- Definiálja a primitív függvény fogalmát!

Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ egy adott függvény. A.m.h. a $F : I \to \mathbb{R}$ függvény f* ***primitív függvénye****, ha*

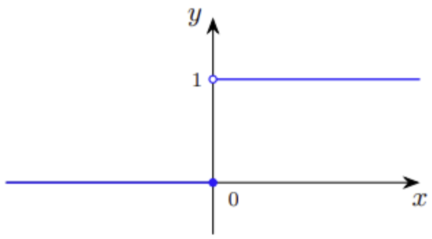
$$F \in D(I) \quad \text{és} \quad F'(x) = f(x) \ (\forall\, x \in I).$$

- Van-e olyan függvény, aminek nincsen primitív függvénye?

Van olyan függvény, aminek nincs primitív függvénye.

Példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0 \\ 1, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$



Tegyük fel, hogy F a f függvény primitív függvénye. Ekkor $x < 0$ esetén $F'(x) = 0$, tehát $F(x) = c$, ha $x \leq 0$. Ha $x > 0$, akkor $F'(x) = 1$, tehát $F(x) = x + a$, ha $x \geq 0$. Így $F'_-(0) = 0$ és $F'_+(0) = 1$, tehát $F \notin D\{0\}$, ezért f-nek nincs primitív függvénye. ■

• Definiálja a határozatlan integrál fogalmát!

Definíció. *Az I nyílt intervallumon értelmezett f függvény primitív függvényeinek a halmazát f* ***határozatlan integráljának*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\int f := \int f(x)\,dx := \big\{F : I \to \mathbb{R} \mid F \in D \text{ és } F' = f\big\}.$$

f az ***integrandus****, ill. az* ***integrálandó függvény****.*

• Mit ért a határozatlan integrál linearitásán?

Tétel. *Legyen I nyílt intervallum. Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitív függvénye, akkor tetszőleges $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mellett $(\alpha f + \beta g)$-nek is létezik primitív függvénye és*

$$\int \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

• Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos parciális integrálás tétele?

Tétel. *Legyen I nyílt intervallum. T.f.h. $f, g \in D(I)$ és az $f'g$ függvénynek létezik primitív függvénye I-n. Ekkor az fg' függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx \quad (x \in I).$$

- Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos első helyettesítési szabály?

Tétel. *Legyenek adottak az I, J nyílt intervallumok és a $g : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ függvények. T.f.h. $g \in D(I)$, $\mathcal{R}_g \subset J$ és a f függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az $(f \circ g) \cdot g'$ függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big) + c \qquad (x \in I),$$

ahol F a f függvény egy primitív függvénye.

- Adja meg a következő függvények egy primitív függvényét!

Táblázat