Analízis 1.

Adja meg az e számot definiáló sorozatot!

2. Tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$\boxed{a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet!

7. Tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N : a_n \le b_n \le c_n,$
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

Milyen tételt ismer monoton sorozatok határértékével kapcsolatban?

5. Tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1. a) *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

   b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

2. a) *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = +\infty.$

   b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = -\infty.$

Igaz-e az, hogy ha az (x_n) és a (y_n) sorozatoknak van határértéke és $x_n > y_n$ minden n-re, akkor $\lim(x_n) > \lim(y_n)$?

8. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor:

1. $A < B \implies \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n < b_n.$
2. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \leq b_n \implies A \leq B.$

Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt, és adjon olyan eljárást, amivel ezek a számok nagy pontossággal előállíthatók!

4. Tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \geq 2$ természetes szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós szám,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat konvergens, és az $\alpha := \lim(a_n)$ határértékére igaz, hogy $\alpha > 0$ és

$$\alpha^m = A.$$

Hogyan szól a Bolzano-Weierstraß-féle kiválasztási tétel?

5. Tétel (A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?

1. Definíció. *Az (a_n) valós sorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezzük, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n > n_0\colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?

6. Tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$