• Mit ért azon, hogy az f ∈ R → R függvénynek valamely helyen lokális minimuma van?

• Mit ért azon, hogy az f ∈ R → R függvénynek valamely helyen lokális maximuma van?

Definíció. *Az f fv-nek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban* ***lokális maximuma van****, ha*

$$\exists\, K(a) \subset \mathcal{D}_f,\ \text{hogy}\ \forall\, x \in K(a): \ f(x) \le f(a).$$

Az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont f ***lokális maximumhelye****, $f(a)$ pedig f* ***lokális maximuma****.*

• Fogalmazza meg a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt!

T.f.h. az f függvénynek az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban lokális szélsőértéke van és $f \in D\{a\}$. Ekkor

$$f'(a) = 0.$$

• Adjon példát olyan f ∈ R → R függvényre, amelyre valamely a ∈ R esetén f ∈ D[a], f'(a) = 0 teljesül, de az f függvénynek az a pontban nincs lokális szélsőértéke!

Például, ha $f(x) := x^3\ (x \in \mathbb{R}) \implies f'(x) = 3x^2\ (x \in \mathbb{R})$ miatt $f'(0) = 0$, de f-nek 0-ban **nincs** lok. sz.é-e (ui. $f \uparrow \mathbb{R}$-en). Így, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $f'(a) = 0$ csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltétele annak, hogy f-nek a-ban lok. sz.é-e legyen.

• Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvények monoton növekedésével kapcsolatban?

• Milyen elégséges feltételt ismer differenciálható függvények szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?

Tétel: A monotonitás és a derivált kapcsolata. *Legye* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *egy* ***nyílt intervallum****. T.f.h.* $f \in D(a,b)$. *Ekkor*

1^o $f \nearrow [\searrow]$ (a,b)*-n* $\Longleftrightarrow$ $f' \geq 0$ $[f' \leq 0]$ (a,b)*-n;*

2^o *ha* $f' > 0$ $[f' < 0]$ (a,b)*-n* $\Longrightarrow$ $f \uparrow [\downarrow]$ (a,b)*-n.*

- **Milyen szükséges és elégséges feltételt ismer differenciálható függvények szigorú monoton növekedésével kapcsolatban?**

Tétel: Szüks. és elégs. felt. a szig. mon-ra.

Legyen $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *egy nyílt intervallum. T.f.h.* $f \in D(a,b)$.
Ekkor $f \uparrow [\downarrow]$ (a,b)*-n* $\Longleftrightarrow$
$f' \geq 0$ $[f' \leq 0]$ (a,b)*-n, és* (a,b)*-nek nincs olyan részintervalluma, amelyen* f' *azonosan* 0.

- **Mit ért azon, hogy egy függvény valamely helyen jelet vált?**

Definíció.

Azt mondjuk, hogy a h *függvény a* $c \in \operatorname{int} \mathcal{D}_h$ *pontban* ***negatívból pozitívba megy át*** (*röviden* h*-nak* c*-ben* $(-,+)$ ***előjelváltása van***)*, ha* $h(c) = 0$ *és* $\exists\, \delta > 0$ *úgy, hogy*

$$h(x) < 0, \text{ ha } x \in (c-\delta, c) \quad \text{és } h(x) > 0, \text{ ha } x \in (c, c+\delta).$$

A h függvény c-beli $(+,-)$ előjelváltását hasonlóan értelmezzük. Ekkor h a c pontban pozitívból negatívba megy át.

Azt mondjuk, hogy a h **függvény** c**-ben előjelet vált**, ha h-nak c-ben $(-,+)$ vagy $(+,-)$ előjelváltása van.

• Hogyan szól a lokális minimumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

• Hogyan szól a lokális maximumra vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel?

Tétel: Elsőrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre.

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- $f \in D(a, b)$,
- *egy* $c \in (a, b)$ *pontban* $f'(c) = 0$ *és*
- *az* f' *deriváltfüggvény előjelet vált* c*-ben.*

Ekkor,

1° *ha az* f' *függvénynek* c*-ben* $(-, +)$ *előjelváltása van, akkor* c *az* f *függvénynek szigorú* ***lokális minimumhelye****;*

2° *ha az* f' *függvénynek* c*-ben* $(+, -)$ *előjelváltása van, akkor* c *az* f *függvénynek szigorú* ***lokális maximumhelye****.*

• Írja le a lokális minimumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!

• Írja le a lokális maximumra vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!

Tétel: Másodrendű elégséges feltétel a lokális szélsőértékekre.

Legyen $-\infty < a < b < +\infty$ *és* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy*

- f *kétszer deriválható egy* $c \in (a, b)$ *pontban,* $f \in D^2\{c\}$,
- $f'(c) = 0$,
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c *szigorú lokális szélsőértékhelye az* f *függvénynek;*

1^o *ha* $f''(c) > 0$, *akkor* c *az* f *függvénynek szigorú* ***lokális minimumhelye;***

2^o *ha* $f''(c) < 0$, *akkor* c *az* f *függvénynek szigorú* ***lokális maximumhelye.***