13. Mátrixnormák és tulajdonságaik I.

13. Mátrixnormák és tulajdonságaik I.

a) Definiálja a vektornormát, mátrixnormát és indukált mátrixnormát. Igazolja, hogy az indukált mátrixnorma eleget tesz a mátrixnorma tulajdonságainak. Adja meg az 1-es, 2-es és ∞ mátrixnormákat.

29. Írja le a vektornorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt vektornormának nevezzük, ha

1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
3) $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\|: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvényt mátrixnormának nevezzük, ha

1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
2) $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
3) $\|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
4) $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
5) $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Legyen $\|\cdot\|_v$ tetszőleges vektornorma, ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$

mennyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

Tétel: indukált normák

Az „indukált mátrixnormák" valóban mátrixnormák.

Biz.: Be kell látni, hogy a megadott alak teljesíti a mátrixnorma axiómáit.

1. Az $\|A\|$ értéke nemnegatív, hiszen vektorok normájának (nemnegatív számok) hányadosainak szuprémuma.
2. Ha $A = 0$, azaz nullmátrix, akkor $\|Ax\|_v = 0$ minden x vektorra, így a szuprémum értéke is 0. Valamint megfordítva, ha a szuprémum 0, akkor minden x-re Ax-nek nullvektornak kell lennie, ez csak úgy lehet, ha A nullmátrix.
3. $$\|\lambda A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|\lambda Ax\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0} \frac{|\lambda| \cdot \|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = |\lambda| \cdot \|A\| \,.$$

Biz. (folytatás):

4. $$\|A+B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v + \|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
$$\leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} + \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| + \|B\|$$
5. $B = 0 \quad \Rightarrow \quad \|B\| = 0$, valamint
$A \cdot B = A \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \|AB\| = 0$.
Az egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 áll, tehát igaz az állítás.

Biz. (folytatás): Ha $B \neq 0$, akkor

$$\|A \cdot B\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|x\|_v} = \sup_{x\neq 0, Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq$$
$$\leq \sup_{Bx\neq 0} \frac{\|ABx\|_v}{\|Bx\|_v} \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} \leq \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|_v}{\|y\|_v} \cdot \sup_{x\neq 0} \frac{\|Bx\|_v}{\|x\|_v} = \|A\| \cdot \|B\| \,.$$

Meggondolható, hogy a $Bx \neq 0$ feltétel nem változtatja meg a szuprémum értékét; közben bevezettük az $y := Bx$ jelölést. $\square$

Tétel: Nevezetes mátrixnormák $(1, 2, \infty)$

A $\|.\|_p$ $(p = 1, 2, \infty)$ vektornormák által indukált mátrixnormák:

- $\|A\|_1 = \max\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ (oszlopnorma),
- $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ (sornorma),
- $\|A\|_2 = \left(\max\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(A^\top A) \right)^{1/2}$ (spektrálnorma).