12. A Householder-transzformáció II.

12. A Householder-transzformáció II.

a) Definiálja a Householder-transzformációt, ismertesse geometriai tartalmát és elemi tulajdonságait (nem kell bizonyítani). Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját vektorra illetve mátrixra (mindkét irányból), adja meg e számítások műveletigényeit. Mutassa be a transzformáció alkalmazásának módját LER megoldására.

Definíció: Householder-mátrix

A $H = H(v) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot *Householder-mátrixnak* nevezzük, ha

$$H(v) = I - 2vv^\top,$$

ahol $v \in \mathbb{R}^n$ és $\|v\|_2 = 1$.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}, \|\boldsymbol{a}\|_2 = \|\boldsymbol{b}\|_2 \neq 0$ vektorok esetén keressük a $H(v)a = b$ Householder-mátrixot.

$$\boldsymbol{v} := \pm \frac{\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|_2}$$

vektor esetén:

$$H(v) = I - 2vv^T \Rightarrow H(v)a = b$$

Tehát valóban két azonos hosszúságú, de különböző vektor átvihető egymásba.

- $H(v)$ tükröző mátrix, a v-re merőleges (azaz v normálvektorú) $n-1$ dimenziós altérre (0-n átmenő egyenesre, síkra stb.) tükröz.

Állítás: Householder-mátrixok tulajdonságai

1. $H^\top = H$ (szimmetrikus),
2. $H^2 = I$, azaz $H^{-1} = H$ (ortogonális),
3. $H(v) \cdot v = -v$,
4. $\forall y \perp v: \quad H(v) \cdot y = y.$

- A $H(v)$ transzformációs mátrixot nem kell előállítani, enélkül alkalmazzuk vektorokra, ez a Householder-transzformáció:
- $x \in \mathbb{R}^n$-re $H(v)x = (I - 2vv^\top)x = x - 2v\underbrace{(v^\top x)}_{\in\mathbb{R}}.$
- $y \in \mathbb{R}^n$-re $y^\top H(v) = y^\top(I - 2vv^\top) = y^\top - 2\underbrace{(y^\top v)}_{\in\mathbb{R}}v^\top.$

(**Mátrixok esete**: soronként kell alkalmazni a transzformációt, mondhatni megfelelő számú oszlopvektorra bontjuk????)

Tétel: A Householder-trf. műveletigénye LER-re

A LER megoldásának műveletigénye Householder-transzformációkkal:

$$\frac{4}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint $2(n-1)$ darab négyzetgyökvonásra is szükség van.

Tétel: A Householder-trf. műveletigénye *QR*-felbontásra

A *QR*-felbontás előállításának műveletigénye Householder-transzformációkkal:

$$\frac{8}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2),$$

valamint $2(n-1)$ darab négyzetgyökvonásra is szükség van.

Tétel (LER megoldása Householderrel):

Elvégezünk $n-1$ db Householder transzformációt (kb. GE-alak, felsóháromszög alak), majd **visszahelyettesítés**!

Kiszámoljuk:

$$\sigma = -1 * sign(a_{11}) * \|a_1\|_2$$
$$v_1 := \frac{a_1 - \sigma_1 e_1}{\|a_1 - \sigma_1 e_1\|_2}$$
$$H_1 := H(v_1)$$

Ezt a transzformációt ezután **soronként** alkalmazzuk a mátrixra. (b-re is!)

Most már csak $n-1 \times n-1$-es mátrixra kell alkalmazni a transzformációt (egyre gyorsabb).

K-adik lépés:

$$v_k = \begin{pmatrix} 0_1 \\ \vdots \\ 0_{k-1} \\ \widetilde{v_k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, H_k := H(v_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & H(\widetilde{v_k}) \end{pmatrix}$$

Kinullázzuk a főátló alatti elemeket a k-adik oszlopban (mint GE esetén). (Ezzel együtt a többi oszlopra szépen alkalmazzuk azokat a lépéseket, mint GE esetén.)

$n-1$. lépés vagy utolsó lépés:

Felsőháromszöget kapunk eredményül, mehet a **visszahelyettesítés**.

Példa – 2×2-es LER Householderrel

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. oszlop:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \|a_1\|_2 = 5$$
$$\sigma = -\operatorname{sign}(4) \cdot 5 = -5$$
$$v_1 = \frac{a_1 - \sigma e_1}{\|a_1 - \sigma e_1\|_2} = \frac{(9,3)^\top}{\sqrt{90}}$$
$$H_1 = I - 2v_1 v_1^\top$$

Alkalmazva:

$$H_1 A = \begin{pmatrix} -5 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad H_1 b = \tilde{b}$$

Felső háromszög → **visszahelyettesítés.**