

14. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.

14. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.

- a) Definiálja a mátrixnormát és indukált mátrixnormát. Definiálja az illeszkedés fogalmát és igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához. Igazolja a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.

30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt mátrixnormának nevezzük, ha

- 1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- 2) $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
- 3) $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- 4) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$,
- 5) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Legyen $\|\cdot\|_v$ tetszőleges vektornorma, ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$

menyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?

A $\|\cdot\|$ mátrixnorma és a $\|\cdot\|_v$ vektornorma illeszkedik, ha $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} \implies \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} \leq \|\mathbf{A}\| \implies \|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

A $\|\cdot\|_p$ ($p = 1, 2, \infty$) vektornormák által indukált mátrixnormák:

$$\bullet \quad \|\mathbf{A}\|_{\infty} = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

(d) a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma a sornorma, $\|A\|_\infty$.

Megoldás:

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty}$$

$$\begin{aligned}\|A\mathbf{x}\|_\infty &= \max_{i=1}^n |(A\mathbf{x})_i| = \max_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \\ &\leq \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Megmutatjuk, hogy ez a maximum felvétetik, tehát az egyenlőtlenségben \leq helyett $=$ áll.

Tegyük fel, hogy valamely p -re ($1 \leq p \leq n$)

$$\sum_{j=1}^n |a_{pj}| = \max_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

azaz az $\|A\|_\infty$ a p -edik sorban vétetik fel, és tekintsük azt az $\tilde{\mathbf{x}}$ vektort, melyre

$\tilde{x}_j = \text{sgn}(a_{pj})$ ($j = 1, \dots, n$). Ekkor $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 1$ és

$$\|A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = \max_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sgn}(a_{pj}) \right| = \sum_{j=1}^n |a_{pj}|,$$

ugyanis

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{ij} \text{sgn}(a_{pj}) \right| \begin{cases} \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} \text{sgn}(a_{pj})| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n |a_{pj}|, & (i \neq p), \\ = \sum_{j=1}^n |a_{pj}|, & (i = p). \end{cases}$$