

## 6. Az LU-felbontás direkt módon.

6. Az  $LU$ -felbontás direkt módon.

- a) Definiálja egy mátrix  $LU$ -felbontását. Adjon módszert  $L$  és  $U$  mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Egy mátrix  $LU$ -felbontásán az  $A = LU$  felbontást értjük ahol  $L$  egy alsó háromszögmátrix melynek főátlójában 1-esek állnak, míg  $U$  egy felső háromszög mátrix.

Módszer: közvetlenül mátrixszorzás alapján.

Az a lényeg, hogy nem ismerjük  $L$ -t és  $U$ -t, de azt tudjuk, hogy  $LU = A$ , **ismerjük a szorzatot**. Azt is tudjuk, hogy  **$U$  első sora megegyezik  $A$  első sorával**. (Ez ugye a GE-ből következik.)  **$L$  1. oszlopát úgy kapjuk, hogy  $A$  első oszlopát leosztjuk  $a_{11}$ -gyel** (Ez is GE-ből következik). Ezenkívül ismerjük a mátrixok alakját is (**háromszögek**):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}, U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ 0 & u_{22} & u_{n2} \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{U}$$

Mátrix szorzással ezekből egy egyenletrendszert kapunk, amit meg tudunk oldani. **Képlettel, általánosítva:**

**Tétel:** az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$  és  $U$  mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ (felső)} \quad & u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

**Biz.:** Írjuk fel az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, mint mátrixszorzat  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét feltéve, hogy  $A = L \cdot U$ . Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha  $i \leq j$ , azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor  $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$ , valamint  $l_{ii} = 1$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből  $u_{ij}$  kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

**Biz. folyt.** Ha  $i > j$ , azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor  $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha  $u_{jj} \neq 0$  (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor  $l_{ij}$  kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diásorát) megyünk végig az  $(i, j)$  indexekkel  $A$  elemein, akkor az  $l_{ij}$  illetve  $u_{ij}$  értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

Helyes sorrendek: oszlop-, sor – folytonosan, parkettaszerűen

**Tétel:** Az  $LU$ -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$