

9. A Cholesky-féle LL^T -felbontás

9. A Cholesky-féle LL^T -felbontás.

- a) Definiálja a Cholesky-felbontást. Mutassa be az elemenkénti (közvetlen) meghatározásra szolgáló (Cholesky-)algoritmust, vezesse le a képleteket és határozza meg a műveletigényt, tárigényt.

Definíció: Cholesky-felbontás, avagy LL^T -felbontás

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix Cholesky-felbontásának nevezzük az $L \cdot L^T$ szorzatot, ha $A = LL^T$, ahol $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alsó háromszögmátrix és $l_{ii} > 0$ ($i = 1, \dots, n$).

Tétel: az LL^T -felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L mátrix elemei az A alsóháromszögbeli elemeiből a következő képletekkel számolhatók:

$$\begin{aligned} i = j \text{ (átló)} \quad & l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}, \\ i > j \text{ (alsó)} \quad & l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right). \end{aligned}$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Biz.: Az LU -felbontáshoz hasonlóan. Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot L^\top$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i = j$, azaz egy főátlóbeli elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow l_{j,k} = 0$, valamint $(L^\top)_{kj} = l_{jk}$, és így

$$a_{jj} = \sum_{k=1}^n l_{jk} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{jk}^2 = l_{jj}^2 + \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2.$$

Ebből l_{jj} kifejezhető

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot (L^\top)_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot l_{jk} = l_{ij} \cdot l_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk}.$$

Ha $l_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltétellel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot l_{jk} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd LU -felbontásnál a sorrendek) megyünk végig az (i, j) indexekkel A alsóháromszögbeli elemein, akkor az l_{ij} illetve l_{jj} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. \square

Tétel: A Cholesky-felbontás előállításának műveletigénye

A szorzások és osztások száma

$$\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint n darab négyzetgyökvonás is szükséges.