- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

1. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének a határértéke). *Tegyük fel, hogy a* $\sum \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ *pontban létezik a* $\lim_{x\to b} f(x)$ *határérték, és*

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(b-a)^n.$$

- Mit tud mondani monoton függvények határértékéről?

3. Tétel. *Legyen* $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ *tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az* f *függvény monoton* (α,β)*-n, akkor* f*-nek* $\forall a \in (\alpha,\beta)$ *pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.*

a) *Ha* $f \nearrow (\alpha,\beta)$*-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x < a\Big\}.$$

b) *Ha* $f \searrow (\alpha,\beta)$*-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha,\beta),\ x < a\Big\}.$$

- Definiálja egy f ∈ R → R függvény pontbeli folytonosságát!

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény* **folytonos az** $\boldsymbol{a \in \mathcal{D}_f}$ **pontban**, *ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$.

- Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

4. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$, azaz izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$,*
2. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, azaz torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \quad \text{és} \quad \lim_a f = f(a).$$

- Írja le a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet!

5. Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

- Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

7. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága). *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a hatványsor teljes konvergenciahalmazán.*

- Milyen tételt ismer a folytonos függvények előjeltartásáról?

8. Tétel (Előjeltartás). *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Ekkor*

$$\exists K(a),\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap K(a) \colon f(x) > 0,$$

azaz $f(a)$ előjelét egy alkalmas $K(a)$ környezetben felvett függvényértékek is öröklik.

- Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt!

9. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli" a belső- és a külső függvény folytonosságát.*