6. Az LU-felbontás direkt módon.

6. Az LU-felbontás direkt módon.

a) Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Egy mátrix LU-felbontásán az A = LU felbontást értjük ahol L egy alsó háromszögmátrix melynek főátlójában 1-esek állnak, míg U egy felső háromszög mátrix.

Módszer: közvetlenül mátrixszorzás alapján.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

Sorfolytonosan: U 1. sorát ismerjük. A 2. sor számítása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} \cdot 2 &= -4 \\ l_{21} \cdot 0 + 1 \cdot u_{22} &= 5 \\ l_{21} \cdot 3 + 1 \cdot u_{23} &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 5 & -2 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} l_{21} &= -2 \\ u_{22} &= 5 \\ u_{23} &= -2 - (-2) \cdot 3 = 4 \end{aligned}$$

A 3. sor számítása:

$$\begin{aligned} l_{31} \cdot 2 &= 6 \\ l_{31} \cdot 0 + l_{32} \cdot u_{22} &= -5 \\ l_{31} \cdot 3 + l_{32} \cdot u_{23} + 1 \cdot u_{33} &= 4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} l_{31} &= 3 \\ l_{32} &= \frac{-5}{5} = -1 \\ u_{33} &= 4 - 3 \cdot 3 - (-1) \cdot 4 = -1 \end{aligned}$$

Tétel: az LU-felbontás „közvetlen" kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \le j \text{ (felső)} \qquad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \qquad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindig ismert az egész jobb oldal.

Helyes sorrendek: oszlop-,sor – folytonosan, parkettaszerűen

Tétel: Az LU-felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$