Analízis 1.

• Mit mond ki a Dedekind-axióma vagy szétválasztási axióma?

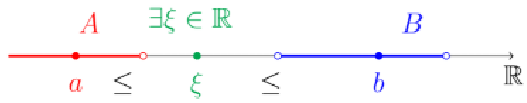
$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**):
Tegyük fel, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra a következők teljesülnek:

- $A \neq \emptyset$ és $B \neq \emptyset$,
- minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$.

Ekkor
$$\exists \xi \in \mathbb{R} \colon \forall a \in A \text{ és } b \in B \text{ esetén } a \leq \xi \leq b.$$

Megjegyzések.

1. A „szétválasztási axióma” elnevezést támasztja alá az alábbi ábra:



Azt is mondhatjuk, hogy a ξ valós szám „szétválasztja” az A és a B halmazt. A „teljességi axióma” szóhasználatot hamarosan megindokoljuk.

• Írja le pozitív formában azt, hogy valamely $\emptyset \neq H \subset R$ halmaz felülről nem korlátos!

9. Definíció. *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz*

- **felülről korlátos**, *ha*
$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } x \leq K.$$
Az ilyen K számot a H halmaz egy **felső korlátjának** *nevezzük.*

A fenti állítás pozitív formában való tagadása a következő
$\forall K \in R, \exists x \in H$, hogy $x > K$

• **Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy valamely ∅ ≠ H ⊂ R halmaz korlátos!**

9. Definíció. *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz*

- **felülről korlátos**, *ha*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } x \leq K.$$

Az ilyen K számot a H halmaz egy **felső korlátjának** *nevezzük.*

- **alulról korlátos**, *ha*

$$\exists k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } k \leq x.$$

Az ilyen k számot a H halmaz egy **alsó korlátjának** *nevezzük.*

- **korlátos**, *ha alulról is, felülről is korlátos, azaz*

$$\exists K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall x \in H \text{ esetén } |x| \leq K.$$

• **Fogalmazza meg a szuprémum-elvet!**

2. Tétel (A szuprémum elv). *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

i) $H \neq \emptyset$ *és*

ii) H *felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

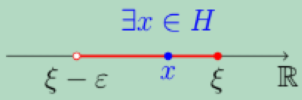
• **Mi a szuprémum definíciója?**

- *A felülről korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját H* **szuprémumának** *nevezzük, és a* $\boxed{\sup H}$ *szimbólummal jelöljük.*

- **Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy ξ = sup H ∈ R!**

4. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \sup H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ x \leq \xi; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legkisebb felső korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz } \ \exists x \in H: \ \xi - \varepsilon < x. \end{cases}$$



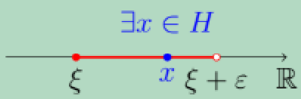
- **Mi az infimum definíciója?**

- *Az alulról korlátos $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját H* **infimumának** *nevezzük, és az* $\boxed{\inf H}$ *szimbólummal jelöljük.*

- **Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy ξ = inf H ∈ R!**

5. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz. Ekkor*

$$\xi = \inf H \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{i) } \xi \ \textit{alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall x \in H: \ \xi \leq x; \\ \text{ii) } \xi \ \textit{a legnagyobb alsó korlát, azaz} \\ \qquad \forall \varepsilon > 0\textit{-hoz } \ \exists x \in H: \ x < \xi + \varepsilon \end{cases}$$



- **Mi a kapcsolat egy halmaz maximuma és szuprémuma között?**

Kapcsolat: Ha egy halmaznak van maximuma, akkor a maximum és a szuprémum megegyezik ($\sup H = \max H$). Ha nincs maximuma, a szuprémum a legkisebb szám, amely felső korlát, de nem része a halmaznak.

- **Mi a kapcsolat egy halmaz minimuma és infimuma között?**

Kapcsolat: Ha egy halmaznak van minimuma, akkor a minimum és az infimum megegyezik ($\inf H = \min H$). Ha nincs minimuma, az infimum a legnagyobb szám, amely alsó korlát, de nem része a halmaznak.