23. A Richardson-típusú iterációk

23. A Richardson-típusú iterációk.

a) Vezesse le a Richardson-típusú iterációk képletét. Írja fel a reziduumvektoros alakot és ismertesse annak jelentőségét. Fogalmazza meg a tanult konvergenciatételt (bizonyítás nélkül).

54. Vezesse le a Richardson-típusú iterációk alakját!

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad & \mathbf{0} = -\mathbf{Ax} + \mathbf{b} \quad p \in \mathbb{R} \\ & \mathbf{0} = -p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} \\ & \mathbf{x} = \mathbf{x} - p\mathbf{Ax} + p\mathbf{b} = (\mathbf{I} - p\mathbf{A})\mathbf{x} + p\mathbf{b} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \; & \underbrace{(\mathbf{I} - p\mathbf{A})}_{\mathbf{B_{R(p)}}}\mathbf{x}^{(k)} + \underbrace{p\mathbf{b}}_{\mathbf{c_{R(p)}}} \end{aligned}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} - pAx^{(k)} + pb = x^{(k)} + p \cdot \left(-Ax^{(k)} + b\right) = \\ &= x^{(k)} + pr^{(k)} \end{aligned}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := pr^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: Richardson-iteráció

$$
\begin{aligned}
& r^{(0)} := b - Ax^{(0)} \\
k = 1, \ldots, \text{ leállásig} & \\
& s^{(k)} := pr^{(k)} \\
& x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)} \\
& r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}
\end{aligned}
$$

Megjegyzés: Érdemes meggondolni, hogy ha az $Ax = b$ helyett a $D = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ diagonális mátrix-szal a $D^{-1}Ax = D^{-1}b$ LER-re alkalmazzuk az $R(p)$ iterációt, akkor az eredeti LER-re felírt $J(p)$ csillapított Jacobi-iterációt kapjuk.

Tétel: A Richardson-iteráció konvergenciája

Ha az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix szimmetrikus, pozitív definit és sajátértékeire $m = \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n = M$ teljesül, akkor $R(p)$ (azaz az $Ax = b$ LER-re felírt $p \in \mathbb{R}$ paraméterű Richardson-iteráció) pontosan a

$$p \in \left(0, \frac{2}{M}\right),$$

paraméter értékekre konvergens minden kezdővektor esetén. Az optimális paraméter $p_0 = \frac{2}{M+m}$, a hozzá kapcsolódó kontrakciós együttható pedig:

$$\varrho(B_{R(p_0)}) := \frac{M - m}{M + m} = \left\| B_{R(p_0)} \right\|_2 = q.$$