19. A Jacobi-iteráció.

19. A Jacobi-iteráció.

a) Vezesse le a Jacobi-iteráció mátrixos és koordinátás alakját. Írja át az iterációt a reziduumvektoros alakra, térjen ki annak szerepére.

Átalakítás:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ Dx &= -(L+U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: Jacobi-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J} \cdot x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J} = B_J \cdot x^{(k)} + c_J$$

Állítás: a Jacobi-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} - b_i \right) \qquad (i = 1, \dots, n)$$

Írjuk fel az iteráció reziduum vektoros alakját!

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\cdot x^{(k)} + D^{-1}b = D^{-1}\Big((D-A)\cdot x^{(k)} + b\Big) =$$
$$= x^{(k)} + D^{-1}\Big(-Ax^{(k)} + b\Big) = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)}$$

Vezessük be az $s^{(k)} := D^{-1}r^{(k)}$ segédvektort, ezzel egy lépésünk alakja:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + s^{(k)}.$$

Az új reziduum vektor:

$$r^{(k+1)} = b - Ax^{(k+1)} = b - A(x^{(k)} + s^{(k)}) = r^{(k)} - As^{(k)}.$$

Algoritmus: Jacobi-iteráció

$$r^{(0)} := b - Ax^{(0)}$$

$k = 1, \ldots,$ leállásig

$$s^{(k)} := D^{-1}r^{(k)} \quad \Leftrightarrow \quad Ds^{(k)} = r^{(k)} \text{ LER}$$
$$x^{(k+1)} := x^{(k)} + s^{(k)}$$
$$r^{(k+1)} := r^{(k)} - As^{(k)}$$

Megj.: Látjuk, hogy $x^{(k+1)} - x^{(k)} = s^{(k)}$, vagyis a tapasztalati kontrakciós együtthatók számításához lépésenként egy norma értéket és egy osztást kell elvégezni.