16. LER érzékenysége I.

16. LER érzékenysége I.

a) Formalizálja LER jobboldalának perturbációját. Ismertesse a megoldás megváltozásának mértékére tanult tételeket (bizonyítás nélkül). Definiálja a kondíciószámot és igazolja tulajdonságait.

$$A \cdot x = b$$

Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik meg a LER megoldása, ha a jobb oldalt, azaz a vektort *kicsit* megváltoztatjuk, „perturbáljuk"! (Mérési pontatlanság, kerekítési hiba, ...)

1. **Eredeti:**
   adott A és b, kiszámíthatjuk a megoldást: x.
   $Ax = b$
2. **Módosult:**
   adott A és $b + \Delta b$, kiszámíthatjuk a megoldást: $x + \Delta x$.
   $A(x + \Delta x) = (b + \Delta b)$

Nyilván a megoldás is *kicsit* más lesz...

Példa:

1. **Eredeti:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{megoldás:} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. **Módosult:**

$$\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \cdot (x + \Delta x) = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix}$$

3. A módosult LER megoldása: $\quad x + \Delta x = \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix}$

Tétel: LER érzékenysége a jobb oldal pontatlanságára

Ha A invertálható és $b \neq 0$, akkor illeszkedő normákban

$$\frac{1}{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \cdot \left\|A^{-1}\right\| \cdot \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|},$$

azaz

$$\frac{1}{\mathrm{cond}\,(A)} \cdot \delta b \leq \delta x \leq \mathrm{cond}\,(A) \cdot \delta b.$$

Tétel: LER érzékenysége a mátrix pontatlanságára

Ha A invertálható, $b \neq 0$ és $\|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, akkor indukált mátrixnormában

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \cdot \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Definíció: mátrixok kondíciószáma

Adott $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható mátrix és $\|.\|$ mátrixnorma esetén a $\mathrm{cond}\,(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ mennyiséget az A mátrix *kondíciószámának* nevezzük. (Jele néha $\kappa(A)$. [kappa])

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 1. rész

(a) Indukált mátrixnorma esetén $\mathrm{cond}\,(A) \geq 1$.

(b) $\mathrm{cond}\,(c \cdot A) = \mathrm{cond}\,(A), \quad (c \in \mathbb{R}, c \neq 0)$.

(c) Ha Q ortogonális, akkor $\mathrm{cond}_2(Q) = 1$.

Biz.:

(a) $1 = \|I\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A)$.

(b) $\mathrm{cond}\,(cA) = \|cA\| \cdot \|(cA)^{-1}\| = \|cA\| \cdot \left\|\frac{1}{c}A^{-1}\right\| =$

$$= |c| \cdot \|A\| \cdot \frac{1}{|c|} \cdot \|A^{-1}\| = \mathrm{cond}\,(A).$$

(c) $\|Q\|_2 = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Qx\|_2}{\|x\|_2} = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\sqrt{x^\top Q^\top Qx}}{\sqrt{x^\top x}} = 1$

$\|Q^{-1}\|_2 = \left\|Q^\top\right\|_2 = 1, \quad \mathrm{cond}_2(Q) = 1$ □

Állítás: a kondíciószám tulajdonságai – 2. rész

(d) Ha A szimmetrikus, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \dfrac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

(e) Ha A szimm., pozitív definit, akkor $\operatorname{cond}_2(A) = \frac{\max \lambda_i(A)}{\min \lambda_i(A)}$.

(f) Ha A invertálható, akkor $\operatorname{cond}(A) \geq \frac{\max|\lambda_i(A)|}{\min|\lambda_i(A)|}$.

Biz.:

(d) Eml.: $\|A\|_2 = \sqrt{\max \lambda_i(A^\top A)}$.
De $\lambda_i(A^\top A) = \lambda_i(A^2) = (\lambda_i(A))^2$, így $\|A\|_2 = \max|\lambda_i(A)|$.
Az inverzre: $\|A^{-1}\|_2 = \max|\lambda_i(A^{-1})| = \dfrac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$.

(e) A pozitiv definitség miatt nem kell abszolút érték.

(f) $\|A\| \geq \varrho(A) = \max|\lambda_i(A)|$, $\|A^{-1}\| \geq \varrho(A^{-1}) = \frac{1}{\min|\lambda_i(A)|}$. $\square$