

11. A Householder-transzformáció I.

- a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.

Definíció: Householder-mátrix

A $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^T,$$

ahol $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$.

Geometriai tartalom

A Householder-transzformáció geometriailag tükrözés egy olyan hipersíkra, amelynek normálvektora v .

Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- ❶ $H^T = H$ (szimmetrikus),
- ❷ $H^2 = I$, azaz $H^{-1} = H$ (ortogonális),
- ❸ $H(v) \cdot v = -v$,
- ❹ $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$.

Biz.: Használjuk ki, hogy $v^T v = 1$ és $v^T y = 0$.

- ❶ $(I - 2vv^T)^T = I^T - 2(v^T)^T v^T = I - 2vv^T$,
- ❷ $(I - 2vv^T)(I - 2vv^T) = I - 2vv^T - 2vv^T + 4v \underbrace{v^T v}_{=1} v^T = I$,
- ❸ $(I - 2vv^T)v = v - 2v \underbrace{v^T v}_{=1} = v - 2v = -v$,
- ❹ $(I - 2vv^T)y = y - 2v \underbrace{v^T y}_{=0} = y$. □

- A $H(v)$ transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$ -re $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v \underbrace{(v^\top x)}_{\in \mathbb{R}}$.
- $y \in \mathbb{R}^n$ -re $y^\top H(v) = y^\top (I - 2vv^\top) = y^\top - 2 \underbrace{(y^\top v)}_{\in \mathbb{R}} v^\top$.

(**Mátrixok esete:** soronként kell alkalmazni a transzformációt, mondhatni megfelelő számú oszlopvektorra bontjuk????)

Tétel: A Householder-trf. műveletigénye LER-re

A LER megoldásának műveletigénye
Householder-transzformációkkal:

$$\frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint $2(n - 1)$ darab négyzetgyökvonásra is szükség van.

Tétel: A Householder-trf. műveletigénye QR-felbontásra

A QR-felbontás előállításának műveletigénye
Householder-transzformációkkal:

$$\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint $2(n - 1)$ darab négyzetgyökvonásra is szükség van.