27. Nemlineáris egyenletek megoldása III.

27. Nemlineáris egyenletek megoldása III.

a) Vázolja az intervallumfelezés algoritmusát és mutasson hozzá hibabecslést. Ismertesse a Newton-módszer alapötletét, szemléltesse működését és vezesse le a képletét. Vezesse le a többváltozós Newton-módszert.

Definíció (intervallumfelezés):

Egy adott **intervallumon** próbálunk **közelíteni** valamihez úgy, hogy a mindig **felezzük** az **intervallumot** a megfelelő oldalon.

(Olyan, mint a bináris keresés rendezett esetben, ha túlmegyünk felezünk felülről, ha alá megyünk felezünk alulról, végül eltaláljuk, vagy megállapítjuk, hogy nincs.)

Biz. (Bolzano-tétel): az intervallumfelezés módszerével

1. Legyen $x_0 := a,\ y_0 := b$.
2. Ismételjük:
   - Legyen $s_k := \frac{1}{2}(x_k + y_k)$, az intervallum fele.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) < 0$, akkor $x_{k+1} := x_k,\ y_{k+1} := s_k$.
   - Ha $f(x_k) \cdot f(s_k) > 0$, akkor $x_{k+1} := s_k,\ y_{k+1} := y_k$.
3. Álljunk meg, ha
   - egyenlőség teljesül, ekkor $x^* = s_k$, vagy
   - elértük a kívánt pontosságot, ekkor $x^* \in (x_k, y_k)$, és

$$y_k - x_k = \frac{y_{k-1} - x_{k-1}}{2}$$

teljesül. $\square$

A $P(x) = x^3 + 3x - 2$ polinom gyökét keressük intervallumfelezéssel a $[0; 1]$ intervallumon:

$$P(0) = -2 < 0, \quad P(1) = 1 + 3 - 2 = 2 > 0$$
$$\Rightarrow \quad \exists\, x^* \in (0; 1) : P(x^*) = 0.$$

Hibabecslés:

$$\frac{1}{2^k} < \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad k > 3,$$

tehát legalább 4 lépésre van szükségünk. Lassú ... $\square$

- **Hibabecslések:**

$$|x_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k}, \quad |y_k - x^*| < \frac{b-a}{2^k},$$
$$|s_k - x^*| < \frac{b-a}{2^{k+1}}.$$

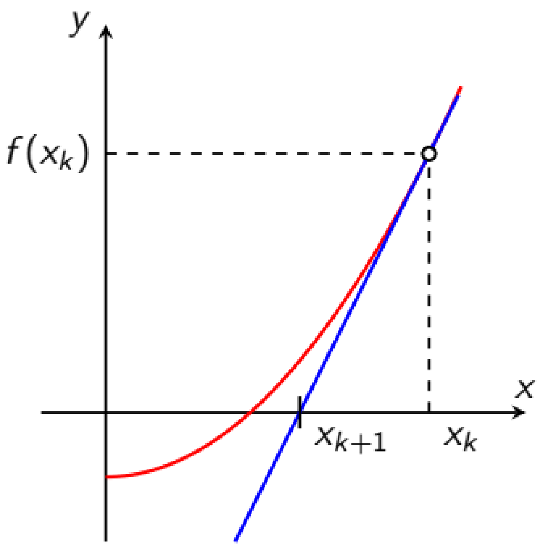
Definíció (Newton-módszer):

Van egy (nem-lineáris) függvényünk, meg akarjuk találni gyökeit.

Ötlet: nézzük meg tetszőleges kezdőponthoz (x_0) húzott érintőt, és keressük meg ennek az érintőnek a zérushelyét. Ismételjük az iterációt, de most abba a pontba húzzuk az érintőt, ahova az elöző iteráció vezett minket.

Geometriai megközelítés:

$$f, x_k \to \text{érintő} \to \text{zérushely (y=0)} \to x_{k+1}$$



Az érintő egyenlete:

$$y - f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x - x_k)$$
$$-f(x_k) = f'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k)$$
$$-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$$
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Analitikus megközelítés:

f gyöke $\approx x_k$ körüli Taylor-polinomának gyöke

$$0 = f(x) = f(x_k) + f'(x_k) \cdot (x - x_k) + \dots$$

Definíció: Newton-módszer

Adott $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény és $x_0 \in \mathbb{R}$ kezdőpont esetén a *Newton-módszer* alakja:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Többváltozós Newton-módszer

Közelítsük F-et az elsőfokú Taylor-polinomjával.

$$F(x) \approx F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)}) \cdot (x - x^{(k)}),$$

$$F'(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f_i(x^{(k)})}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ezen közelítés zérushelye lesz $x^{(k+1)}$:

1. $F'(x^{(k)}) \cdot \underbrace{(x^{(k+1)} - x^{(k)})}_{s^{(k)}} = -F(x^{(k)})$ LER megoldás ($\rightsquigarrow s^{(k)}$),
2. $x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}$, $s^{(k)}$ a továbblépés iránya.