- Mikor mondjuk azt, hogy egy f¨uggv´eny n-szer $2 \le n \in \mathbb{N}$ differenciálható egy pontban?

- Ismertesse a $\dfrac{0}{0}$ határértékre vonatkozó Bernoulli-l'Hôpital-szabályt!

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.

Legyen $-\infty \le a < b < +\infty$ *és* $f, g \in D(a, b)$. *T.f.h.*

(a) $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = 0$,

(b) $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$,

(c) $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- Ismertesse a $\dfrac{\cdots}{\pm\infty}$ határértékre vonatkozó Bernoulli-l'Hôpital-szabályt!

Tétel: L'Hospital-szabály a $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetben.

Legyen $-\infty \le a < b < +\infty$ *és* $f, g \in D(a, b)$. *T.f.h.*

(a) $\exists \lim\limits_{a+0} f = \lim\limits_{a+0} g = +\infty$,

(b) $g(x) \neq 0$ *és* $g'(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in (a, b)$,

(c) $\exists \lim\limits_{a+0} \dfrac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Ekkor

$$\exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

- Mi a kapcsolat a hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?

Tétel. *T.f.h. a* $\sum_{k=0} \alpha_k (x-a)^k$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív, és jelölje* f *az összegfüggvényét. Ekkor minden* $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D^\infty\{x\}$, *és bármely* $n \in \mathbb{N}^+$ *esetén*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha_k(x-a)^{k-n}.$$

Ha $x = a$, *akkor*

$$(*) \qquad \boxed{\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N})}.$$

• Hogyan definiálja egy függvény Taylor-sorát?

Definíció. *Ha* $f \in D^\infty\{a\}$, *akkor a*

$$T_a f(x) := \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *ponthoz tartozó* ***Taylor-sorának***, *a sor* n*-edik részletösszegét, azaz a*

$$T_{a,n} f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

polinomot az f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *ponthoz tartozó* n*-edik* ***Taylor-polinomjának*** *nevezzük.*

Az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozóTaylor-sorát f **Maclaurin-sorának** is nevezzük.

- Fogalmazza meg a Taylor-formula Lagrange-maradéktaggal néven tanult tételt!

Tétel: Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, *és t.f.h.* $f \in D^{n+1}(K(a))$. *Ekkor* $\forall\, x \in K(a)$ *ponthoz* $\exists$ *olyan* a *és* x *közé eső* ξ *szám, hogy*

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

- Milyen elégséges feltételt ismer a Taylor-sornak a generáló függvényhez való konvergenciájával kapcsolatosan?

Tétel: Elégséges feltétel az előállításra.

Legyen $f \in D^{\infty}(K(a))$, *és tegyük fel, hogy*

$$\exists\, M > 0 : \quad \left|f^{(n)}(x)\right| \le M \;\; \left(\forall\, x \in K(a),\ \forall\, n \in \mathbb{N}\right).$$

Ekkor f*-nek az* a *ponthoz tartozó Taylor-sora a* $K(a)$ *halmazon előállítja az* f *függvényt, vagyis fennáll az*

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;\; \left(x \in K(a)\right)$$

egyenlőség.

- Írja le az

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1), \qquad \text{ill. a} \qquad g(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R},\ |x| < 1)$$

függvény Taylor-sorát!

$$\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad (|x| < 1)}.$$

$$\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \quad (|x| < 1)}$$