7. A Schur-komplementer.

a) Definiálja a Schur-komplementert. Ismertesse a GE megmaradási tételeit (és a kapcsolódó fogalmakat), majd bizonyítsa a determináns megmaradására vonatkozó tételt.

19. Definiálja az A mátrix $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementerét!

Ha $\mathbf{A_{11}} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ és invertálható, akkor az $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}] = \mathbf{A_{22}} - \mathbf{A_{21}} \cdot \mathbf{A_{11}^{-1}} \cdot \mathbf{A_{12}}$ mátrix az $\mathbf{A}$-nak az $\mathbf{A_{11}}$-re vonatkozó Schur-komplementere.

20. Mondja ki a a Gauss-elimináció (legalább) 4 tulajdonságának megmaradási tételét!

- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szimmetrikus.
- Ha $\mathbf{A}$ szimmetrikus pozitív definit, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szimmetrikus pozitív definit.
- Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ is szigorúan diagonálisan domináns.
- Ha $\mathbf{A}$ fél szávszélessége s, akkor $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ fél sávszélessége is legfeljebb s. (A sávon kívüli nulla elemek megmaradnak.)
- $[\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]$ profilja az $\mathbf{A}$ profiljához képest nem csökkenhet. (A soronkénti és oszloponkjénti első nulla elemig minden nulla marad.)
- $\det(\mathbf{A}) \neq 0 \Rightarrow \det([\mathbf{A} \mid \mathbf{A_{11}}]) \neq 0$.

Az $\mathbf{A}$ mátrix szimmetrikus mátrix, ha $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ és pozitív definit, ha $\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \mathbf{x}^\top \mathbf{Ax} > 0$ $(\forall\, \mathbf{x} \neq \mathbf{0})$

$\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i\text{-re.}$$

$\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns az oszlopaira, ha

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ji}| \quad \forall i\text{-re.}$$

Az $\mathbf{A}$ fél sávszélessége $s \in \mathbb{N}$, ha
$\forall\, i, j : |i - j| > s : a_{ij} = 0$, és
$\exists\, k, l : |k - l| = s : a_{kl} \neq 0$.

Az $\mathbf{A}$ profilja a k_i és l_j számok összessége, melyekre
$j = 1 \dots k_i$-re $a_{ij} = 0$ és $a_{i,k_i+1} \neq 0$ illetve
$i = 1 \dots l_j$-re $a_{ij} = 0$ és $a_{l_j+1,j} \neq 0$.

Biz.: 1.) Determináns:
Mivel a GE determináns tartó, így $\det(A) = \det(A^{(1)}) \neq 0$.

$$A^{(1)} = \left[\begin{array}{r|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & [A|A_{11}] \end{array}\right]$$

$$0 \neq \det(A^{(1)}) = \underbrace{\det(A_{11})}_{\neq 0} \cdot \det([A|A_{11}]) \quad \Leftrightarrow \quad \det([A|A_{11}]) \neq 0$$