

3. Gauss-elimináció

3. A Gauss-elimináció.

- a) Vázolja a Gauss-elimináció alapötletét LER megoldására, vezesse le az algoritmus képleteit. Mutassa be a Gauss-elimináció további alkalmazásait azonos mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldására, determináns kiszámítására és inverzmátrix meghatározására.

Legyen $a_{in+1} := b_i$, azaz $[A|b]$ a tárolási forma.

GE := Gauss-elimináció.

$$A^{(0)} := \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1n+1} = b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2n+1} = b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{nn+1} = b_n \end{array} \right]$$

Célunk: A LER-t egyszerűbb alakra hozni:

- ① balról jobbra: a főátló alatt kinullázzuk az elemeket, „előre”, GE
- ② jobbról balra: a főátló fölött nullázunk, „vissza”, visszahelyettesítés

1.lépés

Az 1. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{11}^{(0)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = 2, 3, \dots, n$) kivonjuk az 1. egyenlet $\left(\frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{i1}^{(0)}$ kinullázódjon.
(\rightsquigarrow elimináció, kiküszöbölés)

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{nn+1}^{(1)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \cdot a_{1j}^{(0)} \quad (i = 2, \dots, n; j = 2, \dots, n, n+1).$$

2.lépés

Az 1. és 2. egyenletet változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{22}^{(1)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = 3, 4, \dots, n$) kivonjuk a 2. egyenlet $\left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{i2}^{(1)}$ kinullázódjon.

$$A^{(2)} = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & a_{3n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & a_{nn+1}^{(2)} \end{array} \right],$$

ahol

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)} \quad (i = 3, \dots, n; j = 3, \dots, n, n+1).$$

k.lépés

Az $1., 2., \dots, k.$ egyenleteket változatlanul hagyjuk.

Ha $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, akkor az i -edik egyenletből ($i = k+1, \dots, n$) kivonjuk a k -adik egyenlet $\left(\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}\right)$ -szeresét: hogy $a_{ik}^{(k-1)}$ kinullázódjon. Ezt a lépést láttuk, amikor a 2. lépésekben az 1. lépés eredményét felhasználtuk. Ha 2 helyére k -t írunk, akkor megkapjuk az általános képleteket.

Tétel: A Gauss-elimináció általános lépése

Ha $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$, akkor a k . lépés képletei

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \cdot a_{kj}^{(k-1)} \quad \begin{array}{l} k = 1, \dots, n-1; \\ i = k+1, \dots, n; \\ j = k+1, \dots, n, n+1. \end{array}$$

Igy $n-1$ lépés után felső háromszögmátrix alakú LER-t kapunk:

$$A^{(n-1)} = \left[\begin{array}{cccc|cc} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n-1}^{(0)} & a_{1n}^{(0)} & a_{1n+1}^{(0)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n-1}^{(1)} & a_{2n}^{(1)} & a_{2n+1}^{(1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & a_{n-1n-1}^{(n-2)} & a_{n-1n}^{(n-2)} & a_{n-1n+1}^{(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} & a_{nn+1}^{(n-1)} \end{array} \right].$$

Ezután visszafelé haladva: az aktuális egyenletet osztjuk a főátlóbeli elemmel, majd a főátló fölött kinullázzuk az elemeket, az eddigiekkel analóg „sorműveletek” alkalmazásával.

Végül $[I|x]$ alakot nyerünk. ($I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egységmátrix.)

Az algoritmus második része („jobbról-balra”), a felső háromszög alakú LER megoldása képlettel is kifejezhető. Figyeljük meg, hogy a felső-háromszögmátrixú alaknál soronként azonos felső indexek vannak.

A visszahelyettesítés

$$x_n = \frac{a_{nn+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}^{(i-1)}} \left(a_{in+1}^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} \cdot x_j \right) \quad (i = n-1, \dots, 1).$$

Fogsz egy mátrixot meg egy b oszlop vektort, bemutatod rajta a LER megoldást GE-vel, majd az A mátrixra csinálsz egy inverz számítást közbe meg meghatározod a determinánsát.