Analízis 1.

Mi a végtelen sor definíciója?

1. Definíció. *Az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozatból képzett*

$$s_n := a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az (a_n) *által generált* **végtelen sornak** *(röviden* **sornak***) nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum a_n, \quad \textit{vagy} \quad \sum_{n=0} a_n, \quad \textit{vagy} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots .$$

Ekkor azt mondjuk, hogy s_n *a* $\sum a_n$ *sor* **n-edik részletösszege***, illetve* a_n *a* $\sum a_n$ *sor* **n-edik tagja***, ahol* $n \in \mathbb{N}$.

Mit jelent az, hogy a Szumma(an) végtelen sor konvergens, és hogyan értelmezzük az összegét?

2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ **sor konvergens***, ha részletösszegeinek az* (s_n) *sorozata konvergens, azaz ha létezik és véges a* $\lim(s_n)$ *határérték. Ekkor ezt a határértéket a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összegének*** *nevezzük, és így jelöljük:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim(s_n).$$

A $\sum a_n$ **sor divergens***, ha a részletösszegekből képzett* (s_n) *sorozat divergens. Ebben az esetben az* (s_n) *sorozatnak nincs határértéke, vagy*

- $\lim(s_n) = +\infty$*, és ekkor azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összege*** $+\infty$*,*

vagy

- $\lim(s_n) = -\infty$*, és ekkor azt mondjuk, hogy a* $\sum a_n$ ***végtelen sor összege*** $-\infty$.

Ezeket úgy jelöljük, hogy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := +\infty, \qquad \textit{illetve} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n := -\infty.$$

Milyen tételt ismer q ∈ R esetén a Szumma n=0 (q n) geometriai sor konvergenciájáról?

1. Tétel. *Legyen $q \in \mathbb{R}$. A (q^n) sorozatból képzett* $\sum_{n=0} q^n$ **geometriai** *vagy* **mértani sor** *akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad \big(|q| < 1\big).$$

Ha $q \geq 1$, akkor a $\sum_{n=0} q^n$ *sornak van összege, és* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = +\infty$.

Mi a teleszkopikus sor, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

2. Tétel. *A* $\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ *ún.* **teleszkopikus sor** *konvergens, és összege 1, azaz*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots = 1.$$

Mi a harmonikus sor, és milyen állítást ismer a konvergenciájával kapcsolatban?

3. Tétel. *Legyen α rögzített valós szám. Ekkor a*

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots$$

ún. **hiperharmonikus sor**

- *divergens, ha $\alpha \leq 1$, de ekkor van összege:* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$.
- *konvergens, ha $\alpha > 1$.*

Igaz-e az, hogy ha lim(an) = 0, akkor a X(an) sor konvergens? (A válaszát indokolja meg!)

8. Tétel (Sorok konvergenciájának szükséges feltétele). *Ha a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens, akkor az (a_n) generáló sorozat nullsorozat, azaz $\lim(a_n) = 0$.*