11. A Householder-transzformáció I.

a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát, vezesse le elemi tulajdonságait. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit.

Definíció: Householder-mátrix

A $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^\top,$$

ahol $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$.

$H(v)$ tükröző mátrix, a v-re merőleges (azaz v normálvektorú) $n-1$ dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.

Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

1. $H^\top = H$ (szimmetrikus),
2. $H^2 = I$, azaz $H^{-1} = H$ (ortogonális),
3. $H(v) \cdot v = -v$,
4. $\forall y \perp v: \quad H(v) \cdot y = y$.

Biz.: Használjuk ki, hogy $v^\top v = 1$ és $v^\top y = 0$.

1. $(I - 2vv^\top)^\top = I^\top - 2(v^\top)^\top v^\top = I - 2vv^\top$,
2. $(I - 2vv^\top)(I - 2vv^\top) = I - 2vv^\top - 2vv^\top + 4v\underbrace{v^\top v}v^\top = I$,
3. $(I - 2vv^\top)v = v - 2v\underbrace{v^\top v} = v - 2v = -v$,
4. $(I - 2vv^\top)y = y - 2v\underbrace{v^\top y} = y$. $\square$

- A $H(v)$ transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$-re $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v\underbrace{(v^\top x)}_{\in\mathbb{R}}$.
- $y \in \mathbb{R}^n$-re $\quad y^\top H(v) = y^\top(I - 2vv^\top) = y^\top - 2\underbrace{(y^\top v)}_{\in\mathbb{R}} v^\top$.
- Mindkét esetben $4n$ művelet kell a mátrixszal való szorzás $2n^2 + \mathcal{O}(n)$-es műveletigénye helyett.