Analízis 2. ZH Elmélet

A végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium.

6. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Tudjuk, hogy

$$\sum a_n \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n) \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (s_n) \text{ Cauchy-sorozat},$$

azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m > n_0 \colon |s_m - s_n| < \varepsilon$$

teljesül. Állításunk abból következik, hogy ha $m > n$, akkor

$$s_m - s_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m.$$

Végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumok.

11. Tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \colon 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1. **Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
2. **Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, hiszen véges sok tag megváltozásával egy sor konvergenciája nem változik. Jelölje (s_n), illetve (t_n) a $\sum a_n$, illetve a $\sum b_n$ sorok részletösszegeiből álló sorozatokat. A feltevésünk miatt $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Ekkor a nemnegatív tagú sorok konvergenciáról szóló tétel szerint

1. ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor (t_n) korlátos, így (s_n) is az. Ezért a $\sum a_n$ sor is konvergens.
2. ha $\sum a_n$ sor divergens, akkor (s_n) nem korlátos, így (t_n) sem az. Ezért a $\sum b_n$ sor is divergens.

A Cauchy-féle gyökkritérium.

1. Tétel (A Cauchy-féle gyökkritérium). *Tekintsük a* $\sum a_n$ *végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

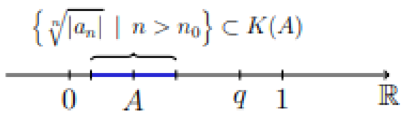
$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. $0 \le A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*
3. $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Mivel $\sqrt[n]{|a_n|} \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $A \ge 0$.

1. Tegyük fel, hogy $\boxed{0 \le A < 1}$.

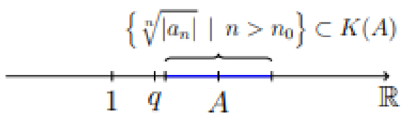


Vegyünk egy A és 1 közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_n| < q^n.$$

Mivel $0 < q < 1$, ezért a $\sum q^n$ mértani sor konvergens. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, és ez azt jelenti, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Tegyük fel, hogy $\boxed{A > 1}$.



Vegyünk most egy 1 és A közötti q számot!

$$\lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \sqrt[n]{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_n| > q^n.$$

Tehát, véges sok n indextől eltekintve $|a_n| > q^n > 1$.
Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \ne 0$, és így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

   - a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1;$
   - a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1.$

A d'Alembertféle hányadoskritérium.

2. Tétel (A d'Alembert-féle hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $A \geq 0$.

1. Legyen $\boxed{0 \leq A < 1}$ és vegyünk egy olyan q számot, amire $A < q < 1$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| < q|a_n|.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$|a_{n_0+1}| < q|a_{n_0}|, \quad |a_{n_0+2}| < q|a_{n_0+1}|, \quad \ldots \quad , |a_{n-1}| < q|a_{n-2}|, \quad |a_n| < q|a_{n-1}|$$

minden $n \geq n_0$ esetén. Így

$$|a_n| < q|a_{n-1}| < q^2|a_{n-2}| < q^3|a_{n-3}| < \cdots < q^{n-n_0}|a_{n_0}| = q^{-n_0}|a_{n_0}|q^n = aq^n,$$

ahol $a := q^{-n_0}|a_{n_0}|$ egy n-től független konstans. A $\sum aq^n$ mértani sor konvergens, mert $0 < q < 1$. Ezért a majoráns kritérium szerint a $\sum |a_n|$ sor is konvergens, vagyis a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens.

2. Legyen $\boxed{A > 1}$ és vegyünk most egy olyan q számot, amire $1 < q < A$ teljesül. Ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q \quad \Longrightarrow \quad \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0\colon \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > q, \quad \text{azaz} \quad |a_{n+1}| > q|a_n| > |a_n|.$$

Ebből következik, hogy $\lim(a_n) \neq 0$, így a $\sum a_n$ sor divergens.

3. Tegyük fel, hogy $\boxed{A = 1}$. Ekkor

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

Leibniz-típusú sorok konvergenciája.

3. Tétel (Leibniz-kritérium).

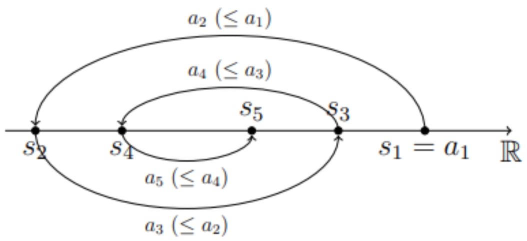
1. **Konvergencia:** *A* $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim(a_n) = 0$.

1. $\boxed{\Rightarrow}$ A sorok konvergenciájának szükséges feltétele értelmében, ha a $\sum(-1)^{n+1}a_n$ sor konvergens, akkor $\lim\Big((-1)^{n+1}a_n\Big) = 0$, ami csak akkor lehetséges, ha $\lim(a_n) = 0$.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\sum_{n=1} (-1)^{n+1}a_n$ egy Leibniz-típusú sor, és $\lim(a_n) = 0$. Igazoljuk, hogy a sor konvergens. Legyen

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \cdots + (-1)^{n+1} a_n \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

   Szemléltessük az (s_n) részletösszeg-sorozat első néhány tagját!



$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1, \\
s_2 &= a_1 - a_2 = s_1 - a_2, \\
s_3 &= a_1 - a_2 + a_3 = s_2 + a_3, \\
s_4 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = s_3 - a_4, \\
s_5 &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 = s_4 + a_5.
\end{aligned}$$

   Most megmutatjuk, hogy az ábra alapján sejthető tendencia valóban igaz, azaz, hogy az (s_{2n}) sorozat monoton növekvő, és az (s_{2n+1}) sorozat monoton csökkenő.

   - A páros indexű részsorozatnál a következő csoportosításból látható, hogy

$$s_{2n} = \overbrace{\underbrace{(a_1 - a_2)}_{\geq 0} + \underbrace{(a_3 - a_4)}_{\geq 0} + \cdots + \underbrace{(a_{2n-3} - a_{2n-2})}_{\geq 0}}^{s_{2n-2}} + \underbrace{(a_{2n-1} - a_{2n})}_{\geq 0}$$

     minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n}) valóban monoton növekvő.

   - Hasonlóan, a páratlan indexű részsorozatnál

$$s_{2n+1} = \overbrace{a_1 + \underbrace{(-a_2 + a_3)}_{\leq 0} + \underbrace{(-a_4 + a_5)}_{\leq 0} + \cdots + \underbrace{(-a_{2n-2} + a_{2n-1})}_{\leq 0}}^{s_{2n-1}} + \underbrace{(-a_{2n} + a_{2n+1})}_{\leq 0}$$

     minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén, tehát (s_{2n+1}) monoton csökkenő sorozat.

Másrészt, az $s_0 := 0$ értelmezés mellett

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \geq 0 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

teljesül, amiből következik, hogy $s_{2n} \leq s_{2n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ekkor

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n+1} \leq \cdots \leq s_5 \leq s_3 \leq s_1. \tag{1}$$

Tehát (s_{2n}) és (s_{2n+1}) korlátos sorozatok. Mivel mindkettő monoton és korlátos, ezért konvergens is. Jelölje $A = \lim(s_{2n+1})$ és $B = \lim(s_{2n})$ a határértéküket. Ekkor

$$A - B = \lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \lim_{n\to+\infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0,$$

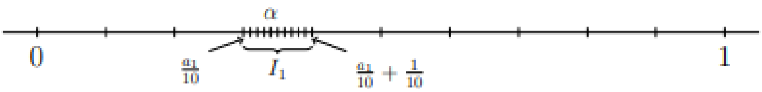
hiszen (a_{2n+1}) részsorozata az (a_n) sorozatnak. Ezért $A = B$, tehát az (s_{2n}) és az (s_{2n+1}) részsorozatok határértéke megegyezik. Ebből következik, hogy az (s_n) sorozat konvergens. Ez pedig azt jelenti, hogy a Leibniz-típusú sor valóban konvergens.

Minden [0, 1]-beli szám felírható tizedes tört alakban.

5. Tétel. *Minden $\alpha \in [0,1]$ számhoz létezik olyan $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0,1,2,\ldots,9\}$ sorozat, amire az teljesül, hogy*
$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Bizonyítás. Rögzítsünk egy $\alpha \in [0,1]$ számot!

Az első lépésben osszuk fel a $[0,1]$ intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor
$$\exists a_1 \in \{0,1,2,\ldots,9\} \colon \alpha \in \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\right] =: I_1 \quad \text{azaz} \quad \frac{a_1}{10} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}.$$



A második lépésben osszuk fel az I_1 intervallumot 10 egyenlő hosszúságú részre. Ekkor
$$\exists a_2 \in \{0,1,2,\ldots,9\} \colon \alpha \in \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}\right] =: I_2, \quad \text{azaz}$$
$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2}.$$
Ha az eljárást folytatjuk, akkor az n-edik lépésben találunk olyan $a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ számot, hogy
$$s_n := \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \le \alpha \le \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} = s_n + \frac{1}{10^n},$$
ahol s_n a sor n-edik részletösszege. Ekkor
$$|\alpha - s_n| = \left|\alpha - \left(\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}\right)\right| \le \frac{1}{10^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$
és így
$$\alpha = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Konvergens sorok zárójelezése.

8. Tétel. *Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.*

Bizonyítás. Legyen $\sum\limits_{n=1} \alpha_n$ a $\sum\limits_{n=1} a_n$ sor (m_n) által meghatározott zárójelezése, és jelölje (σ_n) és (s_n) rendre a két sor részletösszegeiből álló sorozatokat. Ha $\sum\limits_{n=1} a_n$ konvergens, akkor (s_n) konvergens sorozat, de ekkor minden részsorozata is konvergens, és határértéke megegyezik az (s_n) sorozat határértékével.

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}^+$ indexre $\sigma_n = s_{m_n}$ teljesül, így (σ_n) részsorozata az (s_n) sorozatnak. Tehát a (σ_n) sorozat konvergens és $\lim(\sigma_n) = \lim(s_n)$. Ez azt jelenti, hogy a $\sum \alpha_n$ sor konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Abszolút konvergens sorok átrendezése.

10. Tétel. *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ permutációval képzett $\sum a_{p_n}$ átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

Bizonyítás. Legyen

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{és} \quad \sigma_n := \sum_{k=0}^{n} a_{p_k} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

1. lépés. Igazoljuk, hogy a $\sum a_{p_n}$ sor abszolút konvergens. Valóban, mivel $\sum a_n$ abszolút konvergens, ezért minden $n \in \mathbb{N}$-re

$$\sum_{k=0}^{n} |a_{p_k}| = |a_{p_0}| + |a_{p_1}| + \cdots + |a_{p_n}| \le \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| = K < +\infty,$$

azaz a $\sum\limits_{k=0}^{n} |a_{p_k}|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat felülről korlátos, de nyilván monoton növekvő is, következésképpen a $\sum |a_{p_n}|$ sor konvergens. Így a $\sum a_{p_n}$ sor valóban abszolút konvergens.

2. lépés. Azt igazoljuk, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Legyen

$$A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n \qquad \text{és} \qquad B := \sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n.$$

Tudjuk, hogy a $\sum |a_n|$ sor konvergens, így a Cauchy-kritérium szerint

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n \geq n_0\colon |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdot + |a_m| < \varepsilon.$$

Ezért $n = n_0$ mellett, ha $m > n_0$, akkor $\sum\limits_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$.

Adott $\varepsilon > 0$-ra tekintsük az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat, és legyen N_0 olyan index, amire az $a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}$ összeg már tartalmazza ezeket a tagokat. Ilyen N_0 nyilván létezik, és $N_0 \geq n_0$. Legyen $n > N_0$. Ekkor

$$\sigma_n - s_n = \Big(\underbrace{a_{p_0} + a_{p_1} + \cdots + a_{p_{N_0}}} + a_{p_{N_0+1}} + \cdots a_{p_n}\Big) - \Big(\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n_0}} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n\Big)$$

nem tartalmazza az $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ tagokat. Így

$$|\sigma_n - s_n| \leq \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

ahol $m := \max\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$, hiszen $m \geq n > N_0 \geq n_0$. Ez azt jelenti, hogy $(\sigma_n - s_n)$ nullsorozat. Ezért

$$\sigma_n = (\sigma_n - s_n) + s_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + A = A,$$

azaz

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} a_{p_n} = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = A.$$

Sorok téglányszorzatának konvergenciája.

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} a_n$ *és a* $\sum_{n=0} b_n$ *végtelen sorok konvergensek. Ekkor a* $\sum_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

Bizonyítás. A bizonyítás alapja a sorozatoknál tanult műveletek és határátmenet felcserélhetőségére vonatkozó tétel. Jelölje A_n, B_n és T_n rendre a $\sum_{n=0} a_n$, $\sum_{n=0} b_n$ és $\sum_{n=0} t_n$ sorok n-edik részletösszegeit. Ekkor

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} t_k = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{\max\{i,j\}=k} a_i b_j \right) = \sum_{\max\{i,j\}\leq n} a_i b_j = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{n} b_j \right) =$$

$$= A_n B_n \to \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right), \qquad \text{ha } n \to +\infty.$$

Ez azt jelenti, hogy a (T_n) sorozat konvergens, és így a $\sum t_n$ végtelen sor is konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \lim(T_n) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

Abszolút konvergens sorok szorzatai.

2. Tétel (Abszolút konvergens sorok szorzatai). *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} a_n$ *és* $\sum_{n=0} b_n$ *végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor*

1. *a* $\sum_{n=0} t_n$ *téglányszorzat is abszolút konvergens,*
2. *a* $\sum_{n=0} c_n$ *Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,*
3. *az összes* $a_i b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett* $\sum_{n=0} d_n$ *végtelen sor is abszolút konvergens, és*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big)$$

Bizonyítás. Elég a 3. állítást igazolni. Mivel $\sum a_n$ és $\sum b_n$ abszolút konvergensek, ezért

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} A \in \mathbb{R}, \qquad B_N := \sum_{n=0}^{N} |b_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} B \in \mathbb{R}.$$

Tekintsünk egy tetszőleges $\sum d_n$ sort, ahol $d_n = \sum a_i b_j$. Legyen $N \in \mathbb{N}$ tetszőleges. Jelölje I, illetve J a maximális i, illetve j indexet a $d_0, d_1, \ldots, d_N$ összegekben. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{N} |d_n| \le \sum_{\substack{0\le i\le I\\ 0\le j\le J}} |a_i b_j| = \Big(\sum_{n=0}^{I} |a_n|\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{J} |b_n|\Big) \le A \cdot B,$$

és ez azt jelenti, hogy a $\sum |d_n|$ nemnegatív tagú sor konvergens, mert részletösszegei korlátosak. Tehát $\sum d_n$ abszolút konvergens.

A fentiek érvényesek $d_n = t_n$ esetén, így a $\sum t_n$ téglányszorzat is abszolút konvergens, tehát konvergens is. Ekkor az előző tétel szerint $(*)$ teljesül a $\sum t_n$ sorra, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Legyen $\sum t_n^*$ az a sor, amelyet a $\sum t_n$ téglányszorzatban szereplő zárójelek elhagyásával kapunk. Mivel $\sum t_n^*$ is egy lehetséges $\sum d_n$ típusú sor, ezért $\sum t_n^*$ is abszolút konvergens, és így bármely zárójelezésével az összege nem változik, azaz $(*)$ teljesül a $\sum t_n^*$ sorra:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n^* = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Azonban bármely $\sum d_n$ típusú sor megkapható a $\sum t_n^*$ sorból megfelelő átrendezéssel és csoportosítással. Ekkor a sor összege nem változik, tehát $(*)$ teljesül tetszőleges $\sum d_n$ sorra.

Hatványsorok konvergenciasugara.

3. Tétel (Hatványsor konvergenciasugara). *Tetszőleges* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:*

1. *$\exists\, 0 < R < +\infty$, hogy a hatványsor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < R$ pontban abszolút konvergens és $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| > R$ pontban divergens.*

2. *A hatványsor csak az $x = a$ pontban konvergens. Ekkor legyen $R := 0$.*

3. *A hatványsor abszolút konvergens $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén. Ekkor legyen $R := +\infty$.*

R-et a hatványsor **konvergenciasugarának** *nevezzük.*

Bizonyítás. Az állítást elég $a = 0$ esetén igazolni.

Segédtétel. Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor konvergens egy $x_0 \neq 0$ pontban. Ekkor $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x| < |x_0|$ esetén a hatványsor abszolút konvergens az x pontban.

A segédtétel bizonyítása. Mivel a $\sum \alpha_n x_0^n$ végtelen sor konvergens, ezért $\lim(\alpha_n x_0^n) = 0$, így az $(\alpha_n x_0^n)$ sorozat korlátos, azaz

$$\exists M > 0\colon |\alpha_n x_0^n| \leq M < +\infty \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Legyen $x \in \mathbb{R}$ olyan, amire $|x| < |x_0|$ teljesül. Ekkor

$$|\alpha_n x^n| = |\alpha_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n =: Mq^n \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A $\sum |\alpha_n x^n|$ végtelen sor tehát majorálható a $\sum Mq^n$ mértani sorral, ami konvergens, mert $|q| = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$. Így a majoráns kritérium szerint a $\sum |\alpha_n x^n|$ sor is konvergens, tehát a $\sum \alpha_n x^n$ végtelen sor abszolút konvergens.

A tétel bizonyítása. Tekintsük a $\sum \alpha_n x^n$ hatványsort. Ez $x = 0$-ban nyilván konvergens, ezért $\mathrm{KH}\left(\sum \alpha_n x^n\right) \neq \emptyset$, és így

$$\exists \sup \mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} \alpha_n x^n\Big) =: R \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \text{és} \qquad R \geq 0. \tag{1}$$

A következő három eset lehetséges.

1. $\underline{0 < R < +\infty}$. Legyen $|x| < R$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója szerint $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0 < R$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens. Ha $|x| > R$ tetszőleges, akkor az R szám definíciója és a segédtétel szerint a $\sum \alpha_n x^n$ sor divergens.

2. $\underline{R = 0}$. A $\sum \alpha_n x^n$ hatványsor az $x = 0$ pontban nyilván konvergens. Tegyük fel, hogy $x \neq 0$ olyan pont ahol $\sum \alpha_n x^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint a hatványsor konvergens az $\frac{|x|}{2} > 0$ pontban, ami nem lehetséges, mert $R = 0$. A hatványsor tehát csak az $x = 0$ pontban konvergens.

3. $\underline{R = +\infty}$. Legyen $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor a szuprémum definíciója értelmében $\exists x_0 > 0\colon |x| < x_0$ és x_0 a konvergenciahalmaz eleme, azaz $\sum \alpha_n x_0^n$ konvergens. Ekkor a segédtétel szerint $\sum \alpha_n x^n$ abszolút konvergens.

A CauchyHadamard-tétel.

4. Tétel (A Cauchy–Hadamard-tétel.). *Tekintsük a* $\sum\limits_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim\left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0,\ \ \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy $A \geq 0$. Rögzítsük tetszőlegesen az $x \in \mathbb{R}$ számot, és alkalmazzuk a Cauchy-féle gyökkritériumot a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ végtelen számsorra:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\alpha_n(x-a)^n\right|} = \left(\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) \cdot |x-a| = A|x-a|, \quad \text{és így}$$

$$A|x-a| < 1 \implies \text{a sor konvergens}, \qquad A|x-a| > 1 \implies \text{a sor divergens}.$$

1. Ha $\underline{0 < A < +\infty}$, akkor A-val lehet osztani, és ekkor

   $$x \in \left(a - \frac{1}{A},\ a + \frac{1}{A}\right) \implies \text{a sor konv.}, \qquad x \notin \left[a - \frac{1}{A},\ a + \frac{1}{A}\right] \implies \text{a sor div.},$$

   amiből következik, hogy $R = 1/A$.

2. Ha $\underline{A = +\infty}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq a$: $A|x-a| = (+\infty)\cdot|x-a| = +\infty > 1$.

   Ezért a hatványsor az $x = a$ pont kivételével divergens, azaz $R = 0$.

3. Ha $\underline{A = 0}$, akkor $\forall x \in \mathbb{R}$: $A|x-a| = 0 \cdot |x-a| = 0 < 1$.

   Ezért a hatványsor minden $x \in \mathbb{R}$ pontban konvergens, azaz $R = +\infty$.

Függvények határértékének egyértelműsége.

3. Tétel (A határérték egyértelműsége). *Ha az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $a \in \mathcal{D}_f'$ *pontban van határértéke, akkor a definícióban szereplő* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *egyértelműen létezik.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy két különböző $A_1, A_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ elem eleget tesz a definíció feltételeinek. Mivel két különböző $\overline{\mathbb{R}}$-beli elem diszjunkt környezetekkel szétválasztható, ezért

$$\exists \varepsilon > 0\colon\ K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset.$$

A határérték definíciója szerint egy ilyen ε-hoz

$$\exists \delta_1 > 0,\ \forall x \in \dot{K}_{\delta_1}(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\ f(x) \in K_\varepsilon(A_1),$$

$$\exists \delta_2 > 0,\ \forall x \in \dot{K}_{\delta_2}(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\ f(x) \in K_\varepsilon(A_2).$$

Legyen $\delta := \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$. Ekkor

$$\forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f\colon\ f(x) \in K_\varepsilon(A_1) \cap K_\varepsilon(A_2) = \emptyset, \quad \text{de } \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset, \text{ mert } a \in \mathcal{D}_f'.$$

Ellentmondásra jutottunk, és ezzel a határérték egyértelműségét igazoltuk.

A határértékre vonatkozó átviteli elv.

4. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ *és* $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \ \textit{esetén} \ \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ $\lim_a f = A \implies \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \ \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x) \in K_\varepsilon(A)$.
Legyen (x_n) egy, a tételben szereplő sorozat, és $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges rögzített érték.

$$\lim(x_n) = a \quad \implies \quad \delta\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n > n_0 \colon x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel $x_n \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, így $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f$, amiből $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$ teljesül minden $n > n_0$ indexre. Ez azt jelenti, hogy az $\big(f(x_n)\big)$ sorozatnak van határértéke, és $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy

$$\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \ \text{esetén} \ \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Megmutatjuk, hogy $\lim_a f = A$.

Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\lim_a f = A$ egyenlőség nem igaz. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0\text{-hoz } \exists x_\delta \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x_\delta) \notin K_\varepsilon(A).$$

A $\delta = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ választással ez azt jelenti, hogy

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^+\text{-hoz } \exists x_n \in \dot{K}_{1/n}(a) \cap \mathcal{D}_f \colon f(x_n) \notin K_\varepsilon(A).$$

Legyen $x_0 \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ tetszőleges. Az $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ sorozat nyilván a-hoz tart $\big($hiszen $x_n \in K_{1/n}(a)\big)$, de a függvényértékek $\big(f(x_n)\big)$ sorozata nem tart A-hoz $\big($hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)\big)$, ami ellentmond a feltételünknek.

Monoton függvények határértéke.

3. Tétel. *Legyen $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α,β)-n, akkor f-nek $\forall a \in (\alpha,\beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.*

a) *Ha $f \nearrow (\alpha,\beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x < a\Big\}.$$

b) *Ha $f \searrow (\alpha,\beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x < a\Big\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f \nearrow (\alpha,\beta)$-n. A jobb oldali határértékre vonatkozó állítást igazoljuk.

Legyen

$$m := \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\}.$$

Világos, hogy $m \in \mathbb{R}$. Az infimum definíciójából következik, hogy

i) $\forall x \in (\alpha,\beta),\ x > a\colon m \leq f(x)$,

ii) $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_1 \in (\alpha,\beta),\ x_1 > a\colon f(x_1) < m + \varepsilon$.

Így $m \leq f(x_1) \leq m + \varepsilon$. Mivel $f \nearrow (\alpha,\beta)$-n, ezért

$$m \leq f(x) \leq f(x_1) < m + \varepsilon \qquad \big(x \in (a, x_1)\big).$$

A $\delta := x_1 - a > 0$ választással tehát azt mutattuk meg, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in (\alpha,\beta),\ a < x < a + \delta\colon \underbrace{0 \leq f(x) - m < \varepsilon}_{f(x) \in K_\varepsilon(m)}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy f-nek a-ban van jobb oldali határértéke, és az m-mel egyenlő, azaz

$$\lim_{a+0} f = m = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\}.$$

A tétel többi állítása hasonlóan bizonyítható.

Az összetett függvény folytonossága.

9. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ *és* $f \in C\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in C\{a\}$, *azaz az összetett függvény „örökli" a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

Bizonyítás. A feltételek szerint $g(a) \in \mathcal{D}_f$, ezért $g(a) \in \mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f$, azaz $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$. Így valóban beszélhetünk az $f \circ g$ összetett függvényről, és $a \in \mathcal{D}_{f \circ g}$ is igaz.

Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{D}_g$ egy olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = a$. Mivel $g \in C\{a\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(g(x_n)\big) = g(a)$. Jelölje

$$b := g(a) \qquad \text{és} \qquad y_n := g(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor $(y_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f$ és $\lim(y_n) = b$. Mivel $f \in C\{b\}$, így a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $\lim\big(f(y_n)\big) = f(b)$. Ugyanakkor

$$f(b) = f\big(g(a)\big) = (f \circ g)(a) \qquad \text{és} \qquad f(y_n) = f\big(g(x_n)\big) = (f \circ g)(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Azt igazoltuk tehát, hogy $\forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_{f \circ g}$, $\lim(x_n) = a$ sorozat esetén igaz, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \big(f(y_n)\big) = f(b) = (f \circ g)(a).$$

Ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f \circ g \in C\{a\}$.