

6. Az LU-felbontás direkt módon.

6. Az LU-felbontás direkt módon.

- a) Definiálja egy mátrix LU-felbontását. Adjon módszert L és U mátrixok elemenkénti meghatározására, vezesse le az elemekre vonatkozó képleteket. Térjen ki az elemek meghatározásának sorrendjére és a műveletigényre is.

Egy mátrix LU-felbontásán az $A = LU$ felbontást értjük ahol L egy alsó háromszögmátrix melynek főátlójában 1-esek állnak, míg U egy felső háromszög mátrix.

Módszer: közvetlenül mátrixszorzás alapján.

Az a lényeg, hogy nem ismerjük L-t és U-t, de azt tudjuk, hogy $LU = A$, **ismerjük a szorzatot**. Azt is tudjuk, hogy **U első sora megegyezik A első sorával**. (Ez ugye a GE-ből következik.) **L 1. oszlopát úgy kapjuk, hogy A első oszlopát leosztjuk a_{11} -gyel** (Ez is GE-ből következik). Ezenkívül ismerjük a mátrixok alakját is (**háromszögek**):

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & \vdots \\ l_{31} & l_{32} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}, U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ 0 & u_{22} & u_{n2} \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{U}$$

Mátrix szorzással ezekből egy egyenletrendszer kapunk, amit meg tudunk oldani. **Képlettel, általánosítva**:

Tétel: az LU-felbontás „közvetlen” kiszámítása

Az L és U mátrixok elemei a következő képletekkel számolhatók:

$$i \leq j \text{ (felső)} \quad u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj},$$

$$i > j \text{ (alsó)} \quad l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Ha jó sorrendben számolunk, mindenkor ismert az egész jobb oldal.

Biz.: Írjuk fel az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, mint mátrixszorzat i -edik sorának j -edik elemét feltéve, hogy $A = L \cdot U$. Használjuk ki, hogy háromszögmátrixokról van szó, majd válasszunk le egy tagot.

Ha $i \leq j$, azaz egy főátló feletti (vagy főátlóbeli) elemről van szó, akkor $k > i \Rightarrow l_{ik} = 0$, valamint $l_{ii} = 1$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^i l_{ik} \cdot u_{kj} = u_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ebből u_{ij} kifejezhető

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Biz. folyt. Ha $i > j$, azaz egy főátló alatti elemről van szó, akkor $k > j \Rightarrow u_{kj} = 0$, és így

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n l_{ik} \cdot u_{kj} = \sum_{k=1}^j l_{ik} \cdot u_{kj} = l_{ij} \cdot u_{jj} + \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj}.$$

Ha $u_{jj} \neq 0$ (találkoztunk már ezzel a feltételel), akkor l_{ij} kifejezhető

$$l_{ij} = \frac{1}{u_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot u_{kj} \right).$$

Figyeljük meg, hogy ha valamely „jó sorrendben” (lásd az előadás diasorát) megyünk végig az (i, j) indexekkel A elemein, akkor az l_{ij} illetve u_{ij} értékét megadó egyenlőségek jobb oldalán minden mennyiség ismert. □

Helyes sorrendek: oszlop-, sor – folytonosan, parkettaszerűen

Tétel: Az LU -felbontás műveletigénye

$$\frac{2}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$$