

## 8. LDU-felbontás.

### 8. LDU-felbontás.

- a) Az LDU-felbontás fogalma, előállítása LU-felbontásból. Mutassa be az elemenkénti (közvetlen) meghatározásra szolgáló LDU-algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt.

#### Definíció: LDU-felbontás

Az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix LDU-felbontásának nevezzük az  $A = L \cdot D \cdot U$  szorzatot, ha  $L \in \mathcal{L}_1$  alsó háromszögmátrix,  $D$  diagonális mátrix és  $U \in \mathcal{U}_1$  felső háromszögmátrix.

#### Előállítás LU-felbontásból:

Az  $A = L \cdot \tilde{U}$  felbontásban  $L \in \mathcal{L}_1$  jó,  $D = \text{diag}(\tilde{u}_{11}, \dots, \tilde{u}_{nn})$ . A keresett  $U \in \mathcal{U}_1$  mátrixot úgy kapjuk, hogy  $U = D^{-1}\tilde{U}$ , azaz minden  $i$ -re  $\tilde{U}$   $i$ . sorát  $\tilde{u}_{ii}$ -vel osztjuk. Ekkor

$$A = L\tilde{U} = LD \cdot \underbrace{(D^{-1}\tilde{U})}_U = LDU.$$

#### Példa: LDU-felbontás LU-felbontásból

Készítsük el példamátrixunk LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Korábban láttuk, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot \tilde{U}.$$

Legyen  $D := \text{diag}(2, 5, -1)$ ,  $U := D^{-1}\tilde{U}$ . Tehát  $A = LDU$ , ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Balról  $D^{-1}$ -zel úgy szorzunk, hogy  $D$  megfelelő átlóbeli elemeivel osztjuk a megfelelő sorokat.  $\square$

### **Tétel:** az $LDU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$ ,  $D$  és  $U$  mátrixok elemeit jó sorrendben (lásd  $LU$ -felbontás) számolva a jobboldalon mindig ismert értékek lesznek:

$$\begin{aligned} i < j \text{ (felső)} & \quad u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right), \\ i = j \text{ (diag)} & \quad d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{ki}, \\ i > j \text{ (alsó)} & \quad l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Bizonyítás

Az  $A$  elemeit a szorzás szerint írhatjuk fel:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

## 2. Diagonális elemek $D$

A főátlón  $i = j = k$ :

$$a_{kk} = \sum_{p=1}^k l_{kp} d_{pp} u_{pk}.$$

Mivel  $l_{kk} = 1$  és  $u_{kk} = 1$ , a  $p = k$  tag külön kiemelhető:

$$a_{kk} = \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} d_{pp} u_{pk} + d_{kk}.$$

Innen az  $d_{kk}$  képlete:

$$d_{kk} = a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} d_{pp} u_{pk}.$$

## 3. Alsó háromszög elemei $L$ ( $i > j$ )

Az  $a_{ij}$  elem  $i > j$  esetén:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

Mivel  $u_{jj} = 1$ , a  $k = j$  tagot külön írjuk:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} + l_{ij} d_{jj}.$$

Innen adódik az  $l_{ij}$  képlete:

$$l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} \right), \quad i > j.$$

#### 4. Felső háromszög elemei $U$ ( $i < j$ )

Az  $a_{ij}$  elem  $i < j$  esetén:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

Mivel  $l_{ii} = 1$ , a  $k = i$  tagot külön írjuk:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} + d_{ii} u_{ij}.$$

Innen az  $u_{ij}$  képlete:

$$u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} \right), \quad i < j.$$

**LDU / LU felbontás műveletigénye:**

$$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

Ha megkérdezik:

**Tétel:** Szimmetrikus mátrix  $LDU$ -felbontása

Ha  $A$  szimmetrikus mátrix, akkor az  $LDU$ -felbontásában  $U = L^T$ .

### Következmény:

- Szimmetrikus mátrix esetén az  $LDU$ -felbontás megtartja a szimmetriát. A teljes mátrix helyett elég pl. az alsó háromszög részét tárolni. Az  $A = LDU$  felbontás valójában  $LDL^\top$ -felbontás lesz, ahol szintén elég  $L$ ,  $D$ -t tárolni. Ezzel a tárolás- és műveletigény kb. a felére csökken ( $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ ).
- Szimmetrikus mátrix esetén az  $LDL^\top$ -felbontás GE-val közvetlenül is elkészíthető.

### **Tétel:** az $LDL^\top$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$  és  $U$  mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i = j \text{ (diag)} \quad & d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{ik}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{jk} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.