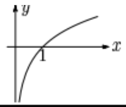
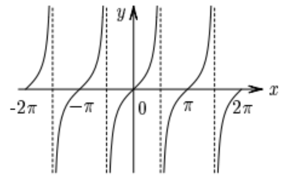
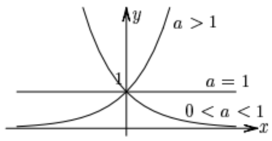
• **Írja fel az ln, tg, $a^x$($a > 0$, $x \in \mathbb{R}$) függvények derivált függvényét!**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(0, +\infty)$ | $\ln x$ | $\dfrac{1}{x}$ |   |
| $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ | $\operatorname{tg} x$ | $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ |   |
| $\mathbb{R}$ | $a^x$ $(a \in (0, +\infty))$ | $a^x \ln a$ |   |

• **Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra lineáris közelítéssel?**

## 4. Lineáris közelítés

**Tétel.**

*Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor* $f \in D\{a\} \iff$

$$\begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \exists\, \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R},\ \lim_a \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in \mathcal{D}_f), \end{cases}$$

*és* $A = f'(a)$.

• **Mi az érintő definíciója?**

**Definíció.**

*Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $\big(a, f(a)\big)$ pontban **van érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az $f$ függvény grafikonjának $\big(a, f(a)\big)$ pontbeli **érintőjén** az*

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

*egyenletű egyenest értjük.*

- **Írja le az inverz függvény differenciálhatóságáról szóló tételt!**

**Tétel.**

*Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f\colon I \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy*

(a) *$f$ szigorúan monoton és folytonos $I$-n,*

(b) *egy $a \in I$ pontban $f \in D\{a\}$ és $f'(a) \neq 0$.*

*Ekkor az $f^{-1}$ inverz függvény deriválható a $b := f(a)$ pontban, és*

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}.$$

- **Definiálja a jobb oldali derivált fogalmát!**
- **Definiálja a bal oldali derivált fogalmát!**

**Definíció.**

*Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$. T.f.h. $\exists \delta > 0 : \ [a, a+\delta) \subset \mathcal{D}_f$. A.m.h. $f$ az **a pontban jobbról deriválható** (vagy **differenciálható**), ha*

$$\exists \quad \textit{és véges a} \quad \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \textit{határérték.}$$

*Ezt az $f$ függvény **a pontbeli jobb oldali deriváltjának** (vagy **differenciálhányadosának**) nevezzük, és $\boxed{f'_+(a)}$-val jelöljük.*

Az **a pontbeli bal oldali deriváltat** hasonlóan értelmezzük, és $\boxed{f'_-(a)}$-vel jelöljük.

- **Mikor mondjuk, hogy valamely f ∈ R → R függvény kétszer deriválható az a ∈ R pontban?**

**Definíció.**

*Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *A.m.h.* $f$ ***kétszer deriválható az*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***pontban*** (*jelölése:* $\boxed{f \in D^2\{a\}}$), *ha*

- *a függvény deriválható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pont egy környezetében, azaz* $\exists\, r > 0 :\ f \in D\big(K_r(a)\big)$, *és*
- *az* $f'$ *deriváltfüggvény deriválható* $a$*-ban, azaz* $f' \in D\{a\}$.

*Legyen ekkor*

$$f''(a) := \big(f'\big)'(a)$$

*az* $f$ *függvény* $a$***-beli második deriváltja.***

- **Fogalmazza meg a Rolle-féle középértéktételt!**

**Tétel: A Rolle-féle k.é.t.** *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b), \\ \bullet\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b),\ \textit{hogy} \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$$

- **Fogalmazza meg a Lagrange-féle középértéktételt!**

**Tétel: A Lagrange-féle k.é.t.** *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f \in C[a,b], \\ \bullet\ f \in D(a,b) \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b),\ \textit{hogy} \\ f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{array}$$

- **Fogalmazza meg a Cauchy-féle középértéktételt!**

**Tétel: A Cauchy-féle k.é.t.** *Legyen* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $a < b$. *Ekkor*

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ f, g \in C[a,b], \\ \bullet\ f, g \in D(a,b), \\ \bullet\ \forall x \in (a,b):\ g'(x) \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \exists\, \xi \in (a,b),\ \text{hogy} \\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \end{array}$$