Analízis 1

Mit tud mondani nullsorozatok összegéről?

Mit tud mondani korlátos sorozat és nullsorozat szorzatáról?

2. Tétel (Műveletek nullsorozatokkal). *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*

1. $(a_n + b_n)$ *is nullsorozat,*
2. *ha* (c_n) *korlátos sorozat, akkor* $(c_n \cdot a_n)$ *is nullsorozat,*
3. $(a_n \cdot b_n)$ *is nullsorozat.*

- Mondjon példát olyan $(x_n), (y_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(x_n) = 0 = \lim(y_n)$ és a $\lim(x_n/y_n)$ határérték nem létezik!

2. Nullsorozatok *hányadosának* a határértéke (vagyis két „kicsi" szám hányadosa) bármi lehet. Ezt illusztrálják az alábbi példák:
   - $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^3}} = n \to +\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$
   - $\dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \dfrac{1}{n} \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty,$
   - $\dfrac{\frac{c}{n}}{\frac{1}{n}} = c \to c, \quad \text{ha } n \to +\infty \quad (\text{itt } c \in \mathbb{R}),$
   - $\dfrac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}} = (-1)^n \quad \text{sorozat divergens.}$

Milyen állítást ismer konvergens sorozatok összegéről?

Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?

Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?

3. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \qquad \text{és} \qquad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1. $(a_n + b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B,$
2. $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B,$
3. *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \neq 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \ \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok összegéről?

Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?

Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben vett) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

4. Tétel (A műveletek és a határérték kapcsolata). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és legyen*

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. *az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozatnak is van határértéke, és*
$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B,$$
feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van,
2. *az $(a_n \cdot b_n)$ szorzat-sorozatnak is van határértéke, és*
$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B,$$
feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van,
3. *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányados-sorozatnak is van határértéke, és*
$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B},$$
feltéve, hogy az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?

8. Tétel. *Minden rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén a (q^n) mértani sorozat határértékére a következők teljesülnek:*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ = 1, & \text{ha } q = 1, \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1, \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$