- Milyen viszony van az alsó és a felső közelítő összegek között?

Tétel. *Legyen* $f \in K[a,b]$, *és t.f.h.* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$. *Ekkor*

1^o *Ha* τ_2 *finomabb* τ_1*-nél (azaz* $\tau_1 \subset \tau_2$*), akkor*

$$s(f,\tau_1) \le s(f,\tau_2) \quad \text{és} \quad S(f,\tau_1) \ge S(f,\tau_2),$$

azaz egy felosztás finomításakor az alsó közelítő összeg nem csökkenhet, a felső közelítő összeg pedig nem nőhet.

2^o *Ha* $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{F}[a,b]$ *tetszőleges, akkor*

$$s(f,\tau_1) \le S(f,\tau_2),$$

azaz bármely felosztáshoz tartozó alsó közelítő összeg legfeljebb akkora, mint bármely (más) felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg.

- Mi a Darboux-féle alsó integrál definíciója?

- Mi a Darboux-féle felső integrál definíciója?

Definíciók. *Legyen* $f \in K[a,b]$.

1^o *Az* $\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \ne \emptyset$ *halmaz felülről korlátos, ezért* $\exists \sup\{s(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} =: I_*(f) \in \mathbb{R}$ *(véges).*

Az $\boxed{I_*(f)}$ *számot az* f *függvény* ***Darboux-féle alsó integráljának*** *nevezzük.*

2^o *Az* $\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} \ne \emptyset$ *halmaz alulról korlátos, ezért* $\exists \inf\{S(f,\tau) \mid \tau \in \mathcal{F}[a,b]\} =: I^*(f) \in \mathbb{R}$ *(véges).*

$\boxed{I^*(f)}$ *az* f *függvény* ***Darboux-féle felső integrálja.***

Világos, hogy $I_*(f)$ és $I^*(f)$ minden $f \in K[a,b]$ függvényre létezik és

$$I_*(f) \le I^*(f) \quad \big(\forall\, f \in K[a,b]\big).$$

- Mikor nevez egy függvényt Riemann-integrálhatónak?
- Hogyan értelmezi egy függvény határozott (vagy Riemann-)integrálját?

Definíció *A.m.h. az $f \in K[a,b]$ függvény* ***Riemann-integrálható az*** $[a,b]$ ***intervallumon*** (*röviden* ***integrálható*** $[a,b]$***-n***), *ha $I_*(f) = I^*(f)$. Ezt a számot az f függvény $[a,b]$ intervallumon vett* ***Riemann-integráljának*** (*vagy más szóval* ***határozott integráljának***) *nevezzük, és így jelöljük:*

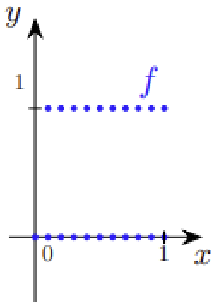
$$\int_a^b f \quad vagy \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

$\boxed{R[a,b]}$ *jelöli az $[a,b]$ intervallumon Riemann-integrálható függvények halmazát.*

- # Adjon példát nem integrálható függvényre!

Példa nem integrálható függvényre:

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}). \end{cases}$$



Ekkor $I_*(f) = 0$ és $I^*(f) = 1$, ezért $f \notin R[0,1]$.

- **Mi az oszcillációs összeg definíciója?**

Definíció. *Ha* $f \in K[a,b]$ *és* $\tau \in \mathcal{F}[a,b]$, *akkor*

$$\Omega(f,\tau) := S(f,\tau) - s(f,\tau)$$

az f *függvény* τ *felosztáshoz tartozó* ***oszcillációs összege***.

- Hogyan szól a Riemann-integrálhatósággal tanult kritérium az oszcillációs összegekkel megfogalmazva?

Tétel. $f \in R[a,b] \iff$

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz \quad \exists \tau \in \mathcal{F}[a,b] : \ \Omega(f,\tau) < \varepsilon.$$