

**6. Az LU-felbontás direkt módon.**

- a) Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Egy mátrix LU-felbontásán az  $A = LU$  felbontást értjük ahol L egy alsó háromszögmátrix melynek főátlójában 1-esek állnak, míg U egy felső háromszög mátrix.

Módszer: közvetlenül mátrixszorzás alapján.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

**Sorfolytonosan:** U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} l_{21} \cdot 2 = -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} = 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} = -2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} l_{21} = -2 \\ u_{22} = 5 \\ u_{23} = -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{array}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{array}{ll} l_{31} \cdot 2 = 6 & l_{31} = 3 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} = -5 & l_{32} = \frac{-5}{5} = -1 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} = 4 & u_{33} = 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{array}$$

### Tétel: az $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$  és  $U$  mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \leq j \text{ (felső)} \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, minden ismert az egész jobb oldal.

### Tétel: Az $LU$ -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$