22. A Gauss-Seidel relaxációs módszer

22. A Gauss–Seidel relaxációs módszer.

a) Vezesse le a Gauss–Seidel-iteráció relaxált változatának vektoros és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.

Induljunk a Gauss–Seidel-iteráció következő alakjából:

$$\begin{aligned} (L+D)\cdot x &= -U\cdot x + b && /\cdot \omega \\ D\cdot x &= D\cdot x && /\cdot (1-\omega) \end{aligned}$$

A kettő súlyozott összege:

$$(D+\omega L)\cdot x = [(1-\omega)D - \omega U]\cdot x + \omega b$$

$$x = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]\cdot x + (D+\omega L)^{-1}\omega b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: relaxált Gauss–Seidel-iteráció ω paraméterrel – $S(\omega)$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]}_{B_{S(\omega)}}\cdot x^{(k)} + \underbrace{\omega(D+\omega L)^{-1}b}_{c_{S(\omega)}}$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben" számolható.)

Állítás: $S(\omega)$ komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} + \omega \cdot x_{i,S}^{(k+1)},$$

ahol $x_{i,S}^{(k+1)}$ a hagyományos Seidel-módszer ($S = S(1)$) által adott, azaz

$$x_{i,S}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

Minden k. lépés az $i = 1, 2, \ldots, n$ sorrendben számolandó.

Biz.: Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$\begin{aligned}
(D+\omega L)x^{(k+1)} &= (1-\omega)Dx^{(k)} - \omega U x^{(k)} + \omega b \\
Dx^{(k+1)} &= (1-\omega)Dx^{(k)} - \omega L x^{(k+1)} - \omega U x^{(k)} + \omega b \\
x^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} - \omega \underbrace{D^{-1}\left(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b\right)}_{\text{Lásd } S(1)\text{-nél.}}
\end{aligned}$$

A koordinátánkénti alakja:

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} - \frac{\omega}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right).$$

Megj.: Vigyázat! $x^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x^{(k)} + \omega \cdot x_S^{(k+1)}$ nem igaz (tehát az egész vektorra); csak komponensenként.

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$
\begin{aligned}
(D+\omega L)\,x^{(k+1)} &= ((1-\omega)D-\omega U)\cdot x^{(k)}+\omega b= \\
&= D\,x^{(k)}+\omega(\underbrace{(-D-U)}_{L-A})\cdot x^{(k)}+\omega b= \\
&= D\,x^{(k)}+\omega L x^{(k)}+\omega\underbrace{\left(-Ax^{(k)}+b\right)}_{r^{(k)}}=(D+\omega L)\,x^{(k)}+\omega r^{(k)}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)}=x^{(k)}+\omega(D+\omega L)^{-1}r^{(k)}$$

Vezessük be az $s^{(k)}:=\omega(D+\omega L)^{-1}r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja: $x^{(k+1)}=x^{(k)}+s^{(k)}$.
Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)}=b-Ax^{(k+1)}=b-A(x^{(k)}+s^{(k)})=r^{(k)}-As^{(k)}.$$

Algoritmus: relaxált Gauss–Seidel-iteráció $S(\omega)$

$$r^{(0)}:=b-Ax^{(0)}$$

$k=1,\dots,$ leállásig

$$s^{(k)}:=\omega(D+\omega L)^{-1}r^{(k)} \ \text{ helyett}$$

$$(D+\omega L)\,s^{(k)}=\omega r^{(k)} \ \text{ LER mo.}$$

$$x^{(k+1)}:=x^{(k)}+s^{(k)}$$

$$r^{(k+1)}:=r^{(k)}-As^{(k)}$$