# 25. Nemlineáris egyenletek megoldása I.

**25.** Nemlineáris egyenletek megoldása I.

**a)** Ismertesse a nemlineáris egyenletek megoldásának feladatát. Mutassa be a megoldás létezését biztosító állításokat, a Bolzano-tételt (bizonyítás nélkül), és igazolja a Brouwer-féle fixpont-tételt. Kontrakció fogalma $[a;b]$ intervallumon és a Banach-féle fixponttétel (bizonyítás nélkül).

## Feladat

Keressük meg egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény gyökét, avagy zérushelyét. ($\exists$?, 1, több?)

$$f(x^*) = 0, \qquad x^* =?$$

Ekvivalens módon átfogalmazható (általában): keressük meg egy $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nemlineáris függvény fixpontját.

$$x^* = \varphi(x^*), \qquad x^* =?$$

**Tétel:** gyök egyértelmű létezéséről

1. Ha $f \in C[a;b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$,
2. valamint $f \in D(a;b)$ és $f' > 0$ (vagy $< 0$),

akkor $\exists!\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

**Tétel:** Bolzano-tétel

Ha $f \in C[a;b]$ és $f(a) \cdot f(b) < 0$, akkor $\exists\, x^* \in (a;b) : f(x^*) = 0$.

**Megjegyzés:**

- $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $[a;b]$ zárt intervallum,
- $C[a;b]$: az $[a;b]$ (zárt) intervallumon folytonos függvények halmaza,
- $f(a) \cdot f(b) < 0$: $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek
- van gyök az $(a;b)$ (nyílt) intervallumban

**Tétel:** Brouwer-féle fixponttétel

1. Ha $\varphi\colon [a;b] \to [a;b]$
2. és $\varphi \in C[a;b]$,

akkor $\exists\, x^* \in [a;b] : \varphi(x^*) = x^*$.

**Biz.:** Definiáljuk a $g(x) = x - \varphi(x)$ függvényt, majd alkalmazzuk a Bolzano-tételt.

**Biz. folyt.:**

1. Mivel $\varphi(a), \varphi(b) \in [a;b] \quad \Rightarrow$

$$g(a) = a - \varphi(a) \leq 0, \quad g(b) = b - \varphi(b) \geq 0$$
$$\Rightarrow \quad g(a) \cdot g(b) \leq 0.$$

2. Ha $g(a) \cdot g(b) = 0$, akkor $g(a) = 0$ vagy $g(b) = 0$.
   Ez azt jelenti, hogy első esetben $a$, második esetben $b$ fixpont.

3. Ha $g(a) \cdot g(b) < 0$, akkor a Bolzano-tétel miatt van $g$-nek gyöke $(a;b)$-ben, azaz

$$\exists\, x^* \in (a;b) : g(x^*) = x^* - \varphi(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x^*) = x^*$$

## 63. Írja le a fixponttételt az $[a;b]$ intervallumra!

Legyen $\varphi : [a;b] \to [a;b]$ kontrakció, ekkor

1) $\exists !\ x^* \in [a;b] : \ x^* = \varphi(x^*)$

2) $\forall\, x_0 \in [a;b] : \ x_{k+1} := \varphi(x_k) \ (k \in \mathbb{N}_0)$ iterációs sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k) = x^*$.

3) Hibabecslése: $|x_k - x^*| \leq \dfrac{q^k}{1-q}\, |x_1 - x_0|$.

**Tétel:** Banach-féle fixponttétel $[a; b]$-re

Ha a $\varphi\colon [a; b] \to [a; b]$ függvény kontrakció $[a; b]$-n $q$ kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists!\, x^* \in [a; b] : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. $\forall\, x_0 \in [a; b]$ esetén az $x_{k+1} = \varphi(x_k),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$,
3. továbbá a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $|x_k - x^*| \leq q^k \cdot |x_0 - x^*| \leq q^k(b - a)$,
   - $|x_k - x^*| \leq \dfrac{q^k}{1 - q} \cdot |x_1 - x_0|$.