

8. LDU-felbontás.

8. LDU-felbontás.

- a) Az LDU-felbontás fogalma, előállítása LU-felbontásból. Mutassa be az elemenkénti (közvetlen) meghatározásra szolgáló LDU-algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt.

Definíció: LDU-felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix LDU-felbontásának nevezük az $A = L \cdot D \cdot U$ szorzatot, ha $L \in \mathcal{L}_1$ alsó háromszögmátrix, D diagonális mátrix és $U \in \mathcal{U}_1$ felső háromszögmátrix.

Előállítás LU-felbontásból:

Az $A = L \cdot \tilde{U}$ felbontásban $L \in \mathcal{L}_1$ jó, $D = \text{diag}(\tilde{u}_{11}, \dots, \tilde{u}_{nn})$. A keresett $U \in \mathcal{U}_1$ mátrixot úgy kapjuk, hogy $U = D^{-1}\tilde{U}$, azaz minden i -re \tilde{U} i . sorát \tilde{u}_{ii} -vel osztjuk. Ekkor

$$A = L\tilde{U} = LD \cdot \underbrace{(D^{-1}\tilde{U})}_U = LDU.$$

Példa: LDU-felbontás LU-felbontásból

Készítsük el példamátrixunk LDU-felbontását az LU-felbontás segítségével.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Korábban láttuk, hogy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L \cdot \tilde{U}.$$

Legyen $D := \text{diag}(2, 5, -1)$, $U := D^{-1}\tilde{U}$. Tehát $A = LDU$, ahol

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Balról D^{-1} -zel úgy szorzunk, hogy D megfelelő átlóbeli elemeivel osztjuk a megfelelő sorokat. \square

Tétel: az LDU -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L , D és U mátrixok elemeit jó sorrendben (lásd LU -felbontás) számolva a jobboldalon minden ismert értékek lesznek:

$$\begin{array}{ll} i < j \text{ (felső)} & u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right), \\ i = j \text{ (diag)} & d_{ii} = a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{ki}, \\ i > j \text{ (alsó)} & l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot u_{kj} \right). \end{array}$$

Bizonyítás

Az A elemeit a szorzás szerint írhatjuk fel:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

2. Diagonális elemek D

A főátlón $i = j = k$:

$$a_{kk} = \sum_{p=1}^k l_{kp} d_{pp} u_{pk}.$$

Mivel $l_{kk} = 1$ és $u_{kk} = 1$, a $p = k$ tag külön kiemelhető:

$$a_{kk} = \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} d_{pp} u_{pk} + d_{kk}.$$

Innen az d_{kk} képlete:

$$d_{kk} = a_{kk} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{kp} d_{pp} u_{pk}.$$

3. Alsó háromszög elemei L ($i > j$)

Az a_{ij} elem $i > j$ esetén:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^j l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

Mivel $u_{jj} = 1$, a $k = j$ tagot külön írjuk:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} + l_{ij} d_{jj}.$$

Innen adódik az l_{ij} képlete:

$$l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} \right), \quad i > j.$$

4. Felső háromszög elemei U ($i < j$)

Az a_{ij} elem $i < j$ esetén:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^i l_{ik} d_{kk} u_{kj}.$$

Mivel $l_{ii} = 1$, a $k = i$ tagot külön írjuk:

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} + d_{ii} u_{ij}.$$

Innen az u_{ij} képlete:

$$u_{ij} = \frac{1}{d_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} d_{kk} u_{kj} \right), \quad i < j.$$

LDU / LU felbontás műveletigénye:

$$\frac{2}{3}n^3 + O(n^2)$$

Ha megkérdezik:

Tétel: Szimmetrikus mátrix LDU-felbontása

Ha A szimmetrikus mátrix, akkor az LDU-felbontásában $U = L^\top$.

Következmény:

- Szimmetrikus mátrix esetén az LDU -felbontás megtartja a szimmetriát. A teljes mátrix helyett elég pl. az alsó háromszög részét tárolni. Az $A = LDU$ felbontás valójában LDL^\top -felbontás lesz, ahol szintén elég L, D -t tárolni. Ezzel a tárolás- és műveletigény kb. a felére csökken ($\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$).
- Szimmetrikus mátrix esetén az LDL^\top -felbontás GE-val közvetlenül is elkészíthető.

Tétel: az LDL^\top -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i = j & (\text{diag}) & d_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{ik}, \\ i > j & (\text{alsó}) & l_{ij} &= \frac{1}{d_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot d_{kk} \cdot l_{jk} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindenkor ismert az egész jobb oldal.