- Mi a kapcsolat a monotonitás és a Riemann-integrálhatóság között?

Tétel. *Ha az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény* ***monoton*** *az $[a, b]$ intervallumon, akkor* ***integrálható*** *$[a, b]$-n.*

- Definiálja a szakaszonként monoton függvény fogalmát!

Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A.m.h. az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény* ***szakaszonként monoton****, ha*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^+ \text{ és } \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a, b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

(i) *az $f_{|(x_{i-1}, x_i)}$ függvény monoton,*

(ii) *f korlátos $[a, b]$-n.*

- Definiálja az egyenletes folytonosság fogalmát!

Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* ***egyenletesen folytonos a $H \subset \mathcal{D}_f$ halmazon****, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, \delta > 0, \text{ hogy}$$

$$\forall\, x, y \in H,\ |x - y| < \delta :\ \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon.$$

Ha csak azt mondjuk, hogy f ***egyenletesen folytonos****, akkor ezen azt értjük, hogy f egyenletesen folytonos a $\mathcal{D}_f$ halmazon.*

- Mondja ki az egyenletes folytonosságra igazolt Heine-tételt!

Heine-tétel. *Ha $-\infty < a < b < +\infty$ és $f \in C[a, b]$, akkor f egyenletesen folytonos $[a, b]$ intervallumon.*

- Mi a kapcsolat a folytonosság és a Riemann-integrálhatóság között?

Tétel. *Ha az f függvény* ***folytonos*** *az $[a,b]$ intervallumon, akkor* ***integrálható*** *$[a,b]$-n (jelekkel $C[a,b] \subset R[a,b]$).*

- Definiálja a szakaszonként folytonos függvény fogalmát!

Definíció. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. A.m.h. az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény* ***szakaszonként folytonos****, ha*

$$\exists\, m \in \mathbb{N}^+ \text{ és } \tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$$

úgy, hogy minden $i = 1, \ldots, m$ index esetén

- *az $f|_{(x_{i-1}, x_i)}$ függvény folytonos,*
- *léteznek és végesek a $\lim\limits_{x_{i-1}+0} f$, $\lim\limits_{x_i-0} f$ határértékek.*

- Hogyan szól a Newton-Leibniz-tétel?

Newton–Leibniz-tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és a f függvénynek van primitív függvénye az $[a,b]$ intervallumon, akkor*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b,$$

ahol F a f függvény egy (tetszőleges) primitív függvénye.

- Definiálja az integrálfüggvény fogalmát!

Definíció. *T.f.h. $f \in R[a,b]$ és $x_0 \in [a,b]$. Ekkor a*

$$F : [a,b] \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt$$

függvényt a f függvény x_0-ban eltűnő ***integrálfüggvényének*** *nevezzük.*