

17. LER érzékenysége II.

17. LER érzékenysége II.

- a) Formalizálja LER mátrixának perturbációját, ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciósámot és igazolja tulajdonságait.

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a bal oldalt, azaz a mátrixot *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk”!
(Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

❶ **Eredeti:**

adott A és b , kiszámíthatjuk a megoldást: x .

$$Ax = b$$

❷ **Módosult:**

adott $A + \Delta A$ és b , kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b$$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz. . .

Példa:

❶ **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \rightarrow \text{megoldás: } x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

❷ **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.11 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

❸

$$\text{A módosult LER megoldása: } x + \Delta x = \begin{bmatrix} 2.94 \\ -2.85 \end{bmatrix}$$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\text{cond}(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \text{cond}(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|\cdot\|$ mátrixnorma esetén a $\text{cond}(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

- (a) Indukált mátrixnorma esetén $\text{cond}(A) \geq 1$.
- (b) $\text{cond}(c \cdot A) = \text{cond}(A)$, $(c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.
- (c) Ha Q ortogonális, akkor $\text{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

- (a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.
- (b) $\text{cond}(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\| \frac{1}{c} A^{-1} \right\| =$
 $= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$.
- (c) $\|Q\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{x \neq 0} \frac{\sqrt{x^T Q^T Q x}}{\sqrt{x^T x}} = 1$
 $\|Q^{-1}\|_2 = \|Q^T\|_2 = 1, \quad \text{cond}_2(Q) = 1$

□

Állítás: a kondíciós szám tulajdonságai – 2. rész

- (d) Ha A szimmetrikus, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.
- (e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\text{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.
- (f) Ha A invertálható, akkor $\text{cond}(A) \geq \frac{\max |\lambda_i(A)|}{\min |\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.

De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max |\lambda_i(A)|$.

Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max |\lambda_i(A^{-1})| = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$.

(e) A pozitív definités miatt nem kell abszolút érték.

(f) $\|A\| \geq \varrho(A) = \max |\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min |\lambda_i(A)|}$. \square