1. Definiálja a *predikátum* fogalmát! Az alábbiak közül melyik perdikátum: **a)** $P(x)$ **b)** $P(x) \wedge O(x)$. Mindkét részben adott x egész esetén $P(x)$ és $O(x)$ jelentése, hogy x prím, ill. x páratlan.

Definíció

Predikátum: olyan változóktól függő kijelentések, amelyhez a változóik értékétől függően valamilyen igazságérték tartozik:
igaz (I, ↑), **hamis** (H,↓), és a kettő egyidejűleg nem teljesül.

a) a predikátum

2. Írja fel az *és* és a *vagy* igazságtábláját! Mi lesz az $I \wedge (H \vee I)$ igazságértéke?

3. Írja fel a *tagadás* és az *implikáció* igazságtábláját! Mi lesz az $A \Rightarrow B$ tagadása?

$\neg A$	I	H
	H	I

$A \vee B$	I	H
I	I	I
H	I	H

$A \wedge B$	I	H
I	I	H
H	H	H

$A \Rightarrow B$	I	H
I	I	H
H	I	I

$A \Leftrightarrow B$	I	H
I	I	H
H	H	I

4. Mik az *egzisztenciális* és *univerzális* kvantorok? Mutasson példát olyan $H(x, y)$ kétváltozós predikátumra, melyre $\forall x \exists y H(x, y) \neq \exists y \forall x H(x, y)$!

Minden x személyhez van egy y személy, akit x hülyének néz, az nem ugyanaz mint,
Létezik egy y személy, aki az összes x személyt hülyének nézi.

- egzisztenciális kvantor: $\exists$,,létezik", ,,van olyan"
- univerzális kvantor: $\forall$,,minden"

5. Definiálja logikai jelek segítségével halmazok *metszetét* és *unióját*! Mutasson egy-egy példát olyan A, B, C halmazokra melyekre $(A \cup B) \cap C$ megegyezik, ill. nem egyezik meg $A \cup (B \cap C)$ halmazzal!

$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$ $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

megegyezik A = {1} B = {2} C = {1,2}, nem egyezik A = {1} B = {2} C = {2}

6. Definiálja halmazok *szimmetrikus differenciáját*! Mi lesz az $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{b, c, d\}$ halmazok szimmetrikus differenciája?

Definíció

Két A, B halmaz szimmetrikus differenciája

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

{a,d}

1. Definiálja a *binér reláció* fogalmát! Mutasson *két* példát relációra az $X = \{a, b, c\}$ és $Y = \{1, 2, 3\}$ halmazok között!

Definíció

- Legyen X, Y két tetszőleges halmaz. Ekkor az $R \subset X \times Y$ egy (binér) reláció az X, Y halmaz között.
- Ha $X = Y$, akkor $R \subset X \times X$ egy (binér) reláció X-en.

{(a,1),(a,2),(a,3)} , {(a,1),(b,2),(c,3)}

2. Definiálja relációk *értelmezési tartományát* és *értékkészletét*! Mi lesz az

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 4)\} \subset \{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 4\}$$

reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?

Definíció

Legyen $R \subset X \times Y$ egy reláció. Ekkor

- R éretelmezési tartománya ('domain'): $\mathrm{dmn}(R) = \{x \in X : \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$.
- R értékkészlete ('range'): $\mathrm{rng}(R) = \{y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in R\}$.

dmn = {a,b}

rng = {1,2,4}

3. Definiálja relációk *kompozícióját*! Legyen

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 4)\} \quad \text{és} \quad S = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (3, \gamma)\}.$$

Mi lesz az $S \circ R$ kompozíció?

Definíció

Legyenek R és S binér relációk. Ekkor az $R \circ S$ kompozíció (összetétel, szorzat) reláció:

$$R \circ S = \{(x, y) : \exists z : (x, z) \in S, (z, y) \in R\}.$$

S∘R={(a,α),(a,β),(b,α),(b,β)}

4. Definiálja a *szimmetrikus* relációkat! Szimmetrikus-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

- R reláció szimmetrikus, ha $\forall x, y \in X : xRy \Rightarrow yRx$

Nem mert 1R2 nem következik hogy 2R1

5. Definiálja a *reflexív* relációkat! Reflexív-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

- R reláció reflexív, ha $\forall x \in X : xRx$

Nem, pont hogy irreflexív

6. Definiálja a *tranzitív* relációkat! Tranzitív-e az

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(3,1)\} \subset \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$$

reláció?

- R reláció tranzitív, ha $\forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Nem, ellenpélda 1,3 és 3,1-ből nem következik hogy 1,1 vagy 3,1 és 1,2ből nem következik 3,2

7. Definiálja az *ekvivalencia reláció* fogalmát! Adjon *két* különböző példát ekvivalencia relációra az $X = \{1,2,3\}$ halmazon!

Definíció

Egy R reláció ekvivalencia reláció, ha
reflexív, tranzitív és szimmetrikus.

{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)} itt egy ekvivalencia osztály van{1,2,3}

{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)} itt kettő az {1,2} és a {3}

8. Definiálja az *osztályozás* fogalmát! Adjon *két* különböző példát osztályozásra az $X = \{1, 2, 3\}$ halmazon!

Definíció

Egy X halmaz részhalmazainak $\mathcal{O}$ rendszerét osztályozásnak nevezzük, ha

- $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunkt nemüres halmazok;
- $\cup\mathcal{O} = X$.

ugyanaz mint az ekvivalenciaosztály csak halmazba pakolva

{{1,2,3}} és {{1,2},{3}}

1. Definiálja komplex számok *trigonometrikus alakját*! Mi lesz a $z = 1 + i \in \mathbb{C}$ szám trigonometrikus alakja?

Definíció

Az $z = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám trigonometrikus alakja:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \quad \text{ahol } a = \mathrm{Re}(z) = r\cos\varphi \text{ és } b = \mathrm{Im}(z) = r\sin\varphi$$

gyök2 * (cos45 + i sin45)

2. Mondja ki a *szorzásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok szorzatának *trigonometrikus* alakja?

3. Mondja ki az *osztásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ és $w = 7(\cos(5\pi/6) + i \cdot \sin(5\pi/6))$ számok hányadosának *trigonometrikus* alakja?

4. Mondja ki a *hatványozásra* vonatkozó Moivre azonosságot! Mi lesz a $z = 3(\cos(\pi/3) + i \cdot \sin(\pi/3))$ szám tizenkettedik hatványának *trigonometrikus* alakja?

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

5. Adott $w \neq 0$ komplex szám és $n \geq 1$ egész esetén mik lesznek a $z^n = w$ komplex megoldásai? Mondja ki a megfelelő tételt! Hány megoldása van a $z^3 = -1$ egyenletnek komplex számok körében?

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i \sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

$-1, \sqrt[3]{i^2}, -\sqrt[3]{i^4}$

1. Hányféleképpen lehet n különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 5 különböző könyvet a polcra felrakni?

n!

Szorzat-szabály 2

- Adott egy $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ véges halmaz, és minden a_i elemhez egy B_i véges halmaz.
- A B_i halmazok elemszáma megegyezik: $|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_k| = \ell$
- Választunk egy $a_i \in A$ elemet és választunk egy $b \in B_i$ elemet.
- Ezek száma: $k \times \ell$

????

5!

2. Hányféleképpen lehet n, nem feltételen különböző elemet sorba állítani? Mondja ki a megfelelő összefüggést! Hányféleképpen lehet 8 hosszú szót képezni három darab 'a', két darab 'b' és három darab 'c' segítségével?

n!/k1!*k2!*k3!*km!

Osztás-szabály

- Adott lehetőségeket szeretnénk megszámolni.
- Ehelyett más eseteket számolunk meg.
- Egy lehetőséget L-szer számolunk.
- Összesen N esetet számoltunk le.
- Összesen N/L lehetőség van.

????

8!/3!*2!*3!

3. Hányféleképpen lehet k elemet választani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet többször is felhasználhatunk? Hány 7 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b' és 'c' karakterek felhasználásával?

n^k, 3^7

4. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hány 5 hosszú szót képezhetünk az 'a', 'b', 'c', 'd', 'e', 'f' és 'g' karakterek felhasználásával, ha egy karaktert csak egyszer használhatunk?

n!/(n-k)!, 7!/(7-5)!

5. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet csak egyszer választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 2 könyvet az 5-ből, amit nyaralásra viszünk magunkkal?

n alatt k vagy n!/ k! * (n-k)!, 5 alatt 2 vagy 5!/2! * (5-2)!

6. Hányféleképpen lehet k elemet kiválasztani egy n elemű halmazból, ha a kiválasztás sorrendje nem számít és egy elemet többször is választhatunk? Hányféleképpen tudunk kiválasztani 3 gombócot az 5-féle fagylaltból, ha a választás sorrendje nem számít?

n + k -1 alatt k, 3 + 5 -1 alatt 5

1. Mondja ki a gráf csúcsainak *fokszáma* és a gráf *élszáma* közötti összefüggést! Van-e olyan egyszerű gráf, mely csúcsainak fokszámai 1,2,2,2,2,4? Válaszát indokolja!

Tétel

Minden $G = (V, E)$ gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

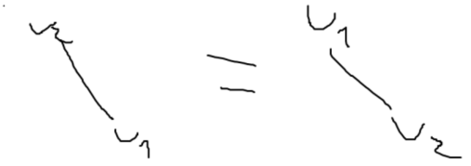
csúcsók fokszámának összege páratlan -> Nincs

2. Definiálja gráfok *izomorfiáját*! Mutasson példát két gráfra melyek izomorfak, és adja meg a közöttük lévő izomorfiát is!

Definíció

Két $G=(V,E)$ és $H=(U,F)$ gráf izomorfak, ha léteznek olyan $f: V \to U$ és $g: E \to F$ bijekciók (egyértelmű hozzárendelések), hogy

$$\forall v \in V \wedge e \in E: \quad v \in e \iff f(v) \in g(e)$$



$\{v_1, v_2\} = \{u_1, u_2\}$

3. Definiálja a *részgráf* és *feszített részgráf* fogalmát! Mutasson *két* példát G ill. H gráfokra, melyekre H részgráfja, de nem feszített részgráfja G-nek!

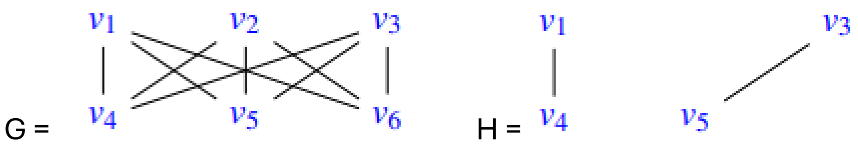
Definíció

Egy $G=(V,E)$ gráfnak a $H=(U,F)$ gráf részgráfja, ha $\quad U \subset V \quad \wedge \quad F \subset E$

Definíció

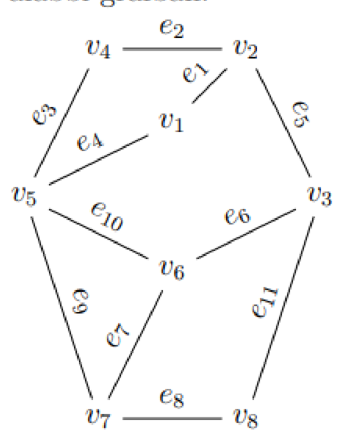
Egy $H=(U,F)$ egy feszített részgráfja $G=(V,E)$-nek, ha

- részgráfja: $U \subset V$, $F \subset E$
- feszített: $u_1, u_2 \in U \wedge \{u_1, u_2\} \in E \implies \{u_1, u_2\} \in F$.



Feszített részgráf: éleket csak csúcs eltörlésével hagyhatunk el

4. Definiálja a *séta* fogalmát gráfokra! Adjon példát *két* különböző sétára v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:



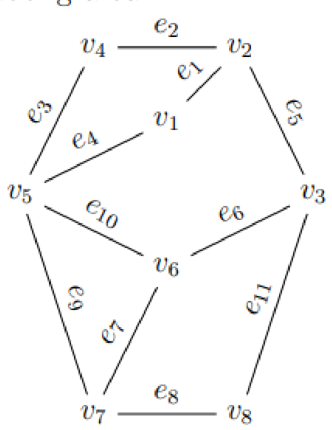
Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú **sétának** nevezünk, ha

- $v_i \in V$ $(0 \leq i \leq k)$, $\quad e_i \in E$ $(1 \leq i \leq k)$
- $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ $(1 \leq i \leq k)$

v1,v2,v3,v8 vagy v1,v2,v1,v2,v1,v2,v3,v8

5. Definiálja az *út* fogalmát gráfokra! Adjon példát *két* különböző útra v_1 és v_8 között az alábbi gráfban:



Definíció

Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Egy $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ sorozatot k-hosszú **útnak** nevezünk, ha

- ez egy séta
- $v_i \neq v_j$ $(i \neq j)$

v1,v2,v3,v8 vagy v1,v5,v7,v8

6. Definiálja az *összefüggő* gráfok fogalmát! Mutasson *egy-egy* példát összefüggő és nem összefüggő gráfra!

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráf **összefüggő**, ha $\forall u, v \in V$, $u \neq v$ van u és v között séta.

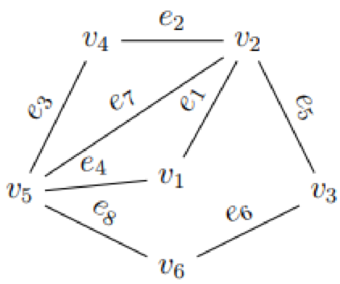
7. Definiálja a *fa* fogalmát gráfok körében! Mutasson *egy-egy* példát fa és nem fa gráfra!

Definíció

Egy $G = (V, E)$ gráfot fának hívunk, ha

- összefüggő;
- körmentes.

8. Definiálja az *Euler-séta* fogalmát! Mutasson példát Euler-sétára az alábbi gráfban:



Definíció

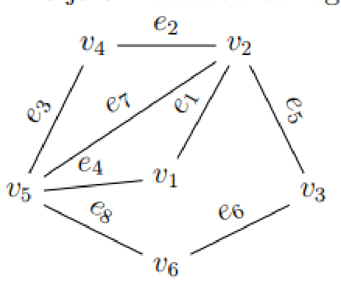
Egy G gráfban a $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$ séta egy Euler-séta, ha

- $e_i \neq e_j$ $(i \neq j)$.
- a séta G minden élét tartalmazza.
- zárt Euler-séta: $v_0 = v_k$

Azaz az Euler-séta a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

v2,v5,v4,v2,v1,v5,v6,v3,v2

9. Definiálja a *Hamilton-út* fogalmát! Mutasson példát Hamilton-útra az alábbi gráfban:



Definíció

Legyen G egy véges egyszerű gráf.

- A G gráfban egy út Hamilton-út, ha minden csúcsot pontosan egyszer tartalmaz.

v1,v2,v4,v5,v6,v3