18. Iterációs módszerek konvergenciája.

18. Iterációs módszerek konvergenciája.

a) Vázolja LER iterációs módszerrel történő megoldásának alapötletét, vesse össze a direkt módszerekkel. Kontrakció fogalma $\mathbb{R}^n$-en. Igazolja az elégséges feltételt a konvergenciára. Igazolja a konvergencia szükséges és elégségséges feltételét.

$$Ax = b, \qquad A = P + Q, \qquad (P+Q)x = b,$$

átrendezve:

$$Px = -Qx + b \quad \Longleftrightarrow \quad x = -P^{-1}Qx + P^{-1}b,$$

iterációs alakban írva:

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-P^{-1}Q}_{B} \cdot x^{(k)} + \underbrace{P^{-1}b}_{c}.$$

42. Írja le a kontrakció fogalmát $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény esetén!

A φ függvény kontrakció, ha $\exists\, q : 0 \le q < 1$

$$\|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})\| \le q \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

Ha $\|B\| < 1$, az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció konvergens minden kezdőértékre.

(c) Legyen $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, vizsgáljuk meg két m távolságra lévő tag különbségét! A háromszög-egyenlőtlenséget és a mértani sor összegképletét is felhasználva:

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\right\| &= \left\|(x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}) + \ldots + (x^{(k+1)} - x^{(k)})\right\| \leq \\
&\leq \left\|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\right\| + \ldots + \left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\| \leq \\
&\leq (q^{m+k-1} + \ldots + q^k) \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| = \\
&= q^k \cdot (q^{m-1} + \ldots + 1) \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| < \\
&< \frac{q^k}{1-q} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|.
\end{aligned}$$

Mivel $k \to \infty$ esetén $(q^k) \to 0$, ezért $(x^{(k)})$ Cauchy-sorozat,

És ugye a Cauchy-sorozat konvergens

Tétel: iteráció konvergenciájának ekvivalens feltétele

Az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció akkor és csak akkor konvergens minden kezdőértékre, ha

$$\varrho(B) < 1.$$

Lemma: spektrálsugár és az indukált normák kapcsolata

$$\varrho(B) = \inf \left\{ \|B\| \ : \ \|.\| \text{ indukált mátrixnorma} \right\},$$

azaz $\forall \varepsilon > 0 : \exists$ indukált $\|.\| : \|B\| < \varrho(B) + \varepsilon$.

Biz.:

- $\Leftarrow$: Az előző Lemma alapján trivi.
- $\Rightarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy $\varrho(B) \geq 1$, azaz $\exists\, |\lambda| \geq 1$ sajátérték, és legyen $x^{(0)}$ olyan, hogy $x^{(0)} - x^*(\neq 0)$ kezdeti hiba a B λ-hoz tartozó sajátvektora legyen.

Ekkor:

$$
\begin{gathered}
B(x^{(0)} - x^*) = \lambda(x^{(0)} - x^*) \\
B^2(x^{(0)} - x^*) = \lambda^2(x^{(0)} - x^*) \quad \Rightarrow \dots \\
B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*) \; (k \in \mathbb{N}) \\
x^{(k)} - x^* = (Bx^{(k-1)} + c) - (Bx^* + c) = B(x^{(k-1)} - x^*) = \\
= B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*) \\
\left\| x^{(k)} - x^* \right\| = |\lambda|^k \cdot \underbrace{\left\| x^{(0)} - x^* \right\|}_{\text{konst.}} \not\to 0 \quad (k \to \infty)
\end{gathered}
$$

Ellentmondásra jutottunk. $\square$