=2处.

解 (1).

当时, , , ,

所求切线方程为

, 即;

所求法线方程为

, 即.

(2),

,

.

当*t*=2时, , , ,

所求切线方程为

, 即4*x*+3*y*−12*a*=0;

所求法线方程为

, 即3*x*−4*y*+6*a*=0.

8. 求下列参数方程所确定的函数的二阶导数:

(1) ;

(2) ;

(3) ;

(4) , 设*f* ′′(*t*)存在且不为零.

解 (1) , .

(2) ,

.

(3) ,

.

(4) ,

.

9. 求下列参数方程所确定的函数的三阶导数:

(1);

(2).

解(1),

,

.

(2),

,

.

10. 落在平静水面上的石头, 产生同心波纹, 若最外一圈波半径的增大率总是6m/*s*, 问在2秒末扰动水面面积的增大率为多少？

解 设波的半径为*r*, 对应圆面积为*S*, 则*S*=*πr*2, 两边同时对*t*求导得

*S t*′=2*πrr*′.

当*t*=2时, *r*=6⋅2=12, *r*′*t*=6,

故*S t*′|*t*=2=2⋅12⋅6*π*=144*π* (米2秒).

11. 注水入深8m上顶直径8m的正圆锥形容器中, 其速率为4m2/min . 当水深为5m时, 其表面上升的速度为多少？

解 水深为*h*时, 水面半径为, 水面面积为,

水的体积为,

, .

已知*h*=5(m)，(m3/min), 因此 (m/min).

12. 溶液自深18cm直径12cm的正圆锥形漏斗中漏入一直径为10cm的圆柱形筒中, 开始时漏斗中盛满了溶液, 已知当溶液在漏斗中深为12cm时, 其表面下降的速率为1cm/min. 问此时圆柱形筒中溶液表面上升的速率为多少？

解 设在*t*时刻漏斗在的水深为*y*, 圆柱形筒中水深为*h*. 于是有

.

由, 得, 代入上式得

,

即 .

两边对*t*求导得

.

当*y*=12时, *y*′*t*=−1代入上式得

(cm/min)..

2−7

1. 已知*y*=*x*3−*x*, 计算在*x*=2处当Δ*x*分别等于1, 0.1, 0.01时的Δ*y*及*dy*.

解 Δ*y*|*x*=2, Δ*x*=1=[(2+1)3−(2+1)]−(23−2)=18,

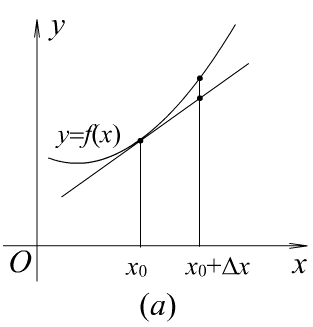
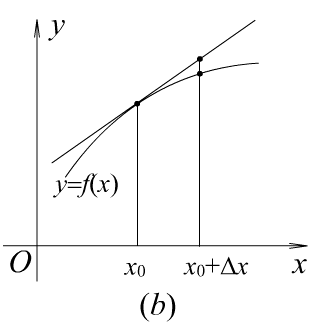
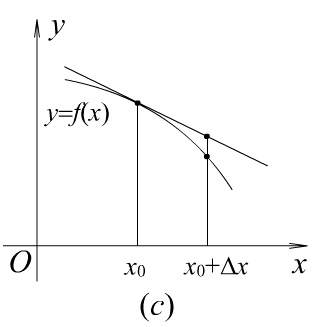
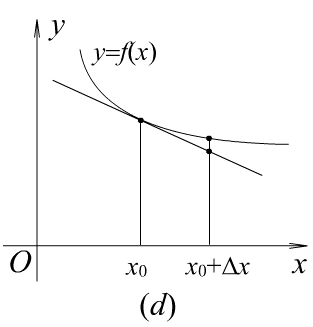
*dy*|*x*=2, Δ*x*=1=(3*x*2−1)Δ*x*|*x*=2, Δ*x*=1=11;

Δ*y*|*x*=2, Δ*x*=0.1=[(2+0.1)3−(2+0.1)]−(23−2)=1.161,

*dy*|*x*=2, Δ*x*=0.1=(3*x*2−1)Δ*x*|*x*=2, Δ*x*=0.1=1.1;

Δ*y*|*x*=2, Δ*x*=0.01=[(2+0.01)3−(2+0.01)]−(23−2)=0.110601,

*dy*|*x*=2, Δ*x*=0.01=(3*x*2−1)Δ*x*|*x*=2, Δ*x*=0.01=0.11.



2. 设函数*y*=*f*(*x*)的图形如图所示, 试在图(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)中分别标出在点*x*0的*dy*、Δ*y*及Δ*y*−d*y*并说明其正负.

解 (*a*)Δ*y*>0, *dy*>0, Δ*y*−*dy*>0.

(*b*)Δ*y*>0, *dy*>0, Δ*y*−*dy*<0.

(*c*)Δ*y*<0, *dy*<0, Δ*y*−*dy*<0.

(*d*)Δ*y*<0, *dy*<0, Δ*y*−*dy*>0.

3. 求下列函数的微分:

(1);

(2) *y*=*x*sin 2*x* ;

(3);

(4) *y*=ln2(1−*x*);

(5) *y*=*x*2*e*2*x* ;

(6) *y*=*e*−*x*cos(3−*x*);

(7);

(8) *y*=tan2(1+2*x*2);

(9);

(10) *s*=*A*sin(*ωt*+*ϕ*) (*A*, *ω*, *ϕ*是常数) .

解 (1)因为, 所以.

(2)因为*y*′=sin2*x*+2*x*cos2*x* , 所以*dy*=(sin2*x*+2*x*cos2*x*)*dx*.

(3)因为, 所以.

(4).

(5)*dy*=*y*′*dx*=(*x*2*e*2*x*)′*dx*=(2*xe*2*x*+2*x*2*e*2*x*)*dx*=2*x*(1+*x*)*e*2*x*.

(6) *dy*=*y*′*dx*=[*e*−*x*cos(3−*x*)]*dx*=[−*e*−*x*cos(3−*x*)+*e*−*x*sin(3−*x*)]*dx*

=*e*−*x*[sin(3−*x*)−cos(3−*x*)]*dx* .

(7).

(8) *dy*=*d*tan2(1+2*x*2)=2tan(1+2*x*2)*d*tan(1+2*x*2)

=2tan(1+2*x*2)⋅sec2(1+2*x*2)*d*(1+2*x*2)

=2tan(1+2*x*2)⋅sec2(1+2*x*2)⋅4*xdx*

=8*x*⋅tan(1+2*x*2)⋅sec2(1+2*x*2)*dx* .

(9)

.

(10) *dy*=*d*[*A*sin(*ω* *t*+*ϕ*)]=*A*cos(*ω* *t*+*ϕ*)*d*(*ωt*+*ϕ*)=*Aω* cos(*ωt*+*ϕ*)*dx* .

4. 将适当的函数填入下列括号内, 使等式成立:

(1) *d*( )=2*dx* ;

(2) *d*( )=3*xdx* ;

(3) *d*( )=cos*tdt* ;

(4) *d*( )=sin *ωxdx* ;

(5) *d*( );

(6) *d*( )=*e*−2x*dx* ;

(7) *d*( );

(8) *d*( )=sec23*xdx* .

解 (1) *d*( 2*x*+*C* )=2*dx* .

(2) *d*()=3*xdx* .

(3) *d*( sin *t*+*C* )=cos*tdt* .

(4) *d*()=sin *ωxdx* .

(5) *d*( ln(1+*x*)+*C* ).

(6) *d*()=*e*−2x*dx* .

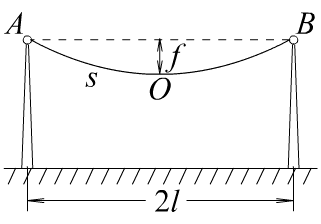
(7) *d*().

(8) *d*()=sec23*xdx* .

5. 如图所示的电缆的长为*s*, 跨度为2*l*, 电缆的最低点*O*与杆顶连线*AB*的距离为*f*, 则电缆长可按下面公式计算:

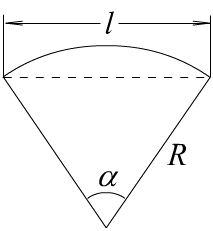
,

当*f*变化了Δ*f*时, 电缆长的变化约为多少？



解 .

6. 设扇形的圆心角*α*=60°, 半径*R*=100cm(如图), 如果*R*不变, *α* 减少30′, 问扇形面积大约改变了多少？又如果*α* 不变, *R*增加1cm, 问扇形面积大约改变了多少？



解 (1)扇形面积,

.

将*α*=60°, *R*=100,  代入上式得

(cm2).

(2) .

将*α*=60°, *R*=100, Δ*R*=1代入上式得

(cm2).

7. 计算下列三角函数值的近似值:

(1) cos29°;

(2) tan136°.

解 (1)已知*f* (*x*+Δ*x*)≈*f* (*x*)+*f* ′(*x*)Δ*x*, 当*f*(*x*)=cos *x*时, 有cos(*x*+Δ*x*)≈cos *x*−sin *x*⋅Δ*x* , 所以

cos29°=.

(2)已知*f* (*x*+Δ*x*)≈*f* (*x*)+*f* ′(*x*)Δ*x*, 当*f*(*x*)=tan *x*时, 有tan(*x*+Δ*x*)≈tan *x*+sec2*x*⋅Δ*x*, 所以

tan136°=.

8. 计算下列反三角函数值的近似值

(1) arcsin0.5002;

(2) arccos 0.4995.

解 (1)已知*f* (*x*+Δ*x*)≈*f* (*x*)+*f* ′(*x*)Δ*x*, 当*f*(*x*)=arcsin *x*时, 有

,

所以



≈30°47′′.

(2)已知*f* (*x*+Δ*x*)≈*f* (*x*)+*f* ′(*x*)Δ*x*, 当*f*(*x*)=arccos *x*时, 有

,

所以



≈60°2′.

9. 当较小时, 证明下列近似公式:

(1) tan *x*≈*x* (*x*是角的弧度值);

(2) ln(1+*x* )≈*x* ;

(3),

并计算tan45′ 和ln1.002的近似值.

(1)已知当|Δ*x*|较小时, *f*(*x*0+Δ*x*)≈*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)Δ*x*, 取*f*(*x*)=tan *x*, *x*0=0, Δ*x*=*x*, 则有

tan *x*=tan(0+*x*)≈tan 0+sec20⋅*x*=sec20⋅*x*=*x* .

(2)已知当|Δ*x*|较小时, *f*(*x*0+Δ*x*)≈*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)Δ*x*, 取*f*(*x*)=ln *x* , *x*0=1, Δ*x*=*x*, 则有

ln(1+*x*)≈ln1+(ln *x*)′|*x*=1⋅*x*=*x* .

(3)已知当|Δ*x*|较小时, *f*(*x*0+Δ*x*)≈*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)Δ*x*, 取, *x*0=1, Δ*x*=*x*, 则有

.

tan45′≈45′≈0.01309;

ln(1.002)=ln(1+0.002) ≈0.002.

10. 计算下列各根式的的近似值:

(1);

(2).

解 (1)设, 则当|*x*|较小时, 有,

.

(2)设, 则当|*x*|较小时, 有, 于是

.

11. 计算球体体积时, 要求精确度在2%以内, 问这时测量直径*D*的相对误差不能超过多少？

解 球的体积为, , 因为计算球体体积时, 要求精度在2%以内, 所以其相对误差不超过2%, 即要求

,

所以 ,

也就是测量直径的相对误差不能超过.

12. 某厂生产如图所示的扇形板, 半径*R*=200mm, 要求中心角*α*为55°. 产品检验时, 一般用测量弦长*l* 的办法来间接测量中心角*α*, 如果测量弦长*l* 时的误差*δ*1=0.1mm, 问此而引起的中心角测量误差*δx*是多少？

解 由得,

当*α*=55°时, =400sin27.5°≈184.7,

*δ* ′*α*=|*α*′*l*|⋅*δl*.

当*l*=184.7, *δ**l*=0.1时,

(弧度).

**总 习 题 二**

1. 在“充分”、“必要”和“充分必要”三者中选择一个正确的填入下列空格内:

(1)*f*(*x*)在点*x*0可导是*f*(*x*)在点*x*0连续的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_条件. *f*(*x*)在点*x*0连续是*f*(*x*)在点*x*0可导的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_条件.

(2) *f*(*x*)在点*x*0的左导数*f*−′(*x*0)及右导数*f*+′(*x*0)都存在且相等是*f*(*x*)在点*x*0可导的\_\_\_\_\_\_\_条件.

(3) *f*(*x*)在点*x*0可导是*f*(*x*)在点*x*0可微的\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_条件.

解 (1)充分, 必要.

(2) 充分必要.

(3) 充分必要.

2. 选择下述题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设*f*(*x*)在*x*=*a*的某个邻域内有定义, 则*f*(*x*)在*x*=*a*处可导的一个充分条件是( ).

(*A*)存在; (*B*)存在;

(*C*)存在; (*D*)存在.

解 正确结论是*D*.

提示: (Δ*x*=−*h*).

3. 设有一根细棒, 取棒的一端作为原点, 棒上任一点的做标*x*为, 于是分布在区间[0, *x*]上细棒的质量*m*是*x*的函数*m*=*m*(*x*),应怎样确定细棒在点*x*0处的线密度(对于均匀细棒来说, 单位长度细棒的质量叫做这细棒的线密度？

解 Δ*m*=*m*(*x*0+Δ*x*)−*m*(*x*0).

在区间[*x*0, *x*0+Δ*x*]上的平均线密度为

.

于是, 在点*x*0处的线密度为

.

4. 根据导数的定义, 求的导数.

解 .

5. 求下列函数*f*(*x*)的*f*−′(0)及*f*+′(0),又*f* ′(0)是否存在?

(1);

(2).

解 (1)因为,

,

而且*f*−′(0) = *f*+′(0), 所以*f* ′(0)存在, 且*f* ′(0)=1.

(2)因为,

,

而*f*−′(0)≠ *f*+′(0), 所以*f* ′(0)不存在.

6. 讨论函数



在*x*=0处的连续性与可导性.

解 因为*f*(0)=0, , 所以*f*(*x*)在*x*=0处连续;

因为极限不存在, 所以*f*(*x*)在*x*=0处不可导.

7. 求下列函数的导数:

(1) *y*=arcsin(sin *x*);

(2);

(3);

(4);

(5)(*x*>0) .

解(1).

(2).

(3)

.

(4).

(5), , .

8. 求下列函数的二阶导数:

(1)*y*=cos2*x* ⋅ln *x* ;

(2).

解 (1),



.

(2)

.

9. 求下列函数的*n*阶导数:

(1);

(2).

解 (1),

, , , ⋅ ⋅ ⋅,

.

(2),

*y*′=2(−1)(1+*x*)−2, *y*′′=2(−1)(−2)(1+*x*)−3, *y*′′′=2(−1)(−2)(−3)(1+*x*)−4, ⋅ ⋅ ⋅,

.

10. 设函数*y*=*y*(*x*)由方程*e**y*+*xy*=*e*所确定, 求*y*′′(0).

解 方程两边求导得

*e**yy*′+*y*+*xy*′=0, —— (1)

于是 ;

. ——(2)

当*x*=0时, 由原方程得*y*(0)=1, 由(1)式得, 由(2)式得.

11. 求下列由参数方程所确定的函数的一阶导数及二阶导数:

(1);

(2).

解 (1),

.

(2) ,

.

12. 求曲线在*t*=0相的点处的切线方程及法线方程.

解 .

当*t*=0时, , *x*=2, *y*=1.

所求切线的方程为, 即*x*+2*y*−4=0;

所求法线的方程为*y*−1=2(*x*−2).

13. 甲船以6km/h的速率向东行驶, 乙船以8km/h的速率向南行驶, 在中午十二点正, 乙船位于甲船之北16km处. 问下午一点正两船相离的速率为多少?

解 设从中午十二点开始, 经过*t*小时, 两船之间的距离为*S*, 则有

*S*2=(16−8*t*)2+(6*t*)2,

,

.

当*t*=1时, *S*=10,

(km/h),

即下午一点正两船相离的速度为−2.8km/h .

14. 利用函数的微分代替函数的增量求的近似值.

解 设, 则有, 或于是

.

15. 已知单摆的振动周期, 其中*g*=980 cm/s2, *l*为摆长(单位为cm). 设原摆长为20cm, 为使周期*T*增大0.05s, 摆长约需加长多少？

解 因为,

所以 (cm),

即摆长约需加长2.23cm.

习题3−1

1. 验证罗尔定理对函数*y*=ln sin *x* 在区间上的正确性.

解 因为*y*=ln sin *x* 在区间上连续, 在内可导, 且, 所以由罗尔定理知, 至少存在一点, 使得*y*′(*ξ*)=cot *ξ*=0.

由*y*′(*x*)=cot *x*=0得.

因此确有, 使*y*′(*ξ*)=cot *ξ*=0.

2. 验证拉格朗日中值定理对函数*y*=4*x*3−5*x*2+*x*−2在区间[0, 1]上的正确性.

解 因为*y*=4*x*3−5*x*2+*x*−2在区间[0, 1]上连续, 在(0, 1)内可导, 由拉格朗日中值定理知, 至少存在一点*ξ*∈(0, 1), 使.

由*y*′(*x*)=12*x*2−10*x*+1=0得.

因此确有, 使.

3. 对函数*f*(*x*)=sin *x*及*F*(*x*)=*x*+cos *x*在区间上验证柯西中值定理的正确性.

解 因为*f*(*x*)=sin *x*及*F*(*x*)=*x* +cos *x*在区间上连续, 在可导, 且*F*′(*x*)=1−sin *x*在内不为0, 所以由柯西中值定理知至少存在一点, 使得

.

令, 即.

化简得. 易证, 所以在内有解, 即确实存在, 使得

.

4. 试证明对函数*y*=*px*2+*qx*+*r*应用拉格朗日中值定理时所求得的点总是位于区间的正中间.

证明 因为函数*y*=*px*2+*qx*+*r*在闭区间[*a*, *b*]上连续, 在开区间(*a*, *b*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 至少存在一点*ξ*∈(*a*, *b*), 使得*y*(*b*)−*y*(*a*)=*y*′(*ξ*)(*b*−*a*), 即

(*pb*2+*qb*+*r*)−(*pa*2+*qa*+*r*)=(2*pξ*+*q*)(*b*−*a*).

化间上式得

*p*(*b*−*a*)(*b*+*a*)=2*pξ* (*b*−*a*),

故.

5. 不用求出函数*f*(*x*)=(*x*−1)(*x*−2)(*x*−3)(*x*−4)的导数，说明方程*f* ′(*x*)=0有几个实根, 并指出它们所在的区间.

解 由于*f*(*x*)在[1, 2]上连续, 在(1, 2)内可导, 且*f*(1)=*f*(2)=0, 所以由罗尔定理可知, 存在*ξ*1∈(1, 2), 使*f* ′(*ξ*1)=0. 同理存在*ξ*2∈(2, 3), 使*f* ′(*ξ*2)=0; 存在*ξ*3∈(3, 4), 使*f* ′(*ξ*3)=0. 显然*ξ*1、*ξ*2、*ξ* 3都是方程*f* ′(*x*)=0的根. 注意到方程*f* ′(*x*)=0是三次方程, 它至多能有三个实根, 现已发现它的三个实根, 故它们也就是方程*f* ′(*x*)=0的全部根.

6. 证明恒等式: (−1≤*x*≤1).

证明 设*f*(*x*)= arcsin *x*+arccos *x*. 因为

,

所以*f* (*x*)≡*C*, 其中*C*是一常数.

因此, 即.

7. 若方程*a*0*xn*+*a*1*xn*−1+ ⋅ ⋅ ⋅ + *an*−1*x*=0有一个正根*x*0, 证明方程

*a*0*nxn*−1+*a*1(*n*−1)*xn*−2 + ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−1 =0

必有一个小于*x*0的正根.

证明 设*F*(*x*)=*a*0*xn*+*a*1*xn*−1+ ⋅ ⋅ ⋅ + *an*−1*x*, 由于*F*(*x*)在[0, *x*0]上连续, 在(0, *x*0)内可导, 且*F*(0)=*F*(*x*0)=0, 根据罗尔定理, 至少存在一点*ξ*∈(0, *x*0), 使*F* ′(*ξ*)=0, 即方程

*a*0*nxn*−1+*a*1(*n*−1)*xn*−2 + ⋅ ⋅ ⋅ +*an*−1 =0

必有一个小于*x*0的正根.

8. 若函数*f*(*x*)在(*a*, *b*)内具有二阶导数, 且*f*(*x*1)=*f*(*x*2)=*f*(*x*3), 其中*a*<*x*1<*x*2<*x*3<*b*, 证明:

在(*x*1, *x*3)内至少有一点*ξ*, 使得*f* ′′(*ξ*)=0.

证明 由于*f*(*x*)在[*x*1, *x*2]上连续, 在(*x*1, *x*2)内可导, 且*f*(*x*1)=*f*(*x*2), 根据罗尔定理, 至少存在一点*ξ*1∈(*x*1, *x*2), 使*f* ′(*ξ*1)=0. 同理存在一点*ξ*2∈(*x*2, *x*3), 使*f* ′(*ξ*2)=0.

又由于*f* ′(*x*)在[*ξ*1, *ξ*2]上连续, 在(*ξ*1, *ξ*2)内可导, 且*f* ′(*ξ*1)=*f* ′(*ξ*2)=0, 根据罗尔定理, 至少存在一点*ξ*∈(*ξ*1, *ξ*2)⊂(*x*1, *x*3), 使*f* ′′(*ξ* )=0.

9. 设*a*>*b*>0, *n*>1, 证明:

*nbn*−1(*a*−*b*)<*an*−*bn*<*nan*−1(*a*−*b*) .

证明 设*f*(*x*)=*xn*, 则*f*(*x*)在[*b*, *a*]上连续, 在(*b*, *a*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在*ξ*∈(*b*, *a*), 使

*f*(*a*)−*f*(*b*)=*f* ′(*ξ*)(*a*−*b*), 即*an*−*bn*=*nξ* *n*−1(*a*−*b*).

因为 *nbn*−1(*a*−*b*)<*nξ* *n*−1(*a*−*b*)< *nan*−1(*a*−*b*),

所以 *nbn*−1(*a*−*b*)<*an*−*bn*< *nan*−1(*a*−*b*) .

10. 设*a*>*b*>0, 证明:

.

证明 设*f*(*x*)=ln *x*, 则*f*(*x*)在区间[*b*, *a*]上连续, 在区间(*b*, *a*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在*ξ*∈(*b*, *a*), 使

*f*(*a*)−*f*(*b*)=*f* ′(*ξ*)(*a*−*b*), 即.

因为*b*<*ξ*<*a*, 所以

, 即.

11. 证明下列不等式:

(1)|arctan *a*−arctan *b*|≤|*a*−*b*|;

(2)当*x*>1时, *ex*>*e*⋅*x* .

证明 (1)设*f*(*x*)=arctan *x*, 则*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 在(*a*, *b*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在*ξ*∈(*a*, *b*), 使

*f*(*b*)−*f*(*a*)=*f* ′(*ξ*)(*b*−*a*), 即,

所以, 即|arctan *a*−arctan *b*|≤|*a*−*b*|.

(2)设*f*(*x*)=*ex*, 则*f*(*x*)在区间[1, *x*]上连续, 在区间(1, *x*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在*ξ*∈(1, *x*), 使

*f*(*x*)−*f*(1)=*f* ′(*ξ*)(*x*−1), 即 *ex*−*e*=*eξ* (*x*−1).

因为*ξ* >1, 所以

*ex*−*e*=*eξ* (*x*−1)>*e*(*x*−1), 即*ex*>*e*⋅*x*.

12. 证明方程*x*5+*x*−1=0只有一个正根.

证明 设*f*(*x*)=*x*5+*x*−1, 则*f*(*x*)是[0, +∞)内的连续函数.

因为*f*(0)=−1, *f*(1)=1, *f*(0)*f*(1)<0, 所以函数在(0, 1)内至少有一个零点, 即*x*5+*x*−1=0至少有一个正根.

假如方程至少有两个正根, 则由罗尔定理, *f* ′(*x*)存在零点, 但*f* ′(*x*)=5*x*4+1≠0, 矛盾. 这说明方程只能有一个正根.

13. 设*f*(*x*)、*g*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 在(*a*, *b*)内可导, 证明在(*a*, *b*)内有一点*ξ*, 使

.

解 设, 则*ϕ*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 在(*a*, *b*)内可导, 由拉格朗日中值定理, 存在*ξ*∈(*a*, *b*), 使

*ϕ*(*b*)−*ϕ*(*a*)=*ϕ*′(*ξ*)(*b*−*a*),

即 .

因此 .

14. 证明: 若函数.*f*(*x*)在(−∞, +∞)内满足关系式*f* ′(*x*)=*f*(*x*), 且*f*(0)=1则*f*(*x*)=*ex*.

证明 令, 则在(−∞, +∞)内有

,

所以在(−∞, +∞)内*ϕ*(*x*)为常数.

因此*ϕ*(*x*)=*ϕ*(0)=1, 从而*f*(*x*)=*ex*.

15. 设函数*y*=*f*(*x*)在*x*=0的某邻域内具有*n* 阶导数, 且*f*(0)=*f* ′(0)= ⋅ ⋅ ⋅ =*f* (*n*−1)(0)=0, 试用柯西中值定理证明:

 (0<*θ*<1).

证明 根据柯西中值定理

(*ξ*1介于0与*x*之间),

(*ξ*2介于0与*ξ*1之间),

(*ξ*3介于0与*ξ*2之间),

依次下去可得

(*ξn*介于0与*ξn*−1之间),

所以.

由于*ξn*可以表示为*ξn* =*θ* *x* (0<*θ*<1), 所以 (0<*θ*<1).

习题3−2

1. 用洛必达法则求下列极限:

(1);

(2);

(3);

(4);

(5);

(6);

(7);

(8);

(9);

(10);

(11);

(12);

(13);

(14);

(15);

(16).

解 (1).

(2).

(3).

(4).

(5).

(6).

(7)

.

(8)



.

(9)

.

(10)

.

(注: cos*x*⋅ln(1+*x*2)~*x*2)

(11).

(12)

(注: 当*x*→0时, .

(13).

(14)因为,

而 

,

所以 .

.

(15)因为,

而 

,

所以 .

(16)因为,

而 

,

所以 .

2. 验证极限存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 , 极限是存在的.

但不存在, 不能用洛必达法则.

3. 验证极限存在, 但不能用洛必达法则得出.

解 , 极限是存在的.

但不存在, 不能用洛必达法则.

4. 讨论函数在点*x*=0处的连续性.

解 , ,

因为 ,

而 

,

所以 

.

因此*f*(*x*)在点*x*=0处连续.

习题3−3

1. 按(*x*−4)的幂展开多项式*x*4−5*x*3+*x*2−3*x*+4.

解 设*f*(*x*)=*x*4−5*x*3+*x*2−3*x*+4. 因为

*f*(4)=−56,

*f* ′(4)=(4*x*3−15*x*2+2*x*−3)|*x*=4=21,

*f* ′′(4)=(12*x*2−30*x*+2)|*x*=4=74,

*f* ′′′(4)=(24*x*−30)|*x*=4=66,

*f* (4)(4)=24,

所以



=−56+21(*x*−4)+37(*x*−4)2+11(*x*−4)3+(*x*−4)4.

2. 应用麦克劳林公式, 按*x*幂展开函数*f*(*x*)=(*x*2−3*x*+1)3.

解 因为

*f* ′(*x*)=3(*x*2−3*x*+1)2(2*x*−3),

*f* ′′(*x*)=6(*x*2−3*x*+1)(2*x*−3)2+6(*x*2−3*x*+1)2=30(*x*2−3*x*+1)(*x*2−3*x*+2),

*f* ′′′(*x*)=30(2*x*−3)(*x*2−3*x*+2)+30(*x*2−3*x*+1)(2*x*−3)=30(2*x*−3)(2*x*2−6*x*+3),

*f* (4)(*x*)=60(2*x*2−6*x*+3)+30(2*x*−3)(4*x*−6)=360(*x*2−3*x*+2),

*f* (5)(*x*)=360(2*x*−3),

*f* (6)(*x*)=720;

*f*(0)=1, *f* ′(0)=−9, *f* ′′(0)=60, *f* ′′′(0)=−270,

*f* (4)(0)=720, *f* (5)(0)=−1080, *f* (6)(0)=720,

所以



=1−9*x*+30*x*3−45*x*3+30*x*4−9*x*5+*x*6.

3. 求函数按(*x*−4)的幂展开的带有拉格朗日型余项的3阶泰勒公式.

解 因为

, , ,

, ,

所以 

(0<*θ*<1).

4. 求函数*f*(*x*)=ln *x*按(*x*−2)的幂展开的带有佩亚诺型余项的*n*阶泰勒公式.

解 因为

*f* ′(*x*)=*x*−1, *f* ′′(*x*)=(−1)*x*−2, *f* ′′′(*x*)=(−1)(−2)*x*−3 , ⋅ ⋅ ⋅ ,

;

(*k*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*+1),

所以



.

5. 求函数按(*x*+1)的幂展开的带有拉格朗日型余项的*n*阶泰勒公式.

解 因为

*f*(*x*)=*x*−1, *f* ′(*x*)=(−1)*x*−2, *f* ′′(*x*)=(−1)(−2)*x*−3 , ⋅ ⋅ ⋅ ,

;

(*k*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*),

所以 



 (0<*θ*<1).

6. 求函数*f*(*x*)=tan *x*的带有拉格朗日型余项的3阶麦克劳林公式.

解 因为

*f* ′(*x*)=sec2*x*,

*f* ′′(*x*)=2sec *x*⋅sec *x*⋅tan *x*=2sec2*x*⋅tan *x*,

*f* ′′′(*x*)=4sec *x*⋅sec *x*⋅tan2*x*+2sec4*x*=4sec2*x*⋅tan2*x*+2sec4*x*,

*f* (4)(*x*)=8sec2*x*⋅tan3*x*+8sec4*x*⋅tan *x*+8sec4*x*⋅tan *x*;

*f*(0)=0, *f* ′(0)=1, *f* ′′(0)=0, *f* ′′′(0)=2,

所以 (0<*θ*<1).

7. 求函数*f*(*x*)=*xex* 的带有佩亚诺型余项的*n*阶麦克劳林公式.

解 因为

*f* ′(*x*)=*ex*+*xex*,

*f* ′′(*x*)=*ex*+*ex*+*xex*=2*ex*+*xex*,

*f* ′′′(*x*)=2*ex*+*ex*+*xex*=3*ex*+*xex*, ⋅ ⋅ ⋅,

*f* (*n*)(*x*)=*nex*+*xex*;

*f* (*k*)(0)=*k* (*k*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*),

所以 

.

8. 验证当时, 按公式计算*ex*的近似值时, 所产生的误差小于0.01, 并求的近似值, 使误差小于0.01.

解 因为公式右端为*ex*的三阶麦克劳林公式, 其余项为

,

所以当时，按公式计算*ex*的误差

.

.

9. 应用三阶泰勒公式求下列各数的近似值, 并估计误差:

(1);

(2)sin18°.

解 (1)设, 则*f*(*x*)在*x*0=27点展开成三阶泰勒公式为



(*ξ*介于27与*x*之间).

于是 

,

其误差为

.

(2) 已知

(*ξ*介于0与*x*之间),

所以 sin 18°,

其误差为

.

10. 利用泰勒公式求下列极限:

(1);

(2);

(3).

解 (1).

因为,, 所以

.

(2)

.

(3)

.

习题3−4

1. 判定函数*f*(*x*)=arctan *x*−*x* 单调性.

解 因为, 且仅当*x*=0时等号成立, 所以*f*(*x*)在(−∞, +∞)内单调减少.

2. 判定函数*f*(*x*)=*x*+cos *x* (0≤*x*≤2*π*)的单调性.

解 因为*f* ′(*x*)=1−sin *x*≥0, 所以*f*(*x*)=*x*+cos *x*在[0, 2*π*]上单调增加.

3. 确定下列函数的单调区间:

(1) *y*=2*x*3−6*x*2−18*x*−7;

(2)(*x*>0);

(3);

(4);

(5) *y*=(*x*−1)(*x*+1)3;

(6);

(7) *y*=*xne*−*x*(*n*>0, *x*≥0);

(8)*y*=*x*+|sin 2*x*|.

解 (1) *y*′=6*x*2−12*x*−18=6(*x*−3)(*x*+1)=0, 令*y*′=0得驻点*x*1=−1, *x*2=3.

列表得

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −1) | −1 | (−1, 3) | 3 | (3, +∞) |
| *y*′ | + | 0 | − | 0 | + |
| *y* | ↗ |  | ↘ |  | ↗ |

可见函数在(−∞, −1]和[3, +∞)内单调增加, 在[−1, 3]内单调减少.

(2) ,令*y*′=0得驻点*x*1=2, *x*2=−2(舍去).

因为当*x*>2时, *y*>0; 当0<*x*<2时, *y*′<0, 所以函数在(0, 2]内单调减少, 在[2, +∞)内单调增加.

(3), 令*y*′=0得驻点, *x*2=1, 不可导点为*x*=0.

列表得

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, 0) | 0 | (0, ) |  | (, 1) | 1 | (1, +∞) |
| *y*′ | − | 不存在 | − | 0 | + | 0 | − |
| *y* | ↘ |  | ↘ | 0 | ↗ |  | ↘ |

可见函数在(−∞, 0), , [1, +∞)内单调减少, 在上单调增加.

(4)因为, 所以函数在(−∞, +∞)内单调增加.

(5) *y*′=(*x*+1)3+3(*x*−1)(*x*+1)2. 因为当时, *y*′<0; 当时, *y*′>0, 所以函数在内单调减少, 在内单调增加.

(6), 驻点为, 不可导点为, *x*3=*a* .

列表得

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |  |  | *a* | (*a*, +∞) |
| *y*′ | + | 不存在 | + | 0 | − | 不存在 | + |
| *y* | ↗ |  | ↗ |  | ↘ |  | ↗ |

可见函数在, , (*a*, +∞)内单调增加, 在内单调减少.

(7)*y*′=*e*−*xxn*−1(*n*−*x*), 驻点为*x*=*n*. 因为当0<*x*<*n*时, *y*′>0; 当*x*>*n*时, *y*′<0, 所以函数在[0, *n*]上单调增加, 在[*n*, +∞)内单调减少.

(8)(*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅),

(*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅).

*y*′是以*π*为周期的函数, 在[0, *π*]内令*y*′=0, 得驻点, , 不可导点为.

列表得

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  |  |  |  |  |
| *y*′ | + | 0 | − | 不存在 | + | 0 | − |
| *y* | ↗ |  | ↘ |  | ↗ |  | ↘ |

根据函数在[0, *π*]上的单调性及*y*′在(−∞, +∞)的周期性可知函数在上单调增加, 在上单调减少(*k*=0, ±1, ±2, ⋅ ⋅ ⋅).

4. 证明下列不等式:

(1)当*x*>0时, ;

(2)当*x*>0时, ;

(3)当时, sin *x*+tan *x*>2*x*;

(4)当时, ;

(5)当*x*>4时, 2*x*>*x*2;

证明 (1)设, 则*f* (*x*)在[0, +∞)内是连续的. 因为

,

所以*f* (*x*)在(0, +∞)内是单调增加的, 从而当*x*>0时*f* (*x*)>*f* (0)=0, 即

,

也就是 .

(2)设, 则*f* (*x*)在[0, +∞)内是连续的. 因为

,

所以*f* (*x*)在(0, +∞)内是单调增加的, 从而当*x*>0时*f*(*x*)>*f*(0)=0, 即

,

也就是 .

(3)设*f*(*x*)=sin *x*+tan *x*−2*x*, 则*f*(*x*)在内连续,

*f* ′(*x*)=cos *x*+sec2*x*−2.

因为在内cos *x*−1<0, cos2*x*−1<0, −cos *x*<0, 所以*f* ′(*x*)>0, 从而*f*(*x*)在内单调增加, 因此当时, *f*(*x*)>*f*(0)=0, 即

sin *x*+tan *x*−2*x*>0,

也就是 sin *x*+tan *x*>2*x*.

(4)设, 则*f*(*x*)在内连续,

.

因为当时, tan *x*>*x*, tan *x*+*x*>0, 所以*f* ′(*x*)在内单调增加, 因此当时, *f*(*x*)>*f*(0)=0, 即

,

也就是 .

(5)设*f*(*x*)=*x* ln2−2ln *x*, 则*f* (*x*)在[4, +∞)内连续, 因为

,

所以当*x*>4时, *f* ′(*x*)>0, 即*f*(*x*)内单调增加.

因此当*x*>4时, *f*(*x*)>*f*(4)=0, 即*x* ln2−2ln *x*>0, 也就是2*x*>*x*2.

5. 讨论方程ln *x*=*ax* (其中*a*>0)有几个实根？

解 设*f*(*x*)=ln *x*−*ax*. 则*f*(*x*)在(0, +∞)内连续, , 驻点为.

因为当时, *f* ′(*x*)>0, 所以*f*(*x*)在内单调增加; 当时, *f* ′(*x*)<0, 所以*f*(*x*)在内单调减少. 又因为当*x*→0及*x*→+∞时, *f*(*x*)→−∞, 所以如果, 即, 则方程有且仅有两个实根; 如果, 即, 则方程没有实根. 如果, 即, 则方程仅有一个实根.

6. 单调函数的导函数是否必为单调函数？研究下面这个例子:

*f*(*x*)=*x*+sin *x* .

解 单调函数的导函数不一定为单调函数.

例如*f*(*x*)=*x*+sin *x*在(−∞,+∞)内是单调增加的, 但其导数不是单调函数. 事实上,

*f* ′(*x*)=1+cos *x*≥0,

这就明*f*(*x*)在(−∞, +∞)内是单调增加的. *f* ′′(*x*)=−sin *x*在(−∞, +∞)内不保持确定的符号, 故*f* ′(*x*)在(−∞, +∞)内不是单调的.

7. 判定下列曲线的凹凸性:

(1) *y*=4*x*−*x*2 ;

(2) *y*=sh *x*;

(3)(*x*>0);

(4) *y*=*x* arctan *x* ;

解 (1)*y*′=4−2*x*, *y*′′=−2,

因为*y*′′<0, 所以曲线在(−∞, +∞)内是凸的.

(2)*y*′=ch *x*, *y*′′=sh *x*. 令*y*′′=0, 得*x*=0.

因为当*x*<0时, *y*′′=sh *x*<0; 当*x*>0时, *y*′′=sh *x*>0, 所以曲线在(−∞, 0]内是凸的, 在[0, +∞)内是凹的.

(3), .

因为当*x*>0时, *y*′′>0, 所以曲线在(0, +∞)内是凹的.

(4),.

因为在(−∞, +∞)内, *y*′′>0, 所以曲线*y*=*x*arctg *x*在(−∞, +∞)内是凹的.

8. 求下列函数图形的拐点及凹或凸的区间:

(1).*y*=*x*3−5*x*2+3*x*+5 ;

(2) *y*=*xe*−*x* ;

(3) *y*=(*x*+1)4+*ex* ;

(4) *y*=ln(*x*2+1);

(5) *y*=*e*arctan *x*;

(6) *y*=*x*4(12ln *x*−7),

解 (1)*y*′=3*x*2−10*x*+3, *y*′′=6*x*−10. 令*y*′′=0, 得.

因为当时, *y*′′<0; 当时, *y*′′>0, 所以曲线在内是凸的, 在内是凹的, 拐点为.

(2)*y*′=*e*−*x*−*xe*−*x*, *y*′′=−*e*−*x*−*e*−*x*+*xe*−*x*=*e*−*x*(*x*−2). 令*y*′′=0, 得*x*=2.

因为当*x*<2时, *y*′′<0; 当*x*>2时, *y*′′>0, 所以曲线在(−∞, 2]内是凸的, 在[2, +∞)内是凹的, 拐点为(2, 2*e*−2).

(3)*y*′=4(*x*+1)3+*ex*, *y*′′=12(*x*+1)2+*ex* .

因为在(−∞, +∞)内, *y*′′>0, 所以曲线*y*=(*x*+1)4+*ex*的在(−∞, +∞)内是凹的, 无拐点.

(4), . 令*y*′′=0, 得*x*1=−1, *x*2=1.

列表得

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −1) | −1 | (−1, 1) | 1 | (1, +∞) |
| *y*′′ | − | 0 | + | 0 | − |
| *y* | ∩ | ln2  拐点 | ∪ | ln2  拐点 | ∩ |

可见曲线在(−∞, −1]和[1, +∞)内是凸的, 在[−1, 1]内是凹的, 拐点为(−1, ln2)和(1, ln2).

(5),. 令*y*′′=0得, .

因为当时, *y*′′>0; 当时, *y*′′<0, 所以曲线*y*=*e*arctg *x*在内是凹的, 在内是凸的, 拐点是.

(6) *y*′=4*x*3(12ln *x*−7)+12*x*3, *y*′′=144*x*2⋅ln *x*. 令*y*′′=0, 得*x*=1.

因为当0<*x*<1时, *y*′′<0; 当*x*>1时, *y*′′>0, 所以曲线在(0, 1]内是凸的, 在[1, +∞)内是凹的, 拐点为(1, −7).

9. 利用函数图形的凹凸性, 证明下列不等式:

(1) (*x*>0, *y*>0, *x*≠*y*, *n*>1);

(2);

(3) (*x*>0, *y*>0, *x*≠*y*).

证明 (1)设*f*(*t*)=*tn*, 则*f* ′(*t*)=*ntn*−1, *f* ′′(*t*)=*n*(*n*−1)*t**n*−2. 因为当*t*>0时, *f* ′′(*t*)>0, 所以曲线*f*(*t*)=*t**n*在区间(0, +∞)内是凹的. 由定义, 对任意的*x*>0, *y*>0, *x*≠*y*有

,

即 .

(2)设*f*(*t*)=*et*, 则*f* ′(*t*)=*et*, *f* ′′(*t*)=*et* . 因为*f* ′′(*t*)>0, 所以曲线*f*(*t*)=*et*在(−∞, +∞)内是凹的. 由定义, 对任意的*x*, *y*∈(−∞, +∞), *x*≠*y*有

,

即 .

(3)设*f*(*t*)=*t* ln *t* , 则 *f* ′(*t*)=ln *t*+1, .

因为当*t*>0时, *f* ′′(*t*)>0, 所以函数*f*(*t*)=*t* ln *t* 的图形在(0, +∞)内是凹的. 由定义, 对任意的*x*>0, *y*>0, *x*≠*y* 有

,

即 .

10. 试证明曲线有三个拐点位于同一直线上.

证明 , .

令*y*′′=0, 得*x*1=−1, , .

例表得

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞. −1) | −1 |  |  |  |  |  |
| *y*′ | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| *y* | ∩ | −1 | ∪ |  | ∩ |  | ∪ |

可见拐点为(−1, −1), , . 因为

, ,

所以这三个拐点在一条直线上.

11. 问*a*、*b*为何值时, 点(1, 3)为曲线*y*=*ax*3+*bx*2的拐点？

解 *y*′=3*ax*2+2*bx*, *y*′′=6*ax*+2*b*. 要使(1, 3)成为曲线*y*=*ax*3+*bx*2的拐点, 必须*y*(1)=3且*y*′′(1)=0, 即*a*+*b*=3且6*a* +2*b*=0, 解此方程组得, .

12. 试决定曲线*y*=*ax*3+*bx*2+*cx*+*d* 中的*a*、*b*、*c*、*d*, 使得*x*=−2处曲线有水平切线, (1, −10)为拐点, 且点(−2, 44)在曲线上.

解 *y*′=3*ax*2+2*bx*+*c*, *y*′′=6*ax*+2*b* . 依条件有

, 即.

解之得*a*=1, *b*=−3, *c*=−24, *d*=16.

13. 试决定*y*=*k*(*x*2−3)2中*k*的值, 使曲线的拐点处的法线通过原点.

解*y*′=4*kx*3−12*kx*, *y*′′=12*k*(*x*−1)(*x*+1). 令*y*′′=0, 得*x*1=−1, *x*2=1.

因为在*x*1=−1的两侧*y*′′是异号的, 又当*x*=−1时*y*=4*k*, 所以点(−1, 4*k*)是拐点.

因为*y*′(−1)=8*k*, 所以过拐点(−1, 4*k*)的法线方程为. 要使法线过原点, 则(0, 0)应满足法线方程, 即, .

同理, 因为在*x*1=1的两侧*y*′′是异号的, 又当*x*=1时*y*=4*k*, 所以点(1, 4*k*)也是拐点.

因为*y*′(1)=−8*k*, 所以过拐点(−1, 4*k*)的法线方程为. 要使法线过原点, 则(0, 0)应满足法线方程, 即, .

因此当时, 该曲线的拐点处的法线通过原点.

14. 设*y*=*f*(*x*)在*x*=*x*0的某邻域内具有三阶连续导数, 如果*f* ′′(*x* 0)=0, 而*f* ′′′(*x*0)≠0, 试问 (*x*0, *f*(*x*0))是否为拐点？为什么？

解 不妨设*f* ′′′(*x*0)>0. 由*f* ′′′(*x*)的连续性, 存在*x*0的某一邻域(*x*0−*δ*, *x*0+*δ*), 在此邻域内有*f* ′′′(*x*)>0. 由拉格朗日中值定理, 有

*f* ′′(*x*)−*f* ′′(*x*0)=*f* ′′′(*ξ*)(*x*−*x*0) (*ξ*介于*x*0与*x*之间),

即 *f* ′′(*x*)=*f* ′′′(*ξ*)(*x*−*x*0).

因为当*x*0−*δ*<*x*<*x*0时, *f* ′′(*x*)<0; 当*x*0<*x*<*x*0+*δ* 时, *f* ′′(*x*)>0, 所以(*x*0, *f*(*x*0))是拐点.

习题3−5

1. 求函数的极值:

(1) *y*=2*x*3−6*x*2−18*x*+7;

(2) *y*=*x*−ln(1+*x*) ;

(3) *y*=−*x*4+2*x*2;

(4);

(5);

(6);

(7) *y*=*ex* cos *x* ;

(8);

(9);

(10) *y*=*x*+tan *x* .

解 (1)函数的定义为(−∞, +∞), *y*′=6*x*2−12*x*−18=6(*x*2−2*x*−3)=6(*x*−3)(*x*+1), 驻点为*x*1=−1, *x*2=3.

列表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −1) | −1 | (−1, 3) | 3 | (3, +∞) |
| *y*′ | + | 0 | − | 0 | + |
| *y* | ↗ | 17极大值 | ↘ | −47极小值 | ↗ |

可见函数在*x*=−1处取得极大值17, 在*x*=3处取得极小值−47.

(2)函数的定义为(−1, +∞), , 驻点为*x*=0. 因为当−1<*x*<0时, *y*′<0; 当*x*>0时, *y*′>0, 所以函数在*x*=0处取得极小值, 极小值为*y*(0)=0.

(3)函数的定义为(−∞, +∞),

*y*′=−4*x*3+4*x*=−4*x*(*x*2−1), *y*′′=−12*x*2+4,

令*y*′=0, 得*x*1=0, *x*2=−1, *x*3=1.

因为*y*′′(0)=4>0, *y*′′(−1)=−8<0, *y*′′(1)=−8<0, 所以*y*(0)=0是函数的极小值, *y*(−1)=1和*y*(1)=1是函数的极大值.

(4)函数的定义域为(−∞, 1],

,

令*y*′=0, 得驻点.

因为当时, *y*′>0; 当时, *y*′<0, 所以为函数的极大值.

(5)函数的定义为(−∞, +∞), , 驻点为.

因为当时, *y*′>0; 当时, *y*′<0, 所以函数在处取得极大值, 极大值为.

(6)函数的定义为(−∞, +∞), , 驻点为*x*1=0, *x*2=−2.

列表

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −2) | −2 | (−2, 0) | 0 | (0, +∞) |
| *y*′ | − | 0 | + | 0 | − |
| *y* | ↘ | 极小值 | ↗ | 极大值 | ↘ |

可见函数在*x*=−2处取得极小值, 在*x*=0处取得极大值4.

(7)函数的定义域为(−∞, +∞).

*y*′=*e**x*(cos *x*−sin *x* ), *y*′′=−*e**x*sin *x*.

令*y*′=0, 得驻点, , (*k*=0, ±1, ±2, ⋅⋅⋅).

因为, 所以是函数的极大值.

因为*y*′′, 所以是函数的极小值.

(8)函数的定义域为(0, +∞),

.

令*y*′=0, 得驻点*x*=*e* .

因为当*x*<*e*时, *y*′>0; 当*x*>*e*时, *y*′<0, 所以为函数*f*(*x*)的极大值.

(9)函数的定义域为(−∞, +∞), , 因为*y*′<0, 所以函数在(−∞, +∞)是单调

减少的, 无极值.

(10)函数*y*=*x*+tg *x* 的定义域为(*k*=0, ±1, ±2, ⋅⋅⋅).

因为*y*′=1+sec 2*x* >0, 所以函数*f*(*x*)无极值.

2. 试证明: 如果函数*y*=*ax*3+*bx*2+*cx* +*d* 满足条件*b*2 −3*ac*<0, 那么这函数没有极值 .

证明*y*′=3*a* *x*2+2*b* *x*+*c*. 由*b*2 −3*ac*<0, 知*a*≠0. 于是配方得到

*y*′=3*a* *x*2+2*b* *x*+*c*,

因3*ac*−*b*2>0, 所以当*a*>0时, *y*′>0; 当*a*<0时, *y*′<0. 因此*y*=*ax*3+*bx*2+*cx* +*d*是单调函数, 没有极值.

3. 试问*a*为何值时, 函数在处取得极值？它是极大值还是极小值？并求此极值.

解 *f* ′(*x*)=*a*cos *x*+cos 3*x*, *f* ′′(*x*)=−*a*sin *x*−3 sin *x*.

要使函数*f*(*x*)在处取得极值, 必有, 即, *a*=2 .

当*a*=2时, . 因此, 当*a*=2时, 函数*f* (*x*)在处取得极值, 而且取得极大值, 极大值为.

4. 求下列函数的最大值、最小值:

(1) *y*=2*x*3−3*x*2 , −1≤*x*≤4;

(2) *y*=*x*4−8*x*2+2 −1≤*x*≤3 ;

(3), −5≤*x*≤1.

解 (1)*y*′=6*x*2−6*x*=6*x*(*x*−1), 令*y*′=0, 得*x*1=0, *x*2=1. 计算函数值得

*y*(−1)=−5, *y*(0)=0, *y*(1)=−1, *y*(4)=80,

经比较得出函数的最小值为*y*(−1)=−5, 最大值为*y*(4)=80.

(2)*y*′=4*x*3−16*x*=4*x*(*x*2−4), 令*y*′=0, 得*x*1=0, *x*2=−2(舍去), *x* 3=2. 计算函数值得

*y*(−1)=−5, *y*(0)=2, *y*(2)=−14, *y*(3)=11,

经比较得出函数的最小值为*y*(2)=−14, 最大值为*y*(3)=11.

(3), 令*y*′=0, 得. 计算函数值得

, , *y*(1)=

经比较得出函数的最小值为, 最大值为.

5. 问函数*y*=2*x*3−6*x*2−18*x*−7(1≤*x*≤4)在何处取得最大值？并求出它的最大值.

解 *y*′=6*x*2−12*x*−18=6(*x*−3)(*x*+1), 函数*f*(*x*)在1≤*x*≤4内的驻点为*x*=3.

比较函数值:

*f*(1)=−29, *f*(3)=−61, *f*(4)=−47,

函数*f*(*x*)在*x*=1处取得最大值, 最大值为*f* (1)=−29.

6. 问函数(*x*<0)在何处取得最小值？

解 , 在(−∞, 0)的驻点为*x*=−3. 因为

, ,

所以函数在*x*=−3处取得极小值. 又因为驻点只有一个, 所以这个极小值也就是最小值, 即函数在*x*=−3处取得最小值, 最小值为.

7. 问函数(*x*≥0)在何处取得最大值？

解 . 函数在(0, +∞)内的驻点为*x*=1.

因为当0<*x*<1时, *y*′>0; 当*x*>1时*y*′<0, 所以函数在*x*=1处取得极大值. 又因为函数在

(0, +∞)内只有一个驻点, 所以此极大值也是函数的最大值, 即函数在*x*=1处取得最大值, 最大值为*f* (1)=.

8. 某车间靠墙壁要盖一间长方形小屋, 现有存砖只够砌20cm长的墙壁, 问应围成怎样的长方形才能使这间小屋的面积最大？

解 设宽为*x*长为*y*, 则2*x*+*y*=20, *y*=20−2*x*, 于是面积为

*S*= *xy*=*x*(20−2*x*)=20*x*−2*x*2.

*S* ′=20−4*x*=4(10−*x*), *S* ′′=−4.

令*S* ′=0, 得唯一驻点*x*=10.

因为*S* ′′(10)−4<0, 所以*x*=10为极大值点, 从而也是最大值点.

当宽为5米, 长为10米时这间小屋面积最大.

9. 要造一圆柱形油罐, 体积为*V*, 问底半径*r*和高*h*等于多少时, 才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

解 由*V*=*r*2*h*, 得*h*=*V*−1*r*−2. 于是油罐表面积为

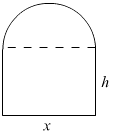
*S*=2*r*2+2*rh*(0<*x*<+∞),

.

令*S* ′=0, 得驻点.

因为, 所以*S*在驻点处取得极小值, 也就是最小值. 这时相应的高为. 底直径与高的比为2*r* : *h*=1 : 1.

10. 某地区防空洞的截面拟建成矩形加半圆(如图), 截面的面积为5m2, 问底宽*x*为多少时才能使截面的周长最小, 从而使建造时所用的材料最省？



解 设矩形高为*h* , 截面的周长*S*, 则, . 于是

(),

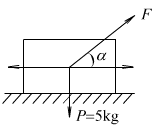
.

令*S* ′=0, 得唯一驻点.

因为, 所以为极小值点, 同时也是最小值点.

因此底宽为时所用的材料最省.

11. 设有重量为5kg的物体, 置于水平面上, 受力*F*的作用而开始移动(如图). 设摩擦系数**=0.25, 问力*F*与水平线的交角**为多少时, 才可使力*F*的大小为最小？



解 由*F* cos *α* =(*m*−*F*sin *α*)*μ* 得

(),

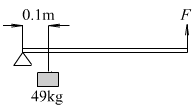
,

驻点为 *α* = arctan *μ*.

因为*F* 的最小值一定在内取得, 而*F* 在内只有一个驻点*α* = arctan *μ*,

所以*α*=arctan *μ*一定也是*F* 的最小值点. 从而当*α*=arctan0.25=14°时, 力*F* 最小.

12. 有一杠杆, 支点在它的一端. 在距支点0.1m处挂一重量为49kg的物体. 加力于杠杆的另一端使杠杆保持水平(如图). 如果杠杆的线密度为5kg/m, 求最省力的杆长?



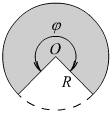
解 设杆长为*x* (m), 加于杠杆一端的力为*F*, 则有

, 即.

,

驻点为*x*=1.4. 由问题的实际意义知, *F*的最小值一定在(0, +∞)内取得, 而*F*在(0, +∞)内只有一个驻点*x*=1.4, 所以*F* 一定在*x*=1.4*m*处取得最小值, 即最省力的杆长为1.4*m*.

13. 从一块半径为的圆铁片上挖去一个扇形做成一漏斗(如图), 问留下的扇形的中心角**取多大时, 做成的漏斗的容积最大？



解 漏斗的底周长*l*、底半径*r*、高*h* 分别为

*l*=*R*⋅****, .

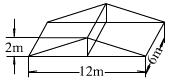
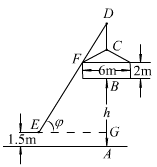
漏斗的容积为

 (0<**<2*π*).

，驻点为.

由问题的实际意义, *V* 一定在(0, 2*π*)内取得最大值, 而*V* 在(0, 2*π*)内只有一个驻点, 所以该驻点一定也是最大值点. 因此当**时, 漏斗的容积最大.

14. 某吊车的车身高为15m, 吊臂长15m, 现在要把一个6m宽、2m高的屋架, 水平地吊到6m高的柱子上去(如图), 问能否吊得上去？



解 设吊臂对地面的倾角为**时, 屋架能够吊到的最大高度为*h*. 在直角三角形Δ*EDG*中

15sin **=(*h*−1. 5)+2+3tan **,

故 ,

.

令*h*′=0得唯一驻点°.

因为, 所以**=54°为极大值点, 同时这也是最大值点.

当**=54°时, m.

所以把此屋最高能水平地吊至7. 5m高, 现只要求水平地吊到6m处, 当然能吊上去.

15. 一房地产公司有50套公寓要出租. 当月租金定为1000元时, 公寓会全部租出去. 当月租金每增加50元时, 就会多一套公寓租不出去, 而租出去的公寓每月需花费100元的维修费. 试问房租定为多少可获最大收入？

解 房租定为*x*元, 纯收入为*R*元.

当*x*≤1000时, *R*=50*x*−50×100=50*x*−5000, 且当*x*=1000时, 得最大纯收入45000元.

当*x*>1000时,



.

令*R*′=0得(1000, +∞)内唯一驻点*x*=1800. 因为, 所以1800为极大值点, 同时也是最大值点. 最大值为*R*=57800.

因此, 房租定为1800元可获最大收入.

习题3-6

描绘下列函数的图形:

1. ;

解 (1)定义域为(−∞, +∞);

(2),

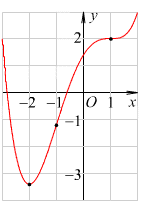
,

令*y*′=0, 得*x*=−2, *x*=1; 令*y*′′=0, 得*x*=−1, *x*=1.

(3)列表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −2) | −2 | (−2, −1) | −1 | (−1, 1) | 1 | (1, +∞) |
| *y*′ | − | 0 | + | + | + | 0 | + |
| *y*′′ | + | + | + | 0 | − | 0 | + |
| *y*=*f*(*x*) | ↘∪ | 极小值 | ↗∪ | 拐点 | ↗∩ | 2  拐点 | ↗∪ |

(4)作图:



2. ;

解 (1)定义域为(−∞, +∞);

(2)奇函数, 图形关于原点对称, 故可选讨论*x*≥0时函数的图形.

(3), ,

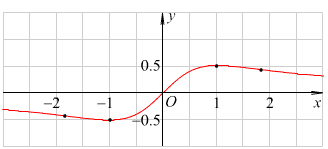
当*x*≥0时, 令*y*′=0, 得*x*=1; 令*y*′′=0, 得*x*=0, .

(4)列表

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | (0, 1) | 1 | (1, ) |  | (, +∞) |
| *y*′ | + | + | 0 | − | − | − |
| *y*′′ | 0 | − | − | − | 0 | + |
| *y*=*f*(*x*) | 0  拐点 | ↗∩ | 极大值 | ↘∩ | 拐点 | ↘∪ |

(5)有水平渐近线*y*=0;

(6)作图:



3. ;

解 (1)定义域为(−∞, +∞);

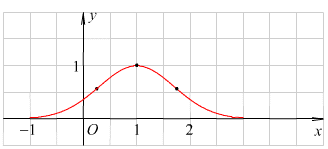
(2),

令*y*′=0, 得*x*=1; 令*y*′′=0, 得, .

(3)列表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* |  |  |  | 1 |  |  |  |
| *y*′ | + | + | + | 0 | − | − | − |
| *y*′′ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| *y*=*f*(*x*) | ↗∪ | 拐点 | ↗∩ | 1  极大值 | ↘∩ | 拐点 | ↘∪ |

(4)有水平渐近线*y*=0;



(5)作图:

4. ;

解 (1)定义域为(−∞, 0)∪(0, +∞);

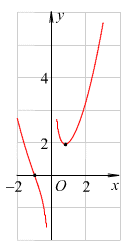
(2), ,

令*y*′=0, 得; 令*y*′′=0, 得*x*=−1.

(3)列表

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (−∞, −1) | −1 | (−1, 0) | 0 |  |  |  |
| *y*′ | − | − | − | 无 | − | 0 | + |
| *y*′′ | + | 0 | − | 无 | + | + | + |
| *y*=*f*(*x*) | ↘∪ | 0  拐点 | ↘∩ | 无 | ↘∪ | 极小值 | ↗∪ |

(4)有铅直渐近线*x*=0;



(5)作图:

5. .

解 (1)定义域为(*n*=0, ±1, ±2, ⋅⋅⋅)

(2)是偶函数, 周期为2 **. 可先作[0, **]上的图形, 再根据对称性作出[−**, 0)内的图形, 最后根据周期性作出[−**, **]以外的图形;

(3), ,

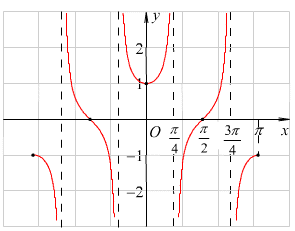
在[0, **]上, 令*y*′=0, 得*x*=0, *x*=** ; 令*y*′′=0, 得.

(4)列表

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 |  |  |  |  |  |  |  | ** |
| *y*′ | 0 | + | 无 | + | + | + | 无 | + | 0 |
| *y*′′ | + | + | 无 | − | 0 | + | 无 | − | − |
| *y*=*f*(*x*) | 1  极小值 | ↗∪ | 无 | ↗∩ | 0  拐点 | ↗∪ | 无 | ↗∩ | −1  极大值 |

(5)有铅直渐近线及;

(6)作图:



习题3−7

1. 求椭圆4*x*2+*y*2=4在点(0, 2)处的曲率.

解 两边对*x*求导数得

8*x*+2*yy*′=0, , .

*y*′|(0, 2)=0, *y*′′|(0, 2)=−2.

所求曲率为

.

2. 求曲线*y*=lnsec *x*在点(*x*, *y*)处的曲率及曲率半径.

解 , .

所求曲率为

,

曲率半径为

.

3. 求抛物线*y*=*x*2−4*x*+3在其顶点处的曲率及曲率半径.

解 *y*′=2*x*−4, *y*′′=2.

令*y*′=0, 得顶点的横坐标为*x*=2.

*y*′|*x*=2=0, *y*′′|*x*=2=2.

所求曲率为

,

曲率半径为

.

4. 求曲线*x*=*a* cos3*t*, *y*=*a* sin 3*t*在*t*=*t*0处的曲率.

解, .

所求曲率为

,

.

5. 对数曲线*y*=ln *x*上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 , .

,

,

.

令**′=0, 得

因为当时**<0; 当时, **>0, 所以是**的极小值点, 同时也最小值点. 当时因此在曲线上点处曲率半径最小最小曲率半径为.

6. 证明曲线在点(*x**y*)处的曲率半径为.

解 , .

在点(*x**y*)处的曲率半径为

.

7. 一飞机沿抛物线路径(*y*轴铅直向上单位为m)作俯冲飞行在坐标原点*O*处飞机的速度为*v*=200*m*/s飞行员体重*G*=70Kg求飞机俯冲至最低点即原点*O*处时座椅对飞行员的反力.

解 , ; *y*′|*x*=0=0, .

.

向心力(牛顿).

飞行员离心力及它本身的重量对座椅的压力为

79×9.8+560=1246(牛顿).

8. 汽车连同载重共5t, 在抛物线拱桥上行驶, 速度为21.6km/*h*, 桥的跨度为10m, 拱的矢高为0.25m . 求汽车越过桥顶时对桥的压力.

解 如图取直角坐标系, 设抛物线拱桥方程为*y*=*ax*2, 由于抛物线过点(5, 0.25), 代入方程得

,

于是抛物线方程为*y*=0. 01*x*2.

*y*′=0.02*x*, *y*′′=0.02.

.

向心力为(牛顿).

因为汽车重为5吨, 所以汽车越过桥顶时对桥的压力为

5×103×9.8−3600=45400(牛顿).

\*9求曲线*y*=ln *x*在与*x*轴交点处的曲率圆方程.

\*10. 求曲线*y*=tan *x*在点处的曲率圆方程

\*11. 求抛物线*y*2=2*px*的渐屈线方程.

总习题三

1. 填空:

设常数*k*>0, 函数在(0, +∞)内零点的个数为\_\_\_\_\_\_\_\_.

解 应填写2.

提示: , .

在(0, +∞)内, 令*f* ′(*x*)0, 得唯一驻点*x**e* .

因为*f* ′′(*x*)<0, 所以曲线在(0, +∞)内是凸的, 且驻点*x**e*一定是最大值点, 最大值为*f*(*e*)*k*>0.

又因为, , 所以曲线经过*x*轴两次, 即零点的个数为2.

2. 选择以下题中给出的四个结论中一个正确的结论:

设在[0, 1]上*f* ′′(*x*)>0, 则*f* ′(0), *f* ′(1), *f*(1)*f*(0)或*f*(0)*f*(1)几个数的大小顺序为( ).

(*A*)*f* ′(1)>*f* ′(0)>*f*(1)*f*(0); (*B*)*f* ′(1)>*f*(1)*f*(0)>*f* ′(0);

(*C*)*f*(1)*f*(0)>*f* ′(1)>*f* ′(0); (*D*)*f* ′(1)>*f*(0)*f*(1)>*f* ′(0).

解 选择*B* .

提示: 因为*f* ′′(*x*)>0, 所以*f* ′(*x*)在[0, 1]上单调增加, 从而*f* ′(1)>*f* ′(*x*)>*f* ′(0).

又由拉格朗日中值定理, 有*f*(1)*f*(0)*f* ′(**), **∈[0, 1], 所以

*f* ′(1)> *f*(1)*f*(0)>*f* ′(0).

3. 列举一个函数*f*(*x*)满足: *f*(*x*)在[*a**b*]上连续在(*a**b*)内除某一点外处处可导但在(*a**b*)内不存在点*ξ* 使*f*(*b*)*f*(*a*)*f* ′(*ξ*)(*b**a*).

解 取*f*(*x*)|*x*|, *x*∈[1, 1].

易知*f*(*x*)在[1, 1]上连续, 且当*x*>0时*f* ′(*x*)1; 当*x*>0时, *f* ′(*x*)1; *f* ′(0)不存在, 即*f*(*x*)在[1, 1]上除*x*0外处处可导.

注意*f*(1)*f*(1)0, 所以要使*f*(1)*f*(1)*f* ′(**)(1(1))成立, 即*f* ′(**)0, 是不可能的.

因此在(1, 1)内不存在点*ξ* 使*f*(1)*f*(1)*f* ′(**)(1(1)).

4. 设, 求.

解 根据拉格朗日中值公式, *f*(*x*+*a*)−*f* (*x*)=*f* ′(** )⋅*a*, ** 介于*x*+*a* 与*x*之间.

当*x*→∞ 时, ** → ∞, 于是

.

5. 证明多项式*f* (*x*)*x*33*x**a*在[0, 1]上不可能有两个零点.

证明 *f* ′(*x*)=3*x*2−3=3(*x*2−1), 因为当*x*∈(0, 1)时, *f* ′(*x*)<0, 所以*f* (*x*)在[0, 1]上单调减少. 因此, *f*(*x*) 在[0, 1]上至多有一个零点.

6. 设0, 证明多项式*f*(*x*)*a*0*a*1*x*+⋅⋅⋅+*a*n*xn*在(0,1)内至少有一个零点.

证明 设, 则*F*(*x*)在[0, 1]上连续, 在(0, 1)内可导, 且

*F*(0)=*F*(1)=0. 由罗尔定理, 在(0, 1)内至少有一个点** , 使*F*(** )=0. 而*F* ′(*x*)=*f*(*x*), 所以*f*(*x*)在(0, 1)内至少有一个零点.

7. 设*f*(*x*)在[0, *a*]上连续, 在(0, *a*)内可导, 且*f*(*a*)0, 证明存在一点**∈(0, *a*), 使

*f*(**)*f* ′(**)0.

证明 设*F*(*x*)=*xf*(*x*), 则*F*(*x*)在[0, *a* ]上连续, 在(0, *a* )内可导, 且*F*(0)=*F*(*a*)=0. 由罗尔定理, 在(0, *a* )内至少有一个点** , 使*F*(** )=0. 而*F*(*x*)=*f*(*x*)+*x* *f* ′(*x*), 所以*f*(**)*f* ′(**)0.

8. 设0<*a*<*b*, 函数*f*(*x*)在[*a**b*]上连续在(*a**b*)内可导试利用柯西中值定理证明存在一点*ξ*∈(*a**b*)使.

证明 对于*f*(*x*)和ln *x*在[*a*, *b*]上用柯西中值定理, 有

, **∈(*a*, *b*),

即 , **∈(*a*, *b*).

9. 设*f*(*x*)、*g*(*x*)都是可导函数, 且|*f* ′(*x*)|<*g*′(*x*), 证明: 当*x*>*a*时, |*f*(*x*)*f*(*a*)|<*g*(*x*)*g*(*a*).

证明 由条件|*f* ′(*x*)|<*g*′(*x*)得知, , 且有*g*′(*x*)>0, *g*(*x*)是单调增加的, 当*x*>*a*时,

*g*(*x*)>*g*(*a*).

因为*f* (*x*)、*g* (*x*)都是可导函数, 所以*f* (*x*)、*g* (*x*) 在[*a*, *x*]上连续, 在(*a*, *x*)内可导, 根据柯西中值定理, 至少存在一点**∈(*a*, *x*), 使.

因此, , |*f* (*x*)*f* (*a*)|<*g* (*x*)*g* (*a*).

10. 求下列极限:

(1);

(2);

(3).

(4)(其中*a*1*a*2⋅ ⋅ ⋅, *an*>0)

解 (1) (*xx*)′=(*ex* l n *x*)′=*e**x* l n *x*(ln *x*+1)=*xx*(ln *x*+1).



.

(2)



(3),

因为

,

所以

.

(4)令. 则, 因为





ln *a*1+ln *a*2+⋅⋅⋅+ln *an*ln(*a*1⋅*a*2⋅ ⋅ ⋅ *an*).

即ln(*a*1⋅*a*2⋅ ⋅ ⋅ *an*), 从而

11. 证明下列不等式

(1)当时 ;

(2)当*x*>0时, .

证明 (1)令, .

因为,

所以在内*f*(*x*)为单调增加的. 因此当时有]

, 即.

(2)要证(1+*x*)ln(1+*x*)>arctan *x* , 即证(1+*x*)ln(1+*x*)− arctan *x* >0.

设*f*(*x*)=(1+*x*)ln(1+*x*)− arctan *x* , 则*f*(*x*)在[0, +∞)上连续,.

因为当*x*>0时, ln(1+*x*)>0, , 所以*f* ′(*x*)>0, *f*(*x*)在[0, +∞)上单调增加.

因此, 当*x*>0时, *f*(*x*)>*f*(0), 而*f*(0)=0, 从而*f*(*x*)>0, 即(1+*x*)ln(1+*x*)−arctan *x*>0 .

12. 设, 求*f*(*x*)的极值.

解 *x*=0是函数的间断点.

当*x*<0时, *f* ′(*x*)=1; 当*x*>0时, *f* ′(*x*)=2*x* 2*x*(ln *x* +1).

令*f* ′(*x*)0, 得函数的驻点.

列表:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | (∞, 0) | 0 |  |  |  |
| *f* ′(*x*) | + | 不存在 |  | 0 | + |
| *f*(*x*) | ↗ | 2极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

函数的极大值为*f* (0)=2, 极小值为.

13. 求椭圆*x*2*xy* *y*23上纵坐标最大和最小的点.

解 2*x*−*y*−*xy*′+2*yy*′=0, . 当时, *y*′=0.

将代入椭圆方程, 得, *y* =±2 .

于是得驻点*x*=−1, *x*=1. 因为椭圆上纵坐标最大和最小的点一定存在, 且在驻点处取得, 又当*x*=−1时, *y* =−2, 当*x*=1时, *y*=2, 所以纵坐标最大和最小的点分别为(1, 2)和(−1, −2).

14. 求数列的最大项.

解 令(*x*>0), 则

,

,

.

令*f* ′(*x*)0, 得唯一驻点*x**e* .

因为当0<*x*<*e*时, *f* ′(*x*)>0; 当*x*>*e*时, *f* ′(*x*)<0, 所以唯一驻点*x**e*为最大值点.

因此所求最大项为.

15. 曲线弧*y*sin *x* (0<*x*<**)上哪一点处的曲率半径最小？求出该点处的曲率半径.

解 *y*′cos *x*, *y*′′sin *x*,

(0<*x*<**),



.

在(0, **)内, 令**′0, 得驻点.

因为当时, **′<0; 当时, **′>0, 所以是**的极小值点, 同时也是**的最小值点, 最小值为.

16. 证明方程*x*35*x*20只有一个正根. 并求此正根的近似值使精确到本世纪末103

解 设*f* (*x*)=*x*35*x*2, 则

*f* ′(*x*)=3*x*2−5, *f* ′′(*x*)6*x* .

当*x*>0时, *f* ′′(*x*)>0, 所以在(0, +∞)内曲线是凹的, 又*f*(0)2, , 所以在(0, +∞)内方程*x*35*x*20只能有一个根.

(求根的近似值略)

17. 设*f* ′′(*x*0)存在, 证明.

证明 





.

18. 设*f* (*n*)(*x*0)存在, 且*f* (*x*0)*f* ′(*x*0)⋅ ⋅ ⋅ *f* (*n*)(*x*0)0, 证明*f*(*x*)*o*[(*x**x*0)*n*] (*x*→*x*0).

证明 因为



⋅⋅⋅

,

所以*f*(*x*)*o*[(*x**x*0)*n*] (*x*→*x*0).

19 设*f*(*x*)在(*a* *b*)内二阶可导, 且*f* ′′(*x*)≥0. 证明对于(*a* *b*)内任意两点*x*1, *x*2及0≤*t*≤1, 有*f*[(1*t*)*x*1*tx*2]≤(1*t*)*f*(*x*1)*tf*(*x*2).

证明 设(1*t*)*x*1+*tx*2*x*0. 在*x**x*0点的一阶泰勒公式为

(其中**介于*x*与*x*0之间).

因为*f* ′′(*x*)≥0, 所以

*f*(*x*)≥*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)(*x**x*0).

因此

*f*(*x*1)≥ *f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)(*x*1*x*0), *f*(*x*2)≥*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)(*x*2*x*0).

于是有

(1*t*)*f*(*x*1)*tf*(*x*2)≥(1*t*)[ *f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)(*x*1*x*0)]+*t*[*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)(*x*2*x*0)]

(1*t*)*f*(*x*0)+*t* *f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)[(1*t*)*x*1+*t* *x*2]*f* ′(*x*0)[(1*t*)*x*0+*t* *x*0]

*f*(*x*0)+*f* ′(*x*0)*x*0*f* ′(*x*0)*x*0

*f*(*x*0),

即 *f*(*x*0)≤(1*t*)*f*(*x*1)*tf*(*x*2),

所以 *f*[(1*t*)*x*1*tx*2]≤(1*t*)*f*(*x*1)*tf*(*x*2) (0≤*t*≤1).

20. 试确定常数*a*和*b*, 使*f*(*x*)*x*(*a*+*b* cos *x*)sin *x*为当*x*→0时关于*x*的5阶无穷小.

解 *f*(*x*)是有任意阶导数的, 它的5阶麦克劳公式为



.

要使*f*(*x*)*x*(*a*+*b* cos *x*)sin *x*为当*x*→0时关于*x*的5阶无穷小, 就是要使极限



存在且不为0. 为此令

,

解之得, .

因为当, 时,

,

所以当,时, *f*(*x*)*x*(*a*+*b* cos *x*)sin *x*为当*x*→0时关于*x*的5阶无穷小.

习题41

1. 求下列不定积分:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 .

(4);

解 .

(5);

解 .

(6);

解 .

(7);

解 .

(8);

解 .

(9)(*g*是常数);

解 .

(10);

解 .

(11);

解 .

(12);

解 

.

(13);

解 .

(14);

解 .

(15);

解 .

(16);

解 .

(17);

解 .

(18);

解 .

(19);

解 .

(20);

解 .

(21);

解 .

(22);

解 .

(23);

解 .

(24);

解 .

(25);

解 .

(26);

解 .

2. 一曲线通过点(*e*2, 3), 且在任一点处的切线的斜率等于该点横坐标的倒数, 求该曲线的方程.

解 设该曲线的方程为*y**f*(*x*), 则由题意得

,

所以 .

又因为曲线通过点(*e*2, 3), 所以有321

3*f*(*e* 2)ln|*e* 2|+*C*2+*C*,

*C*321.

于是所求曲线的方程为

*y*ln|*x*|+1.

3. 一物体由静止开始运动, 经*t*秒后的速度是3t2(m/*s*), 问

(1)在3秒后物体离开出发点的距离是多少？

(2)物体走完360m需要多少时间？

解 设位移函数为*s**s*(*t*), 则*s*′*v*3 *t*2, .

因为当*t*0时, *s*0, 所以*C*0. 因此位移函数为*s**t* 3.

(1)在3秒后物体离开出发点的距离是*s**s*(3)3327.

(2)由*t* 3360, 得物体走完360m所需的时间s.

4. 证明函数, *ex*sh*x*和*ex*ch*x*都是的原函数.

证明 .

因为, 所以是的原函数.

因为

(*ex*sh*x*)′=*ex*sh*x*+*ex*ch*x*=*ex*(sh*x*+ch*x*)

,

所以*ex*sh*x*是的原函数.

因为

(*ex*ch*x*)′=*ex*ch*x*+*ex*sh*x*=*ex*(ch*x*+sh*x*)

,

所以*ex*ch*x*是的原函数.

习题42

1. 在下列各式等号右端的空白处填入适当的系数使等式成立(例如:

(1) *dx**d*(*ax*);

解*dx**d*(*ax*).

(2) *dx* *d*(7*x*3);

解*dx*  *d*(7*x*3).

(3) *xdx* *d*(*x*2);

解*xdx*  *d*(*x*2).

(4) *x*d*x* *d*(5*x*2);

解*x*d*x*  *d*(5*x*2).

(5);

解 .

(6)*x*3*dx* *d*(3*x*42);

解*x*3*dx*  *d*(3*x*42).

(7)*e* 2*x**dx* *d*(*e*2*x*);

解*e* 2*x**dx*  *d*(*e*2*x*).

(8);

解 .

(9);

解 .

(10);

解 .

(11);

解 .

(12);

解 .

(13);

解 .

(14).

解 .

2. 求下列不定积分(其中*a*, *b*, *ω*, *ϕ*均为常数):

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 .

(4);

解 .

(5);

解 .

(6);

解 .

(7);

解 .

(8);

解 .

(9);

解 

.

(10);

解 .

(11);

解 .

(12);

解 

(13);

解 .

(14);

解 .

(15);

解 .

(16);

解 .

(17);

解 .

(18);

解 

.

(19);

解 

.

(20);

解 .

(21);

解 



.

(22);

解 .

(23);

解 .

(24);

解 .

(25);

解 .

(26);

解 .

(27);

解 .

(28);

解 

.

(29);

解 .

(30);

解 .

(31);

解 .

(32);

解 .

(33);

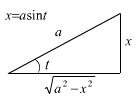
解 

.

(34)(>0);

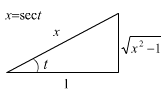
解 ,

.



(35);

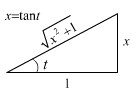
解 .



或 .

(36);

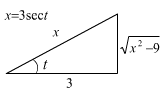
解 .



(37);

解 

.



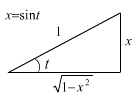
(38);

解 .

(39);

解 

.

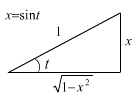


(40).

解 



.



习题43

求下列不定积分:

1. ;

解 .

2. ;

解 .

3. ;

解 ****



.

4. ;

解 

.

5. ;

解 

.

6. ;

解 因为





,

所以 .

7. ;

解 因为







,

所以 .

8. ;

解 .

9. ;

解 



.

10. 

解 

.

11. ;

解 

.

12. ;

解 

.

13. ;

解 

.

14. ;

解 

.

15. ;

解 



.

16. ;

解 



.

17. ;

解 





.

18. ;

解 







.

19. ;

解 







.

20. ;

解 因为





,

所以 .

21. ;

解 





.

22. .

解 ,

而 

,

,

所以 .

习题44

求下列不定积分:

1. ;

解 



.

2. ;

解 .

3. ;

解 



.

4. ;

解 



.

5. ;

解 

.

6. ;

解 



.

7. ;

解 .

8. ;

解 





.

9. ;

解 





.

10. ;

解 







.

11. ;

解 



,

因为

,

而 

由递推公式

,

得 

,

所以 

.

12. ;

解 

.

13. ;

解 

.

或



.

14. ;

解 



.

或 



.

15. ;

解 .

或 

.

16. ;

解 

.

或 



.

17. ;

解 

.

18. ;

解 .

19. ;

解 



.

20. ;

解 



.

21. ;

解 令, 则, ,





.

22. .

解 令, 则, , 代入得

.

总习题四

求下列不定积分(其中*a*, *b*为常数):

1. ;

解 .

2. ;

解 .

3. (*a*>0);

解 .

4. ;

解 .

5. ;

解 .

6. ;

解 .

7. ;

解 



.

8. ;

解 





.

9. ;

解 .

10. ;

解 

.

11. ;

解 .

12. ;

解 

.

13. ;

解 因为



,

所以 

.

14. ;

解 .

.

15. ;

解 

.

16. ;

解 





.

17. ;

解 





.

18. ;

解 







.

19. ;

解 



.

20. ;

解 

.

21. ;

解 





.

22. ;

解 .

23. ;

解 .

提示: 已知递推公式

.

24. ;

解 





.

25. ;

解 



.

26. ;

解 

.

27. ;

解 



.

28. ;

解 







.

29. ;

解 

.

30. ;

解 



.

31. ;

解 



.

32. ;

解 







.

33. ;

解 









.

34. ;

解 因为



所以 

.

35. ;

解 





.

36. ;

解 













.

37. ;

解 

ln|sin *x*|ln|1+sin *x*|+*C*ln|csc *x*+1|+*C* .

38. ;

解 

.

39. ;

解 令, 则





.

40. ;

解 







.

习题5−1

1. 利用定积分定义计算由抛物线*y*=*x*2+1, 两直线*x*=*a*、*x*=*b*(*b*>*a*)及横轴所围成的图形的面积.

解 第一步: 在区间[*a*, *b*]内插入*n*−1个分点(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*−1), 把区间[*a*, *b*]分成*n*个长度相等的小区间, 各个小区间的长度为: (*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*).

第二步: 在第*i*个小区间[*xi*−1, *xi*] (*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*)上取右端点, 作和







.

第三步: 令*λ*=max{Δ*x*1, Δ*x*2, ⋅ ⋅ ⋅ , Δ*xn*}, 取极限得所求面积





.

2. 利用定积分定义计算下列积分:

(1)(*a*<*b*);

(2).

解 (1)取分点为(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*−1), 则(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*). 在第*i* 个小区间上取右端点 (*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*). 于是



.

(2)取分点为(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*−1), 则(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*). 在第*i* 个小区间上取右端点 (*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*). 于是



.

3. 利用定积分的几何意义 说明下列等式:

(1);

(2);

(3);

(4).

解 (1)表示由直线*y*=2*x*、*x*轴及直线*x*=1所围成的面积, 显然面积为1.

(2)表示由曲线、*x*轴及*y*轴所围成的四分之一圆的面积, 即圆*x*2+*y*2=1的面积的:

.

(3)由于*y*=sin *x*为奇函数, 在关于原点的对称区间[−*π*, *π*]上与*x*轴所夹的面积的代数和为零, 即

.

(4) 表示由曲线*y*=cos *x*与*x*轴上一段所围成的图形的面积. 因为cos *x*为偶函数, 所以此图形关于*y*轴对称. 因此图形面积的一半为, 即

.

4. 水利工程中要计算拦水闸门所受的水压力, 已知闸门上水的压强*p*(单位面积上的压力大小)是水深*h*的函数, 且有*p*=9⋅8*h* (kN/m2). 若闸门高*H*=3m, 宽*L*=2m, 求水面与闸门顶相齐时闸门所受的水压力*P*.

解 建立坐标系如图. 用分点(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*−1)将区间[0, *H*]分为*n*分个小区间, 各小区间的长为(*i*=1, 2, ⋅ ⋅ ⋅, *n*).

在第*i*个小区间[*xi*−1, *xi*]上, 闸门相应部分所受的水压力近似为

Δ*Pi*=9.8*x* i*l*⋅Δ*x**i* .

闸门所受的水压力为

.

将*L*=2, *H*=3代入上式得*P*=88.2(千牛).

5. 证明定积分性质:

(1);

(2).

证明 (1).

(2).

6. 估计下列各积分的值:

(1);

(2);

(3);

(4).

解 (1)因为当1≤*x*≤4时, 2≤*x*2+1≤17, 所以

,

即 .

(2)因为当时, 1≤1+sin2*x*≤2, 所以

,

即 .

(3)先求函数*f*(*x*)=*x* arctan *x*在区间上的最大值*M*与最小值*m*.

. 因为当时, *f* ′(*x*)>0, 所以函数*f*(*x*)=*x* arctan *x*在区间上单调增加. 于是

, .

因此 ,

即 .

(4)先求函数在区间[0, 2]上的最大值*M*与最小值*m*.

, 驻点为.

比较*f*(0)=1, *f*(2)=*e* 2, ,得, *M*=*e* 2. 于是

,

即 .

7. 设*f*(*x*)及*g*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 证明:

(1)若在[*a*, *b*]上 *f*(*x*)≥0, 且, 则在[*a*, *b*]上*f*(*x*)≡0;

(2)若在[*a*, *b*]上, *f*(*x*)≥0, 且*f*(*x*)≢0, 则;

(3)若在[*a*, *b*]上, *f*(*x*)≤*g*(*x*), 且, 则在[*a* *b*]上*f*(*x*)≡*g*(*x*).

证明 (1)假如*f*(*x*)≢0, 则必有*f*(*x*)>0. 根据*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的连续性, 在[*a*, *b*]上存在一点*x*0, 使*f*(*x*0)>0, 且*f*(*x*0)为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最大值.

再由连续性, 存在[*c*, *d*]⊂[*a*, *b*], 且*x*0∈[*c*, *d*], 使当*x*∈[*c*, *d*]时, . 于是

.

这与条件相矛盾. 因此在[*a*, *b*]上*f*(*x*)≡0.

(2)证法一 因为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 所以在[*a*, *b*]上存在一点*x*0, 使*f*(*x*0)>0, 且*f*(*x*0)为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上的最大值.

再由连续性, 存在[*c*, *d*]⊂[*a*, *b*], 且*x*0∈[*c*, *d*], 使当*x*∈[*c*, *d*]时, . 于是

.

证法二 因为*f*(*x*)≥0, 所以. 假如不成立. 则只有,

根据结论(1), *f*(*x*)≡0, 矛盾. 因此.

(3)令*F*(*x*)=*g*(*x*)−*f*(*x*), 则在[*a*, *b*]上*F*(*x*)≥0且

,

由结论(1), 在[*a*, *b*]上*F*(*x*)≡0, 即*f*(*x*)≡*g*(*x*).

4. 根据定积分的性质及第7题的结论, 说明下列积分哪一个的值较大:

(1)还是？

(2)还是？

(3)还是？

(4)还是？

(5)还是？

解 (1)因为当0≤*x*≤1时, *x*2≥*x*3, 所以.

又当0<*x*<1时, *x*2>*x*3, 所以.

(2)因为当1≤*x*≤2时, *x*2≤*x*3, 所以.

又因为当1<*x*≤2时, *x*2<*x*3, 所以.

(3)因为当1≤*x*≤2时, 0≤ln *x*<1, ln *x*≥(ln *x*)2, 所以.

又因为当1<*x*≤2时, 0<ln *x*<1, ln *x*>(ln *x*)2, 所以.

(4)因为当0≤*x*≤1时, *x*≥ln(1+*x*), 所以.

又因为当0<*x*≤1时, *x*>ln(1+*x*), 所以.

(5)设*f*(*x*)=*ex*−1−*x*, 则当0≤*x*≤1时*f* ′(*x*) =*ex*−1>0, *f*(*x*)=*ex*−1−*x*是单调增加的. 因此当0≤*x*≤1时, *f*(*x*)≥*f*(0)=0, 即*ex*≥1+*x*, 所以.

又因为当0<*x*≤1时, *ex*>1+*x*, 所以.

习题5−2

1. 试求函数当*x*=0及时的导数.

解 , 当*x*=0时, *y*′=sin0=0;

当时, .

2. 求由参数表示式, 所给定的函数*y*对*x*的导数.

解 *x*′(*t*)=sin *t* , *y*′(*t*)=cos *t* , .

3. 求由所决定的隐函数*y*对*x*的导数.

解 方程两对*x*求导得

**,

于是 .

4. 当*x*为何值时, 函数有极值？

解 , 令*I* ′(*x*)=0, 得*x*=0.

因为当*x*<0时, *I* ′(*x*)<0; 当*x*>0时, *I* ′(*x*)>0,

所以*x*=0是函数*I*(*x*)的极小值点.

5. 计算下列各导数:

(1);

(2);

(3).

解 (1)

.

(2)





.

(3)











6. 计算下列各定积分:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 

.

(4);

解 .

(5);

解 .

(6);

解 .

(7);

解 .

(8);

解 

.

(9);

解 .

(10);

解 .

(11);

解 

=−cos*π* +cos0+cos2*π*−cos*π*=4.

(12), 其中.

解 .

7. 设*k*为正整数. 试证下列各题:

(1);

(2);

(3);

(4).

证明 (1).

(2)

.

(3).

(4).

8. 设*k*及*l*为正整数, 且*k*≠*l* . 试证下列各题:

(1);

(2);

(3).

证明 (1)

.

(2)

.

(3).

.

9. 求下列极限:

(1);

(2).

解 (1).

(2)



.

10. 设. 求在[0, 2]上的表达式, 并讨论**(*x*)在(0, 2)内的连续性.

解 当0≤*x*≤1时, ;

当1<*x*≤2时, .

因此 .

因为, ,

,

所以**(*x*)在*x*=1处连续, 从而在(0, 2)内连续.

11. 设. 求在(−∞, +∞)内的表达式.

解 当*x*<0时,

;

当0≤*x*≤*π*时,

;

当*x*>*π*时,



.

因此 .

12. 设*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 在(*a*, *b*)内可导且*f* ′(*x*)≤0,

.

证明在(*a*, *b*)内有*F* ′(*x*)≤0.

证明 根据积分中值定理, 存在**∈[*a*, *x*], 使. 于是有





.

由*f* ′(*x*)≤0可知*f*(*x*)在[*a*, *b*]上是单调减少的, 而*a*≤**≤*x*, 所以*f*(*x*)−*f*(**)≤0. 又在(*a*, *b*)内, *x*−*a*>0, 所以在(*a*, *b*)内

.

习题5−3

1. 计算下列定积分:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3);

解 

.

(4);

解 

.

(5);

解 

.

(6);

解 

.

(7);

解 

.

(8);

解 .

(9);

解 

.

(10);

解 

.

(11);

解 .

(12) ;

解 .

(13);

解 .

(14);

解 .

(15);

解 .

(16);

解 .

(17);

解 .

(18);

解 .

(19);

解 



(20).

解 .

2. 利用函数的奇偶性计算下列积分:

(1);

解 因为*x* 4sin *x*在区间[−*π*, *π*]上是奇函数, 所以.

(2);

解 



.

(3);

解 

.

(4).

解 因为函数是奇函数, 所以.

3. 证明: , 其中**(*u*)为连续函数.

证明 因为被积函数**(*x*2)是*x*的偶函数, 且积分区间[−*a*, *a*]关于原点对称, 所以有

.

4. 设*f*(*x*)在[−*b*, *b*]上连续, 证明.

证明 令*x*=−*t*, 则*dx*=−*dt*, 当*x*=−*b*时*t*=*b*, 当*x*=*b*时*t*=−*b*, 于是

,

而 ,

所以 .

5. 设*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续., 证明.

证明 令*x*=*a*+*b*−*t*, 则*dx*=*d* *t*, 当*x*=*a*时*t*=*b*, 当*x*=*b*时*t*=*a*, 于是

,

而 ,

所以 .

6. 证明: .

证明 令, 则, 当*x*=*x*时, 当*x*=1时*t*=1, 于是

,

而 ,

所以 .

7. 证明: .

证明 令1−*x*=*t* , 则,

即.

8. 证明: .

证明 ,

而 ,

所以 .

9. 设*f*(*x*)是以*l*为周期的连续函数, 证明的值与*a*无关.

证明 已知*f*(*x*+*l*)=*f*(*x*).

,

而 ,

所以 .

因此的值与*a*无关.

10. 若*f*(*t*)是连续函数且为奇函数, 证明是偶函数; 若*f*(*t*)是连续函数且为偶函数, 证明是奇函数.

证明 设.

若*f*(*t*)是连续函数且为奇函数, 则*f*(−*t*)=−*f*(*t*), 从而

,

即是偶函数.

若*f*(*t*)是连续函数且为偶函数, 则*f*(−*t*)=*f*(*t*), 从而

,

即是奇函数.

11. 计算下列定积分:

(1);

解 .

(2);

解 .

(3)(**为常数);

解 

.

(4);

解 

.

(5);

解 

.

(6);

解 

.

(7);

解 



所以 ,

于是

(8);

解 

.

(9);

解 



.

(10);

解法一 .

因为 



,

所以 .

因此 .

解法二 



,

故 .

(11);

解 

.

(12)(*m*为自然数);

解 .

根据递推公式,

.

(13)(*m*为自然数).

解 因为

,

所以 (用第8题结果).

根据递推公式,

.

习题5−7

1. 判别下列各反常积分的收敛性, 如果收敛, 计算反常积分的值:

(1);

解 因为

,

所以反常积分收敛, 且.

(2);

解 因为, 所以反常积分发散.

(3)(*a*>0);

解 因为

,

所以反常积分收敛, 且.

(4)(*p*>1);

解 因为

,

所以反常积分收敛, 且.

(5)(*p*>0, **>0);

解 



,

所以 .

(6);

解 .

(7);

解 这是无界函数的反常积分, *x*=1是被积函数的瑕点.

.

(8);

解 这是无界函数的反常积分, *x*=1是被积函数的瑕点. 因为

,

而 ,

所以反常积分发散.

(9);

解 这是无界函数的反常积分, *x*=1是被积函数的瑕点.



.

(10).

解 这是无界函数的反常积分, *x*=*e*是被积函数的瑕点.

.

2. 当*k*为何值时, 反常积分收敛? 当*k*为何值时, 这反常积分发散? 又当*k* 为何值时, 这反常积分取得最小值?

解 当*k*<1时, ;

当*k*=1时, ;

当*k*>1时, .

因此当*k*>1时, 反常积分收敛; 当*k* ≤1时, 反常积分发散.

当*k*>1时, 令, 则

.

令*f* ′(*k*)=0得唯一驻点.

因为当时*f* ′(*k*)<0, 当时*f* ′(*k*)>0, 所以为极小值点, 同时也是最小值点, 即当时, 这反常积分取得最小值

3. 利用递推公式计算反常积分.

解 因为

,

所以 *I**n*= *n*⋅(*n*−1)⋅(*n*−2)⋅ ⋅ ⋅2⋅*I*1.

又因为 ,

所以 *I**n*= *n*⋅(*n*−1)⋅(*n*−2)⋅ ⋅ ⋅2⋅*I*1=*n*!.

总习题五

1. 填空:

(1)函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上(常义)有界是*f*(*x*)在[*a*, *b*]上可积的\_\_\_\_\_\_条件, 而*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续是*f*(*x*)在[*a*, *b*]上可积\_\_\_\_\_\_的条件;

解 函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上(常义)有界是*f*(*x*)在[*a*, *b*]上可积的\_\_\_必要\_\_\_条件, 而*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续是*f*(*x*)在[*a*, *b*]上可积\_\_\_充分\_\_\_的条件;

(2)对[*a*, +∞)上非负、连续的函数*f*(*x*), 它的变上限积分在[*a*, +∞)上有界是反常积分收敛的\_\_\_\_\_\_条件;

解 对[*a*, +∞)上非负、连续的函数*f*(*x*), 它的变上限积分在[*a*, +∞)上有界是反常积分收敛的\_\_\_充分\_\_\_条件;

(3)绝对收敛的反常积分一定\_\_\_\_\_\_;

解 绝对收敛的反常积分一定\_\_\_收敛\_\_\_;

(4)函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上有定义且|*f*(*x*)|在[*a*, *b*]上可积, 此时积分\_\_\_\_\_\_存在.

解 函数*f*(*x*)在[*a*, *b*]上有定义且|*f*(*x*)|在[*a*, *b*]上可积, 此时积分\_\_\_不一定\_\_\_存在.

2. 计算下列极限:

(1);

解 .

(2)(*p*>0);

解 .

(3);

解 





.

(4), 其中*f*(*x*)连续;

解法一  (用的是积分中值定理).

解法二  (用的是洛必达法则).

(5).

解 .

3. 下列计算是否正确, 试说明理由:

(1);

解 计算不正确, 因为在[−1, 1]上不连续.

(2)因为, 所以.

解 计算不正确, 因为在−1, 1]上不连续.

(3).

解 不正确, 因为

.

4. 设*p*>0, 证明.

证明 . 因为

,

而 , ,

所以 .

5. 设*f* (*x*)、*g* (*x*)在区间[*a*, *b*]上均连续, 证明:

(1);

证明 因为[*f*(*x*)−*λg*(*x*)]2≥0, 所以*λ*2*g* 2(*x*)−2*λ* *f*(*x*)*g*(*x*)+*f* 2(*x*)≥0, 从而

.

上式的左端可视为关于*λ*的二次三项式, 因为此二次三项式大于等于0, 所以其判别式小于等于0, 即

,

亦即 .

(2),

证明 

,

又 ,

所以 .

6. 设*f* (*x*)在区间[*a*, *b*]上连续, 且*f* (*x*)>0. 证明.

证明 已知有不等式, 在此不等式中, 取, , 则有

,

即 .

7. 计算下列积分:

(1);

解 

.

(2);

解 

.

令 则

,

所以 .

(3);

解 令*x*=*a* sin *t*, 则

.

又令, 则

,

所以 .

(4);

解 



.

(5).

解 

.

8. 设*f*(*x*)为连续函数, 证明.

证明 



.

9. 设*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续, 且*f*(*x*)>0, , *x*∈[*a*, *b*]. 证明:

(1)*F* ′(*x*)≥2;

(2)方程*F*(*x*)=0在区间(*a*, *b*)内有且仅有一个根.

证明 (1).

(2)因为*f*(*x*)>0, *a*<*b*, 所以

, ,

由介值定理知*F*(*x*)=0在(*a*, *b*)内有根. 又*F*′′(*x*)≥2, 所以在(*a*, *b*)内仅有一个根.

10. 设 , 求.

解 

.

11. 设*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续, *g*(*x*)在区间[*a*, *b*]上连续且不变号. 证明至少存在一点

*x*∈[*a*, *b*], 使下式成立

 (积分第值定理) .

证明 若*g*(*x*)=0, 则结论题然成立.

若*g*(*x*)≠0, 因为*g*(*x*)不变号, 不妨设*g*(*x*)>0.

因*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 所以*f*(*x*)在[*a*, *b*]上有最大值*M*和最小值*m*即

*m*≤*f*(*x*)≤*M*,

因此有 *m*g(*x*)≤*f*(*x*)*g*(*x*)≤*M*g(*x*).

根据定积分的性质, 有

,

或 .

因为*f*(*x*)在[*a*, *b*]上连续, 根据介值定理, 至少存在一点*x*∈(*a*, *b*), 使

,

即 .

\*12.(1)证明: 

证明 

=

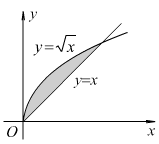


(2)证明

习题6−2

1. 求图6−21 中各画斜线部分的面积:

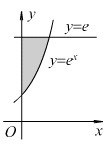
(1)



解 画斜线部分在*x*轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

.

(2)



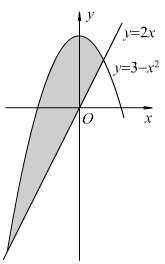
解法一 画斜线部分在*x*轴上的投影区间为[0, 1]. 所求的面积为

,

解法二 画斜线部分在*y*轴上的投影区间为[1, *e*]. 所求的面积为

.

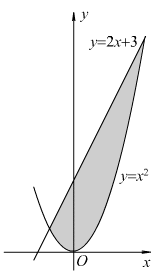
(3)



解 画斜线部分在*x*轴上的投影区间为[−3, 1]. 所求的面积为

.

(4)

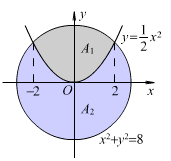


解 画斜线部分在*x*轴上的投影区间为[−1, 3]. 所求的面积为

.

2. 求由下列各曲线所围成的图形的面积:

(1)与*x*2+*y*2=8(两部分都要计算);



解:

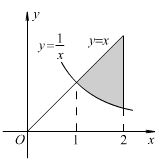


.

.

(2)与直线*y*=*x*及*x*=2;

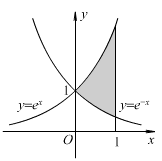
解:



所求的面积为

.

(3) *y*=*ex*, *y*=*e*−*x*与直线*x*=1;



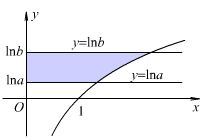
解:

所求的面积为

.

(4)*y*=ln *x*, *y*轴与直线*y*=ln *a*, *y*=ln *b* (*b*>*a*>0).

解

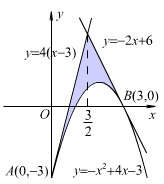


所求的面积为



3. 求抛物线*y*=−*x*2+4*x*−3及其在点(0, −3)和(3, 0)处的切线所围成的图形的面积.

解:



*y*′=−2 *x*+4.

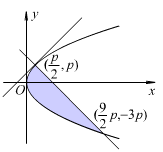
过点(0, −3)处的切线的斜率为4, 切线方程为*y*=4(*x*−3).

过点(3, 0)处的切线的斜率为−2, 切线方程为*y*=−2*x*+6.

两切线的交点为, 所求的面积为

.

4. 求抛物线*y*2=2*px*及其在点处的法线所围成的图形的面积.



解

2*y*⋅*y*′=2*p* .

在点处, , 法线的斜率*k*=−1,

法线的方程为, 即.

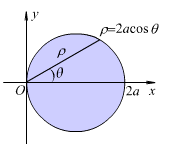
求得法线与抛物线的两个交点为和.

法线与抛物线所围成的图形的面积为

.

5. 求由下列各曲线**所围成的图形的面积

(1)*ρ*=2*a*cos*θ* ;

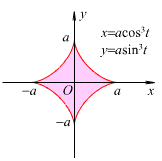


解:

所求的面积为

=*πa*2.

(2)*x*=*a*cos3*t*, *y*=*a*sin3*t*;



解

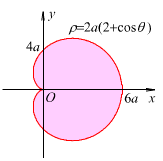
所求的面积为



.

(3)*ρ*=2*a*(2+cos*θ* )

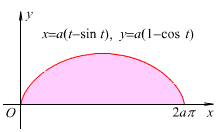
解



所求的面积为

.

6. 求由摆线*x*=*a*(*t*−sin *t*), *y*=*a*(1−cos *t*)的一拱(0≤*t*≤2*π*)与横轴**所围成的图形的面积.



解:

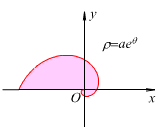
所求的面积为



.

7. 求对数螺线*ρ*=*aeθ*(−*π*≤*θ*≤*π*)及射线*θ*=*π*所围成的图形面积.

解



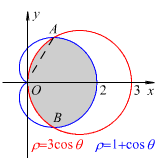
所求的面积为

.

8. 求下列各曲线所围成图形的公共部分的面积.

(1)*ρ*=3cos*θ* 及*ρ*=1+cos*θ*

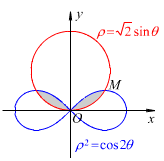
解



曲线*ρ*=3cos*θ* 与*ρ*=1+cos*θ*交点的极坐标为, . 由对称性, 所求的面积为

.

(2)及.



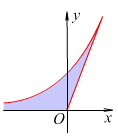
解

曲线与的交点*M*的极坐标为*M*. 所求的面积为

.

9. 求位于曲线*y*=*ex*下方该曲线过原点的切线的左方以及*x*轴上方之间的图形的面积.

解 设直线*y*=*kx*与曲线*y*=*ex*相切于*A*(*x*0, *y*0)点, 则有



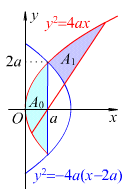
,

求得*x*0=1, *y*0=*e*, *k*=*e* .

所求面积为

.

10. 求由抛物线*y*2=4*ax*与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值.



解 设弦的倾角为*α*. 由图可以看出, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积为

.

显然当时, *A*1=0; 当时, *A*1>0.

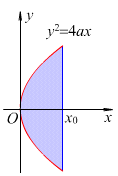


因此, 抛物线与过焦点的弦所围成的图形的面积的最小值为

.

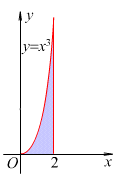
11. 把抛物线*y*2=4*ax*及直线*x*=*x*0(*x*0>0)所围成的图形绕*x*轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

解 所得旋转体的体积为



.

12. 由*y*=*x*3, *x*=2, *y*=0所围成的图形, 分别绕*x*轴及*y*轴旋转, 计算所得两个旋转体的体积.



解 绕*x*轴旋转所得旋转体的体积为

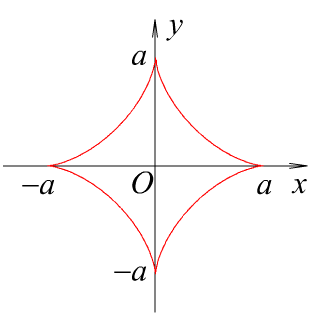
.

绕*y*轴旋转所得旋转体的体积为



.

13. 把星形线所围成的图形, 绕*x*轴旋转, 计算所得旋转体的体积.

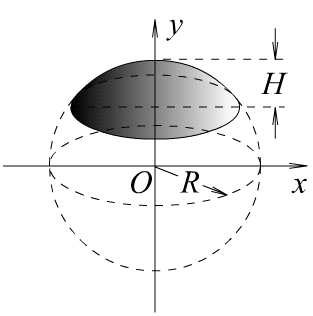


解 由对称性, 所求旋转体的体积为



.

14. 用积分方法证明图中球缺的体积为.



证明 

.

15. 求下列已知曲线所围成的图形, 按指定的轴旋转所产生的旋转体的体积:

(1), , 绕*y*轴;

解 .

(2), *x*=0, *x*=*a*, *y*=0, 绕*x*轴;

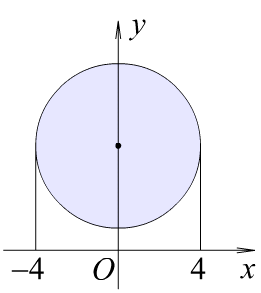
解 



.

(3), 绕*x* 轴.

解 

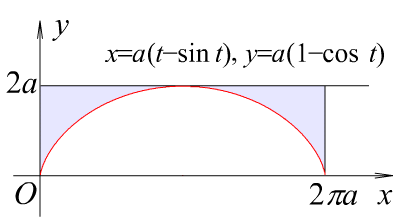


.

(4)摆线*x*=*a*(*t*−sin *t*), *y*=*a*(1−cos *t*)的一拱, *y*=0, 绕直线*y*=2*a*.

解 

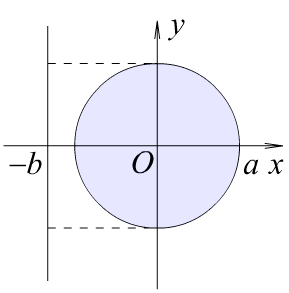




.

16. 求圆盘绕*x*=−*b*(*b*>*a*>0)旋转所成旋转体的体积.

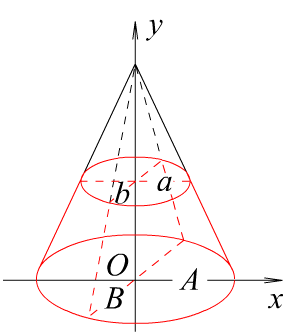
解 



.

17. 设有一截锥体, 其高为*h*, 上、下底均为椭圆, 椭圆的轴长分别为2*a*、2*b*和2*A*、2*B*, 求这截锥体的体积.

解 建立坐标系如图. 过*y*轴上*y*点作垂直于*y*轴的平面, 则平面与截锥体的截面为椭圆, 易得其长短半轴分别为



, .

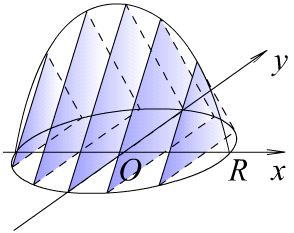
截面的面积为.

于是截锥体的体积为

.

18. 计算底面是半径为*R*的圆, 而垂直于底面上一条固定直径的所有截面都是等边三角形的立体体积.

解 设过点*x*且垂直于*x*轴的截面面积为*A*(*x*), 由已知条件知, 它是边长为的等边三角形的面积, 其值为



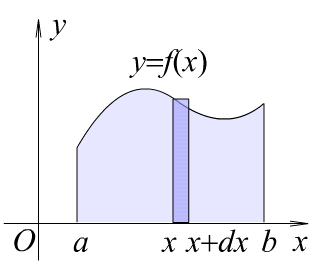
,

所以 .

19. 证明 由平面图形0≤*a*≤*x*≤*b*, 0≤*y*≤*f*(*x*)绕*y*轴旋转所成的旋转体的体积为

.

证明 如图, 在*x*处取一宽为*dx*的小曲边梯形, 小曲边梯形绕*y*轴旋转所得的旋转体的体积近似为2*πx*⋅*f*(*x*)*dx*, 这就是体积元素, 即



*dV*=2*πx*⋅*f*(*x*)*dx*,

于是平面图形绕*y*轴旋转所成的旋转体的体积为

.

20. 利用题19和结论, 计算曲线*y*=sin *x*(0≤*x*≤*π*)和*x*轴所围成的图形绕*y*轴旋转所得旋转体的体积.

解 .

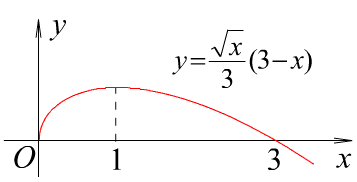
21. 计算曲线*y*=ln *x*上相应于的一段弧的长度.

解 ,

令, 即, 则

.

22. 计算曲线上相应于1≤*x*≤3的一段弧的长度.



解 , ,

, ,

所求弧长为

.

23. 计算半立方抛物线被抛物线截得的一段弧的长度.

解 由得两曲线的交点的坐标为,.

所求弧长为.

因为

, , .

所以

.

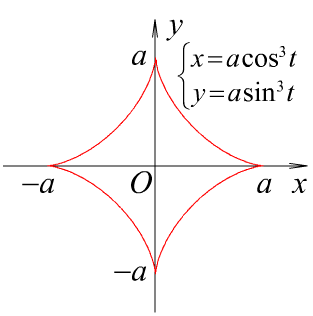
24. 计算抛物线*y*2=2*px* 从顶点到这曲线上的一点*M*(*x*, *y*)的弧长.

解 



.

25. 计算星形线, 的全长.



解 用参数方程的弧长公式.

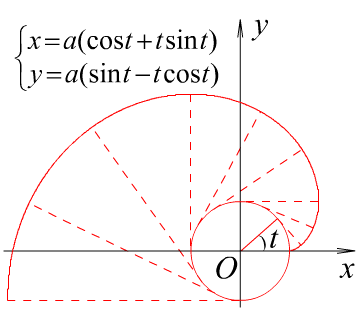




.

26. 将绕在圆(半径为*a*)上的细线放开拉直, 使细线与圆周始终相切, 细线端点画出的轨迹叫做圆的渐伸线, 它的方程为

, .



计算这曲线上相应于*t*从0变到*π*的一段弧的长度.

解 由参数方程弧长公式



.

27. 在摆线*x*=*a*(*t*−sin *t*), *y*=*a*(1−cos *t*)上求分摆线第一拱成1: 3的点的坐标.

解 设*t*从0变化到*t*0时摆线第一拱上对应的弧长为*s*(*t*0), 则



.

当*t*0=2*π*时, 得第一拱弧长*s*(2*π*)=8*a*. 为求分摆线第一拱为1: 3的点为*A*(*x*, *y*), 令

,

解得, 因而分点的坐标为:

横坐标,

纵坐标,

故所求分点的坐标为.

28. 求对数螺线相应于自**=0到**=**的一段弧长.

解 用极坐标的弧长公式.



.

29. 求曲线*ρθ*=1相应于自至的一段弧长.

解 按极坐标公式可得所求的弧长



.

30. 求心形线*ρ*=*a*(1+cos **的全长.

解 用极坐标的弧长公式.



.

习题6−3

1. 由实验知道, 弹簧在拉伸过程中, 需要的力*F*(单位: *N*)与伸长量*s*(单位: cm)成正比, 即*F*=*ks* (*k*为比例常数). 如果把弹簧由原长拉伸6cm, 计算所作的功.

解 将弹簧一端固定于*A*, 另一端在自由长度时的点*O*为坐标原点, 建立坐标系. 功元素为*dW*=*ksds*, 所求功为

k(牛⋅厘米).

2. 直径为20cm、高80cm的圆柱体内充满压强为10N/cm2的蒸汽. 设温度保持不变, 要使蒸汽体积缩小一半, 问需要作多少功？

解 由玻−马定律知:

.

设蒸气在圆柱体内变化时底面积不变, 高度减小*x*厘米时压强 为*P*(*x*)牛/厘米2, 则

, .

功元素为,

所求功为

(J).

3. (1)证明: 把质量为*m*的物体从地球表面升高到*h*处所作的功是

,

其中*g*是地面上的重力加速度, *R*是地球的半径;

(2)一颗人造地球卫星的质量为173kg, 在高于地面630km处进入轨道. 问把这颗卫星从地面送到630的高空处, 克服地球引力要作多少功？已知*g*=9.8m/s2, 地球半径*R*=6370km.

证明 (1)取地球中心为坐标原点, 把质量为*m*的物体升高的功元素为

,

所求的功为

.

(2)(kJ).

4. 一物体按规律作直线运动, 媒质的阻力与速度的平方成正比. 计算物体由*x*=0移至*x*=*a*时, 克服媒质阻力所作的功.

解 因为, 所以

, 阻力. 而**, 所以

.

功元素*dW*=−*f*(*x*)*dx*, 所求之功为

.

5. 用铁锤将一铁钉击入木板, 设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比, 在击第一次时, 将铁钉击入木板1cm. 如果铁锤每次打击铁钉所做的功相等, 问锤击第二次时, 铁钉又击入多少？

解 设锤击第二次时铁钉又击入*h*cm, 因木板对铁钉的阻力*f*与铁钉击入木板的深度*x*(cm)成正比, 即*f*=*kx*, 功元素*dW*=*f* *dx*=*kxdx*,

击第一次作功为

,

击第二次作功为

.

因为, 所以有

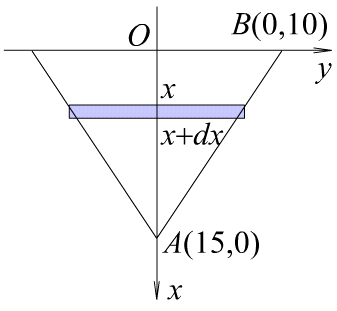
,

解得(cm).

6. 设一锥形贮水池, 深15m, 口径20m, 盛满水, 今以唧筒将水吸尽, 问要作多少功？

解 在水深*x*处, 水平截面半径为, 功元素为

,



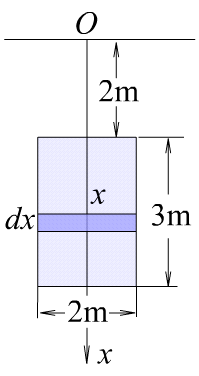
所求功为





=1875(吨米)=57785.7(kJ).

7. 有一闸门, 它的形状和尺寸如图, 水面超过门顶2m. 求闸门上所受的水压力.



解 建立*x*轴, 方向向下, 原点在水面.

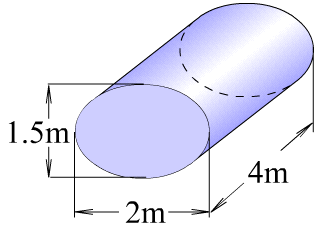
水压力元素为

,

闸门上所受的水压力为

(吨)=205. 8(kN).

8. 洒水车上的水箱是一个横放的椭圆柱体, 尺寸如图所示. 当水箱装满水时, 计算水箱的一个端面所受的压力.



解 建立坐标系如图, 则椭圆的方程为

.

压力元素为

,

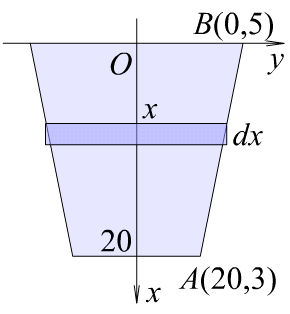
所求压力为



(吨)=17.3(kN).

(提示: 积分中所作的变换为)

9. 有一等腰梯形闸门, 它的两条底边各长10m和6m, 高为20m. 较长的底边与水面相齐. 计算闸门的一侧所受的水压力.



解 建立坐标系如图. 直线*AB*的方程为

,

压力元素为

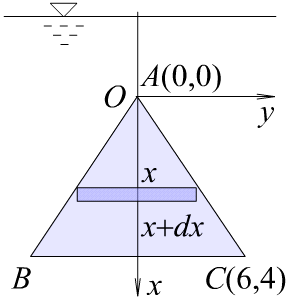
,

所求压力为

(吨)=14388(千牛).

10. 一底为8cm、高为6cm的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面3cm, 试求它每面所受的压力.

解 建立坐标系如图.



腰*AC*的方程为, 压力元素为

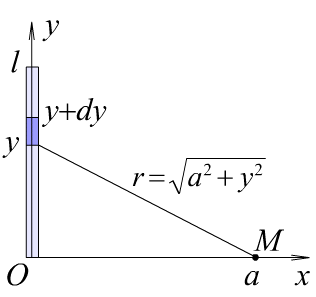
,

所求压力为

(克).(牛).

11. 设有一长度为*l*、线密度为*μ*的均匀细直棒, 在与棒的一端垂直距离为*a*单位处有一质量为*m*的质点*M*, 试求这细棒对质点*M*的引力.

解 建立坐标系如图. 在细直棒上取一小段*dy*, 引力元素为



,

*dF*在*x*轴方向和*y*轴方向上的分力分别为

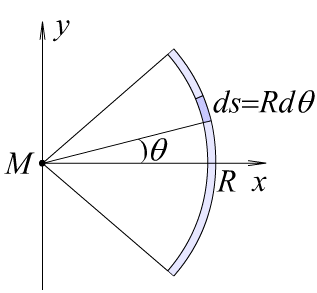
, .



,

.

12. 设有一半径为*R*、中心角为 **的圆弧形细棒, 其线密度为常数*μ*. 在圆心处有一质量为*m*的质点*F*. 试求这细棒对质点*M*的引力.



解 根据对称性, *Fy*=0.



,



.

引力的大小为, 方向自*M*点起指向圆弧中点.

总 习 题 六

1. 一金属棒长3*m*, 离棒左端*xm*处的线密度为

(kg/*m*). 问*x*为何值时, [0, *x*]一段的质量为全棒质量的一半?

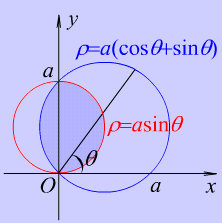
解 *x*应满足.

因为, ,

所以 ,

(m).

2. 求由曲线*ρ*=*a*sin*θ*, *ρ*=*a*(cos*θ*+sin*θ*)(*a*>0)所围图形公共部分的面积.



解 

.

3. 设抛物线通过点(0, 0), 且当*x*∈[0, 1]时, *y*≥0. 试确定*a*、*b*、*c*的值, 使得抛物线与直线*x*=1, *y*=0所围图形的面积为, 且使该图形绕*x*轴旋转而成的旋转体的体积最小.

解 因为抛物线通过点(0, 0), 所以*c*=0, 从而

.

抛物线与直线*x*=1, *y*=0所围图形的面积为

.

令, 得.

该图形绕*x*轴旋转而成的旋转体的体积为



.

令, 得, 于是*b*=2.

4. 求由曲线与直线*x*=4, *x*轴所围图形绕*y*轴旋转而成的旋转体的体积.

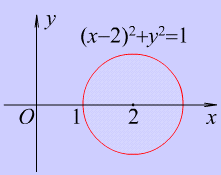
解 所求旋转体的体积为

.

5. 求圆盘绕*y*轴旋转而成的旋转体的体积.

解 

.

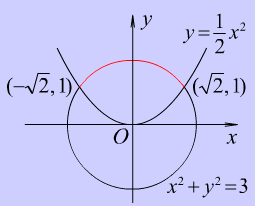


6. 抛物线被圆所需截下的有限部分的弧长.

解 由解得抛物线与圆的两个交点为, , 于是所求的弧长为



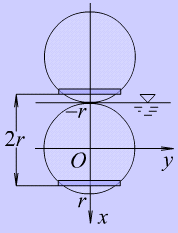
.



7. 半径为*r*的球沉入水中, 球的上部与水面相切, 球的比重与水相同, 现将球从水中取出, 需作多少功?

解 建立坐标系如图. 将球从水中取出时, 球的各点上升的高度均为2*r*. 在*x*处取一厚度为*dx*的薄片, 在将球从水中取出的过程中, 薄片在水下上升的高度为*r*+*x*, 在水上上升的高度为*r*−*x*. 在水下对薄片所做的功为零, 在水上对薄片所做的功为

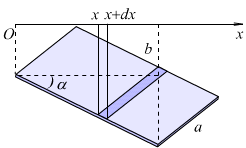
,



对球所做的功为

.

8. 边长为*a*和*b*的矩形薄板, 与液面成**角斜沉于液体内, 长边平行于液面而位于深*h*处, 设*a*>*b*, 液体的比重为**, 试求薄板每面所受的压力.



解 在水面上建立*x*轴, 使长边与*x*轴在同一垂面上, 长边的上端点与原点对应. 长边在*x*轴上的投影区间为[0, *b*cos*α*], 在*x*处*x*轴到薄板的距离为*h*+*x*tan*α*. 压力元素为

,

薄板各面所受到的压力为

.

9. 设星形线, 上每一点处的线密度的大小等于该点到原点距离的立方, 在原点*O*处有一单位质点, 求星形线在第一象限的弧段对这质点的引力.

解 取弧微分*ds*为质点, 则其质量为

,

其中.

设所求的引力在*x*轴、*y*轴上的投影分别为*Fx*、*Fy*, 则有

,

,

所以.