Analízis 1

Mit ért azon, hogy egy számsorozat konvergens?

Egy sorozatot akkor fogunk konvergensnek nevezni, ha a tagjai egyetlen szám körül sűrűsödnek.

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat* **konvergens**, *ha*

$$(*) \qquad \exists A \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n > n_0 \text{ indexre } |a_n - A| < \varepsilon.$$

Ekkor az A számot a sorozat ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim(a_n) := A, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad a_n \to A \ (n \to +\infty).$$

Az (a_n) sorozatot **divergensnek** *nevezzük, ha nem konvergens*

Mit ért azon, hogy egy számsorozat divergens?

Ha egy sorozat **nem konvergens**, akkor a fenti állítás **nem igaz**. A tagadás így néz ki:

$$\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad \forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \exists n > n_0, \text{ hogy } |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy számsorozat divergens!

3. Ha egy sorozat divergens, akkor $(*)$ nem teljesül, amit pozitív állítás formájában azt jelenti, hogy

$$\forall A \in \mathbb{R}\text{-hez } \exists \varepsilon > 0, \ \forall n_0 \in \mathbb{N}\text{-hez } \exists n > n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon.$$

Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?

3. Tétel. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak +∞ a határértéke?

Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak −∞ a határértéke?

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (a_n) *sorozat*

- **határértéke** $+\infty$ (*vagy a sorozat* $+\infty$**-hez tart**), *ha*

$$\forall P > 0\text{-}hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n > P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad a_n \to +\infty, \quad ha \quad n \to +\infty.$$

- **határértéke** $-\infty$ (*vagy a sorozat* $-\infty$**-hez tart**), *ha*

$$\forall P < 0\text{-}hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n < P.$$

Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim(a_n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad a_n \to -\infty, \quad ha \quad n \to +\infty.$$

Környezetekkel fogalmazza meg azt, hogy az (xn) valós számsorozatnak (tágabb értelemben) van határértéke!

Környezetekkel a konvergencia, illetve a $\pm\infty$-hez tartás fogalmakat egységes formában is megadhatjuk.

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (a_n) *sorozatnak* **van határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n \in K_\varepsilon(A).$$

Hogyan definiálja egy sorozat részsorozatát?

4. Definíció. *Legyen* $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *egy valós sorozat és* $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy szigorúan monoton növekvő sorozat (röviden:* ν *egy* **indexsorozat**). *Ekkor az* $a \circ \nu$ *függvény is sorozat, amelyet az* (a_n) *sorozat* ν *indexsorozat által meghatározott* **részsorozatának** *nevezünk. Az* $a \circ \nu$ *sorozat* n*-edik tagja:*

$$\big(a \circ \nu\big)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$a \circ \nu = (a_{\nu_n}).$$