14. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.

14. Mátrixnormák és tulajdonságaik II.

a) Definiálja a mátrixnormát és indukált mátrixnormát. Definiálja az illeszkedés fogalmát és igazolja, hogy indukált norma mindig illeszkedik a megfelelő vektornormához. Igazolja a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma képletét.

30. Írja le a mátrixnorma definiáló tulajdonságait!

A $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ függvényt mátrixnormának nevezzük, ha

1) $\|\mathbf{A}\| \geq 0 \quad \forall\, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
2) $\|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0}$,
3) $\|\lambda\mathbf{A}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{A}\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
4) $\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$,
5) $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{B}\| \quad \forall\, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Legyen $\|\cdot\|_v$ tetszőleges vektornorma, ekkor az

$$\|\mathbf{A}\| := \sup_{\mathbf{x}\neq\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v}$$

mennyiség mátrixnormát definiál, és indukált mátrixnormának nevezzük.

32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?

A $\|\cdot\|$ mátrixnorma és a $\|\cdot\|_v$ vektornorma illeszkedik, ha $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$-re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \implies \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} \leq \|A\| \implies \|Ax\|_v \leq \|A\| \cdot \|x\|_v\,.$$

- $$\|A\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

(d) a ∞ vektornorma által indukált mátrixnorma a sornorma, $\|A\|_\infty$.

Megoldás:

$$\boxed{\|A\|_\infty = \max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty}$$

$$\|A\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} |(A\mathbf{x})_i| = \max_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,|x_j| \leq$$

$$\leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,\|\mathbf{x}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty \cdot \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Láthatjuk, hogy

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|A\mathbf{x}\|_\infty \leq \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Megmutatjuk, hogy ez a maximum felvétetik, tehát az egyenlőtlenségben $\leq$ helyett $=$ áll.

Tegyük fel, hogy valamely p-re $(1 \leq p \leq n)$

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{pj}| = \max_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|,$$

azaz az $\|A\|_\infty$ a p-edik sorban vétetik fel, és tekintsük azt az $\tilde{\mathbf{x}}$ vektort, melyre
$\tilde{x}_j = \mathrm{sgn}(a_{pj})$ $(j = 1, \ldots, n)$. Ekkor $\|\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = 1$ és

$$\|A\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{sgn}(a_{pj}) \right| = \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|,$$

ugyanis

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{sgn}(a_{pj}) \right| \begin{cases} \leq & \sum_{j=1}^{n} |a_{ij} \mathrm{sgn}(a_{pj})| = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|, \quad (i \neq p), \\ \\ = & \sum_{j=1}^{n} |a_{pj}|, \qquad (i = p). \end{cases}$$