

15. Frobenius mátrixnorma, illeszkedés.

15. Frobenius mátrixnorma, illeszkedés.

- a) Írja fel a Frobenius mátrixnorma képletét (bizonyítás nélkül), igazolja, hogy nem indukált norma. Definiálja az illeszkedés fogalmát. Igazolja, hogy indukált norma minden illeszkedik a megfelelő vektornormához.

Definíció: Frobenius-norma

A következő függvényt *Frobenius-normának* nevezzük:

$$\|\cdot\|_F : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

- (b) A Frobenius-norma nem indukált mátrixnorma.

Megoldás:

$$\|I\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1} = \sqrt{n} \neq 1.$$

VAGY

(Gyakorlatról vett trükk, miszerint az egységmátrix normája indukált norma esetén 1. Tehát ha nem 1, akkor nem indukált norma.)

$$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$\|I\| = 1$ indukált norma esetén.

$$\|I\|_F := \sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2} = \sqrt{n}$$

(Definíció alapján a minden elem négyzetének az összege, az egységes mátrix pontosan n db 1-est tartalmaz a többi mind nulla.)

$$\sqrt{n} > 1, \text{ha } n > 1$$

Tehát, ha $n > 1$ mátrixok esetén a Frobenius-norma nem természetes.

32. Mit jelent az illeszkedés normák esetén?

A $\|\cdot\|$ mátrixnorma és a $\|\cdot\|_v$ vektornorma illeszkedik, ha $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ -re

$$\|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} \implies \frac{\|\mathbf{Ax}\|_v}{\|\mathbf{x}\|_v} \leq \|\mathbf{A}\| \implies \|\mathbf{Ax}\|_v \leq \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|_v.$$