1. Hogyan értelmezi a függvényt?

1. Definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

hozzárendelést **függvénynek** *nevezzük, ha*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \ \text{ esetén } \exists!\ y \in \mathcal{R}_f\colon (x, y) \in f.$$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** *nevezzük és az $f(x)$ szimbólummal jelöljük. Ekkor azt is mondjuk, hogy az f függvény x-hez az $f(x)$ függvényértéket* **rendeli**.

2. Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?

$\boxed{f \in A \to B} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \subset A \times B$ függvény és $\mathcal{D}_f \subset A$.

3. Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?

$\boxed{f : A \to B} \quad :\Longleftrightarrow \quad f \subset A \times B$ függvény és $\mathcal{D}_f = A$.

4. Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?

3. Definíció. *Az $f : A \to B$ függvényt* **invertálhatónak** (**egy-egyértelműnek** *vagy* **injektívnek**) *nevezzük akkor, ha a $\mathcal{D}_f = A$ értelmezési tartomány bármely két különböző pontjának a képe különböző, azaz*

$$(\triangle) \qquad \forall x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Longrightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

5. Definiálja az inverz függvényt!

4. Definíció. *Legyen f egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists!\ x \in \mathcal{D}_f\colon f(x) = y.$$

Ekkor az f ***inverz függvényét*** (*vagy röviden* ***inverzét***) *így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } \ f(x) = y.$$

6. Mit mond ki a Dedekind-axióma vagy szétválasztási axióma?

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):

Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor

$$\exists \xi \in \mathbb{R}\colon \forall a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén } a \leq \xi \leq b.$$

7. Mikor mondjuk azt, hogy egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz induktív? Adjon egy példát induktív halmazra!

6. Definíció. *A* $H \subset \mathbb{R}$ *halmaz* **induktív halmaz**, *ha*

- $0 \in H$,
- *minden* $x \in H$ *esetén* $x + 1 \in H$.

N vagy R halmaz

8. Mondja ki tétel formájában a teljes indukció elvét!

1. Tétel (A teljes indukció elve). *Tegyük fel, hogy minden* n *természetes számra adott egy* $A(n)$ *állítás, és azt tudjuk, hogy*

i) $A(0)$ *igaz,*

ii) ha $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ *állítás minden* n *természetes számra igaz.*

9. Mikor nevez egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmazt felülről korlátosnak?

9. Definíció. *A nemüres* $H \subset \mathbb{R}$ *halmaz*

- **felülről korlátos**, *ha*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } x \leq K.$$

  Az ilyen K *számot a* H *halmaz egy* **felső korlátjának** *nevezzük.*

- **alulról korlátos**, *ha*

$$\exists k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } k \leq x.$$

  Az ilyen k *számot a* H *halmaz egy* **alsó korlátjának** *nevezzük.*

- **korlátos**, *ha alulról is, felülről is korlátos, azaz*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } |x| \leq K.$$

10. Írja le pozitív állítás formájában azt, hogy egy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről nem korlátos?

∀K ∈ R, ∃x ∈ H, hogy x > K

12. Fogalmazza meg a szuprémum elvet!

2. Tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

i) $H \neq \emptyset$ *és*

ii) H *felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

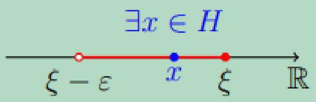
13. Mi a szuprémum definíciója?

- *A felülről korlátos* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *számhalmaz legkisebb felső korlátját* H **szuprémumának** *nevezzük, és a* $\boxed{\sup H}$ *szimbólummal jelöljük.*

14. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$!

4. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \text{ felső korlát, azaz} \\ \quad \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \text{ a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



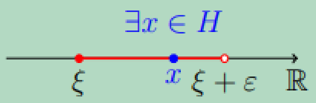
15. Mi az infimum definíciója?

- *Az alulról korlátos* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *számhalmaz legnagyobb alsó korlátját* H **infimumának** *nevezzük, és az* $\boxed{\inf H}$ *szimbólummal jelöljük.*

16. Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$!

5. Tétel. *Legyen* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \text{ alsó korlát, azaz} \\ \quad \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \text{ a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



17. Mi a kapcsolat egy halmaz maximuma és a szuprémuma között?

Kapcsolat: Ha egy halmaznak van maximuma, akkor a maximum és a szuprémum megegyezik ($\sup H = \max H$). Ha nincs maximuma, a szuprémum a legkisebb szám, amely felső korlát, de nem része a halmaznak.

18. Mi a kapcsolat egy halmaz minimuma és az infimuma között?

Kapcsolat: Ha egy halmaznak van minimuma, akkor a minimum és az infimum megegyezik ($\inf H = \min H$). Ha nincs minimuma, az infimum a legnagyobb szám, amely alsó korlát, de nem része a halmaznak.

19. Írja le az arkhimédészi tulajdonságot!

7. Tétel (Az arkhimédészi tulajdonság). *Minden $a > 0$ és minden b valós számhoz létezik olyan n természetes szám, hogy $b < n \cdot a$, azaz*

$$\forall a > 0 \quad \textit{és} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \textit{esetén} \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \textit{hogy} \quad b < n \cdot a.$$

20. Mit állít a Cantor-tulajdonság?

8. Tétel (A Cantor-tulajdonság). *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott az $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

21. Definiálja halmaznak függvény által létesített képét!

3. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor* **a C halmaz f által létesített képén** *az*

$$f[C] := \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in C \right\} = \left\{ y \in B \;\middle|\; \exists x \in C : \; y = f(x) \right\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

22. Definiálja halmaznak függvény által létesített ősképét!

4. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor* **a D halmaz f által létesített ősképén** *az*

$$f^{-1}[D] := \left\{ x \in \mathcal{D}_f \;\middle|\; f(x) \in D \right\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

23. Mi a definíciója az összetett függvénynek?

5. Definíció. *Tegyük fel, hogy* $f : A \to B$ *és* $g : C \to D$ *olyan függvények, amelyekre*

$$\left\{x \in \mathcal{D}_g \;\middle|\; g(x) \in \mathcal{D}_f\right\} \neq \emptyset.$$

Ebben az esetben az f (**külső**) *és a* g (**belső**) *függvény* **összetett függvényét** (*vagy más szóval* f *és* g **kompozícióját**) *az* $f \circ g$ *szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \left\{x \in \mathcal{D}_g \;\middle|\; g(x) \in \mathcal{D}_f\right\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

24. Mi a definíciója a sorozatnak?

6. Definíció. *Az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *függvényt* (**valós**) **sorozatnak** *vagy* **számsorozatnak** *nevezzük. Az*

$$a(n) =: a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

helyettesítési érték a sorozat $\boldsymbol{n}$**-edik** (*vagy* $\boldsymbol{n}$**-indexű**) **tagja**, *a tag sorszámát jelző szám a tag* **indexe**.

25. Mit ért azon, hogy egy valós sorozat felülről korlátos?

8. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (a_n) *sorozat*

- **alulról korlátos**, *ha*

$$\exists k \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad k \leq a_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

- **felülről korlátos**, *ha*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad a_n \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha a sorozat alulról és felülről is korlátos, akkor **korlátos** *sorozatnak mondjuk. Ekkor*

$$\exists K > 0, \quad \text{hogy} \quad |a_n| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

26. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy valós sorozat felülről nem korlátos!

$$\forall K \in \mathbb{R} : \; a_n > K$$

28. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat monoton növő?

29. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat szigorúan monoton növő?

30. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat monoton csökkenő?

31. Mikor mondja azt, hogy egy valós sorozat szigorúan monoton csökkenő?

7. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós sorozat*

- **monoton növekvő** *(jele: $\nearrow$), ha*

$$a_n \le a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- **szigorúan monoton növekvő** *(jele: $\uparrow$), ha*

$$a_n < a_{n+1} \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- **monoton csökkenő** *(jele: $\searrow$), ha*

$$a_{n+1} \le a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén,}$$

- **szigorúan monoton csökkenő** *(jele: $\downarrow$), ha*

$$a_{n+1} < a_n \quad \textit{minden } n \in \mathbb{N} \textit{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozatot **monoton** *sorozatnak nevezzük, ha a fenti esetek valamelyike áll fenn.*

32. Adja meg az $a \in \mathbb{R}$ középpontú $r > 0$ sugarú környezet fogalmát!

9. Definíció. *Valamilyen $a \in \mathbb{R}$ és $r > 0$ esetén a*

$$K_r(a) := \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; |x - a| < r\right\}$$

halmazt ***a* középpontú *r* sugarú környezetnek** *nevezzük.*

33. Adja meg a $+\infty$ elem $r > 0$ sugarú környezetének a fogalmát!

34. Adja meg a $-\infty$ elem $r > 0$ sugarú környezetének a fogalmát!

10. Definíció. *Legyen $r > 0$ valós szám. Ekkor a $+\infty$, ill. a $-\infty$ elemek r sugarú környezetét így értelmezzük:*

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right) \qquad \textit{és} \qquad K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

35. Mit ért azon, hogy egy számsorozat konvergens?

36. Mit ért azon, hogy egy számsorozat divergens?

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat* **konvergens**, *ha*

$(*)$ $\quad \exists A \in \mathbb{R}$, *hogy* $\forall \varepsilon > 0$ *számhoz* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall n > n_0$ *indexre* $|a_n - A| < \varepsilon$.

Ekkor az A számot a sorozat ***határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim(a_n) := A, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad a_n \to A \ (n \to +\infty).$$

Az (a_n) *sorozatot* **divergensnek** *nevezzük, ha nem konvergens*

37. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy egy számsorozat divergens!

$\forall A \in \mathbb{R}$-hez $\exists \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$-hez $\exists n > n_0 \colon |a_n - A| \geq \varepsilon$.

38. Milyen állítást ismer sorozatok esetén a konvergencia és a korlátosság kapcsolatáról?

3. Tétel. *Ha az* (a_n) *sorozat konvergens, akkor korlátos is.*

39. Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $+\infty$ a határértéke?

40. Mit jelent az, hogy egy valós számsorozatnak $-\infty$ a határértéke?

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* (a_n) *sorozat*

- **határértéke** $+\infty$ (*vagy a sorozat* $+\infty$**-hez tart**), *ha*

  $$\forall P > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n > P.$$

  Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

  $$\lim(a_n) = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty, \qquad a_n \to +\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

- **határértéke** $-\infty$ (*vagy a sorozat* $-\infty$**-hez tart**), *ha*

  $$\forall P < 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n < P.$$

  Ezt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

  $$\lim(a_n) = -\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty, \qquad a_n \to -\infty, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty.$$

41. Környezetekkel fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) valós számsorozatnak (tágabb értelemben) van határértéke.

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozatnak* **van határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \colon a_n \in K_\varepsilon(A).$$

42. Hogyan definiálja egy sorozat részsorozatát?

4. Definíció. *Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy valós sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekvő sorozat (röviden: ν egy* **indexsorozat***). Ekkor az $a \circ \nu$ függvény is sorozat, amelyet az (a_n) sorozat ν indexsorozat által meghatározott* **részsorozatának** *nevezünk. Az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja:*

$$\big(a \circ \nu\big)(n) = a(\nu_n) = a_{\nu_n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

így

$$a \circ \nu = (a_{\nu_n}).$$

43. Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatairól?

5. Tétel. *Egy sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha minden részsorozatának van határértéke és mindegyike ugyanahhoz a határértékhez tart.*

44. Milyen tételt tud mondani valós sorozatok és monoton sorozatok viszonyáról?

6. Tétel. *Minden $a = (a_n)$ valós sorozatnak létezik monoton részsorozata, azaz létezik olyan $\nu = (\nu_n)$ indexsorozat, amellyel $a \circ \nu$ monoton növekedő vagy monoton csökkenő.*

45. Mit értettünk egy valós sorozat csúcsán?

Az állítás igazolásához bevezetjük egy sorozat csúcsának a fogalmát: Azt mondjuk, hogy a_{n_0} az (a_n) sorozat ***csúcsa*** (vagy csúcseleme), ha

$$\forall n \geq n_0 \ \text{ indexre } \ a_n \leq a_{n_0}.$$

46. Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet!

7. Tétel (A közrefogási elv). *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) sorozatokra teljesülnek a következők:*

- $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N \colon a_n \leq b_n \leq c_n,$
- *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke, továbbá*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke és $\lim(b_n) = A$.

47. Mi a kapcsolat sorozatok konvergenciája, ill. határértéke és a kisebb-nagyobb reláció között?

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \le b_n \quad \text{és} \quad \lim(a_n) = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(b_n) = +\infty.$$

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon b_n \le c_n \quad \text{és} \quad \lim(c_n) = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim(b_n) = -\infty.$$

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) = A \quad A - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < A + \varepsilon. \quad \lim(b_n) = A.$$

48. Igaz-e az, hogy ha az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke és $a_n > b_n$ minden n-re, akkor $\lim(a_n) > \lim(b_n)$? A válaszát indokolja!

Nem mert,

> **8. Tétel.** *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatnak van határértéke és*
>
> $$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) = B \in \overline{\mathbb{R}}.$$
>
> *Ekkor:*
>
> 1. $A < B \quad \Longrightarrow \quad \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n < b_n.$
> 2. $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n > N\colon a_n \le b_n \quad \Longrightarrow \quad A \le B.$

49. Mit tud mondani nullsorozatok összegéről?

50. Mit tud mondani korlátos sorozat és nullsorozat szorzatáról?

> **2. Tétel (Műveletek nullsorozatokkal).** *Tegyük fel, hogy* $\lim(a_n) = 0$ *és* $\lim(b_n) = 0$. *Ekkor*
>
> 1. *$(a_n + b_n)$ is nullsorozat,*
> 2. *ha (c_n) korlátos sorozat, akkor $(c_n \cdot a_n)$ is nullsorozat,*
> 3. *$(a_n \cdot b_n)$ is nullsorozat.*

51. Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(a_n) = 0$, $\lim(b_n) = 0$ és $\lim(a_n/b_n) = 7$.

$$a_n = \frac{7}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

52. Mondjon példát olyan $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(a_n) = 0$, $\lim(b_n) = 0$ és $\lim(a_n/b_n) = +\infty$.

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

53. Mondjon példát olyan (a_n), $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatokra, amelyekre $\lim(a_n) = 0$, $\lim(b_n) = 0$ és a $\lim(a_n/b_n)$ határérték nem létezik.

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n}$$

54. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok összegéről?

55. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?

56. Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?

3. Tétel (Műveletek konvergens sorozatokkal). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat konvergens. Legyen*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \qquad \textit{és} \qquad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1. $(a_n + b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B$,
2. $(a_n \cdot b_n)$ *is konvergens és* $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B$,
3. *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $\lim(b_n) \neq 0$, *akkor*

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \quad \textit{is konvergens, és} \quad \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B}.$$

57. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?

58. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?

59. Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

4. Tétel (A műveletek és a határérték kapcsolata). *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatoknak van határértéke, és legyen*

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1. *az $(a_n + b_n)$ összeg-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n) = A + B,$$

feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ összeg értelmezve van,

2. *az $(a_n \cdot b_n)$ szorzat-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n) = A \cdot B,$$

feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ szorzat értelmezve van,

3. *ha $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ hányados-sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim(a_n)}{\lim(b_n)} = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy az $\frac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ hányados értelmezve van.

60. Milyen tételt ismer monoton csökkenő sorozatok határértékével kapcsolatban?

5. Tétel. *Minden (a_n) monoton sorozatnak van határértéke.*

1. a) *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim(a_n) = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

   b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról korlátos, akkor (a_n) konvergens és*

$$\lim(a_n) = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

2. a) *Ha $(a_n) \nearrow$ és felülről nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = +\infty$.
   b) *Ha $(a_n) \searrow$ és alulról nem korlátos, akkor* $\lim(a_n) = -\infty$.

61. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?

8. Tétel. *Minden rögzített $q \in \mathbb{R}$ esetén a (q^n) mértani sorozat határértékére a következők teljesülnek:*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1, \\ = 1, & \text{ha } q = 1, \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1, \\ \text{nem létezik}, & \text{ha } q \le -1. \end{cases}$$

62. Adja meg az e számot definiáló sorozatot!

2. Tétel (Az e szám értelmezése). *Az*

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N}^+)$$

sorozat szigorúan monoton növekvő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

63. Fogalmazza meg egy valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt, és adjon olyan eljárást, amivel ezek a számok nagy pontossággal előállíthatók.

4. Tétel (Newton-féle iterációs eljárás m-edik gyökök keresésére). *Legyen $A > 0$ valós szám és $m \ge 2$ természetes szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_0 > 0 \text{ tetszőleges valós szám}, \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzióval értelmezett (a_n) sorozat konvergens, és az $\alpha := \lim(a_n)$ határértékére igaz, hogy $\alpha > 0$ és

$$\alpha^m = A.$$

64. Hogyan szól a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel?

5. Tétel (A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel). *Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

65. Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?

1. Definíció. *Az (a_n) valós sorozatot* **Cauchy-sorozatnak** *nevezzük, ha*

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m, n > n_0 \colon |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

66. Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?

6. Tétel (A Cauchy-féle konvergenciakritérium). *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

67. Mi a végtelen sor definíciója?

1. Definíció. *Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett*

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az (a_n) által generált **végtelen sornak** *(röviden* **sornak***) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum a_n, \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \text{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Ekkor azt mondjuk, hogy s_n a $\sum a_n$ sor **n-edik részletösszege***, illetve a_n a $\sum a_n$ sor* **n-edik tagja***, ahol $n \in \mathbb{N}$.*

68. Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, és hogyan értelmezzük az összegét?

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* **sor konvergens***, ha részletösszegeinek az (s_n) sorozata konvergens, azaz ha létezik és véges a $\lim(s_n)$ határérték. Ekkor ezt a határértéket a $\sum a_n$* ***végtelen sor összegének*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim(s_n).$$

A $\sum a_n$ **sor divergens***, ha a részletösszegekből képzett (s_n) sorozat divergens. Ebben az esetben az (s_n) sorozatnak nincs határértéke, vagy*

- $\lim(s_n) = +\infty$*, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***végtelen sor összege $+\infty$****,*

vagy

- $\lim(s_n) = -\infty$*, és ekkor azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$* ***végtelen sor összege $-\infty$****.*

Ezeket úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \text{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

69. Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?

1. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett $\sum\limits_{n=0} q^n$* **geometriai** *vagy* **mértani sor** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum\limits_{n=0} q^n$ sornak van összege, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

70. Mi a harmonikus sor, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$ ***a harmonikus sor divergens.***

71. Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor konvergenciájával kapcsolatban?

3. Tétel. *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- *divergens, ha $\alpha \leq 1$, de ekkor van összege:* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.
- *konvergens, ha $\alpha > 1$.*

72. Hogyan szól a Cauchy-kritérium végtelen sorokra?

6. Tétel (Cauchy-féle konvergencia kritérium sorokra). *A $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall m > n > n_0 \colon |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

73. Mondja ki a tanult szükséges feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen!

74. Igaz-e az, hogy ha $\lim(a_n) = 0$, akkor a $\sum a_n$ sor konvergens? A válaszát indokolja!

8. Tétel (Sorok konvergenciájának szükséges feltétele). *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor az (a_n) generáló sorozat nullsorozat, azaz* $\lim(a_n) = 0$.

Először szükséges, de NEM ELÉGSÉGES feltétel az hogy az 'an' generáló sorozat null sorozat legyen.

Nem mert az előbb említett szükséges de NEM ELÉGSÉGES miatt

75. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó összehasonlító kritériumokat!

11. Tétel (Összehasonlító kritériumok). *Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ nemnegatív tagú sorok. Tegyük fel, hogy*

$$\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \colon 0 \leq a_n \leq b_n.$$

Ekkor

1. **Majoráns kritérium:** *ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor $\sum a_n$ sor is konvergens.*
2. **Minoráns kritérium:** *ha a $\sum a_n$ sor divergens, akkor a $\sum b_n$ sor is divergens.*

76. Mikor nevez egy végtelen számsort abszolút konvergensnek?

3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor* **abszolút konvergens**, *ha a $\sum |a_n|$ abszolút sora konvergens.*

77. Mikor nevez egy végtelen számsort feltételesen konvergensnek?

4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor* ***feltételesen konvergens***, *ha $\sum a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens.*

78. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritériumot!

1. Tétel (A Cauchy-féle gyökkritérium). *Tekintsük a $\sum a_n$ végtelen sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

79. Mit jelent az, hogy a Cauchy-féle gyökkritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Válaszát példákkal is illusztrálja!

A=1 esetén nem alkalmazható

- a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$;
- a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \dfrac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$.

80. Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó D'Alembert-féle hányadoskritériumot!

2. Tétel (A d'Alembert-féle hányadoskritérium). *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \in \overline{\mathbb{R}}$$

határérték. Ekkor

1. *$0 \leq A < 1$ esetén a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*
2. *$A > 1$ esetén a $\sum a_n$ sor divergens,*
3. *$A = 1$ esetén a $\sum a_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

81. Mit jelent az, hogy a D'Alembert-féle hányadoskritérium bizonyos esetekben nem alkalmazható? Illusztrálja példákkal mindezt!

A=1 esetén nem alkalmazható

- $\sum \frac{1}{n}$ divergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetében $|a_n| = \frac{1}{n^2}$, azaz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$.

82. Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

83. Milyen hibabecslést tud adni a Leibniz-típusú sorok összegeire?

1. Definíció. *A* $0 \le a_{n+1} \le a_n$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ *feltételt kielégítő sorozatból képzett*

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

váltakozó előjelű sort **Leibniz-típusú** *sornak nevezzük.*

3. Tétel (Leibniz-kritérium).

1. **Konvergencia:** *A* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim(a_n) = 0$.
2. **Hibabecslés:** *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor konvergens és az összege*

$$A := \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n.$$

Ekkor

$$(*) \qquad \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

84. Adjon meg egy olyan végtelen sort, amelyik konvergens, de nem abszolút konvergens!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

85. Mit értünk egy $[0,1]$-beli szám diadikus tört alakján?

3. Definíció. *Legyen* $2 \le p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,1]$ *és* $(a_n) : \mathbb{N}^+ \to \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ *olyan sorozat, amire*

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{p^n}$$

teljesül. Ekkor azt mondjuk, hogy a $0,a_1a_2a_3\ldots_{(p)}$ *felírás az* α *szám* **p-adikus tört alakja**, *és ezt az* $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots_{(p)}$ *egyenlőséggel fejezzük ki.*

Ha $p = 2$, *akkor* **diadikus törtekről** *beszélünk.*

86. Melyik $[0,1]$-beli számoknak nincs egyértelmű diadikus tört alakja?

- $\frac{1}{2} = 0.1_2 = 0.011111\ldots_2$

87. Hogyan értelmezi egy végtelen sor zárójelezését?

4. Definíció. *Legyen* $\sum_{n=1} a_n$ *egy végtelen sor és* $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy szigorúan monoton növekvő indexsorozat, ahol* $m_0 := 0$. *Ekkor az*

$$\alpha_n := \sum_{k=m_{n-1}+1}^{m_n} a_k \qquad (n \in \mathbb{N}^+).$$

sorozattal definiált $\sum_{n=1} \alpha_n$ *végtelen sort a* $\sum_{n=1} a_n$ *sor* (m_n) *indexsorozat által meghatározott* **zárójelezésének** *nevezzük.*

88. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens. Mit tud mondani a szóban forgó sor $\sum \alpha_n$ zárójelezéseinek a konvergenciájáról?

8. Tétel. *Egy konvergens sor minden zárójelezése is konvergens sor, és összege az eredeti sor összegével egyenlő.*

89. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor valamely $\sum \alpha_n$ zárójelezett sora konvergens. Milyen feltételek mellett konvergens a $\sum a_n$ végtelen sor?

9. Tétel. *Legyen* $\sum_{n=1} \alpha_n$ *a* $\sum_{n=1} a_n$ *sor* (m_n) *indexsorozat által meghatározott zárójelezése, és tegyük fel, hogy*

i) *a zárójelek hossza korlátos, azaz* $(m_{n+1} - m_n)$ *korlátos sorozat,*

ii) $\lim(a_n) = 0$,

iii) *a* $\sum_{n=1} \alpha_n$ *sor konvergens.*

Ekkor a $\sum_{n=1} a_n$ *is konvergens, és* $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

90. Hogyan értelmezi egy végtelen sor átrendezését?

5. Definíció. *Legyen* $\sum a_n$ *egy adott végtelen sor. Tegyük fel, hogy* $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *egy bijekció, (más szóval* p *egy permutációja* $\mathbb{N}$*-nek). Ekkor a* $\sum a_{p_n}$ *végtelen sort a* $\sum a_n$ *sor* (p_n) *által meghatározott* **átrendezésének** *nevezzük.*

91. Milyen állítást ismer abszolút konvergens sorok átrendezéseit illetően?

10. Tétel. *Ha a* $\sum a_n$ *végtelen sor abszolút konvergens, akkor tetszőleges* $(p_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *permutációval képzett* $\sum a_{p_n}$ *átrendezése is abszolút konvergens, és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{p_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Tehát egy abszolút konvergens sor bármely átrendezése is abszolút konvergens sor, és összege ugyanaz, mint az eredeti soré.

92. Milyen állítást ismer feltételesen konvergens sorok átrendezéseit illetően?

11. Tétel (Riemann átrendezési tétele). *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *egy feltételesen konvergens sor (azaz* $\sum a_n$ *konvergens, de* $\sum |a_n|$ *divergens). Ekkor a sornak*

1. *minden* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *esetén létezik olyan átrendezése, amelynek összege* A*,*
2. *van olyan átrendezése, aminek nincs összege.*

93. Definiálja a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok téglányszorzatát!

94. Definiálja a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok Cauchy-szorzatát!

1. Definíció. *A* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *sorok*

- **téglányszorzata** *a*

$$\sum_{n=0} t_n, \qquad t_n := \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

- **Cauchy-szorzata** *pedig a*

$$\sum_{n=0} c_n, \qquad c_n := \sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

végtelen sor.

95. Milyen tételt ismer végtelen sorok téglányszorzatának a konvergenciáját illetően?

1. Tétel. *Tegyük fel, hogy a* $\sum\limits_{n=0} a_n$ *és a* $\sum\limits_{n=0} b_n$ *végtelen sorok konvergensek. Ekkor a* $\sum\limits_{n=0} t_n$ *téglányszorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$

azaz konvergens sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a két sor összegének szorzatával egyezik meg.

96. Fogalmazza meg az abszolút konvergens sorok szorzataira vonatkozó tételt!

2. Tétel (Abszolút konvergens sorok szorzatai). *Tegyük fel, hogy a* $\sum_{n=0} a_n$ *és* $\sum_{n=0} b_n$ *végtelen sorok mindegyike abszolút konvergens. Ekkor*

1. *a* $\sum_{n=0} t_n$ *téglányszorzat is abszolút konvergens,*
2. *a* $\sum_{n=0} c_n$ *Cauchy-szorzat is abszolút konvergens,*
3. *az összes* $a_i b_j$ $(i, j \in \mathbb{N})$ *szorzatból tetszés szerinti sorrendben és csoportosításban képzett* $\sum_{n=0} d_n$ *végtelen sor is abszolút konvergens, és*

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$$

97. Írja le a *hatványsor* definícióját!

2. Definíció. *Az adott* $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozattal és az* $a \in \mathbb{R}$ *számmal képzett*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénysort $a \in \mathbb{R}$ *középpontú,* (α_n) *együtthatójú* **hatványsornak** *nevezzük.*

98. Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?

4. Tétel (A Cauchy–Hadamard-tétel.). *Tekintsük a* $\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ *hatványsort, és tegyük fel, hogy*

$$\exists \lim \left(\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a hatványsor konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{A} \qquad \left(\frac{1}{+\infty} := 0, \quad \frac{1}{0} := +\infty\right).$$

99. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum!

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=0} x^n\right) = (-1, 1)$$

100. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1, 1]$ intervallum!

$$\mathrm{KH}\left(\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{n} x^n\right) = (-1, 1]$$

101. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1)$ intervallum!

$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=1} \tfrac{1}{n}\, x^n\Big) = [-1, 1)$$

102. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1, 1]$ intervallum!

$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=1} \tfrac{1}{n^2}\, x^n\Big) = [-1, 1]$$

103. Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyik csak az $a = 2$ pontban konvergens!

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$$

104. Definiálja az exp függvényt!

7. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **exponenciális függvénynek** *nevezzük.*

105. Definiálja a sin függvényt!

9. Tétel. *A* $\sum\limits_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **szinuszfüggvénynek** *nevezzük.*

106. Definiálja a cos függvényt!

10. Tétel. *A* $\sum_{n=0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **koszinuszfüggvénynek** *nevezzük.*

107. Mit jelent az, hogy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ torlódási pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *halmaznak* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **torlódási pontja**, *ha az a minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \text{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ *szimbólummal jelöljük.*

108. Mit jelent az, hogy $a \in H$ izolált pontja a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak?

Legyen $H \neq \emptyset$ egy számhalmaz. Akkor mondjuk, hogy az a valós szám a H halmaz ***izolált pontja***, ha $a \in H \setminus H'$, azaz a a H halmaz eleme, de nem torlódási pontja a H halmaznak. Más szavakkal:

$$\exists r > 0\colon K_r(a) \cap H = \{a\}.$$

109. Hogyan értelmezi egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek egy $a \in \mathcal{D}'_f$ helyen vett határértékét?

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $a \in \mathcal{D}'_f$ *pontban* **van határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \Big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\Big) \cap \mathcal{D}_f\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A-t a függvény a-beli **határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

110. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett véges határérték definícióját!

111. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett plusz végtelen határérték definícióját!

112. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett mínusz végtelen határérték definícióját!

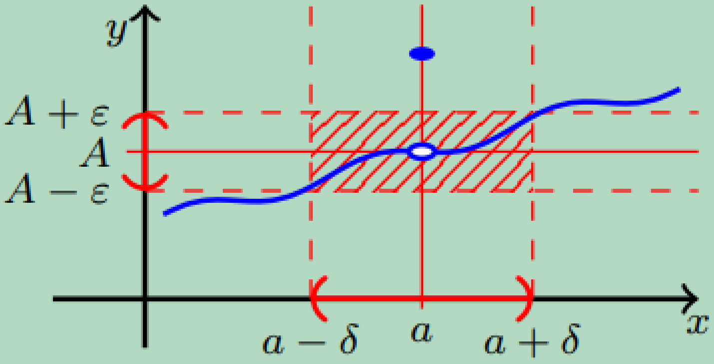
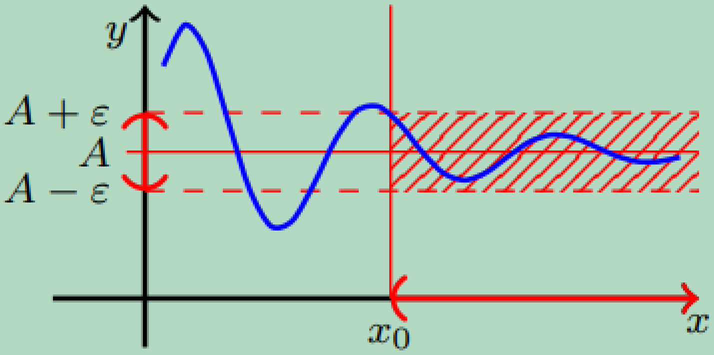
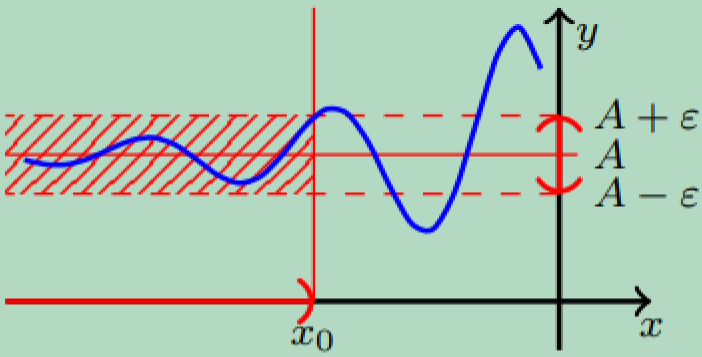
113. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett véges határérték definícióját!

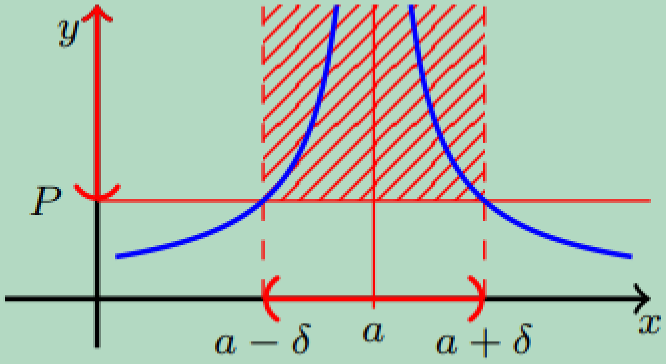
114. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a mínusz végtelenben vett véges határérték definícióját!

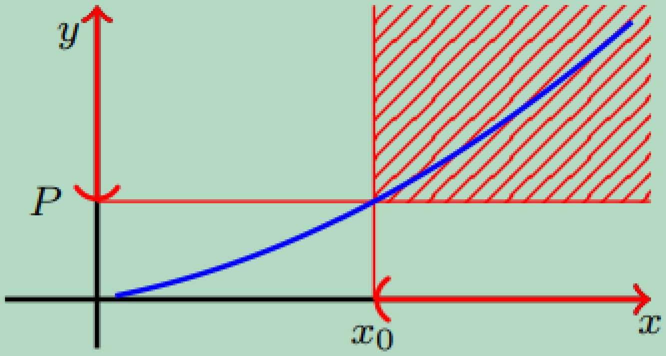
115. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett plusz végtelen határérték definícióját!

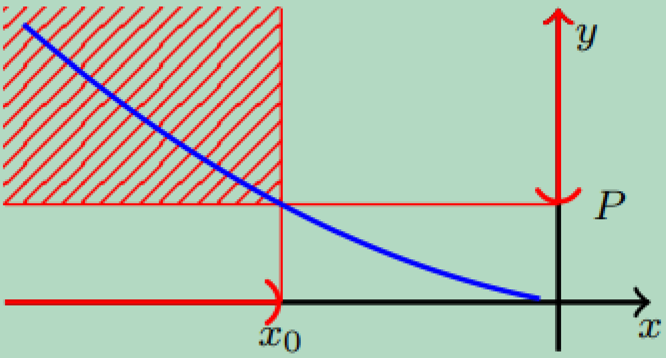
116. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték definícióját!

117. Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a mínusz végtelenben vett mínusz végtelen határérték definícióját!

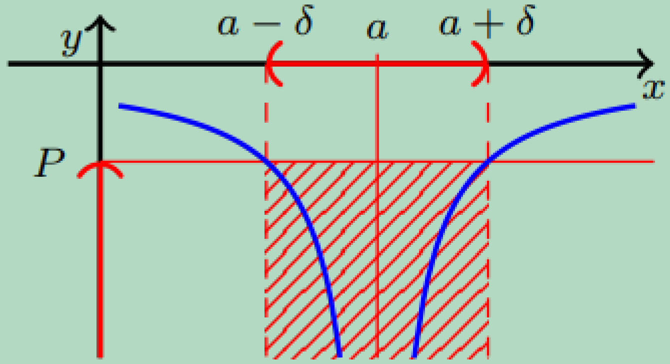
$\boldsymbol{A = \lim_{a} f}$	$A \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$a = +\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$
$a = -\infty$	 $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$

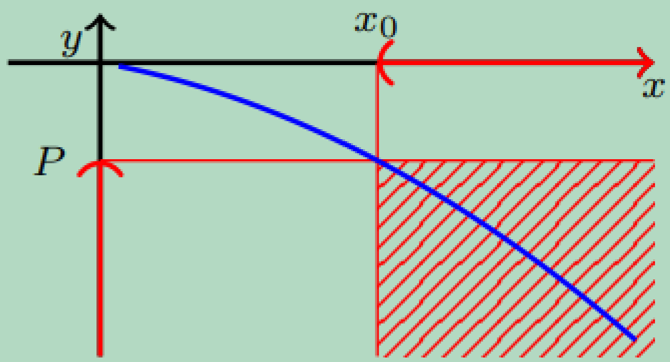
<table>
<tr><th>$\boldsymbol{A = \lim_a f}$</th><th>$A = +\infty$</th></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}$</td><td>

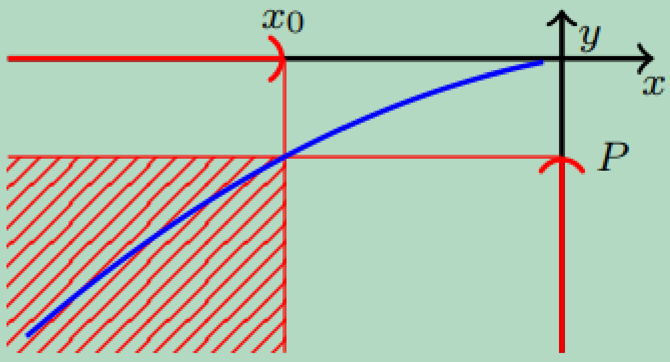
$\forall P > 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x - a| < \delta \colon f(x) > P$</td></tr>
<tr><td>$a = +\infty$</td><td>

$\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) > P$</td></tr>
<tr><td>$a = -\infty$</td><td>

$\forall P > 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) > P$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>$A = \lim\limits_{a} f$</th><th>$A = -\infty$</th></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{R}$</td><td>

$\forall P < 0$-hoz $\exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < |x-a| < \delta \colon f(x) < P$</td></tr>
<tr><td>$a = +\infty$</td><td>

$\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 \colon f(x) < P$</td></tr>
<tr><td>$a = -\infty$</td><td>

$\forall P < 0$-hoz $\exists x_0 < 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x < x_0 \colon f(x) < P$</td></tr>
</table>

118. Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet!

4. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f'$ *és* $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

$$\lim_a f = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \ \text{ esetén } \ \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

119. Hogyan szól a függvények szorzatának a határértékére vonatkozó tétel?

120. Hogyan szól a függvények hányadosának a határértékére vonatkozó tétel?

6. Tétel (A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)'$ *és léteznek az* $A := \lim_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértékek. Ekkor*

1. *az* $f + g$ *összegfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

   $$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$

   feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *összeg értelmezve van,*
2. *az* $f \cdot g$ *szorzatfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

   $$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$

   feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *szorzat értelmezve van,*
3. *az* f/g *hányadosfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*

   $$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{A}{B},$$

   feltéve, hogy az $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *hányados értelmezve van.*

121. Definiálja függvény jobb oldali határértékét!

3. Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $a \in \mathbb{R}$ *és* $a \in \left(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\right)'$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek az* a *helyen (vagy* a*-ban)* **van jobb oldali határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}}, \ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ a < x < a + \delta \colon \ f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A *egyértelmű, és ezt az* f *függvény* a*-ban vett* **jobb oldali határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a+0} f = A, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A, \qquad f(a+0) = A.$$

122. Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?

1. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének a határértéke). *Tegyük fel, hogy a $\sum \alpha_n(x-a)^n$ hatványsor R konvergenciasugara pozitív. Jelölje*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big)$$

az összegfüggvényét. Ekkor $\forall b \in K_R(a)$ pontban létezik a $\lim_{x\to b} f(x)$ határérték, és

$$\lim_{x\to b} f(x) = f(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(b-a)^n.$$

123. Mit tud mondani monoton növekvő függvények határértékéről?

3. Tétel. *Legyen $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum. Ha az f függvény monoton (α, β)-n, akkor f-nek $\forall a \in (\alpha, \beta)$ pontban létezik a jobb oldali, illetve a bal oldali határértéke, és ezek végesek.*

a) *Ha $f \nearrow (\alpha, \beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x < a\Big\}.$$

b) *Ha $f \searrow (\alpha, \beta)$-n, akkor*

$$\lim_{a+0} f = \sup\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x > a\Big\},$$

$$\lim_{a-0} f = \inf\Big\{f(x) \;\Big|\; x \in (\alpha, \beta),\ x < a\Big\}.$$

124. Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát!

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* **folytonos az $\boldsymbol{a \in \mathcal{D}_f}$ pontban**, *ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ |x-a| < \delta\colon \big|f(x) - f(a)\big| < \varepsilon.$$

Jelölés: $\boldsymbol{f \in C\{a\}}$.

125. Mi a kapcsolat a pontbeli folytonosság és a határérték között?

4. Tétel. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

1. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}'_f$, azaz izolált pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor $f \in C\{a\}$,*
2. *Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, azaz torlódási pontja $\mathcal{D}_f$-nek, akkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_a f \quad \text{és} \quad \lim_a f = f(a).$$

126. Írja le a folytonosságra vonatkozó átviteli elvet!

5. Tétel (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv). *Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

$$f \in C\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim_{n\to+\infty} x_n = a \quad \text{esetén} \quad \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a).$$

127. Milyen tételt ismer hatványsor összegfüggvényének a folytonosságáról?

7. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága). *Minden hatványsor összegfüggvénye folytonos a hatványsor teljes konvergenciahalmazán.*

128. Milyen tételt ismer a folytonos függvények előjeltartásáról?

8. Tétel (Előjeltartás). *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Ekkor*

$$\exists K(a),\ \forall x \in \mathcal{D}_f \cap K(a)\colon f(x) > 0,$$

azaz $f(a)$ előjelét egy alkalmas $K(a)$ környezetben felvett függvényértékek is öröklik.

129. Mondja ki az összetett függvény folytonosságára vonatkozó tételt?

9. Tétel (Az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$. Ekkor $f \circ g \in C\{a\}$, azaz az összetett függvény „örökli" a belső- és a külső függvény folytonosságát.*

130. Definiálja a megszüntethető szakadási hely fogalmát!

131. Definiálja az elsőfajú szakadási hely fogalmát!

1. Definíció. *A szakadási helyeket a következőképpen osztályozzuk:*

0. *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* **megszüntethető szakadási helye**, *ha*

$$\exists \lim_a f \quad \textit{véges határérték, de} \quad \lim_a f \neq f(a).$$

1. *Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény* **elsőfajú szakadási helye** *(vagy f-nek* **ugrása van** *a-ban), ha*

$$\exists \lim_{a+0} f \quad \textit{és} \quad \exists \lim_{a-0} f, \quad \textit{ezek végesek, de} \quad \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

2. *Minden más esetben, amikor a függvény nem folytonos egy $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, azt mondjuk, hogy az f függvény az a helyen* **másodfajú szakadása van**.

132. Mit tud mondani korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészletéről?

függvény értékkészlete szintén egy I korlátos és zárt intervallum.

133. Hogyan szól a Weierstrass-tétel?

3. Tétel (Weierstrass tétele). *Egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvénynek mindig van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye, azaz*

$$f \in C[a,b] \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \alpha, \beta \in [a,b],\ \forall x \in [a,b] \colon f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha).$$

134. Mit mond ki a Bolzano-tétel?

4. Tétel (Bolzano tétele). *Ha egy korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény az intervallum két végpontjában különböző előjelű, akkor a függvénynek legalább egy zérushelye van, azaz*

$$f \in C[a,b] \quad \textit{és} \quad f(a) \cdot f(b) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists \xi \in (a,b) \colon f(\xi) = 0.$$

135. Mit jelent az, hogy egy függvény Darboux–tulajdonságú?

4. Definíció. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Azt mondjuk, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény* **Darboux-tulajdonságú az *I* intervallumon**, *ha minden $a, b \in I$, $a < b$, $f(a) \neq f(b)$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz (a,b)-ben.*

136. Hogy szól az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel?

7. Tétel (Az inverz függvény folytonossága). *Minden korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos és invertálható függvény esetében az inverz függvény folytonos, azaz*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \in C[a, b],\ \exists f^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad f^{-1} \in C(\mathcal{R}_f).$$

137. Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény konvex egy I intervallumon?

138. Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény konkáv egy I intervallumon?

1. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $I \subset \mathcal{D}_f$ egy intervallum. Ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén igaz az, hogy*

- $f(x) \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(x \in (a, b)\big)$,

  akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **konvex az I intervallumon**,

- $f(x) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \qquad \big(x \in (a, b)\big)$,

  akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **konkáv az I intervallumon**,

Szigorú egyenlőtlenségek esetén **szigorúan konvex**, *illetve* **szigorúan konkáv** *függvényekről beszélünk.*

139. Mondjon példát olyan konvex függvényre, amely nem szigorúan konvex!

$f(x) = |x|$

140. Hogy szól az inverz függvény konvexitásáról szóló tétel?

3. Tétel (Az inverz függvény konvexitása). *Legyen $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növekvő konvex (ill. konkáv) függvény az I intervallumon, és tegyük fel, hogy $J := \mathcal{R}_f$ szintén intervallum. Ekkor az f függvény inverze konkáv (ill. konvex) a J intervallumon.*

141. Értelmezze az ln függvényt!

1. Definíció. *Az $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-en, ezért létezik inverze. Legyen*

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

a (természetes alapú vagy e alapú) **logaritmusfüggvény**.

142. Mi a definíciója az $a^x \quad (a, x \in \mathbb{R}, a > 0)$ hatványnak?

3. Definíció. *Legyen $a > 0$ valós szám. Az* **a alapú exponenciális függvényt** *így értelmezzük:*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) = a^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

143. Értelmezze az $\log_a$ függvényt!

4. Definíció. *Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az $\exp_a$ szigorúan monoton $\mathbb{R}$-en, ezért van inverze, amelyet* **a alapú logaritmusfüggvénynek** *nevezünk és $\log_a$-val jelölünk, azaz*

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \text{ha } a > 0 \text{ és } a \neq 1.$$

144. Mi a definíciója az x^α $(x > 0, \alpha \in \mathbb{R})$ hatványfüggvénynek?

5. Definíció. *Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az α* **kitevőjű hatványfüggvényt** *így értelmezzük:*

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

145. Hogyan értelmezzük a π számot?

2. Tétel (A π szám értelmezése). *A $\cos$ függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$-nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként* **értelmezzük a π számot***:*

$$\pi := 2\xi.$$

146. Mikor mondjuk azt, hogy egy függvény periodikus? Adjon példát periodikus függvényre!

3. Tétel. *A $\sin$ és a $\cos$ függvény 2π szerint periodikus, azaz*

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$