

## 11. A Householder-transzformáció I.

- a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.

### Definíció: Householder-mátrix

A  $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezük, ha

$$H(v) = I - 2vv^\top,$$

ahol  $v \in \mathbb{R}^n$  és  $\|v\|_2 = 1$ .

### Geometriai tartalom

A Householder-transzformáció geometriailag tükrözés egy olyan hipersíkra, amelynek normálvektora  $v$ .

### Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

- ①  $H^\top = H$  (szimmetrikus),
- ②  $H^2 = I$ , azaz  $H^{-1} = H$  (ortogonális),
- ③  $H(v) \cdot v = -v$ ,
- ④  $\forall y \perp v : H(v) \cdot y = y$ .

**Biz.:** Használjuk ki, hogy  $v^\top v = 1$  és  $v^\top y = 0$ .

- ①  $(I - 2vv^\top)^\top = I^\top - 2(v^\top)^\top v^\top = I - 2vv^\top$ ,
- ②  $(I - 2vv^\top)(I - 2vv^\top) = I - 2vv^\top - 2vv^\top + 4v \underbrace{v^\top v}_{=1} v^\top = I$ ,
- ③  $(I - 2vv^\top)v = v - 2v \underbrace{v^\top v}_{=1} v = v - 2v = -v$ ,
- ④  $(I - 2vv^\top)y = y - 2v \underbrace{v^\top y}_{=0} = y$ . □

- A  $H(v)$  transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$ -re  $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v \underbrace{(v^\top x)}_{\in \mathbb{R}}.$
- $y \in \mathbb{R}^n$ -re  $y^\top H(v) = y^\top(I - 2vv^\top) = y^\top - 2 \underbrace{(y^\top v)}_{\in \mathbb{R}} v^\top.$

**(Mátrixok esete:** soronként kell alkalmazni a transzformációt, mondhatni megfelelő számú oszlopvektorra bontjuk????)

### Tétel: A Householder-trf. műveletigénye LER-re

A LER megoldásának műveletigénye

Householder-transzformációkkal:

$$\frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $2(n - 1)$  darab négyzetgyökvonásra is szükség van.

### Tétel: A Householder-trf. műveletigénye QR-felbontásra

A QR-felbontás előállításának műveletigénye

Householder-transzformációkkal:

$$\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint  $2(n - 1)$  darab négyzetgyökvonásra is szükség van.