Logika

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő kijelentések, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik:
igaz (I, ↑), **hamis** (H,↓), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

Definíció (Formulák)

- A predikátumok a legegyszerűbb, ún. elemi formulák.
- Ha $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ két formula, akkor $\neg\mathcal{A}$, $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B})$ is formulák.
- Ha $\mathcal{A}$ egy formula és x egy változó, akkor , $(\exists x\mathcal{A})$ és $(\forall x\mathcal{A})$ is formulák.

Halmazok

Definíció

- Az A halmaz részhalmaza a B halmaznak, $A \subset B$, ha $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.
- Ha $A \subset B$-nek, de $A \neq B$, akkor A valódi részhalmaza B-nek: $A \subsetneq B$.

Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B uniója,

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Általában: legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cup\mathcal{A} = \cup_{A\in\mathcal{A}}A = \{x : \exists A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Definíció

Legyen A, B két halmaz. A és B metszete,

$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$. Általában: legyen $\mathcal{A}$

egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor

$$\cap\mathcal{A} = \cap_{A\in\mathcal{A}}A = \{x : \forall A \in \mathcal{A}, x \in A\}.$$

Definíció

- Az A, B halmazok diszjunktak, ha $A \cap B = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ diszjunkt, ha $\cap\mathcal{A} = \emptyset$.
- Legyen $\mathcal{A}$ egy halmazrendszer (halmaz, mely elemei halmazok). Ekkor $\mathcal{A}$ elemei páronként diszjunktak, ha
$$\forall A, B \in \mathcal{A}, A \neq B : A \cap B = \emptyset$$

Definíció

Két A, B halmaz különbsége
$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$$

Definíció

Legyen X egy rögzített alaphalmaz. Ekkor A halmaz komplementere
$$\overline{A} = X \setminus A = \{a \in X : a \notin A\}.$$

Definíció

Két A, B halmaz szimmetrikus differenciája
$$A \vartriangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Definíció

Egy A halmaz hatványhalmaza $\mathcal{P}(A) = 2^A = \{B : B \subset A\}$, A összes részhalmazának halmaza.

Definíció

Adott A, B halmazok Descartes-szorzata: $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Relációk

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R éretelmezési tartománya ('domain'): $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'): $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\}$.

Definíció

Egy $R \subset X \times Y$ reláció inverze az

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

Definíció

Legyen R egy binér reláció.

- Az A halmaz képe az $R(A) = \{y : \exists x \in A : (x, y) \in R\}$.
- Adott B halmaz inverz képe, vagy teljes ősképe az $R^{-1}(B)$, a B halmaz képe az R^{-1} reláció esetén.

Definíció

Legyen $R, S \subset X \times Y$ két binér reláció.

- R az S kiterjesztése (és S az R leszűkítése), ha $S \subset R$.
- Ha $A \subset X$, akkor R reláció A-ra való leszűkítése (A-ra való megszorítása)
$$R|_A = \{(x, y) \in R : x \in A\}.$$

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

Definíció (szimmetrikusság)

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$
  Példa: $=, K$, ellenpélda: $\leq, <$
- R reláció antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y$
  Példa: $=, \leq, \subset$ ellenpélda: K
- R reláció szigorúan antiszimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow \neg(yRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

Definíció (reflexivitás)

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, K$ ellenpélda: $<$
- R reláció irreflexív, ha $\forall x \in X : \neg(xRx)$
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, \subset, |, K$

Definíció (tranzitivitás)

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
  Példa: $=, \leq, \subset, |, <$ ellenpélda: K

Definíció

- R reláció dichotóm, ha $\forall x, y \in X$ esetén $xRy \vee yRx$ (megengedő „vagy”!)
  Példa: $\leq$ ellenpélda: $\subset, |$

Definíció

- R reláció trichotóm,
  ha $\forall x, y \in X$ esetén $x = y$, xRy és yRx közül pontosan egy teljesül
  Példa: $<$ ellenpélda: $=, \leq, K$

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív, tranzitív és szimmetrikus.

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

Definíció

Legyen $\sim$ egy ekvivalencia reláció az X halmazon. Tetszőleges $x \in X$ esetén az

$$\tilde{x} = [x] = \{y \in X : y \sim x\}$$

halmazt az x ekvivalencia osztályának nevezzük.

Definíció

- Egy R reláció részbenrendezés, ha reflexív; tranzitív és antiszimmetrikus.
- Ha valamely $x, y \in X$ párra $x \preceq y$ vagy $y \preceq x$, akkor x és y összehasonlítható.
- Ha minden (x, y) pár összehasonlítható (azaz $\preceq$ dichotóm), akkor $\preceq$ rendezés.

Függvények

Definíció

Legyen $f \subset X \times Y$ egy (binér) reláció. Ha egyelemű halmaz képe legfeljebb egyelemű, azaz

$$xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z,$$

akkor az f-et függvénynek hívjuk.
Speciálisan az xfy helyett a $f(x) = y$ használjuk.

Komplex Számok

Definíció

A komplex számok halmaza a
$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$
Legyen $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Ekkor

- z valós része $\mathrm{Re}(z) = a$
- z képzetes része $\mathrm{Im}(z) = b$
- z abszolút értéke $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Definíció

- Egy $z = a + bi \in \mathbb{C}$ szám konjugáltja: $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.
- Ezzel $z \neq 0$ esetén $1/z = \bar{z}/|z|^2$.

Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

Kombinatorika

Definíció

Legyenek $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

értéket binomiális együtthatónak nevezzük.

Gráfok

Definíció

Egy $G = (V, E)$ egy egyszerű gráf, ha

- V a gráf pontjainak halmaza,
- E a gráf éleinek halmaza, ahol E a V-ből alkotott rendezetlen párok egy halmaza.

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráf véges, ha véges sok pontja van (V egy véges halmaz).

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy egyszerű véges gráf.

- A $v \in V$ csúcs és az $e \in E$ él illeszkednek, ha $v \in e$.
- A $v \in V$ csúcs fokszáma a rá illeszkedő élek száma: $d(v) = |\{e \in E : v \in e\}|$
- A $v \in V$ csúcs izolált csúcs, ha $d(v) = 0$.
- Az $u, v \in V$ csúcsok szomszédosak, ha $u \neq v \ \wedge \ \exists e \in E : u, v \in e$ (azaz $\{u, v\} \in E$)

Definíció

Két $G = (V, E)$ és $H = (U, F)$ gráf izomorfak, ha léteznek olyan $f : V \to U$ és $g : E \to F$ bijekciók (egyértelmű hozzárendelések), hogy

$$\forall v \in V \wedge e \in E : \quad v \in e \iff f(v) \in g(e)$$

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráfnak a $H = (U, F)$ gráf részgráfja, ha $U \subset V \quad \wedge \quad F \subset E$

Definíció

Egy $H = (U, F)$ egy feszített részgráfja $G = (V, E)$-nek, ha

- részgráfja: $U \subset V$, $F \subset E$
- feszített: $u_1, u_2 \in U \wedge \{u_1, u_2\} \in E \quad \Longrightarrow \quad \{u_1, u_2\} \in F$.

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú útnak nevezünk, ha

- ez egy séta
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $k \geq 3$. Egy $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_0$ sorozatot k-hosszú körnek nevezünk, ha

- ez egy (zárt) séta (zárt, azaz: $v_k = v_0$)
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráf összefüggő, ha $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ van u és v között séta.

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráfot fának hívunk, ha

- összefüggő;
- körmentes.

Definíció

Egy G gráfban a $v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta egy Euler-séta, ha

- $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$.
- a séta G minden élét tartalmazza.
- zárt Euler-séta: $v_0 = v_k$

Definíció

Legyen G egy véges egyszerű gráf.

- A G gráfban egy út Hamilton-út, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.
- A G gráfban egy kör Hamilton-kör, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.