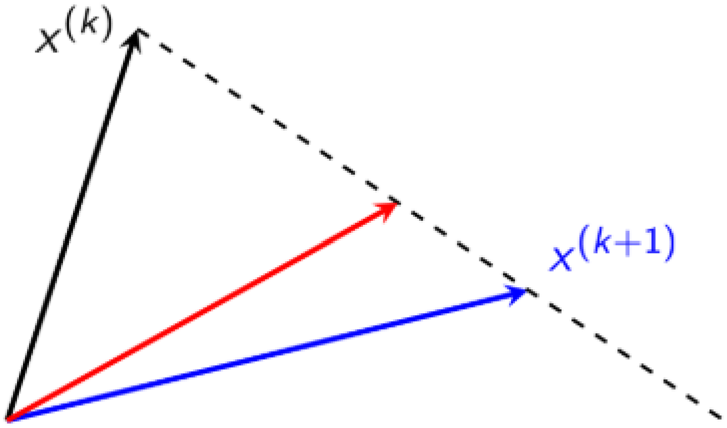
20. A csillapított Jacobi-iteráció.

a) Vezesse le a csillapított Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.

A *csillapítás* avagy *tompítás* alapötlete:

$$x_J^{(k+1)} \quad \text{helyett} \quad (1-\omega)\cdot x^{(k)} + \omega \cdot x_J^{(k+1)}$$



Megj.:

- alulrelaxálás ($0 < \omega < 1$), túlrelaxálás ($\omega > 1$)
- $\omega = 1$ az eredeti módszert adja

Induljunk a Jacobi-módszerből és a „helyben hagyásból”:

$$\begin{array}{rcll} x & = & -D^{-1}(L+U)\cdot x + D^{-1}b & / \cdot \omega \\ x & = & x & / \cdot (1-\omega) \end{array}$$

A kettő súlyozott összege:

$$x \;=\; \left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\right]\cdot x + \omega D^{-1}b$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: csillapított Jacobi-iteráció ω paraméterrel – $J(\omega)$

$$x^{(k+1)} = \underbrace{\left[(1-\omega)I - \omega D^{-1}(L+U)\right]}_{B_{J(\omega)}}\cdot x^{(k)} + \underbrace{\omega D^{-1}b}_{c_{J(\omega)}}$$

Írjuk fel koordinátánként!

Állítás: $J(\omega)$ komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\cdot x_i^{(k)} + \omega \cdot x_{i,J}^{(k+1)},$$

ahol $x_{i,J}^{(k+1)}$ a hagyományos Jacobi-módszer ($J = J(1)$) által adott, azaz

$$x_{i,J}^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}}\left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{i,j}x_j^{(k)} - b_i\right).$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= (1-\omega)x^{(k)} - \omega D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + \omega D^{-1}b = \\ &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega D^{-1}\Big((D-A)\cdot x^{(k)} + b\Big) = \\ &= (1-\omega)x^{(k)} + \omega x^{(k)} + \omega D^{-1}\Big(-Ax^{(k)} + b\Big) = \\ &= x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)} \end{aligned}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := \omega D^{-1} r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: csillapított Jacobi-iteráció $J(\omega)$

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \ldots,$ leállásig

$$\begin{aligned} s^{(k)} &:= \omega D^{-1} r^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad Ds^{(k)} = \omega r^{(k)} \ \text{LER} \\ x^{(k+1)} &:= x^{(k)} + s^{(k)} \\ r^{(k+1)} &:= r^{(k)} - As^{(k)} \end{aligned}$$

Megj.: Látjuk, hogy $x^{(k+1)} - x^{(k)} = s^{(k)}$, vagyis a tapasztalati kontrakciós együtthatók számításához lépésenként egy norma értéket és egy osztást kell elvégezni.