Analízis 1.

Mit jelent az, hogy a ∈ R torlódási pontja a H ⊂ R halmaznak?

1. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a* $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}$ *halmaznak* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ **torlódási pontja**, *ha az a minden környezete végtelen sok H-beli elemet tartalmaz, azaz*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{esetén} \quad K_\varepsilon(a) \cap H \quad \text{végtelen halmaz.}$$

A H halmaz torlódási pontjainak a halmazát a $\boxed{H'}$ *szimbólummal jelöljük.*

Környezetek segítségével adja meg a függvényhatárérték egységes definícióját!

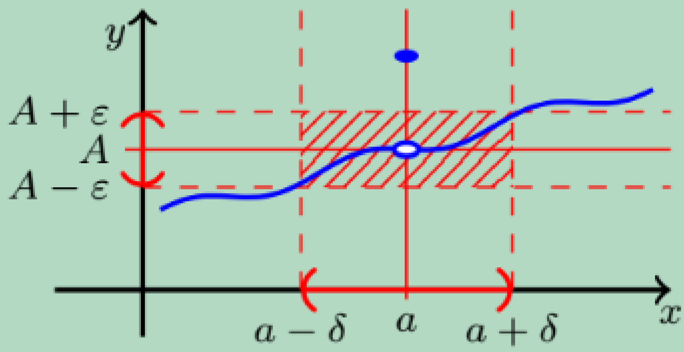
2. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $a \in \mathcal{D}'_f$ *pontban* **van határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \big(K_\delta(a) \setminus \{a\}\big) \cap \mathcal{D}_f \colon\ f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

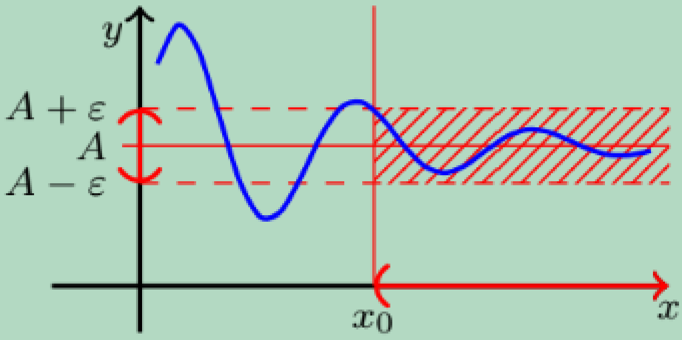
Ekkor A-t a függvény a-beli **határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_a f = A, \qquad \lim_{x \to a} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \quad \text{ha} \quad x \to a.$$

Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a végesben vett véges határérték definícióját!

$A = \lim\limits_a f$	$A \in \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{R}$	 $\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, 0 < \lvert x-a \rvert < \delta \colon \lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$

Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a plusz végtelenben vett véges határérték definícióját!

<table>
<tr><th>$A = \lim_{a} f$</th><th>$A \in \mathbb{R}$</th></tr>
<tr><td>$a = +\infty$</td><td>

$\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists x_0 > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, x > x_0 : |f(x) - A| < \varepsilon$</td></tr>
</table>

Írja le a határértékre vonatkozó átviteli elvet!

4. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv). *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$ *és* $A \in \overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor*

$$\lim_{a} f = A \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}, \lim_{n\to+\infty} x_n = a \;\; \textit{esetén} \;\; \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = A.$$

Hogyan szól a függvények hányadosának a határértékére vonatkozó tétel?

6. Tétel (A függvényhatárérték és a műveletek kapcsolata). *Tegyük fel, hogy* $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \left(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\right)'$ *és léteznek az* $A := \lim\limits_a f \in \overline{\mathbb{R}}$, $B := \lim\limits_a g \in \overline{\mathbb{R}}$ *határértékek. Ekkor*

1. *az* $f + g$ *összegfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*
$$\lim_a (f+g) = \lim_a f + \lim_a g = A + B,$$
feltéve, hogy az $A + B \in \overline{\mathbb{R}}$ *összeg értelmezve van,*
2. *az* $f \cdot g$ *szorzatfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*
$$\lim_a (f \cdot g) = \lim_a f \cdot \lim_a g = A \cdot B,$$
feltéve, hogy az $A \cdot B \in \overline{\mathbb{R}}$ *szorzat értelmezve van,*
3. *az* f/g *hányadosfüggvénynek is van határértéke* a*-ban és*
$$\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_a f}{\lim\limits_a g} = \frac{A}{B},$$
feltéve, hogy az $\dfrac{A}{B} \in \overline{\mathbb{R}}$ *hányados értelmezve van.*

Definiálja függvény jobb oldali határértékét!

3. Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Tegyük fel, hogy* $a \in \mathbb{R}$ *és* $a \in \left(\mathcal{D}_f \cap (a, +\infty)\right)'$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek az* a *helyen (vagy* a*-ban)* **van jobb oldali határértéke**, *ha*

$$\exists A \in \overline{\mathbb{R}},\ \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathcal{D}_f,\ a < x < a + \delta\colon f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Ekkor A *egyértelmű, és ezt az* f *függvény* a*-ban vett* **jobb oldali határértékének** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{a+0} f = A, \qquad \lim_{x \to a+0} f(x) = A, \qquad f(a+0) = A.$$