21. A Gauss-Seidel-iteráció

21. A Gauss–Seidel-iteráció.

a) Vezesse le a Gauss–Seidel-iteráció vektoros és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.

Átalakítás:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ (L+D)x &= -Ux + b \\ x &= -(L+D)^{-1}Ux + (L+D)^{-1}b \end{aligned}$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: Gauss–Seidel-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L+D)^{-1}U}_{B_S} \cdot x^{(k)} + \underbrace{(L+D)^{-1}b}_{c_S} = B_S \cdot x^{(k)} + c_S$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben" számolható.)

Állítás: a Gauss–Seidel-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Biz.: Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$\begin{aligned} (L+D)x^{(k+1)} &= -Ux^{(k)} + b \\ Dx^{(k+1)} &= -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} &= -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b) \quad \square \end{aligned}$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$(L+D)\cdot x^{(k+1)} = -U\cdot x^{(k)} + b = ((L+D)-A)\cdot x^{(k)} + b =$$
$$= (L+D)\cdot x^{(k)} + \left(-Ax^{(k)} + b\right) = (L+D)\cdot x^{(k)} + r^{(k)}$$
$$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} = x^{(k)} + (L+D)^{-1} r^{(k)}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := (L+D)^{-1} r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: Gauss–Seidel-iteráció

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \ldots,$ leállásig

$$s^{(k)} := (D+L)^{-1} r^{(k)} \text{ helyett}$$
$$(D+L)\, s^{(k)} = r^{(k)} \text{ LER mo.}$$
$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$
$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$