

## 6. Az LU-felbontás direkt módon.

6. Az  $LU$ -felbontás direkt módon.

- a) Definiálja egy mátrix  $LU$ -felbontását. Adjon módszert  $L$  és  $U$  mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Egy mátrix  $LU$ -felbontásán az  $A = LU$  felbontást értjük ahol  $L$  egy alsó háromszögmátrix melynek főátlójában 1-esek állnak, míg  $U$  egy felső háromszög mátrix.

Módszer: közvetlenül mátrixszorzás alapján.

**Sorfolytanosan:**  $U$  1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 & l_{31} &= 3 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 & l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 & u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

**Tétel:** az  $LU$ -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az  $L$  és  $U$  mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i \leq j \text{ (felső)} & \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}, \\ i > j \text{ (alsó)} & \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

**Biz.:** Írjuk fel az  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, mint mátrixszorzat  $i$ -edik sorának  $j$ -edik elemét feltéve, hogy  $A = L \cdot U$ . Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha  $i \leq j$ , azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor  $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$ , valamint  $l_{ii} = 1$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből  $u_{ij}$  kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

**Biz. folyt.** Ha  $i > j$ , azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor  $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$ , és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha  $u_{jj} \neq 0$  (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor  $l_{ij}$  kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diásorát) megyünk végig az  $(i, j)$  indexekkel  $A$  elemein, akkor az  $l_{ij}$  illetve  $u_{ij}$  értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

Helyes sorrendek: oszlop-, sor – folytonosan, parkettaszerűen

**Tétel:** Az  $LU$ -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$