24. A részleges LU-felbontás és az ILU algoritmus.

24. A részleges LU-felbontás és az ILU algoritmus.

a) Definiálja a részleges LU-felbontást. Adja meg a részleges LU-felbontás előállításának algoritmusát. Adjon elégséges feltételt a felbontás létezésére és egyértelműségére. Bizonyítsa a felbontást előállító algoritmus helyességének tételét.

Definíció: ILU-felbontás

- Legyen J a mátrix elemek pozícióinak egy részhalmaza, mely nem tartalmazza a főátlót, azaz $(i,i) \notin J \quad \forall\, i$-re.
  A J halmazt *pozícióhalmaz*nak nevezzük.
- Az A mátrixnak a J pozícióhalmazra illeszkedő *részleges LU-felbontásán* (*ILU-felbontásán*) olyan LU-felbontást értünk, melyre $L \in \mathcal{L}_1$ és $U \in \mathcal{U}$ (tehát a szokásos alakúak), továbbá

$$\forall\,(i,j) \in J: \quad l_{ij} = 0, \quad u_{ij} = 0 \ \text{ és}$$
$$\forall\,(i,j) \notin J: \quad a_{ij} = (LU)_{ij}.$$

57. Írja le az ILU-felbontás algoritmusát ($\mathbf{L}, \mathbf{U}$ és $\mathbf{Q}$ előállításának felírása)!

$\tilde{\mathbf{A}}_1 := \mathbf{A}$

$k = 1, \ldots, n-1:$

1.) Szétbontás: $\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{P}_k - \mathbf{Q}_k$ alakra, ahol

$$(\mathbf{P}_k)_{ik} = 0 \quad (i,k) \in J$$
$$(\mathbf{P}_k)_{kj} = 0 \quad (k,j) \in J$$
$$(\mathbf{Q}_k)_{ik} = -\tilde{a}_{ik}^{(k)} \quad (i,k) \in J$$
$$(\mathbf{Q}_k)_{kj} = -\tilde{a}_{kj}^{(k)} \quad (k,j) \in J$$

2.) Elimináció:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{P}_k$$

Az ILU felbontással kapott részmátrixokból:

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{A}_n}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_1^{-1} \ldots \mathbf{L}_{n-1}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \cdots + \mathbf{Q}_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{LU} - \mathbf{Q}.$$

58. Adjon elégséges feltételt az ILU-felbontás létezésére és egyértelműségére!

Ha $\mathbf{A}$ szigorúan diagonálisan domináns a soraira, akkor $\exists!$ ILU-felbontás.

Biz.: A GE $n-1$. lépése után felsőháromszög alakot kapunk, tehát $U := \widetilde{A}_n$ alakja jó és minden $(i,j) \in J, i < j$-re $u_{ij} = 0$. Alkalmazzuk az $n-1$. lépés (2), majd (1) részét:

$$U := \widetilde{A}_n = L_{n-1}P_{n-1} = L_{n-1}\left(\widetilde{A}_{n-1} + Q_{n-1}\right)$$

Az $\widetilde{A}_n$-re kapott rekurziót alkalmazzuk $\widetilde{A}_{n-1}$-re:

$$\widetilde{A}_n = L_{n-1}\left(\widetilde{A}_{n-1} + Q_{n-1}\right) = L_{n-1}\left(L_{n-2}\left[\widetilde{A}_{n-2} + Q_{n-2}\right] + Q_{n-1}\right)$$

Mivel Q_{n-1}-ben az $n-2$. sorban csak nullák vannak, így az $n-2$. GE-s lépés nem változtat rajta, tehát $L_{n-2}Q_{n-1} = Q_{n-1}$. Emiatt Q_{n-1}-et bevihetjük a belső zárójelbe.

$$\widetilde{A}_n = L_{n-1}L_{n-2}\left(\widetilde{A}_{n-2} + Q_{n-2} + Q_{n-1}\right)$$

Biz. folyt.: Folytatva tovább visszafelé a rekurziót

$$U = \widetilde{A}_n = L_{n-1}L_{n-2}\left(\widetilde{A}_{n-2} + Q_{n-2} + Q_{n-1}\right) = \ldots =$$

$$= \underbrace{L_{n-1}L_{n-2}\ldots L_1}_{L^{-1}}\left(A + \underbrace{Q_1 + \ldots + Q_{n-2} + Q_{n-1}}_{Q}\right).$$

$$U = L^{-1}(A+Q) \quad \Leftrightarrow \quad A = LU - Q$$

A kapott mátrixok alakja megfelelő. Az algoritmus (1) lépése garantálja, hogy $\forall\,(i,j) \in J: \; l_{ij} = 0, \; u_{ij} = 0$, továbbá (2) lépése (GE) miatt $\forall\,(i,j) \notin J: \; a_{ij} = (LU)_{ij}$. $\square$