10. A QR-felbontás Gram-Schmidt ortogonációval.

10. A QR-felbontás Gram–Schmidt ortogonalizációval.

a) Definiálja a QR-felbontást és vezesse le az előállítására alkalmas Gram–Schmidt ortogonalizációs eljárást. Milyen feltétel garantálja, hogy az algoritmus nem akad el? Igazolja az ortogonális mátrixok szorzatára vonatkozó tételt.

Definíció: QR-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix QR-felbontásának nevezzük a $Q \cdot R$ szorzatot, ha $A = QR$, ahol $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrix, $R \in \mathcal{U}$ pedig felső háromszögmátrix.

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Definíció: Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

Adott az $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ lineárisan független vektorrendszer.

1. $r_{11} := \|a_1\|_2$,
2. $q_1 := \dfrac{1}{r_{11}} a_1$ („lenormáljuk”).

   A k-adik lépésben ($k = 2, \dots, n$):
3. $r_{jk} := \langle a_k, q_j \rangle \quad (j = 1, \dots, k-1)$,
4. $s_k := a_k - \sum\limits_{j=1}^{k-1} r_{jk} \cdot q_j$,
5. $r_{kk} := \|s_k\|_2$ (s_k segédvektor hossza),
6. $q_k := \dfrac{1}{r_{kk}} s_k$ („lenormáljuk”).

Az így nyert $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}^n$ vektorrendszer ortonormált.

Gram–Schmidt ortogonalizációval normálással:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R.$$

1. lépés: $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$-ből meghatározzuk r_{11}, q_1-et:

$$r_{11} = \|a_1\|_2 = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$q_1 = \frac{1}{r_{11}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. lépés:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ 0 & r_{22} \end{bmatrix} = Q \cdot R$$

$a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$-ből meghatározzuk r_{12}, r_{22}, q_2-t:

$$r_{12} = \langle a_2, q_1 \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} (2 \cdot 1 + 1 \cdot 2) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$s_2 = a_2 - r_{12} q_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 - 4 \\ 5 - 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = \|s_2\|_2 = \left\| \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$q_2 = \frac{1}{r_{22}} s_2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tehát a Q és R mátrixok a következők:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Milyen feltétel garantálja, hogy a Gram–Schmidt nem akad el?

Az A mátrix oszlopvektorai legyenek lineárisan függetlenek. det(A) != 0

A Gram–Schmidt-ben minden lépésben szerepel:

$$r_{kk} = \|s_k\|_2$$

ahol

$$s_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} r_{jk} q_j.$$

- Ha az oszlopok **lineárisan függetlenek**, akkor
  $s_k \neq 0 \Rightarrow r_{kk} \neq 0 \Rightarrow$ **le lehet normálni**
- Ha **nem** azok, akkor
  $s_k = 0 \Rightarrow r_{kk} = 0 \Rightarrow$ **0-val kellene osztani** → az algoritmus **elakad**

Állítás: ortogonális mátrixok szorzata

Ha $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonális mátrixok, akkor a szorzatuk, $Q_1 Q_2$ is ortogonális.

Biz.: Tudjuk, hogy $Q_1^\top Q_1 = I$ és $Q_2^\top Q_2 = I$.

Kell, hogy $Q_1 Q_2$ is ortogonális.

Vizsgáljuk:

$$(Q_1 Q_2)^\top (Q_1 Q_2) = Q_2^\top \underbrace{Q_1^\top Q_1}_{I} Q_2 = Q_2^\top Q_2 = I.$$

Definíció: ortogonális mátrix

Egy $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *ortogonális*, ha az inverze a transzponáltja, azaz

$$Q^\top Q = I.$$

Megj.: Ekkor $QQ^\top = I$ is teljesül. $(Q^{-1} = Q^\top)$