28. Polinomok gyökeinek becslése és a polinom helyettesítési-és derivált értékeinek meghatározása.

28. Polinomok gyökeinek becslése és a polinom helyettesítési- és derivált értékeinek meghatározása.

a) Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére és a tétel bizonyítása.

Tétel: Becslés polinom gyökeinek elhelyezkedésére

A $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$ polinom esetén, ha $a_0 \neq 0$ és $a_n \neq 0$, akkor P bármely x_k gyökére:

$$r < |x_k| < R,$$

ahol

$$R = 1 + \frac{\max\limits_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|}, \quad r = \frac{1}{1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|}}.$$

Megjegyzés: Ezzel a gyökök elhelyezkedésére egy origó középpontú nyílt körgyűrűt adtunk meg a komplex számsíkon.

Biz.:

1. Megmutatjuk, hogy ha $|x| \geq R$ (x a külső körön kívül van), akkor $|P(x)| > 0$ (x nem gyöke P-nek). A becsléshez a kétféle háromszög-egyenlőtlenséget használjuk:

$$|P(x)| \geq |a_n x^n| - \left| a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 \right|$$

A továbbiakban lefelé akarunk becsülni, így a kivonandó összeget növelnünk kell:

$$\left| a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \right| \leq |a_{n-1}| \cdot |x|^{n-1} + \ldots + |a_0| \leq$$
$$\leq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \left(|x|^{n-1} + \ldots + 1 \right) = \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n - 1}{|x| - 1} <$$
$$< \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i| \right) \cdot \frac{|x|^n}{|x| - 1}.$$

Biz. folyt: Folytassuk $|P(x)|$ becslését és vizsgáljuk meg, mikor pozitív.

$$|P(x)| > |a_n| \cdot |x|^n - \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x|-1} \geq 0$$

Rendezzük át az egyenlőtlenséget, szorozzunk be $|x|-1>0$-val és osszunk le $|a_n| \cdot |x|^n$-vel

$$|P(x)| > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |a_n| \cdot |x|^n \geq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|x|-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| - 1 \geq \left(\max_{i=0}^{n-1} |a_i|\right) \cdot \frac{|x|^n}{|a_n| \cdot |x|^n} \quad \Leftrightarrow$$

$$|x| \geq 1 + \frac{\max_{i=0}^{n-1} |a_i|}{|a_n|} =: R.$$

Biz. folyt: Azt kaptuk, hogy ha $|x| \geq R$, akkor $|P(x)| > 0$, vagyis x nem gyök. Ezzel beláttuk a tétel első felét.

2. Az alsó becslést úgy nyerjük, hogy az imént belátott becslést alkalmazzuk $P(x)$ reciprok-polinomjára.
   Vezessük be az $y := \frac{1}{x}$ új változót ($x \neq 0$):

$$P(x) = P\left(\frac{1}{y}\right) = a_n \left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 =$$

$$= \left(\frac{1}{y}\right)^n \cdot \underbrace{(a_n + a_{n-1}y + \ldots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n)}_{Q(y)} = x^n \cdot Q\left(\frac{1}{x}\right).$$

A Q polinomot a P *reciprok-polinomjának* nevezzük. Ekkor

$$P(x_k) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0,$$

vagyis Q gyökei P gyökeinek reciprokai.

Biz. folyt: Alkalmazzuk a már belátott becslésünket Q-ra:

$$\frac{1}{|x_k|} < 1 + \frac{\max\limits_{i=1}^{n} |a_i|}{|a_0|} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |x_k| > r.$$

$\square$

Megjegyzés: Akár komplex együtthatós polinomokat is megengedhetünk a tételben, a bizonyítás menetén nem változtat.