5. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás kapcsolata II.

5. A Gauss-elimináció és az LU-felbontás kapcsolata II.

a) Mutassa be a Gauss-elimináció algoritmusát. Adjon szükséges és elégséges feltételeket a GE elakadására illetve végrehajthatóságára. Ismertesse LER megoldását LU-felbontás segítségével. Miért előnyös ennek használata a GE-vel szemben?

3. Tétel levezetése

Ha a főelem nulla, vagy az egész sor nulla, nem jelent elakadást hiszen ott van nekünk a teljes főelemkiválasztás, tehát így önmagában ezek nem jelentenek elakadást, viszont (ha azt kérik, hogy nem alkalmazhatunk főelemkiválasztást akkor a nulla főelem okoz elakadást, ha részleges főelemkiválasztáskor kérik az elakadást akkor adott oszlop elemei mind nullák okoznak elakadást). Egyébként meg

$$a_{ij}^{(k)} = 0 \quad \text{minden } i, j = k, \ldots, n$$

vagyis:

- az **egész hátralévő részmátrix zérus.**

Tétel:

A GE elvégezhető sor és oszlopcsere nélkül

$$\Leftrightarrow \quad a_{kk}^{(k-1)} \neq 0 \;\; (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Tegyük fel, hogy

- az $Ax = b$ LER megoldható, és
- rendelkezésünkre áll az $A = LU$ felbontás.

Ekkor $Ax = L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b$ helyett $\quad (\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2))$

1. oldjuk meg az $Ly = b$ alsó háromszögű, $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$
2. majd az $Ux = y$ felső háromszögű LER-t. $\quad (n^2 + \mathcal{O}(n))$

LU-felbontással előnyösebb LER-t megoldani, mint Gauss-eliminációval, mert az eliminációt csak egyszer kell elvégezni, és több jobb oldal vektor esetén az egyes megoldások már csak $\mathcal{O}(n^2)$műveletigényűek, szemben a GE minden alkalommal $\mathcal{O}(n^3)$költségével.

👉 **Innen jön az L mátrix:**

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

👉 **És az U mátrix:**

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés (fejben elég):

$$LU = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = A$$

4️⃣ Első lépés: $Ly = b$ (előrehelyettesítés)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Egyenletek:

- $y_1 = 1$
- $2y_1 + y_2 = 5 \Rightarrow y_2 = 3$

👉

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ez az y. Kész. Oszlopvektor.

5️⃣ Második lépés: $Ux = y$ (visszahelyettesítés)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Egyenletek:

- $x_2 = 3$
- $2x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

👉

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$