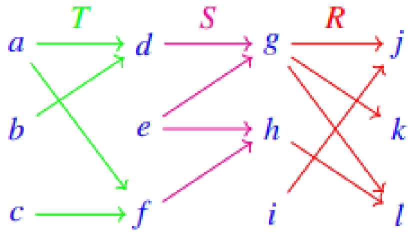
1) Mondja ki és bizonyítsa *relációk kompozíciójának asszociativitására* vonatkozó tételt!

Tétel

Legyenek R, S, T relációk. Ekkor

- $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ (a kompozíció asszociatív).

Bizonyítás.



$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S) \circ T$.
- Ekkor $\exists z \in \mathrm{rng}(T) \cap \mathrm{dmn}(R \circ S)$: $(x, z) \in T \ \wedge \ (z, y) \in R \circ S$
- Ekkor $\exists w \in \mathrm{rng}(S) \cap \mathrm{dmn}(R)$: $(z, w) \in S \wedge (w, y) \in R$
- Ekkor $(x, z) \in T \wedge (z, w) \in S \Rightarrow (x, w) \in (S \circ T)$
- Ha $(x, w) \in S \circ T \ \wedge (w, y) \in R \Rightarrow (x, y) \in R \circ (S \circ T)$

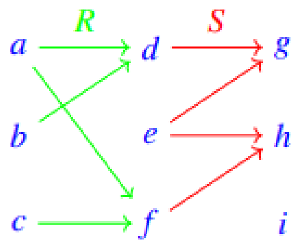
2) Mondja ki és bizonyítsa *relációk kompozíciójának és inverzének* kapcsolatát!

Tétel

Legyenek R, S relációk. Ekkor

- $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$.

Bizonyítás.



$S \circ R$

- Legyen $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \iff (y, x) \in R \circ S$.
- $\iff \exists z : (y, z) \in S \ \wedge (z, x) \in R$
- $\iff (z, y) \in S^{-1} \ \wedge (x, z) \in R^{-1}$
- $\iff (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$

3) Mondja ki és bizonyítsa az *ekvivalencia-relációk* és az *osztályozás* közötti összefüggésre vonatkozó tételt!

Tétel

- Egy X halmazon értelmezett $\sim$ ekvivalencia reláció esetén $\{[x] : x \in X\}$ egy osztályozás.
- Tekintsük egy X halmaz $\mathcal{O}$ osztályozását. Ekkor az
  $$R = \{(x, y) : \ x \text{ és } y \text{ ugyanazon } \mathcal{O} \text{ osztályban vannak}\}$$
  egy ekvivalencia reláció.

Ekvivalencia reláció $\Rightarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{O} = \{[x] : x \in X\}$ ahol $[x] = \{y \in X : y \sim x\}$

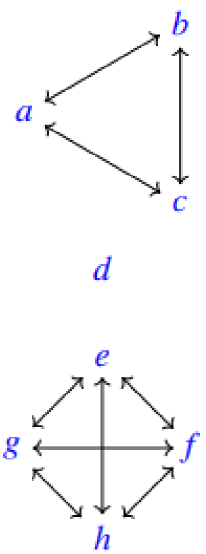
- 1. feltétel: $\cup\mathcal{O} = X$.
  Mivel $\sim$ reflexív $\Rightarrow$ $x \in [x]$ $\Rightarrow$ $\cup\{[x] : x \in X\} = X$.

- 2. feltétel: $\mathcal{O}$ elemei páronként diszjunktak.
  - Tegyük fel hogy $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Megmutatjuk, hogy $[x] = [y]$.
  - Legyen $z \in [x] \cap [y]$. Akkor (definíció szerint) $z \sim x$ és $z \sim y$.
  - Mivel $\sim$ szimmetrikus $\Rightarrow$ $x \sim z$.
  - Mivel $\sim$ tranzitív, ezért $x \sim z$ és $z \sim y$ $\Rightarrow$ $x \sim y$, azaz $x \in [y]$.
  - Ha $x' \in [x]$, akkor $x' \sim x$ és a tranzitivitás miatt $\Rightarrow$ $x' \sim y$, azaz $x' \in [y]$.
  - Tehát $[x] \subset [y]$.
  - x és y szerepének felcserélésével $[y] \subset [x]$, azaz $[x] = [y]$.

Ekvivalencia reláció $\Leftarrow$ osztályozás

Bizonyítás. Legyen $R = \{(x, y) :\ x$ és y ugyanazon $\mathcal{O}$ osztályban vannak$\}$

- reflexivitás: Minden x ugyanabban az osztályban van, mint saját maga: xRx.
  Továbbá, mivel $\cup\mathcal{O} = X$, így minden x benne van valamely osztályban.
- szimmetrikusság: ha xRy, akkor x és y ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan yRx.
- tranzitivitás Ha xRy és yRz, akkor mind x és y, mind y és z ugyanabban az osztályban vannak, speciálisan x és z is ugyanabban az osztályán vannak, azaz xRz. $\square$



R reláció hurokélek nélkül

1) Mondja ki és bizonyítsa komplex számok *szorzatára*, *hányadosára* ill. *hatványára* vonatkozó Moivre tétel!

Tétel (Biz: HF)

Legyen $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nem-nulla komplex számok:
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi),$$
és legyen $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- $zw = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$
- $\dfrac{z}{w} = \dfrac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi))$
- $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Bizonyítás ugye HF

2) Mondja ki és bizonyítsa komplex számok *gyökvonására* vonatkozó tétel.

Tétel (Biz.: ld. fönt)

Legyen $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex szám $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ trigonometrikus alakkal. Ekkor a $z^n = w$, $z \in \mathbb{C}$ egyenlet megoldásai

$$z_k = |w|^{1/n}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k): \quad \varphi_k = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Gyökvonás

Legyen $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$. Ekkor
$$z = w \iff |z| = |w| \text{ és } \varphi = \psi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Adott $w \in \mathbb{C}$ számra keressük a $z^n = w$ egyenlet megoldásait. Ekkor
$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = w$$
Így
$$|z| = |w|^{1/n} \quad \text{és} \quad n\varphi = \psi + 2k\pi \quad \left(\Longrightarrow \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$$
Hány lényegesen különböző megoldás van:
$$\frac{\psi}{n}, \; \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi}{n}, \; \frac{\psi}{n} + \frac{4\pi}{n}, \; \ldots, \; \frac{\psi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

De $\sin\left(\dfrac{\psi}{n}\right) = \sin\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2n\pi}{n}\right)$ és $\cos\left(\dfrac{\psi}{n}\right) = \cos\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2n\pi}{n}\right)$,
így pontosan n különböző megoldás lesz: $\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

1) Hányféleképpen tudunk n különböző ill. nem különböző elemet sorrendbe állítani (ismétlés nélküli ill. ismétléses permutáció)? Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!

Ismétlés nélküli

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás.
n-féleképpen választhatjuk az 1. elemet és $(n-1)$-féleképpen választhatjuk a 2. elemet és $(n-2)$-féleképpen választhatjuk a 3. elemet és ...

Ismétléses

- Összesen $k_1 + k_2 + \dots + k_m$ elemünk van.
- Ha ezek között különbséget teszünk, a lehetséges sorrendek száma: $(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!$
- Ha azonban az azonos típusú elemek között nem teszünk külömbséget, egy sorrendet többször számolunk.
- Egy sorrendet $k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!$ multiplicitással számolunk.
- Így az osztás szabály szerint $\dfrac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdots k_m!}$ lehetséges sorrend van.

2) Hányféleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot, ha a sorrend számít és **a)** egy elemet csak egyszer, **b)** egy elemet többször is választhatunk (ismétlés nélküli ill. ismétléses variáció). Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!

Ismétlés nélküli

A szorzat-szabály 2 szerint: $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ lehetséges sorrend.

Bizonyítás. HF

Biztonyitás HF

Ismétléses

Tétel

Legyen A egy véges halmaz. Ekkor A hatávnyhalmazának elemszáma $|\mathcal{P}(A)| = |\{B : B \subset A\}| = |2^A| = 2^{|A|}$.

Bizonyítás.
- Állítsuk sorrendbe A elemeit.
- Minden egyes elemre válasszunk a $\{\text{benne van}, \text{nincs benne}\}$ halmazból.
- Az ilyen $|A|$ hosszú „benne van”/„nincs benne” sorozatok szám: $2^{|A|}$.

3) Hányféleképpen választhatunk ki n különböző elemből k darabot, ha a sorrend nem számít és **a)** egy elemet csak egyszer, **b)** egy elemet többször is választhatunk (ismétlés nélküli ill. ismétléses kombináció). Mondja ki és bizonyítsa a megfelelő tételeket!

Ismétlés nélküli

- Válasszunk n-ből k elemet, úgy, hogy a sorrend számít $\Longrightarrow n!/(n-k)!$ ismétlés nélküli variáció)
- Egy számolandó lehetőséget $L = k!$-szor számoltunk.
- Így összesen $\dfrac{n!/(n-k)!}{k!}$ lehetőség van.

Ismétléses

- Legyen $A = \{a_1, a_2 \ldots, a_n\}$ az n elemű halmaz, melyből k elemet választunk (ismétléssel, sorrend nem számít).
- Minden lehetséges választás megfelel egy $0-1$ sorozatnak:

$$\underbrace{1,1,\ldots,1}_{a_1\text{-ek száma}},0\,\underbrace{1,1\ldots,1}_{a_2\text{-k száma}},0,\ldots,0,\underbrace{1,1\ldots,1}_{a_n\text{-ek száma}}$$

- Ekkor elég leszámlálni a lehetséges ilyen típusú sorozatokat. Itt pontosan k darab 1-es van (választott elemek) és $n-1$ darab 0 (szeparátorok száma).
- Összesen $k+n-1$ pozíció van és ezek közül választunk k pozíciót (1-esek pozícióját).
- Összes lehetőség száma: $\dbinom{n+k-1}{k}$

4) Mondja ki és bizonyítsa a *binomiális* tételt.

Tétel

Adott $n \geq 1$ egész esetén

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

Bizonyítás.

- $(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$
- A szorzatban mi lesz $a^{n-i}b^i$ együtthatója?
- i tényezőből b-t választunk, a maradékból a-t (sorrend nem számít, egy tényezőből csak egyszer).
- Ennek száma: $\binom{n}{i}$.

5) Mondja ki és bizonyítsa a binomiális együttható *tulajdonságára* vonatkozó tételek (Pascal-háromszög, szimmetria, kombinatorikus bizonyítással)!

Pascal háromszög

Tétel

Adott n, i nemnegatív egészek esetén

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1} = \binom{n+1}{i+1}$$

Bizonyítás.

- Hányféleképpen tudunk $n+1$ elemből $i+1$ elemet kiválasztani? $\Longrightarrow$ kétféleképpen számláljuk le
- 1. módszer: $n+1$ elemből közvetlenül kiválasztunk $i+1$-et: $\binom{n+1}{i+1}$
- 2. módszer: esetszétválasztással: kiválasztjuk-e az $n+1$-eik elemet?
  - vagy kiválasztjuk az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből i darabot,
  - vagy nem választjuk ki az $n+1$-edik elemet és a maradék n elemből $i+1$ darabot választunk
- összeadás-szabály szerint ez $\binom{n}{i} + \binom{n}{i+1}$ □

Binomiális együttható szimmetriája

Tétel

Minden n, k nemnegatív egészre $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Bizonyítás.

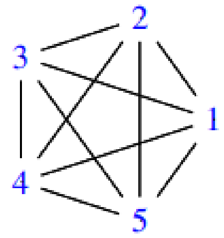
- **1. bizonyítás**: közvetlenül a formulából $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{n-k}$.
- **2. bizonyítás**:

  $\binom{n}{k} = n$-ből k-t választunk

  $= n$-ből $n-k$-t megjelölünk (és azokat nem választjuk) $= \binom{n}{n-k}$.

1) Mondja ki és bizonyítsa a gráfok *élszáma* és *csúcsainak fokszáma* közötti összefüggés.

Kézfogás-szabály



Tétel

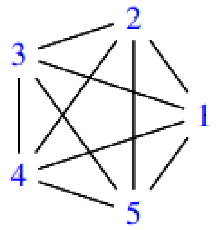
Minden $G = (V, E)$ gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

1. Bizonyítás.

- Számoljuk meg az illeszkedő pont-él párokat $\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}$:
  - $\sum_{v \in V} \sum_{e \in E} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{v \in V} |\{e \in E : v \in e\}| = \sum_{v \in V} d(v)$.
  - $\sum_{e \in E} \sum_{v \in V} |\{(v, e) \in V \times E : v \in e\}| = \sum_{e \in E} |\{v \in V : v \in e\}| = \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$.

VAGY

Kézfogás-szabály



Tétel

Minden $G = (V, E)$ gráfra $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

2. Bizonyítás.
Indukció $|E|$ szerint.

- $|E| = 0$ esetén az állítás igaz (üres gráf).
- Thf $|E| \leq k$ esetén igaz az állítás.
- $|E| = k + 1$ esete: a gráfot úgy kapjuk, hogy egy k élszámú gráfba egy új élet behúzunk.
- Ekkor a jobb oldal kettővel nő ($2(|E| - 1) \rightsquigarrow 2|E|$).
- Ekkor a bal oldal is kettővel nő (új élre illeszkedő két v_1, v_2 fokszáma eggyel-eggyel nő). □

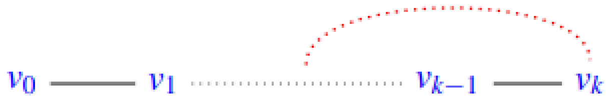
2) Mondja ki és bizonyítsa a *körmentes gráfok elsőfokú csúcsaira* vonatkozó tétel.

Tétel

Legyen $G = (V, E)$ egy körmentes nem-üres ($E \neq \emptyset$) véges gráf. Ekkor $\exists v \in V : d(v) = 1$.

Bizonyítás.

- Mivel $E \neq \emptyset$, G-ben van út. (Például egy egy hosszú v, e, v' út.)
- Legyen $v_0, e_1, \ldots, e_k, v_k$ egy maximális hosszú út.
- Mivel G körmentes, v_k nem szomszédja v_i-nek $0 \leq i < k-1$.



- Mivel az út maximális, v_k-nak nincs az úton kívüli szomszédja.
  v_0 —— v_1 ·········· v_{k-1} —— v_k ··········
- Azaz v_k-nak csak v_{k-1} a szomszédja $\Longrightarrow d(v_k) = 1$.

3) Adott G gráfra bizonyítsa be, hogy

a) G fa $\Longrightarrow$ G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem; ill.

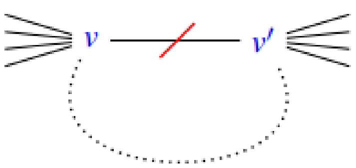
b) G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem $\Longrightarrow$ ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet.

1. állítás $(1. \Longrightarrow 2.)$

G fa $\Longrightarrow$ G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem.

Bizonyítás.

- G összefüggősége következik a fa definíciójából.
- bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem összefüggő:

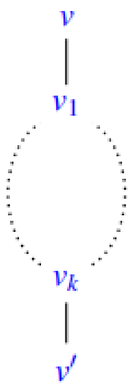


  - Biz. indirekt.
  - Tfh az e él (v és v' között) elhagyásával a gráf összefüggő marad.
  - Ekkor az összefüggőség miatt van a részgráfban egy $v, e_1, v_1, \ldots, e_k, v'$ út.
  - Ez kiegészítve az e éllel egy kört kapunk. $\lightning$

2. állítás (2. $\Longrightarrow$ 3.)

G összefüggő, de bármely él elhagyásával kapott részgráf már nem $\Longrightarrow$
ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet

Bizonyítás.



- G összefüggő $\Longrightarrow$ v és v' között létezik séta
- körök elhagyásával létezik út
- út egyértelműsége: Biz. indirekt.
  - Tfh v és v' között több út is van:
    $v, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_k, e_k, v'$ ill., $v, f_1, u_1, f_2, \ldots, u_\ell, f_\ell, v'$
  - A két út különbözik, legyen $r = \min\{i : v_i \neq u_i\}$ és
    $s = \min\{i > r : v_i = u_j$ valamely $j > r\}$
  - Ekkor a v_{r-1} és v_s közötti két út segítségével kört kapunk.
  - A körön bármely él elhagyásával a gráf összefüggő marad. $\lightning$

4) Adott G gráfra bizonyítsa be, hogy

a) Ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet $\Longrightarrow$ G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van; ill.

b) G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van $\Longrightarrow$ G fa.

3. állítás (3. $\Longrightarrow$ 4.)

Ha v és v' a G különböző csúcsai, akkor v-ből v'-be pontosan egy út vezet $\Longrightarrow$
G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van

Bizonyítás.

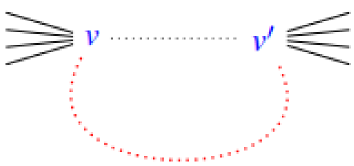
- Biz.: indirekt (Logikai emlékeztető: $A \Rightarrow (B \wedge C) \Leftrightarrow (\neg B \vee \neg C) \Rightarrow \neg A$)
- 1. rész: tfh van kör $\Rightarrow$ a körön két irányban haladva két különböző út $\lightning$.
- 2. rész: tfh $\{v, v'\}$ él hozzáadásával sem keletkezik kör $\Rightarrow$ v, v' között nem volt út $\lightning$

4. állítás ($4. \implies 1.$)

G-nek nincs köre, de bármely él hozzáadásával kapott gráfban már van $\implies$ G fa

Bizonyítás.

- G körmentes közvetlenül következik
- G összefüggősége: Biz: indirekt



- Tfh nem összefüggő, pl. $v, v' \in V$ között nincs séta. Spec. $\{v, v'\} \notin E$
- Ekkor az $e = \{v, v'\}$ él behúzásával a gráfban már van kör.
- Legyen ez $v, e, v', e_1, v_1, \ldots, e_k, v$.
- Ekkor a $v', e_1, v_1, \ldots, e_k, v$ egy út v' között $\lightning$

Ezzel bebizonyítottuk az **eredeti tételt** is: $1. \implies 2. \implies 3. \implies 4. \implies 1.$ $\square$

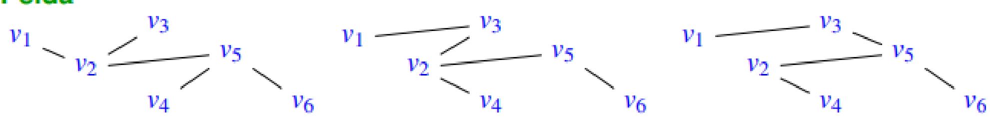
5) Mondja ki és bizonyítsa a fa gráfok *élszámára* vonatkozó tétel (3 ekvivalens állítás).

Tétel

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. G fa;
2. G körmentes és $n-1$ éle van;
3. G összefüggő és $n-1$ éle van;

Példa



Bizonyítás.

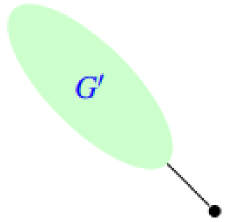
- $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 1.$
- n szerinti indukció
- $n = 1$ esete triviális

1. Állítás ($1. \Rightarrow 2.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G fa $\Rightarrow$ G körmentes és $n-1$ éle van;

Bizonyítás.

- Tfh $k < n$ csúcsú gráfra teljesül.
- Tekintsünk egy n csúcsú G fát.
- Mivel G fa (spec. körmentes), van elsőfokú csúcsa.
- Ezt elhagyva (az illeszkedő éllel) a kapott G' részgráf egy $n-1$ csúcsú fa.
- A részgráfnak $n-2$ éle van (indukció szerint).
- Az élet visszahúzva G-nek így $n-1$ éle van.



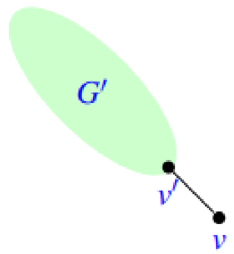
G gráf

2. Állítás ($2. \Rightarrow 3.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G körmentes és $n-1$ éle van $\Rightarrow$ G összefüggő és $n-1$ éle van.

Bizonyítás.

- Tfh $k < n$ csúcsú gráfra teljesül.
- Tekintsünk egy n csúcsú G körmentes $n-1$ élű gráfot.
- Mivel G körmentes, van elsőfokú v csúcsa.
- Ezt elhagyva (az illeszkedő éllel) a kapott G' részgráf $n-1$ csúcsú, összefüggő és $n-2$ élű.
- A részgráf összefüggő (indukció szerint). Azaz minden v' és v'' csúcs között van séta.
- Az eredeti G gráf összefüggősége: legyen v' a v szomszédja. Tetszőleges v''-ből van séta v'-be, ahonnan van séta v-be.



G gráf

3. Állítás ($3. \Rightarrow 1.$)

Legyen G egyszerű n csúcsú gráf. Ekkor G összefüggő és $n-1$ éle van $\Rightarrow$ G fa.

Bizonyítás.

- Tekintsünk egy n csúcsú G összefüggő $n-1$ élű gráfot.
- Ha G körmentes is, akkor fa.
- Ha van benne kör, a körön egy élt elhagyva a részgráf még mindig összefüggő.
- Folytassuk ezt addig, amíg körmentes T gráfot (és így fát) kapunk.
- Legyen ℓ az elhagyott élek száma.
- A T gráfnak n csúcsa és $n-1-\ell$ éle van.
- T fa $\Rightarrow$ élei száma $n-1$ $\Rightarrow$ $\ell = 0$ $\Rightarrow$ G körmentes volt.

Így az **eredeti** tételt is beláttuk. □

6) Mondja ki és bizonyítsa a szükséges és elégséges feltételre vonatkozó tételt *zárt Euler-séta* létezéséről.

Tétel

Egy véges gráfban pontosan akkor van zárt Euler-séta, ha

1. izolált csúcsoktól eltekintve összefüggő;
2. minden csúcs foka páros.

Bizonyítás. $\Longrightarrow$

- Legyen $v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_0$ egy zárt Euler-séta
- a gráf összes éle fel van sorolva a sétában
  - $\Rightarrow$ minden v csúcs is szerepel, amire illeszkedik él ($d(v) \geq 1$)
  - $\Rightarrow$ minden nem-izolált csúcs között van séta $\Rightarrow 1.$
- legyen $i \neq 0$, ekkor v_i közbenső csúcs
- ekkor e_{i-1}, e_i 2-vel járul hozzá $d(v_i)$-hez
- $i = 0$: e_1 ill. e_k is $1 + 1$-gyel járul hozzá $d(v_0)$-hoz $\Rightarrow 2.$

Bizonyítás. $\Longleftarrow$

- A bizonyítás konstruktív
- hagyjuk el az izolált csúcsokat (a maradék gráf tartalmazza a zárt Euler-sétát)
- induljunk el egy v_0 tetszőleges csúcsból eddig nem látogatott élek mentén
- minden $d(v)$ páros, így csak akkor akadunk el ha v_0-ba érkeztünk
- ha minden élet felsoroltunk $\Rightarrow$ kész
- ha nem $\Rightarrow$ iteratívan bővíteni fogjuk a zárt sétát

7) Mondja ki és bizonyítsa a *Dirac tétele* Hamilton-kör létezésének elégséges feltételéről.

Utolsó előadáson