Analízis 1.

Értelmezze a függvény fogalmát!

A függvény két halmaz közötti egyértelmű hozzárendelés.

1. Definíció. *Legyen A és B tetszőleges nemüres halmaz. A*

$$\emptyset \neq f \subset A \times B$$

hozzárendelést **függvénynek** *nevezzük, ha*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \text{esetén} \quad \exists!\, y \in \mathcal{R}_f \colon (x, y) \in f.$$

Mit jelent az f ∈ A → B szimbólum?

$$\boxed{f \in A \to B} \quad :\iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f \subset A.$$

Mit jelent az f : A → B szimbólum?

$$\boxed{f : A \to B} \quad :\iff \quad f \subset A \times B \text{ függvény és } \mathcal{D}_f = A.$$

Definiálja a halmaznak függvény által létesített képét!

3. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $C \subset A$. Ekkor* **a C halmaz f által létesített képén** *az*

$$f[C] := \Big\{f(x) \;\Big|\; x \in C\Big\} = \Big\{y \in B \;\Big|\; \exists x \in C \colon\; y = f(x)\Big\} \subset B$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f[\emptyset] = \emptyset$.

Definiálja a halmaznak függvény által létesített ősképét!

4. Definíció. *Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény és $D \subset B$. Ekkor* **a D halmaz f által létesített ősképén** *az*

$$f^{-1}[D] := \Big\{x \in \mathcal{D}_f \;\Big|\; f(x) \in D\Big\} \subset A$$

halmazt értjük. Megállapodunk abban, hogy $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$.

Mikor nevez egy függvényt invertálhatónak (vagy injektívnek)?

- f invertálható $\iff$ $\forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $x \neq t \implies f(x) \neq f(t)$,
- f invertálható $\iff$ $\forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = f(t) \implies x = t$,
- f invertálható $\iff$ $\forall y \in \mathcal{R}_f$-hez $\exists!\, x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y$.

Értelmezze az inverz függvény fogalmát!

4. Definíció. *Legyen f egy invertálható függvény, azaz tegyük fel, hogy*

$$\forall y \in \mathcal{R}_f\text{-hez } \exists!\, x \in \mathcal{D}_f \colon f(x) = y.$$

*Ekkor az f **inverz függvényét** (vagy röviden **inverzét**) így értelmezzük:*

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre} \quad f(x) = y.$$

Mi a definíciója az összetett függvénynek?

5. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre*

$$\left\{x \in \mathcal{D}_g \;\middle|\; g(x) \in \mathcal{D}_f\right\} \neq \emptyset.$$

*Ebben az esetben az f (**külső**) és a g (**belső**) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:*

$$f \circ g : \left\{x \in \mathcal{D}_g \;\middle|\; g(x) \in \mathcal{D}_f\right\} \to B, \qquad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$