• Mi a belső pont definíciója?

Definíció.

Legyen $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. *Az* $a \in A$ *pont az* A ***halmaz belső pontja***, *ha*

$$\exists\, r > 0, \quad hogy \quad K_r(a) = (a - r, a + r) \subset A.$$

Jelölés: $\boxed{\operatorname{int} A} := \{a \in A \mid a \ \ belső\ pontja \ \ A\text{-}nak\}$.

• Mikor mondja azt, hogy egy f ∈ R → R függvény differenciálható valamely a ∈ int Df pontban?

Definíció.

Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvény az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban* ***differenciálható*** (*vagy* ***deriválható***), *ha*

$$\exists \quad és\ véges\ a \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad határérték.$$

Ezt $f'(a)$*-val jelöljük, és az* f *függvény a* ***pontbeli deriváltjának*** (*vagy* ***differenciálhányadosának***) *nevezzük, azaz*

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ezt a tényt a következőképpen fogjuk jelölni: $\boxed{f \in D\{a\}}$.

• Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?

3. A folytonosság és a derivált kapcsolata

Tétel.

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

1° $f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\}$,

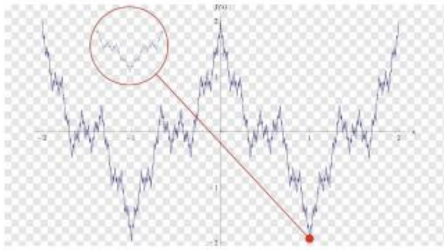
2° *Az állítás megfordítása nem igaz.*

• Adjon példát olyan függvényre, ami az a ∈ R pontban folytonos, de nem differenciálható!

$\mathbb{R}$-en folytonos, de sehol sem deriválható függvények

K. Weierstrass (1861)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(15^n \pi x)}{2^n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

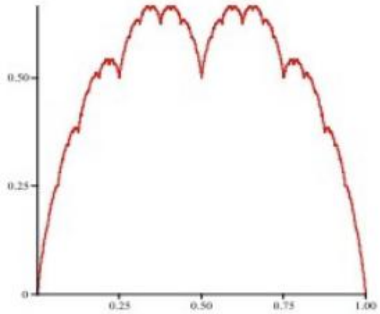


T. Takagi (1903)

B.L. van der Waerden (1930)

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{< 10^n x >}{10^n} \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$< \alpha := \min\{|\alpha - k| \mid k \in \mathbb{Z}\}$$



• Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in D\{a\}$ *valamilyen* $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ *pontban. Ekkor*

3° $f \cdot g \in D\{a\}$ *és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a),$$

• Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in D\{a\}$ *valamilyen* $a \in \operatorname{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ *pontban. Ekkor*

4° *ha még a* $g(a) \neq 0$ *feltétel is teljesül, akkor*

$$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \textit{és}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{g^2(a)}.$$

• Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

T.f.h. $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ *és egy* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_g$ *pontban* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in D\{g(a)\}$. *Ekkor* $f \circ g \in D\{a\}$, *és*

$$(f \circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a)\,.$$

- Fogalmazza meg a hatványsorok összegfüggvényének deriválhatóságáról szóló tételt!

T.f.h. hogy a $\sum\limits_{n=0} \alpha_n (x-a)^n$ $(x \in \mathbb{R})$ *hatványsor* R *konvergenciasugara pozitív, és legyen*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \qquad \big(x \in K_R(a)\big).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ *pontban* $f \in D\{x\}$ *és*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n (x-a)^{n-1} \qquad \big(\forall\, x \in K_R(a)\big).$$

- Mi az exp, sin, cos függvények derivált függvénye?

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big)}$$

sin’(x) = cos(x) $\big(x \in \mathbb{R}\big)$

cos’(x) = -sin(x) $\big(x \in \mathbb{R}\big)$

- Elemi függvények deriváltjai (vö. deriválási táblázat).