- Felosztássorozatok segítségével adja meg a Riemann-integrálhatóság egy ekvivalens átfogalmazását!

Tétel. *Az* $f \in R[a,b]$ *és* $\int_a^b f = I \iff$

$\exists\ (\tau_n)$ *felosztássorozat:* $\lim_{n\to+\infty} s(f,\tau_n) = \lim_{n\to+\infty} S(f,\tau_n) = I.$

- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények összegével kapcsolatban tanult tétel?
- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények szorzatával kapcsolatban tanult tétel?
- Hogyan szól a Riemann-integrálható függvények hányadosával kapcsolatban tanult tétel?

Tétel. *T.f.h.* $f, g \in R[a,b]$, *és legyen* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1° $\lambda \cdot f \in R[a,b]$ *és* $\int_a^b (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \int_a^b f;$

2° $f + g \in R[a,b]$ *és* $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g;$

3° $f \cdot g \in R[a,b]$ (*csak ennyi!*);

4° *ha* $|g(x)| \geq m > 0$ $\big(\forall\, x \in [a,b]\big)$, *akkor*

$$\frac{f}{g} \in R[a,b] \qquad (\textit{csak ennyi!}).$$

- Milyen tételt tanult Riemann-integrálható függvény értékeinek megváltoztatását illetően?

Tétel. *T.f.h.* $f, g \in K[a,b]$*. Ha* $f \in R[a,b]$ *és az*

$$A := \{x \in [a,b] \mid f(x) \neq g(x)\} \text{ halmaz } \textbf{véges},$$

akkor $g \in R[a,b]$ *és*

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

- Mit ért a Riemann-integrál intervallum szerinti additivitásán?

Tétel. *T.f.h.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos, és legyen* $c \in (a,b)$*. Ekkor*

1° $f \in R[a,b] \iff f \in R[a,c]$ *és* $f \in R[c,b]$,

2° *ha* $f \in R[a,c]$ *és* $f \in R[c,b]$ *(vagy* $f \in R[a,b]$*), akkor*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

- Hogyan szól az integrálszámítás első középértéktétele?

Tétel: Az intergrálszámítás első középértéktétele.

T.f.h. $f, g \in R[a,b]$ *és* $g \geq 0$*. Ekkor:*

1° *az* $m := \inf_{[a,b]} f$, $M := \sup_{[a,b]} f$ *jelölésekkel*

$$m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b f \cdot g \leq M \cdot \int_a^b g,$$

2° *ha még* $f \in C[a,b]$ *is teljesül, akkor* $\exists\, \xi \in [a,b]$*:*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

- Fogalmazza meg a Cauchy-Bunyakovszkij-féle egyenlőtlenséget!

Tétel: A Cauchy-egyenlőtlenség. *Legyen* $n \in \mathbb{N}^+$. *Ekkor minden* $a_1, \ldots, a_n$ *és* $b_1, \ldots, b_n$ *valós számra*

$$(*) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$