- Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos második helyettesítési szabály?

Tétel.

T.f.h. $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumok, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to I$ ***bijekció****, $g \in D(J)$, $g'(x) \neq 0$ $(\forall\, x \in J)$ és az $f \circ g \cdot g' : J \to \mathbb{R}$ függvénynek van primitív függvénye. Ekkor az f függvénynek is van primitív függvénye és*

$$\int f(x)\,dx \underset{x=g(t)}{=} \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt_{\big|t=g^{-1}(x)} \quad (x \in I).$$

- Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltételt!

Szükséges feltétel primitív függvény létezésére.

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és a $f : I \to \mathbb{R}$ függvénynek ***van*** *primitív függvénye, akkor f* ***Darboux-tulajdonságú*** *az I intervallumon.*

- Fogalmazza meg a primitív függvény létezésére vonatkozó elégséges feltételt!

Elégséges feltétel primitív függvény létezésére.

Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f : I \to \mathbb{R}$ ***folytonos*** *függvény, akkor f-nek* ***van*** *primitív függvénye.*

- Definiálja intervallum egy felosztását!

- Mit jelent egy felosztás finomítása?

Az $[a, b]$ intervallum egy **felosztásán** a

$$\tau := \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

halmazt értjük, ahol $n \in \mathbb{N}^+$. A

$$\|\tau\| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

számot a τ felosztás **finomságának** nevezzük.

- Mi az alsó közelítő összeg definíciója?

- Mi a felső közelítő összeg definíciója?

Legyen $f \in K[a, b]$, $\tau \in \mathcal{F}[a, b]$, továbbá

$$m_i := \inf \left\{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \right\} = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

$$M_i := \sup \{ f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i \} = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$$

minden $i = 1, 2, \ldots, n$ indexre. A

$$s(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}),$$

$$S(f, \tau) := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

számokat az f függvény τ felosztáshoz tartozó **alsó**, illetve **felső közelítő összegének** nevezzük.

- Mi történik az alsó közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?
- Mi történik a felső közelítő összeggel, ha a neki megfelelő felosztást finomítjuk?

Tétel. *Legyen $f \in K[a,b]$, és t.f.h. $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. Ekkor*

1° *Ha τ_2 finomabb τ_1-nél (azaz $\tau_1 \subset \tau_2$), akkor*

$$s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2) \quad \text{és} \quad S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2),$$

azaz egy felosztás finomításakor az alsó közelítő összeg nem csökkenhet, a felső közelítő összeg pedig nem nőhet.

2° *Ha $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges, akkor*

$$s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2),$$

azaz bármely felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg legfeljebb akkora, mint bármely (más) felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg.