12. A Householder-transzformáció II.

12. A Householder-transzformáció II.

a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát és elemi tulajdonságait (nem kell bizonyítani). Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját LER megoldására.

Definíció: Householder-mátrix

A $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^\top,$$

ahol $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$.

$H(v)$ tükröző mátrix, a v-re merőleges (azaz v normálvektorú) $n-1$ dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.

Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

1. $H^\top = H$ (szimmetrikus),
2. $H^2 = I$, azaz $H^{-1} = H$ (ortogonális),
3. $H(v)\cdot v = -v$,
4. $\forall y \perp v: \quad H(v)\cdot y = y$.

- A $H(v)$ transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$-re $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v\underbrace{(v^\top x)}_{\in\mathbb{R}}$.
- $y \in \mathbb{R}^n$-re $\quad y^\top H(v) = y^\top(I - 2vv^\top) = y^\top - 2\underbrace{(y^\top v)}_{\in\mathbb{R}} v^\top$.
- Mindkét esetben $4n$ művelet kell a mátrixszal való szorzás $2n^2 + \mathcal{O}(n)$-es műveletigénye helyett.

A Householder-transzformáció alkalmazásai

Egyetlen LER megoldása:

$$
\begin{gathered}
Ax = b \\
H_1 \cdot A \cdot x = H_1 \cdot b \\
\vdots \\
\underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot A}_{R} \cdot x = \underbrace{H_{n-1} \cdots H_1 \cdot b}_{d} \\
R \cdot x = d \to x \text{ (visszahelyettesítés)}
\end{gathered}
$$

Ugyanúgy dolgozunk, mint a GE-nál. Végrehajtjuk a transzformációt az oszlopokon:

$$[A|b] \quad \to \text{n-1 db H-trf.} \to \quad [R|d] \quad \to \text{visszahely.}$$

Mindig egyre kisebb méretű mátrixon dolgozunk a transzformációk során.

VAGY

Tétel (LER megoldása Householderrel):
Elvégezünk $n-1$ db Householder transzformációt (kb. GE-alak, felsőháromszög alak), majd **visszahelyettesítés**!
Kiszámoljuk:

$$
\begin{gathered}
\sigma = -1 * sign(a_{11}) * \|a_1\|_2 \\
v_1 := \frac{a_1 - \sigma_1 e_1}{\|a_1 - \sigma_1 e_1\|_2} \\
H_1 := H(v_1)
\end{gathered}
$$

Ezt a transzformációt ezután **soronként** alkalmazzuk a mátrixra. (b-re is!)
Most már csak $n-1 \times n-1$-es mátrixra kell alkalmazni a transzformációt (egyre gyorsabb).
K-adik lépés:

$$v_k = \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{k-1} \\ \widetilde{v_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, H_k := H(v_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(\widetilde{v_k}) \end{pmatrix}$$

Kinullázzuk a főátló alatti elemeket a k-adik oszlopban (mint GE esetén). (Ezzel együtt a többi oszlopra szépen alkalmazzuk azokat a lépéseket, mint GE esetén.)

$n-1$. lépés vagy utolsó lépés:

Felsőháromszöget kapunk eredményül, mehet a **visszahelyettesítés**.

Példa – 2×2-es LER Householderrel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. oszlop:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|a_1\|_2 = 5$$

$$\sigma = -\operatorname{sign}(4) \cdot 5 = -5$$

$$v_1 = \frac{a_1 - \sigma e_1}{\|a_1 - \sigma e_1\|_2} = \frac{(9,3)^\top}{\sqrt{90}}$$

$$H_1 = I - 2v_1v_1^\top$$

Alkalmazva:

$$H_1A = \begin{pmatrix} -5 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad H_1b = \tilde{b}$$

Felső háromszög → **visszahelyettesítés.**