

2. A hibaszámítás alapjai

2. A hibaszámítás alapjai.

- a) Ismertesse az abszolút- és relatív hiba, valamit az abszolút- és relatív hibakorlát fogalmát. Mondja ki az alapműveletek hibakorlátjaira vonatkozó állításokat. Ez alapján mely műveletek elvégzése veszélyes az abszolút és relatív hibára nézve és miért? Igazolja az összeadás- és szorzás hibakorlátjára vonatkozó összefüggéseket.

4. Adja meg a hibaszámítás alapfogalmait: hiba, abszolút-, relatív hiba és korlátjaik!

Legyen A a pontos érték, a pedig közelítő érték. Ekkor

A pontos hiba: $\Delta a = A - a$

Abszolút hiba: $|\Delta a| = |A - a|$

Egy abszolút hibakorlát: $\Delta_a \geq |\Delta a|$

Relatív hiba: $\delta a = \frac{\Delta a}{A} \approx \frac{\Delta a}{a}$

Egy relatív hibakorlát: $\delta_a \geq |\delta a|$

5. Írja le az alapműveletek abszolút hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\Delta_{a \pm b} = \Delta_a + \Delta_b$$

$$\Delta_{ab} = |a|\Delta_b + |b|\Delta_a$$

$$\Delta_{\frac{a}{b}} = \frac{|a|\Delta_b + |b|\Delta_a}{b^2} = \frac{|a|}{|b|} \left(\frac{\Delta_a}{|a|} + \frac{\Delta_b}{|b|} \right)$$

6. Írja le az alapműveletek relatív hibakorlátjaira vonatkozó képleteket!

$$\delta_{a \pm b} = \frac{|a|\delta_a + |b|\delta_b}{|a \pm b|}$$

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b$$

$$\delta_{\frac{a}{b}} = \delta_a + \delta_b$$

Megjegyzés: a kapott korlátok két esetben lehetnek nagyságrendileg nagyobbak, mint a kiindulási értékek hibái:

- ① $\delta_{a \pm b}$ esetén, amikor közeli számokat vonunk ki egymásból.
- ② $\Delta_{a/b}$ esetén, amikor kicsi számmal osztunk.

Ezeket az eseteket az algoritmusok implementálásakor el kell kerülni.

Biz.: az összeadást és kivonást azonos előjelű számok között értjük. Az $a \pm b$ hibája

$$\Delta(a \pm b) = (A \pm B) - (a \pm b) = (A - a) \pm (B - b) = \Delta_a \pm \Delta_b$$

$$|\Delta(a \pm b)| = |\Delta_a \pm \Delta_b| \leq |\Delta_a| + |\Delta_b| \leq \Delta_a + \Delta_b = \Delta_{a \pm b}.$$

Nézzük a relatív hibát

$$\frac{\Delta(a \pm b)}{a \pm b} = \frac{\Delta_a \pm \Delta_b}{a \pm b} = \frac{a \cdot \delta_a \pm b \cdot \delta_b}{a \pm b}$$

$$\begin{aligned} \frac{|\Delta(a \pm b)|}{|a \pm b|} &= \frac{|a \cdot \delta_a \pm b \cdot \delta_b|}{|a \pm b|} \leq \frac{|a| \cdot |\delta_a| + |b| \cdot |\delta_b|}{|a \pm b|} \leq \\ &\leq \frac{|a| \cdot \delta_a + |b| \cdot \delta_b}{|a \pm b|} = \delta_{a \pm b} \end{aligned}$$

A szorzás hibája

$$\begin{aligned} \Delta(a \cdot b) &= A \cdot B - a \cdot b = A \cdot B - A \cdot b + A \cdot b - a \cdot b = \\ &= A(B - b) + b(A - a) = A \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a = \\ &= (a + \Delta a) \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \approx a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a \\ &(\Delta a \cdot \Delta b \text{ elhanyagolható}) \end{aligned}$$

$$|\Delta(a \cdot b)| \leq |a| \cdot |\Delta b| + |b| \cdot |\Delta a| \leq |a| \cdot \Delta_b + |b| \cdot \Delta_a = \Delta_{a \cdot b}$$

A relatív hiba

$$\delta(a \cdot b) = \frac{\Delta(a \cdot b)}{a \cdot b} \approx \frac{a \cdot \Delta b + b \cdot \Delta a}{a \cdot b} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta a}{a} = \delta_b + \delta_a$$

$$|\delta(a \cdot b)| \leq |\delta a| + |\delta b| \leq \delta_a + \delta_b = \delta_{a \cdot b}$$