- **Mi a konvex függvény definíciója?**
- **Mi a konkáv függvény definíciója?**

Definíció. *A.m.h. az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény* ***konvex az I intervallumon****, ha*

$$\forall\ a, b \in I,\ a < b \text{ esetén}$$

$$(*) \qquad f(x) \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad \big(\forall\, x \in (a, b)\big).$$

Ha $(*)$-ban $\le$ helyett $<$ áll, akkor f-et I-n ***szigorúan konvexnek****, ha $\ge$, illetve $>$ áll, akkor f-et I-n* ***konkávnak****, illetve* ***szigorúan konkávnak*** *nevezzük.*

- **Jellemezze egy függvény konvexitását az első deriváltfüggvény segítségével!**
- **Jellemezze egy függvény konkávitását az első deriváltfüggvény segítségével!**

Tétel. *T.f.h. $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f \in D(I)$. Ekkor*

$$f \text{ konvex } I\text{-n} \iff f' \nearrow I\text{-n}.$$

Megjegyzés. „$\nearrow$” helyett szigorúan konvex esetben „$\uparrow$”, konkáv esetben „$\searrow$” és szigorúan konkáv esetben pedig „$\downarrow$” áll. ■

• Jellemezze egy függvény konvexitását a második deriváltfüggvény segítségével!

• Jellemezze egy függvény konkávitását a második deriváltfüggvény segítségével!

Tétel. *T.f.h.* $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és* $f \in D^2(I)$. *Ekkor*

1° f *konvex* I*-n* $\iff$ $f'' \geq 0$ I*-n.*

f *konkáv* I*-n* $\iff$ $f'' \leq 0$ I*-n.*

2° *Ha* $f'' > 0$ I*-n* $\implies$ f *szigorúan konvex* I*-n.*

Ha $f'' < 0$ I*-n* $\implies$ f *szigorúan konkáv* I*-n.*

• Mikor mondja, hogy valamely f ∈ R → R függvénynek inflexiója van az a ∈ Df pontban?

VÁLASZ: Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy valamely $a \in I$ pontban $f \in \mathfrak{D}[a]$. Azt monjuk, hogy f-nek inflexiója van a-ban, ha az $f - e_a f$ függvénynek jelváltása van az a pontban, ahol

$$e_a f(x) := f(a) + f'(a)(x - a) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

• Mondja ki a konvexitás és az érintő kapcsolatára vonatkozó tételt!

• Mondja ki a konkávitás és az érintő kapcsolatára vonatkozó tételt!

Tétel. *T.f.h.* $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallum és* $f \in D(I)$. *Ekkor*

$$f \ \ konvex \ \ [konkáv] \ \ I\text{-}n \iff$$

$$\forall a \in I: \ f(x) \geq e_{f,a}(x), \quad [f(x) \leq e_{f,a}(x)] \quad (x \in I),$$

vagyis f *grafikonja egy tetszőleges pontjában húzott érintője felett* [*alatt*] *halad.*

• Mikor mondjuk, hogy egy függvénynek aszimptotája van a +∞-ben?

Definíció. *Legyen* $a \in \mathbb{R}$ *és* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$*. A.m.h.* f*-nek* ***van aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****, ha*

$$\exists \quad l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - l(x)\big) = 0.$$

Ekkor az $l(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ *egyenes az* f ***aszimptotája*** $(+\infty)$***-ben****.*

Megjegyzés. A $(-\infty)$-beli aszimptota def-ja hasonló. ■

• Hogyan szól a +∞-beli aszimptota létezésére vonatkozó feltétel?

Tétel. *Az* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ *függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája* $(+\infty)$*-ben, ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - Ax\big) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f *függvény aszimptotája* $(+\infty)$*-ben.*

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$-beli aszimptoták meghatározására. ■