• Írja le a hatványsor definícióját!

2. Definíció. *Az adott* $(\alpha_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozattal és az* $a \in \mathbb{R}$ *számmal képzett*

$$\sum_{n=0} \alpha_n (x-a)^n = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénysort $a \in \mathbb{R}$ *középpontú,* (α_n) *együtthatójú* **hatványsornak** *nevezzük.*

• Hogyan szól a hatványsor konvergenciahalmazára vonatkozó, a konvergenciasugarát meghatározó tétel?

3. Tétel (Hatványsor konvergenciasugara). *Tetszőleges* $\sum_{n=0} \alpha_n(x-a)^n$ *hatványsor konvergenciahalmazára a következő három eset egyike áll fenn:*

1. $\exists\, 0 < R < +\infty$, *hogy a hatványsor* $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| < R$ *pontban abszolút konvergens és* $\forall x \in \mathbb{R}\colon |x-a| > R$ *pontban divergens.*
2. *A hatványsor csak az* $x = a$ *pontban konvergens. Ekkor legyen* $R := 0$.
3. *A hatványsor abszolút konvergens* $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén. Ekkor legyen* $R := +\infty$.

R*-et a hatványsor* **konvergenciasugarának** *nevezzük.*

• Adjon meg egy olyan hatványsort, amelyiknek a konvergenciahalmaza a (−1, 1) intervallum!

$$\mathrm{KH}\Big(\sum_{n=0} x^n\Big) = (-1, 1).$$

• Definiálja az exp függvényt!

7. Tétel. *A* $\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **exponenciális függvénynek** *nevezzük.*

- Definiálja a sin függvényt!

9. Tétel. *A* $\sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\sin x := \sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **szinuszfüggvénynek** *nevezzük.*

- Definiálja a cos függvényt!

10. Tétel. *A* $\sum_{n=0}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *hatványsor minden* $x \in \mathbb{R}$ *pontban abszolút konvergens. Az összegfüggvényét, vagyis az*

$$\cos x := \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt **koszinuszfüggvénynek** *nevezzük.*