

Technische Universität Berlin
Fakultät II: Mathematik und Naturwissenschaften

**Numerische Simulation und experimentelle Untersuchung
eines Nd:YVO₄-Hochleistungs-Verstärkers**

Prof. Dr.-Ing. Hans Joachim Eichler
Prof. Dr. Ulrike Woggon

Masterarbeit
vorgelegt von Matthias Schönborn (330658)
12. Februar 2013

Ich erkläre, diese schriftliche Ausarbeitung eigenhändig angefertigt und alle verwendeten Quellen und Zitate gekennzeichnet zu haben. Die selbstständige und eigenhändige Anfertigung versichert an Eides statt

Berlin, den

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Wärmedeposition und Wärmefluss	5
2.1. Indizierung	5
2.2. Wärmekapazität	6
2.3. Pumplichtverteilung	6
2.4. Absorption des Pumplichtes und Umwandlung in Wärme	7
2.5. Wärmeaustausch von benachbarten Blöcken	8
3. Numerische Lösung der Wärmegleichung in zwei Dimensionen	10
3.1. Explizite und implizite Methode	11
3.2. Explizite Methode und die Wärmegleichung	12
3.3. Crank-Nicolson-Methode	15
3.4. Implizite Methoden alternierender Richtung	15
3.5. Peaceman-Rachford-Methode: Algorithmus	17
4. Die Douglas-Methode	20
4.1. Mathematische Vorgehensweise	20
4.2. Dreidimensionale, numerisch ermittelte Temperaturverteilung in einem einseitig longitudinal gepumpten Nd:YVO ₄ -Kristall	24
5. Numerische Abschätzung der Brechkraft der thermischen Linse	31
5.1. Ermitteln der Brennweite eines simulierten Kristalls	31
5.2. Optische Brechkraft des simulierten Kristalls	34
6. Experimentelle Bestimmung der Brechkraft der thermischen Linse	37
6.1. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung	37
6.2. Auswertung	38
6.3. Kalibrierung der Simulation mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse . .	41
7. Zusammenfassung	44
A. Quellcode	46
A.1. Definition der Variablen	46
A.2. Funktionsdefinitionen	48
A.3. Definition der Temperaturleitungsmatrix	50

A.4. Festlegen der Randbedingungen	50
A.5. Laden der Ausgangs-Temperaturverteilung	50
A.6. Festlegen der Anzahl der relaxierten Neodym-Atome	50
A.7. Starten der Iteration	51
A.8. Wärmedeposition	51
A.9. Wärmetransfer bzw. Lösen der Douglas-Gleichungen	53
A.10. Datenausgabe	54

Abbildungsverzeichnis

1.	Laserübergänge	2
2.	Optisches Pumpen eines Lasermediums und Verstärkung von Laserlicht .	4
3.	Indizierung der Domäne	5
4.	Wärmeaustausch zwischen benachbarten Blöcken	9
5.	Domäne der Simulation	10
6.	Stabilität der expliziten Methode	14
7.	Maximaltemperatur und Pumpleistung	26
8.	Maximaltemperatur und Pumpstrahldurchmesser	26
9.	Temperaturverteilung	27
10.	Temperaturverteilung Querschnitte	28
11.	Genauigkeit und Zeitschrittweite	30
12.	Optische Weglängendifferenzen im Kristall	32
13.	Optische Weglängendifferenzen quer und diagonal	33
14.	Anpassungsbereich und Brennweite	33
15.	Brechkraft des simulierten Kristalls	35
16.	Brennweite in Abhängigkeit vom Pumpstrahldurchmesser	35
17.	Schemazeichnung des Experiments	37
18.	Diodenstrom und Ausgangsleistung	38
19.	Optische Brechkraft, unkorrigiert	39
20.	Optische Brechkraft, mit Korrektur	39
21.	Brechkraft und Kalibrierungsfaktor 1	42
22.	Brechkraft und Kalibrierungsfaktor 2	42
23.	Kalibrierte Temperaturverteilung	43

1. Einleitung

Die Erfindung des Lasers hat zur Etablierung neuer Arbeitsgebiete wie der nichtlinearen Optik und der Holographie geführt [1]. Festkörperlaser werden in vielen verschiedenen Bereichen eingesetzt, so zum Beispiel in der Spektroskopie, bei Untersuchungen der Atmosphäre, in der Präzisionsmeteorologie [2], in der Materialbearbeitung [1, 3, 4] sowie in der Präzisionsinterferometrie [5]. In der Informationstechnologie werden Laser in der Nachrichtenübertragung mit Glasfasern [1] sowie beim Auslesen und Beschreiben von *Blu-Ray Discs* verwendet.

In medizinischen Anwendungen wie Neurochirurgie, Hals-Nasen-Ohren-Heilkunde, Urologie und Orthopädie werden Festkörperlaser im Bereich der Arthroskopie und Disktomie eingesetzt [6]. Weitere medizinische Anwendungen sind die Durchflusszytometrie, optische Pinzetten und die optische Tomographie [1].

Hochleistungslaser spielen eine wichtige Rolle in der Materialbearbeitung. Dort werden sie beispielsweise zum Schweißen [7], Abtragen, Bohren und Trennen [8], sowie zur Herstellung feinsten Strukturen [2] eingesetzt. Hochleistungslaser können zum Härten von Oberflächen, Eingravieren von Logos und Seriennummern, Löten und Entlöten, Schneiden von Solarzellen und zur Oberflächenbearbeitung durch Einschmelzen von Schutzmaterialien eingesetzt werden [9].

Als Vorteile der Verwendung von Hochleistungs-Festkörperlasern als Waffen werden Gewicht, Skalierbarkeit, Robustheit, Wartbarkeit, erwartete kommerzielle Verfügbarkeit, große Magazine, geringe bis keine chemische Gefahren, elektrische Operation und Supportlogistik genannt [10, 11]. Hierbei kommt den beteiligten Forscherinnen und Forschern eine besondere Verantwortung zu.

In Kernfusionslaboratorien werden die leistungsstärksten Laser eingesetzt. Die Aufgabe besteht darin, möglichst viel Energie in möglichst kurzer Zeit auf ein nur etwa 1 mm großes Target zu fokussieren. Dadurch sollen im Target Wasserstoffkerne zu Heliumkernen verschmelzen, wodurch wiederum Energie frei wird. Unter Umständen wird es eines Tages möglich sein, den Mechanismus der Kernfusion als Energiequelle zu nutzen [1].

Viele Festkörperlasermedien bestehen aus einem Host-Material, in welchem in geringen Mengen Atome oder Ionen eines Elementes eingebettet sind. In diesen Elementen sind Elektronenübergänge zwischen ungefüllten Elektronenschalen möglich, wobei die Energien dieser Übergänge Wellenlängen im optischen Bereich entsprechen. Host-Materialien können zum Beispiel Gläser, Oxide oder Granate sein, während als eingebet-

tete Elemente beispielsweise Übergangsmetalle, Lanthanoide und Actinoide eingesetzt werden [12].

Nd:YAG ist das meistgenutzte Festkörperlasermaterial. Einige Vorteile des Host-Materials sind seine Härte, gute optische Qualität und hohe Wärmeleitfähigkeit. Weiterhin besitzt Nd:YAG eine hohe Verstärkung und niedrige Laserschwelle [12].

Das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Lasermaterial ist Nd:YVO₄. Dieses Material besitzt einen fünfmal höheren Absorptionsquerschnitt als Nd:YAG, so dass der Kristall nur wenige Millimeter lang sein muss. Weiterhin zeigt Nd:YVO₄ eine starke Absorption für Licht mit einer Wellenlänge um 808 nm. Erst die Entwicklung der Technik des longitudinalen Pumpens (vorzugsweise mit Diodenlasern) ermöglichte den Einsatz von Nd:YVO₄ als Lasermaterial [12].

Nd:YVO₄ ist ein Vier-Niveau-Lasermaterial: Elektronen der Neodym-Ionen werden zunächst mit Hilfe von Licht mit einer Wellenlänge von 808 nm vom Grundniveau in das Pump-Niveau angeregt, woraufhin diese sehr schnell unter Umwandlung von potentieller Energie in Wärme in das obere Laser-Niveau relaxieren (Abbildung 1: Übergänge A und B). Von dort relaxieren sie unter Aussendung von Licht mit einer Wellenlänge von 1064 nm in das untere Laser-Niveau, und schließlich erneut unter Umwandlung von potentieller Energie in Wärme in das Grundniveau (Übergänge C und D) [12].

Die Erzeugung von Wärme während der Übergänge B und D ist bei diesem Prozess der optischen Verstärkung von Licht unvermeidlich und wird Quantendefekt genannt. Der Prozess der Wärmegeneration wird in Abschnitt 2 beschrieben. Einige Eigenschaften des Kristalls, wie zum Beispiel der Brechungsindex, sind von der lokalen Temperatur abhängig. Damit stehen die optischen Eigenschaften des Kristalls im direkten Zusammenhang mit den Eigenschaften (insbesondere der Verteilung) des Pumplichtes.

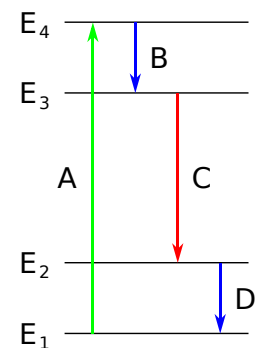


Abbildung 1: Laserübergänge in einem Vier-Niveau-System

Festkörperlaser werden in der Regel gekühlt, so dass die Temperatur innerhalb des Lasermediums größer ist als an den Außenflächen, welche im Kontakt zu einem kühlenden Medium stehen. Dabei werden verschiedene Kühlungsmechanismen angewandt: Beispielsweise kann der Laserkristall durch einen Kupfer-Kühlkörper gekühlt werden, wobei der Kühlkörper wiederum mit Wasser gekühlt wird. Um einen guten Wärmeleitkontakt zwischen Laserkristall und Kühlkörper zu gewährleisten, wird Indium-Folie eingesetzt. Eine direkte Kühlung des Laserkristalls

mit Wasser ist ebenso möglich [13]. Für Festkörperlaser mit geringer Ausgangsleistung reicht mitunter eine einfache Kühlung durch Raumluft.

Ebenso wird versucht, durch alternative Geometrien die Temperaturverteilung möglichst einfach und homogen zu halten. Das aktive Medium kann so zum Beispiel als Scheibe mit einer Dicke von einigen Mikrometern und einem Durchmesser von einigen Millimetern vorliegen. Das Pumplicht wird mit Hilfe eines Glasstabes oder einer Glasfaser homogenisiert und auf die breitere Oberfläche geleitet. Dieser Aufbau besitzt im idealen Fall eine räumlich eindimensionale Wärmeverteilung. Die Herausforderung ist hier, gleichzeitig einen guten Wärmetransfer und gute optische Eigenschaften der Scheibe zu realisieren [4].

Die durch den Pumpvorgang generierte Wärme wirkt sich durch unterschiedliche Mechanismen auf die optischen Eigenschaften des Kristalls aus. Die entstehenden Beeinträchtigungen der optischen Eigenschaften des Laserstabes fasst man unter dem Begriff der thermischen Linse zusammen. Im Falle von Nd:YVO_4 wirkt die thermische Linse fokussierend.

Thermische Linsen können analytisch und numerisch modelliert werden. Analytische Lösungen gehen häufig von vereinfachenden Annahmen wie einem unendlich langem Stab aus, während numerisch die Finite-Elemente-Methode zum Einsatz kommt [14].

In homogen dotierten Nd:YAG-Lasern führt die Wärmebelastung unter anderem zu einer Krümmung der Endflächen des Kristalls. Dieser Mechanismus kann bis zu 47% der gesamten Stärke der thermischen Linse ausmachen. Um dieses Problem zu lösen, werden Stäbe mit undotierten Enden verwendet [14, 15]. Ebenso führt die Wärmebelastung zu Verspannungen innerhalb des Kristalls, welche schließlich zum Bruch des Kristalls führen können und somit die endgültige Grenze für die Leistung des einfallenden Pumplichtes darstellen [16]. Durch den photoelastischen Effekt sorgen diese Verspannungen ebenfalls für eine Brechungsindexänderung [14]. Ein weiterer unerwünschter Effekt ist das mögliche Auftreten von spannungsinduzierter Doppelbrechung [17].

Auf den optischen Einfluss der thermischen Linse kann durch Anpassung des Resonators reagiert werden. Dazu werden Linsen mit negativer Brennweite oder Teleskope eingesetzt [15]. Der Nachteil hierbei ist, dass die thermische Linse in der Regel nur für eine bestimmte Pumpleistung kompensiert werden kann.

Eine weitere mögliche technische Realisierung ist der Aufbau als Master-Oszillator-System (MOPA) [18]. Dabei wird in einem Master-Laser ein Laserstrahl mit guter Strahlqualität erzeugt, welcher mit Hilfe von einem oder mehreren folgenden Verstärkern verstärkt wird. Diese Verstärkerkristalle können jeweils entsprechend der einfallenden

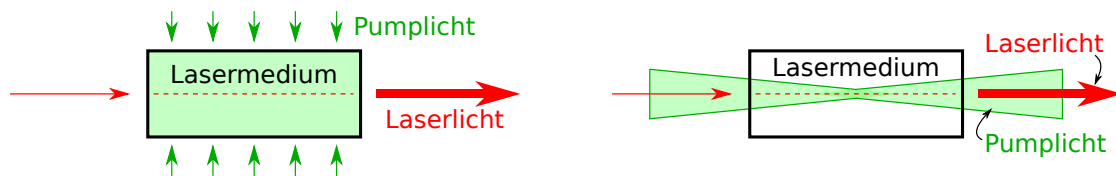


Abbildung 2: Optisches Pumpen eines Lasermediums und Verstärken von Laserlicht.
Links: transversales Pumpen, rechts: longitudinales Pumpen.

Leistungsverteilung dimensioniert werden. Ziel ist es, Laserlicht mit hoher Leistung und guter Strahlqualität zu erzeugen.

Die räumliche Verteilung des Pumplichtes im Kristall lässt sich durch zwei Methoden unterscheiden (Abbildung 2). Technisch einfacher ist das transversale Pumpen des Kristalls. Dabei wird das Pumplicht senkrecht zur Propagationsrichtung des Laserlichtes in den Kristall eingespeist. Wird das Pumplicht parallel zur Propagationsrichtung des Laserlichtes in den Kristall eingespeist, wird dies longitudinales Pumpen genannt.

Die letztere Methode bietet unter anderem den Vorteil, im Kristall im Wesentlichen nur dort Elektronen anzuregen, wo auch Laserlicht propagiert. Dadurch wird eine bessere Konversionseffizienz von Pumplichtleistung zu Laserlichtleistung erzielt. Weiterhin kann das Profil des Pumpstrahls an den Resonator so angepasst werden, dass die Zahl der Moden im Resonator begrenzt wird [15].

In dieser Arbeit wird die Generation und Verteilung von Wärme durch longitudinales Pumpen eines Nd:YVO₄-Kristalls betrachtet. Der zeitabhängige Wärmefluss wird numerisch mit Hilfe der Douglas-Methode simuliert. In Abschnitt 3 werden zunächst einige grundlegende numerische Methoden zur Simulation von Differentialgleichungen vorgestellt, bevor in Abschnitt 4 auf die für den dreidimensionalen Raum geeignete Douglas-Methode eingegangen wird. Auf die für diese Arbeit realisierte Simulation wird im Anhang eingegangen.

Aus der Temperaturverteilung wird in Abschnitt 5 die Verteilung des temperaturabhängigen Brechungsindex ermittelt. Durch die Berechnung der optischen Wegdifferenzen im Kristall wird auf die Brennweite der entstehenden thermischen Linse geschlossen.

In Abschnitt 6 wird ein Experiment zur Bestimmung der optischen Brechkraft des Kristalls mit Hilfe eines Sondierstrahls vorgestellt. Mit Hilfe der Ergebnisse dieses Abschnittes wird die Simulation für das Experiment kalibriert.

Die Simulation wurde in GNU *Octave* (<http://www.gnu.org/software/octave/>) realisiert, der Quellcode sollte aber auch mit *MATLAB* kompatibel sein.

2. Wärmedeposition und Wärmefluss

In diesem Abschnitt wird darauf eingegangen, auf welche Weise das in den Laserkristall einfallende Pumplicht sowie dessen Umwandlung in Wärme modelliert. Üblicherweise wird für longitudinal gepumpte Lasermedien eine homogene Dotierung und damit eine exponentielle Abnahme der Pumpleistung in z -Richtung durch Lambert-Beersche-Absorption angenommen, zum Beispiel in [19]. In dieser Arbeit wird eine Pumplichtverteilung festgelegt, welche über den Absorptionsquerschnitt der Neodym-Ionen mit einer (in dieser Arbeit homogenen) Neodym-Ionenverteilung interagiert. Dies erlaubt größere Flexibilität in der Simulation inhomogener Dotierungen und die einfachere Implementierung eines Sättigungseffektes für sehr hohe Lichtintensitäten.

2.1. Indizierung

Das Gebiet wird in einzelne „Samples“ eingeteilt. Ein Sample steht dabei für einen kleinen Block mit Volumen h^3 . Weiterhin hat jedes Sample eine bestimmte Temperatur und Wärmeleitfähigkeit. Die einzelnen Samples werden wie folgt nummeriert (siehe Abbildung 3): In x -Richtung mit $1, \dots, m, \dots, M$, in y -Richtung mit $1, \dots, l, \dots, L$ und in z -Richtung mit $1, \dots, j, \dots, J$. Die Gesamtheit dieser Samples wird im Folgenden als Domäne bezeichnet.

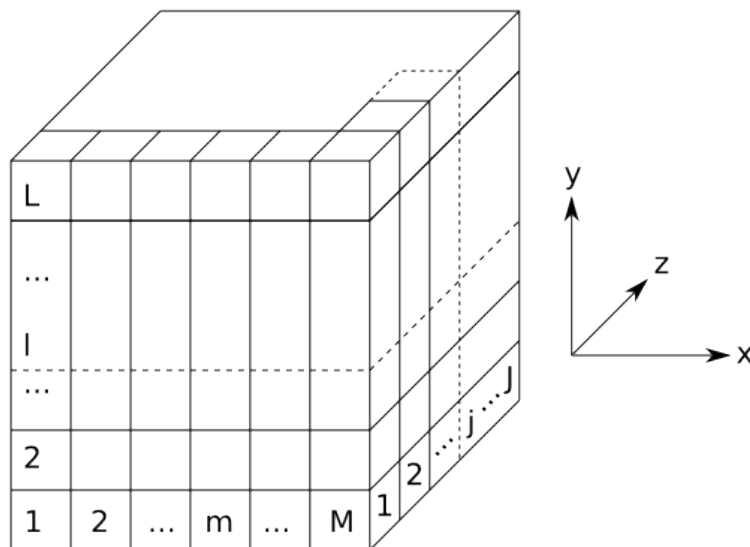


Abbildung 3: Indizierung der Domäne in drei Dimensionen.

2.2. Wärmekapazität

Die Temperaturerhöhung ΔT in einem Sample des Kristalls hängt außer von Materialparametern von der Leistung P des einfallenden Pumplichtes ab [20]:

$$C = \frac{Q}{\Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{Q}{C} = \frac{P\Delta\tau}{c\Delta M} = \frac{P\Delta\tau}{c\rho\Delta V}. \quad (1)$$

Hierbei sind C die Wärmekapazität, Q die zur Temperaturerhöhung führende Wärme, c die spezifische Wärmekapazität, ρ die Dichte von YVO_4 , $\Delta\tau$ ein Zeitintervall, ΔM eine Masse und $\Delta V = h^3$.

2.3. Pumplichtverteilung

Der Laserkristall wird einseitig longitudinal gepumpt. Für das einfallende Licht wird folgende Lichtleistungsverteilung angenommen:

$$P(r, w_p) = \gamma P_0 \exp\left(\frac{-2r^2}{w_p^2}\right), \quad (2)$$

wobei w_p der $\frac{1}{e^2}$ -Radius des einfallenden Gaußschen Laserstrahls und P_0 die Gesamtleistung sind. Der Normierungsfaktor γ wird so festgelegt, dass

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty P(r, w_p) dr d\varphi \stackrel{!}{=} P_0, \quad (3)$$

also gilt

$$\gamma = \frac{1}{w_p \pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4)$$

Die Simulation arbeitet in einem kartesischen Koordinatensystem: v

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (5)$$

also gilt

$$P(x, x_0, y, y_0, w_p) = \gamma P_0 \exp\left(\frac{-2((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)}{w_p^2}\right), \quad (6)$$

mit

$$\gamma = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{-2((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{w_p^2} \right) dx dy \right]^{-1} = \frac{2}{\pi w_p^2}. \quad (7)$$

Somit ergibt sich schließlich als Formel für die Pumplichtverteilung:

$$P(x, x_0, y, y_0, w_p) = \frac{2}{\pi w_p^2} P_0 \exp \left(\frac{-2((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{w_p^2} \right). \quad (8)$$

Für jedes Element m, l wird für $j = 1$ die Anzahl der Pumplicht-Photonen folgendermaßen ermittelt:

$$N_{\text{Ph}}(m, l) = \frac{h^2 \Delta t}{h_P \nu_P} P(hm, h \frac{M}{2}, hl, h \frac{L}{2}, w_P), \quad (9)$$

mit dem Planckschen Wirkungsquantum h_P , der räumlichen Schrittweite h , dem Pumpstrahldurchmesser w_P , der Pumpfrequenz ν_P und der zeitlichen Schrittweite Δt . Diese Anfangsverteilung von Photonen wird im Folgenden als Leistungsreservoir bezeichnet.

2.4. Absorption des Pumplichtes und Umwandlung in Wärme

Um die aus der Pumplichtverteilung erzeugte Wärme zu ermitteln, wird von vorne nach hinten ($j = 1, \dots, J$) über den Kristall iteriert und dabei für jedes Element m, l, j die Anzahl der angeregten Neodym-Ionen eines Blocks ermittelt. Zunächst gilt für die Anzahl der Neodym-Ionen N_{Nd} im Teilvolumen:

$$N_{\text{Nd}} = \delta_{\text{Nd}} \cdot \rho_A \cdot \Delta V, \quad (10)$$

mit der Dotierungskonzentration δ_{Nd} und der Teilchendichte von Nd:YVO₄ ρ_A . In jedem Block m, l werden $N_{\text{abs}}(m, l, j)$ Photonen absorbiert bzw. N_{abs} Nd-Ionen angeregt:

$$N_{\text{abs}}(m, l, j) = h \cdot N_{\text{Ph}} \cdot \sigma_A \cdot \rho_A, \quad (11)$$

wobei σ_A den Absorptionsquerschnitt darstellt. Die Anzahl der angeregten Ionen muss sodann von der Anzahl der zur Verfügung stehenden Pumpphotonen abgezogen werden:

$$N_{\text{Ph}}(m, l) := N_{\text{Ph}}(m, l) - N_{\text{abs}}(m, l, j). \quad (12)$$

Auf diese Weise wird so Schicht für Schicht das Leistungsreservoir des einfallenden Lichtes aufgebraucht.

Durch die Relaxation der Ionen und den Quantendefekt wird in jedem Element m, l Wärme erzeugt:

$$U_n(m, l, j) := U_n(m, l, j) + \eta \frac{N_{\text{abs}} \cdot h_P(\nu_P - \nu_L)}{c\rho\Delta V}. \quad (13)$$

Dabei ist η ein Kalibrierungsfaktor sowie ν_P und ν_L die Pump- bzw. Laserlichtfrequenzen. Zunächst gilt $\eta = 1$; Erst in Abschnitt 6.3 wird der Fall $\eta \neq 1$ betrachtet.

In der Simulation wird die Fluoreszenzzeit der Ionen nicht beachtet, die Ionen relaxieren also instantan in den Grundzustand. Falls die Anzahl der angeregten Ionen sehr klein ist gegenüber der Gesamtzahl der Nd-Ionen, sollte dies keine große Auswirkungen haben. Eine andere Betrachtungsweise ist, die instantane Relaxation der Ionen so zu interpretieren, als sei in jedem Sample des Kristalls die Intensität eines einfallenden Laserstrahls ausreichend hoch, um die angeregten Ionen quasi instantan durch induzierte Emission zum Grundzustand relaxieren zu lassen. Das Ergebnis der Simulation dürfte dann im besten Fall die Wärmeverteilung eines Laserkristalls in einer Kavität widerspiegeln.

2.5. Wärmeaustausch von benachbarten Blöcken

Dieser Unterabschnitt soll die Wahl der in der numerischen Simulation verwendeten Werte für die lokale Wärmeleitfähigkeit motivieren. Wir betrachten dafür beispielhaft den allgemeinen Wärmefluss \mathbf{q} in einer Dimension [21]:

$$\mathbf{q} = -K(x) \frac{\partial}{\partial x} U(x). \quad (14)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir nun eine Reihe von Blöcken, denen jeweils genau eine Temperatur U_m und eine Wärmeleitfähigkeit K_m zugeordnet sind (Abbildung 4). Die Frage ist nun: Wenn zwei Blöcke mit unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten Wärme austauschen, welchen Wert nimmt $K(x)$ in Gleichung (14) an? Um dies zu entscheiden, betrachten wir den Wärmeaustausch zwischen mehreren Blöcken:

$$\Delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{12} - \mathbf{q}_{23} = -K_A \Delta U_{12} + K_B \Delta U_{23}, \quad (15)$$

$$\Delta \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{23} - \mathbf{q}_{34} = -K_C \Delta U_{23} + K_D \Delta U_{34}. \quad (16)$$

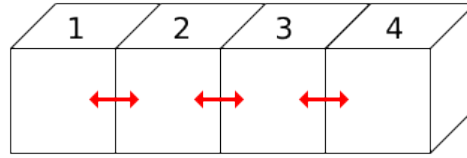


Abbildung 4: Zum Wärmeaustausch zwischen benachbarten Blöcken. Jeder Block besitzt eine eigene homogene Wärmeleitfähigkeit und tauscht Wärme mit seinen Nachbarn.

Hier wurden für die Indizes der lokalen Wärmeleitfähigkeiten K zunächst die allgemeinen Platzhalter A – D eingeführt. Es soll nun motiviert werden, welche Werte für A – D eingesetzt werden müssen. Aus

$$\mathbf{q}_{23} = -K_B \Delta U_{23} = -K_C \Delta U_{23} \quad (17)$$

folgt

$$K_B \stackrel{!}{=} K_C. \quad (18)$$

Es gilt gleichberechtigt $K_B = K_2$ oder $K_B = K_3$. In dieser Arbeit gilt fortan die Konvention, dass die Wärmeleitfähigkeit desjenigen Blocks gewählt wird, der den niedrigeren Index besitzt. Damit ergibt sich beispielsweise für obige Gleichungen:

$$\Delta \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_{12} - \mathbf{q}_{23} = -K_1 \Delta U_{12} + K_2 \Delta U_{23}, \quad (19)$$

$$\Delta \mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_{23} - \mathbf{q}_{34} = -K_2 \Delta U_{23} + K_3 \Delta U_{34}. \quad (20)$$

3. Numerische Lösung der Wärmeleichung in zwei Dimensionen

Dieser Abschnitt soll zunächst den einfacheren Fall der numerischen Lösung der Wärmeleichung in zwei Dimensionen behandeln, bevor im folgenden Abschnitt der dreidimensionale Fall behandelt wird. Die Abschnitte 3.2, 3.3, 3.4 und 3.5 folgen dabei im Wesentlichen dem Vorlesungsskript des Kurses „Math 337 - Numerical Differential Equations“, gehalten von T. Lakoba an der Universität von Vermont [22]. Während in diesem Skript die Wärmeleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}U(x, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x, y, t) \quad (21)$$

behandelt wird, soll hier die Gleichung [23]

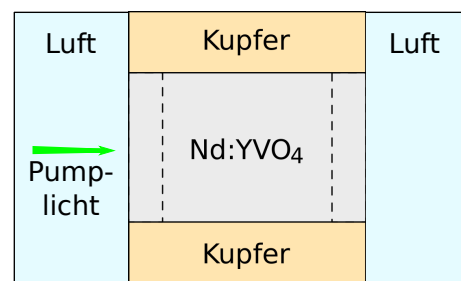
$$\frac{\partial}{\partial t}U(x, y, t) = K(x, y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x, y, t) \right) \quad (22)$$

betrachtet werden, wobei $K(x, y)$ die lokale Wärmeleitfähigkeit repräsentiert. $U(x, y, t)$ beschreibt die Temperatur an einem Punkt mit den Koordinaten x und y zu einem Zeitpunkt t . Als Randbedingungen habe der äußere Rand des Kühlkörpers Wassertemperatur, die den Kristall an der Front- und Rückseite umgebende Luft besitze zu Beginn ($t = 0$) Raumtemperatur (siehe auch Abbildung 5).

Auf der Suche nach einer geeigneten Methode sind folgende unabdingbare Eigenschaften der numerischen Methode zu beachten:

- Konvergenz unabhängig von der Wahl der Zeit- und Raumschrittweiten,
- Ausreichende Genauigkeit,
- Akzeptable Rechenlaufzeiten.

Abbildung 5: Zur Einteilung der Domäne in verschiedene Gebiete.



Elemente in x -Richtung werden durch Indizes $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq M$, Elemente in y -Richtung werden durch Indizes $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq L$ diskretisiert. Die Randelemente sind diejenigen Elemente mit $m \in \{1, M\}$ oder $l \in \{1, L\}$ (siehe auch Abbildung 3).

3.1. Explizite und implizite Methode

Um Gleichung (22) numerisch zu implementieren, ist es notwendig, die erste Ableitung nach der Zeit und die zweite Ableitung nach dem Ort durch ein möglichst geeignetes Verfahren zu modellieren. Wir starten nun zunächst mit einigen einfachen Modellen um uns schrittweise dem eigentlichen Verfahren – der Douglas-Methode – zu nähern.

Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach ihrer Variablen x lässt sich folgendermaßen nähern [24]:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - (x)} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (23)$$

Dabei gilt innerhalb des Stabilitätsbereichs (siehe Abschnitt 3.2): Je kleiner h , desto genauer die Näherung. Die Konstante h wird „Schrittweite“ genannt. Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ nach ihrer Variablen x ist also eine Funktion, die von der Variablen x und der Funktion $f(x)$ abhängen kann. Damit ergibt sich folgendes Startwertproblem:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = g(x, f(x)), \quad g(x_0) = g_0, \quad (24)$$

wobei g_0 als bekannt vorausgesetzt wird.

Die Menge aller Werte, die x annehmen kann, wird nun durch $n \in \mathbb{N}$ Punkte im Abstand h genähert. Wir wählen also n Punkte $x_n = x_0 + nh$, auf der die Funktion ausgewertet wird. Mit $x_n = x_0 + nh$ ergibt sich die sogenannte „explizite“ Methode [25]

$$f_{n+1} = f_n + hg(x_n, f_n). \quad (25)$$

Mit gegebenen Startwerten x_0, g_0 lässt sich damit eine Funktion $f(x)$ Schritt für Schritt auswerten. Dabei ist zu beachten, dass die Schrittweite h nicht zu klein gewählt werden darf, da die Methode sonst instabil sein kann. Dies bedeutet, dass die Werte der numerischen Lösung sehr groß werden, obwohl dies in der exakten Lösung nicht der Fall ist (siehe auch Abbildung 6 für ein Beispiel anhand der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung).

Die implizite Methode lautet [26]:

$$f_{n+1} = f_n + hg(x_{n+1}, f_{n+1}). \quad (26)$$

Im Gegensatz zur expliziten Methode erfordert diese die Lösung eines Gleichungssystems, um f_{n+1} zu erhalten. Die implizite Methode ist dadurch langsamer als die explizite Methode, in die die bekannten Werte direkt eingesetzt werden können.

Der Vorteil der impliziten gegenüber der expliziten Methode ist, dass sie im Allgemeinen stabiler ist, also größere Werte für h verwendet werden können. [26]

Um die zweite Ableitung einer Funktion numerisch zu nähern, wird eine ähnliche Näherung wie in Gleichung (23) gebildet. Es ergibt sich die „zentrale Differenz“ [24]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}. \quad (27)$$

3.2. Explizite Methode und die Wärme Gleichung

Wir überführen nun die Terme in der Wärme Gleichung (22) in eine numerische Näherung. Zunächst gilt für den Term auf der linken Seite von Gleichung (22) gemäß Gleichung (23) folgend:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, y, t) \rightarrow \frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} \equiv \frac{\delta_t U_{m;l}^n}{\kappa}. \quad (28)$$

Dabei ist κ eine kurze Zeit. Der obere Index n der Temperaturverteilung U beschreibt den aktuellen Zeitpunkt t_n , die unteren Indizes $m; l$ beschreiben den Ort (siehe auch Abbildung 3 auf Seite 5). Mit δ_t wurde eine abkürzende Schreibweise für eine Differenz zweier Temperaturen an einem Ort m, l zu einem Zeitpunkt t_n eingeführt.

Für die beiden Terme auf der rechten Seite von Gleichung (22) gilt gemäß Gleichung (27) folgend:

$$K(x, y) \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y, t) \rightarrow \frac{K_{m;l}(U_{m+1;l}^n - U_{m;l}^n) + K_{m-1;l}(U_{m-1;l}^n - U_{m;l}^n)}{h^2} \equiv \frac{\delta_x^2 U_{m;l}^n}{h^2}, \quad (29)$$

$$K(x, y) \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y, t) \rightarrow \frac{K_{m;l}(U_{m;l+1}^n - U_{m;l}^n) + K_{m;l-1}(U_{m;l-1}^n - U_{m;l}^n)}{h^2} \equiv \frac{\delta_y^2 U_{m;l}^n}{h^2}. \quad (30)$$

Dabei bezeichnet h eine kurze Strecke. Zur Wahl der Wärmeleitkoeffizienten siehe auch Abschnitt 2.5.

Mit den letzten Gleichungen wurde analog zu δ_t eine abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$\delta_x^2 U_m = K_m U_{m+1} - (K_m + K_{m-1}) U_m + K_{m-1} U_{m-1}, \quad (31)$$

$$\delta_y^2 U_l = K_l U_{l+1} - (K_l + K_{l-1}) U_l + K_{l-1} U_{l-1}, \quad (32)$$

$$\delta_z^2 U_j = K_j U_{j+1} - (K_j + K_{j-1}) U_j + K_{j-1} U_{j-1}. \quad (33)$$

In den oberen drei Gleichungen wurden Indizes, die sich nicht ändern, nicht notiert. Die Operatoren δ_i^2 sollen im Folgenden die Bildung von Differenzen beschreiben.

Mit den gefundenen Termen der expliziten Methode lässt sich Gleichung (22) wie folgt schreiben:

$$\frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} = \frac{K_{m;l}(U_{m+1;l}^n - U_{m;l}^n) + K_{m-1;l}(U_{m-1;l}^n - U_{m;l}^n)}{h^2} \quad (34)$$

$$+ \frac{K_{m;l}(U_{m;l+1}^n - U_{m;l}^n) + K_{m;l-1}(U_{m;l-1}^n - U_{m;l}^n)}{h^2}$$

$$= \frac{\delta_x^2 U_{m;l}^n}{h^2} + \frac{\delta_y^2 U_{m;l}^n}{h^2}. \quad (35)$$

Aufgelöst nach der Temperaturverteilung $U_{m;l}^{n+1}$ ergibt sich:

$$U_{m;l}^{n+1} = U_{m;l}^n + \kappa \frac{\delta_x^2 U_{m;l}^n}{h^2} + \kappa \frac{\delta_y^2 U_{m;l}^n}{h^2}. \quad (36)$$

Es kann gezeigt werden, dass dieses Schema für bestimmte κ und h instabil ist, d. h. für bestimmte Kombinationen von κ und h konvergiert das System nicht gegen eine Lösung. Beispielsweise ist dies für folgende eindimensionale explizite Methode der Fall [27]:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \frac{a\Delta t}{h^2} (U_{i-1}^n - 2U_i^n + U_{i+1}^n), \quad (37)$$

wobei $a = \frac{1}{\pi^2}$. Mit der Anfangsverteilung

$$U_0(x) = \sin \pi x + \sin 2\pi x \quad (38)$$

und der Randbedingung $U(0) = 0$, $U(1) = 0$ ist diese Methode stabil für $h = \frac{1}{16}$ und $\Delta t = \frac{1}{64}$, aber nicht für $h = \frac{1}{32}$ und $\Delta t = \frac{1}{128}$, obwohl die letzteren beiden Werte für

h und Δt eine genauere zeitliche und räumliche Abtastung realisieren (siehe Abbildung 6) [27].

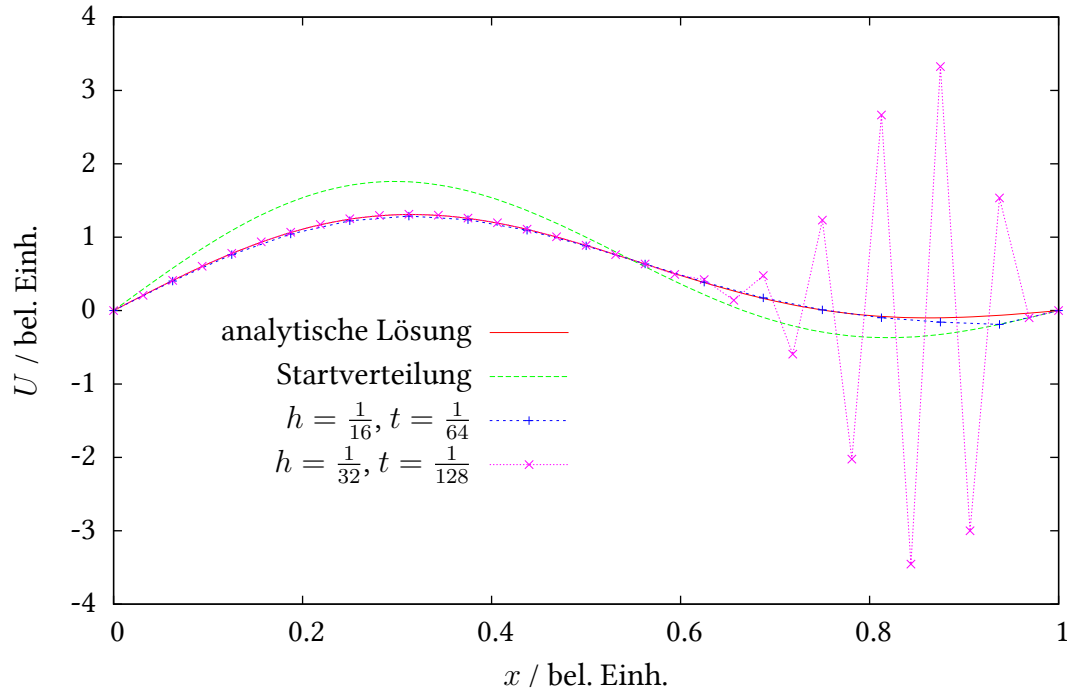


Abbildung 6: Analytische Lösung der Temperaturverteilung einer Startverteilung nach 0,12 s, sowie zwei numerische Lösungen mit unterschiedlichen Parametern.

Bereits nach einer simulierten Zeit von $t = 0,12$ s zeigt die Simulation mit kleinerem h und Δt Oszillationen, die mit voranschreitender Zeit ohne Grenze wachsen. Kriterium für die Stabilität ist der Faktor $\frac{\Delta t}{h^2}$. Wird h halbiert, also das Gebiet mit doppelter Genauigkeit abgetastet, muss der Zeitschritt Δt mit $\frac{1}{4}$ multipliziert werden, um die Stabilität der Simulation zu gewährleisten. Kleine Raumschrittweiten h bedeuten also extrem kleine Zeitschrittweiten Δt .

Die Möglichkeit der Instabilität sorgt dafür, dass die explizite Methode in der Praxis kaum angewandt wird. Ein unabhängig von $\frac{\Delta t}{h^2}$ in zwei Dimensionen (solange die Lösung räumlich „glatt“ ist) immer stabiles Schema ist die Crank-Nicolson-Methode [28].

3.3. Crank-Nicolson-Methode

Diese Methode vereint explizite und implizite Methode in folgendem Schema [28]:

$$\begin{aligned} \frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} = \frac{1}{2h^2} & [K_{m;l}(U_{m+1;l}^n - U_{m;l}^n) + K_{m-1;l}(U_{m-1;l}^n - U_{m;l}^n) \\ & + K_{m;l}(U_{m+1;l}^{n+1} - U_{m;l}^{n+1}) + K_{m-1;l}(U_{m-1;l}^{n+1} - U_{m;l}^{n+1}) \\ & + K_{m;l}(U_{m;l+1}^n - U_{m;l}^n) + K_{m;l-1}(U_{m;l-1}^n - U_{m;l}^n) \\ & + K_{m;l}(U_{m;l+1}^{n+1} - U_{m;l}^{n+1}) + K_{m;l-1}(U_{m;l-1}^{n+1} - U_{m;l}^{n+1})] . \end{aligned} \quad (39)$$

Die Differenzen werden durch die zugehörigen Operatoren ersetzt:

$$\frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} = \frac{\delta_x^2 U_{m;l}^n}{2h^2} + \frac{\delta_x^2 U_{m;l}^{n+1}}{2h^2} + \frac{\delta_y^2 U_{m;l}^n}{2h^2} + \frac{\delta_y^2 U_{m;l}^{n+1}}{2h^2} \quad (40)$$

$$= \left(\frac{\delta_x^2}{2h^2} + \frac{\delta_y^2}{2h^2} \right) (U_{m;l}^n + U_{m;l}^{n+1}) . \quad (41)$$

$U_{m;l}^{n+1}$ und $U_{m;l}^n$ werden auf jeweils eine Seite gebracht:

$$\Rightarrow U_{m;l}^{n+1} = U_{m;l}^n + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\delta_x^2}{h^2} + \frac{\delta_y^2}{h^2} \right) (U_{m;l}^n + U_{m;l}^{n+1}) , \quad (42)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\kappa \delta_x^2}{2h^2} - \frac{\kappa \delta_y^2}{2h^2} \right) U_{m;l}^{n+1} = \left(1 + \frac{\kappa \delta_x^2}{2h^2} + \frac{\kappa \delta_y^2}{2h^2} \right) U_{m;l}^n . \quad (43)$$

Dieses Schema ist in zwei Dimensionen unabhängig von der Wahl von κ und h stabil, aber sehr rechenintensiv. Dafür kann gezeigt werden, dass es das genaueste Verfahren zweiter Ordnung ist [28].

Da bereits das Douglas-Verfahren (siehe unten) für die Durchführung einer einzelnen Simulation mehrere Stunden benötigt, genügt das Crank-Nicolson-Verfahren nicht dem Anspruch, eine ausreichend kurze Laufzeit zu besitzen. Wir wenden uns also im nächsten Schritt den impliziten Methoden alternierender Richtung zu, da diese ebenso stabil, jedoch weniger rechenintensiv als die Crank-Nicolson-Methode sind.

3.4. Implizite Methoden alternierender Richtung

Die Crank-Nicolson-Methode ermittelt in einem einzigen Schritt aus $U_{m;l}^n$ die gesuchte Verteilung $U_{m;l}^{n+1}$. Implizite Methoden alternierender Richtung teilen die Berechnung in mehrere Schritte auf. Der Vorteil dabei ist, dass diese Methoden weniger rechenintensiv

sind [28]. Wir addieren zur linken Seite von Gleichung (39) den Term

$$\frac{\kappa^2}{4} \frac{\partial_x^2}{h^2} \frac{\delta_y^2}{h^2} \frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} \quad (44)$$

und erhalten [22]:

$$\frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} + \frac{\kappa^2}{4} \frac{\partial_x^2}{h^2} \frac{\delta_y^2}{h^2} \frac{U_{m;l}^{n+1} - U_{m;l}^n}{\kappa} = \left(\frac{\delta_x^2}{2h^2} + \frac{\delta_y^2}{2h^2} \right) (U_{m;l}^n + U_{m;l}^{n+1}). \quad (45)$$

Dies kann mit $r = \frac{\kappa}{h^2}$ umgeformt werden zu:

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2 - \frac{r}{2} \delta_y^2 + \frac{r}{2} \delta_x^2 \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^{n+1} = \left(1 + \frac{r}{2} \delta_x^2 + \frac{r}{2} \delta_y^2 + \frac{r}{2} \delta_x^2 \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^n, \quad (46)$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2 \right) \left(1 - \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^{n+1} = \left(1 + \frac{r}{2} \delta_x^2 \right) \left(1 + \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^n. \quad (47)$$

Diese Methode hat eine Genauigkeit von $O(\kappa^2 + h^2)$, ist unabhängig von κ und h in zwei Dimensionen stabil und weniger rechenintensiv als die Crank-Nicolson-Methode [22].

3.4.1. Peaceman-Rachford-Methode

Eine äquivalente Schreibweise ist die Peaceman-Rachford-Methode [29]:

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2 \right) U'_{m;l} = \left(1 + \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^n, \quad (48)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_y^2 \right) U_{m;l}^{n+1} = \left(1 + \frac{r}{2} \delta_x^2 \right) U'_{m;l}. \quad (49)$$

In dieser Schreibweise sehen wir, warum diese Methode zu den impliziten Methoden alternierender Richtung gehört: In Gleichung (48) wird zunächst aus U^n eine intermediäre Lösung U' gewonnen, mit Hilfe welcher wiederum in Gleichung (49) die eigentliche Lösung U^{n+1} ermittelt wird. Man spricht davon, dass in der ersten Gleichung der x -Schritt, und in der zweiten Gleichung der y -Schritt durchgeführt wird.

In dreidimensionaler Form ist diese Methode allerdings nicht unbedingt stabil, so dass wir uns schließlich der Douglas-Methode zuwenden.

3.4.2. Douglas-Methode

Diese Methode ist auch in drei Dimensionen stabil, vergleichsweise genau und nicht zu rechen-aufwändig [29]:

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U'_{m;l} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_x^2 + 2\frac{r}{2}\delta_y^2\right) U_{m;l}^n, \quad (50)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2\right) U_{m;l}^{n+1} = U'_{m;l} - \frac{r}{2}\delta_y^2 U_{m;l}^n. \quad (51)$$

3.5. Peaceman-Rachford-Methode: Algorithmus

Im Folgenden soll näher auf die numerische Umsetzung der Peaceman-Rachford-Methode eingegangen werden, bevor für den dreidimensionalen Fall eine genauere Erläuterung für die Douglas-Methode gegeben wird.

Wir beginnen damit, die Gleichungen der Peaceman-Rachford-Methode in Vektorschreibweise darzustellen, um uns die numerisch leichte Lösbarkeit tridiagonaler Matrizen zunutze zu machen. Wegen

$$\begin{aligned} \frac{r}{2}\delta_y^2 U_{m;l}^n &= \frac{r}{2} (K_{m;l}(U_{m;l+1}^n - U_{m;l}^n) + K_{m;l-1}(U_{m;l-1}^n - U_{m;l}^n)) \\ &= \frac{r}{2} (K_{m;l}U_{m;l+1}^n - (K_{m;l} + K_{m;l-1})U_{m;l}^n + K_{m;l-1}U_{m;l-1}^n) \end{aligned} \quad (52)$$

lässt sich Gleichung (48) schreiben als

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U'_{m;l} &= \\ U_{m;l}^n + \frac{r}{2} (K_{m;l}U_{m;l+1}^n - (K_{m;l} + K_{m;l-1})U_{m;l}^n + K_{m;l-1}U_{m;l-1}^n). \end{aligned} \quad (53)$$

In Vektorschreibweise ergibt dies:

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} - \frac{r}{2}\mathbb{K}_x)\vec{U}'_{*;l} &= \\ \vec{U}_{*;l}^n + \frac{r}{2} \left(\vec{K}_{*;l}\vec{U}_{*;l+1}^n - (\vec{K}_{*;l} + \vec{K}_{*;l-1})\vec{U}_{*;l}^n + \vec{K}_{*;l-1}\vec{U}_{*;l-1}^n \right) + \frac{r}{2}\vec{b}'_{*;l}. \end{aligned} \quad (54)$$

Die Vektormultiplikation $\vec{K}\vec{U}$ wird hier nicht als Skalarprodukt, sondern elementweise Multiplikation verstanden. In der letzten Gleichung haben wir den Operator δ_x^2 nicht – wie auf der rechten Seite für δ_y^2 – als Differenz ausgeschrieben, sondern als Matrix \mathbb{K}_x

repräsentiert. \mathbb{K}_x ist dabei eine tridiagonale $(M-2) \times (M-2)$ -Matrix:

$$\mathbb{K}_x = \begin{pmatrix} -(K_{2;l} + K_{1,l}) & K_{2,l} & 0 & \dots & 0 \\ K_{2;l} & -(K_{3;l} + K_{2,l}) & K_{3;l} & & \vdots \\ 0 & K_{3;l} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & K_l^{M-2;} \\ 0 & \dots & 0 & K_l^{M-2;} & -(K_l^{M-1;} + K_l^{M-2;}) \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Diese gibt allerdings die durch den Operator δ_x^2 implizierte Differenzenbildung nicht vollständig wieder: Für Elemente neben den Rändern der Domäne, also $m = 2$ oder $m = M-1$, „fehlt“ der Matrix jeweils ein Eintrag. Diese werden durch den Vektor

$$\vec{b}'_{*;l} = \begin{pmatrix} K_{1,l}U'_{1;l} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{M-1,l}U'_{M,l} \end{pmatrix} \quad (56)$$

auf der rechten Seite von Gleichung (54) kompensiert. Analog lässt sich Gleichung (49) schreiben als:

$$\begin{aligned} & (\mathbb{1} - \frac{r}{2}\mathbb{K}_y)\vec{U}_{l;*}^{n+1} \\ &= \vec{U}'_{m;*} + \frac{r}{2} \left(\vec{K}_{m;*}\vec{U}'_{m+1;*} - (\vec{K}_{m;*} + \vec{K}_{m-1;*})\vec{U}'_{m;*} + \vec{K}_{m-1;*}\vec{U}'_{m-1;*} \right) + \frac{r}{2}\vec{b}_{m;*}^{n+1}. \end{aligned} \quad (57)$$

\mathbb{K}_y ist eine $(L-2) \times (L-2)$ -Matrix:

$$\mathbb{K}_y = \begin{pmatrix} -(K_{m;2} + K_{m,1}) & K_{m,2} & 0 & \dots & 0 \\ K_{m;2} & -(K_{m;3} + K_{m,2}) & K_{m;3} & & \vdots \\ 0 & K_{m;3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & K_{L-2}^{m;} \\ 0 & \dots & 0 & K_{L-2}^{m;} & -(K_{L-1}^{m;} + K_{L-2}^{m;}) \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Für $\vec{b}_{m;*}^{n+1}$ gilt:

$$\vec{b}_{m;*}^{n+1} = \begin{pmatrix} K_{m,1} U_{m,1}^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{m,L-1} U_{m,L}^{n+1} \end{pmatrix}. \quad (59)$$

3.5.1. Zusammenfassung der Peaceman-Rachford-Methode zur Lösung der Wärmegleichung in zwei Raumdimensionen

Die Peaceman-Rachford-Methode löst die Wärmegleichung in zwei Dimensionen mit beliebiger Anfangsdistribution $U_0(m, l)$ in zwei Schritten:

1. x -Schritt: $\forall 2 \leq l \leq L - 1$, löse:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{2} \mathbb{K}_x\right) \vec{U}'_{*,l} &= \vec{U}_{*,l}^n \\ &+ \frac{r}{2} \left(\vec{K}_{*,l} \vec{U}_{*,l+1}^n - (\vec{K}_{*,l} + \vec{K}_{*,l-1}) \vec{U}_{*,l}^n + \vec{K}_{*,l-1} \vec{U}_{*,l-1}^n \right) \\ &+ \frac{r}{2} \vec{b}_{*,l} \end{aligned} \quad (60)$$

2. y -Schritt: $\forall 2 \leq m \leq M - 1$, löse:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{r}{2} \mathbb{K}_y\right) \vec{U}_{l,*}^{n+1} &= \vec{U}'_{l,*} \\ &+ \frac{r}{2} \left(\vec{K}_{m,*} \vec{U}'_{m+1,*} - (\vec{K}_{m,*} + \vec{K}_{m-1,*}) \vec{U}'_{m,*} + \vec{K}_{m-1,*} \vec{U}'_{m-1,*} \right) \\ &+ \frac{r}{2} \vec{b}_{m,*} \end{aligned} \quad (61)$$

Aufgrund der Tridiagonalität der beteiligten Matrizen ist es nicht nötig, Matrizen zu invertieren, was numerisch aufwändig wäre. Statt dessen stellen *Octave* (und ebenso *MATLAB*) spezielle Routinen bereit, um tridiagonale Gleichungssysteme kosten-effektiv zu lösen. Dadurch ist die Peaceman-Rachford-Methode nicht nur stabil, sondern auch vergleichsweise schnell.

Nachdem wir die zeitaufgelöste Simulation der Wärmegleichung in zwei Raumdimensionen betrachtet haben, wenden wir uns der Douglas-Methode zu. Diese löst die Wärmegleichung in drei Raumdimensionen stabil und mit günstigem Rechenaufwand.

4. Zeitaufgelöste numerische Simulation der Wärmegleichung in drei Raumdimensionen: Die Douglas-Methode

In diesem Abschnitt wird die Simulation der Temperaturverteilung des gegebenen Experiments (einseitig longitudinal gepumpter Laserkristall) inklusive Wärmegeneration durch Absorption von Pumplicht beschrieben. Im Anschluss wird das Ergebnis der Simulation vorgestellt.

4.1. Mathematische Vorgehensweise

Wärmetransport in drei Dimensionen wird beschrieben durch die Gleichung [23]

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, y, z, t) = K(x, y, z) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U(x, y, z, t) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U(x, y, z, t) \right). \quad (62)$$

Dabei ist $U(x, y, z, t)$ die lokale zeitabhängige Temperatur und $K(x, y, z)$ die lokale Temperaturleitfähigkeit. Die Gleichungen der Douglas-Methode lauten [29, 30]:

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2\right) U'_{mlj} = \left(1 + \frac{r}{2} \delta_x^2 + r \delta_y^2 + r \delta_z^2\right) U_{mlj}^n, \quad (63)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_y^2\right) U''_{mlj} = U'_{mlj} - \frac{r}{2} \delta_y^2 U_{mlj}^n, \quad (64)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2} \delta_z^2\right) U_{mlj}^{n+1} = U''_{mlj} - \frac{r}{2} \delta_z^2 U_{mlj}^n. \quad (65)$$

Es sei U_{mlj}^n die zum Zeitpunkt n an jedem Punkt (m, l, j) bekannte Temperatur der Domäne und U_{mlj}^{n+1} die gesuchte Temperaturverteilung zum Zeitpunkt $n + 1$. Jeder Punkt (m, l, j) steht dabei für ein Sample der Domäne. U' und U'' sind Zwischenlösungen. Die drei Gleichungen werden x -Schritt, y -Schritt und z -Schritt genannt.

Es gilt für die Terme auf der jeweils rechten Seite:

$$\delta_x^2 U_{m;l;j}^n = K_{m;l;j} (U_{m+1;l;j}^n - U_{m;l;j}^n) + K_{m-1;l;j} (U_{m-1;l;j}^n - U_{m;l;j}^n) \quad (66)$$

$$= K_{m;l;j} U_{m+1;l;j}^n - (K_{m;l;j} + K_{m-1;l;j}) U_{m;l;j}^n + K_{m-1;l;j} U_{m-1;l;j}^n,$$

$$\delta_y^2 U_{m;l;j}^n = K_{m;l;j} U_{m;l+1;j}^n - (K_{m;l;j} + K_{m;l-1;j}) U_{m;l;j}^n + K_{m;l-1;j} U_{m;l-1;j}^n, \quad (67)$$

$$\delta_z^2 U_{m;l;j}^n = K_{m;l;j} U_{m;l;j+1}^n - (K_{m;l;j} + K_{m;l;j-1}) U_{m;l;j}^n + K_{m;l;j-1} U_{m;l;j-1}^n. \quad (68)$$

Während die durch die δ^2 -Operatoren implizierten Differenzen auf der rechten Seite der Douglas-Gleichungen auf diese Weise explizit geschrieben werden, drücken wir die Differenzenbildung auf der linken Seite der Gleichungen durch die Matrixdarstellung der Operatoren aus:

$$\left(1 - \frac{r}{2}\mathbb{K}_{l;j}^x\right) \vec{U}'_{*;l;j} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_x^2 + r\delta_y^2 + r\delta_z^2\right) \vec{U}_{*;l;j}^n + \vec{b}_{*;l;j}, \quad (69)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\mathbb{K}_{m;j}^y\right) \vec{U}''_{m;*;j} = \vec{U}'_{m;*;j} - \frac{r}{2}\delta_y^2 \vec{U}_{m;*;j}^n + \vec{b}''_{m;*;j}, \quad (70)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\mathbb{K}_{m;l}^z\right) \vec{U}_{m;l;*}^{n+1} = \vec{U}''_{m;l;*} - \frac{r}{2}\delta_z^2 \vec{U}_{m;l;*}^n + \vec{b}_{m;l;*}^{n+1}. \quad (71)$$

$\mathbb{K}_{l;j}^x$ ist eine tridiagonale $(M-2) \times (M-2)$ -Matrix:

$$\mathbb{K}_{l;j}^x = \begin{pmatrix} -(K_{2;l;j} + K_{1;l;j}) & K_{2;l;j} & 0 & \dots & 0 \\ K_{2;l;j} & -(K_{3;l;j} + K_{2;l;j}) & K_{3;l;j} & & \vdots \\ 0 & K_{3;l;j} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & K_{l;j}^{M-2;} \\ 0 & \dots & 0 & K_{l;j}^{M-2;} & -\left(K_{l;j}^{M-1;} + K_{l;j}^{M-2;}\right) \end{pmatrix}. \quad (72)$$

$\mathbb{K}_{m;j}^y$ ist eine tridiagonale $(L-2) \times (L-2)$ -Matrix:

$$\mathbb{K}_{m;j}^y = \begin{pmatrix} -(K_{m;2;j} + K_{m;1;j}) & K_{m;2;j} & 0 & \dots & 0 \\ K_{m;2;j} & -(K_{m;3;j} + K_{m;2;j}) & K_{m;3;j} & & \vdots \\ 0 & K_{m;3;j} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & K_{L-2;j}^m \\ 0 & \dots & 0 & K_{L-2;j}^m & -(K_{L-1;j}^m + K_{L-2;j}^m) \end{pmatrix}. \quad (73)$$

$\mathbb{K}_{m;l}^z$ ist eine tridiagonale $(J-2) \times (J-2)$ -Matrix:

$$\mathbb{K}_{m;l}^z = \begin{pmatrix} -(K_{m;l;2} + K_{m;l;1}) & K_{m;l;2} & 0 & \dots & 0 \\ K_{m;l;2} & -(K_{m;l;3} + K_{m;l;2}) & K_{m;l;3} & & \vdots \\ 0 & K_{m;l;3} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & K_{J-2}^{m;l} \\ 0 & \dots & 0 & K_{J-2}^{m;l} & -(K_{J-1}^{m;l} + K_{J-2}^{m;l}) \end{pmatrix}. \quad (74)$$

Die die Randwerte berücksichtigenden, in den \mathbb{K} -Matrizen fehlenden Einträge werden durch die \vec{b} -Vektoren repräsentiert:

$$\vec{b}_{*,l;j}' = \begin{pmatrix} K_{1;l;j} U'_{1;l;j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{M-1;l;j} U'_{M;l;j} \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_{m;*,j}'' = \begin{pmatrix} K_{m;1;j} U''_{m;1;j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{m;L-1;j} U''_{m;L;j} \end{pmatrix}, \quad (75)$$

$$\vec{b}_{m;l,*}^{n+1} = \begin{pmatrix} K_{m;l;1} U_{m;l;1}^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_{m;l;J-1} U_{m;l;J}^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Prinzipiell besteht das Problem nun darin, drei Gleichungssysteme von der Form

$$\mathbb{A} \vec{y} = \vec{x} \quad (76)$$

zu lösen, wobei \vec{x} , \vec{y} Vektoren und \mathbb{A} eine tridiagonale Matrix sind. Wie schon erwähnt kann *Octave* (und ebenso *MATLAB*) solche Systeme vergleichsweise schnell lösen, da *Octave* für das Lösen tridiagonaler Gleichungssysteme spezielle Lösungsalgorithmen bereitstellt. Dazu wird die Gleichung wie folgt in *Octave* eingegeben:

$$y = A \setminus x$$

Numerisch werden folgende Schritte durchgeführt, um die Gleichungen zu lösen:

1. Ermittle die einzelnen Summanden auf der rechten Seite von Gleichung (63):

1.1 Für alle $j = 2, \dots, J - 1$, löse:

1.1.1 Für alle $m = 2, \dots, M - 1$, löse:

$$\delta_x^2 \vec{U}_{m;*,j}^n = \vec{K}_{m;*,j} \vec{U}_{m+1;*,j}^n - (\vec{K}_{m;*,j} + \vec{K}_{m-1;*,j}) \vec{U}_{m;*,j}^n + \vec{K}_{m-1;*,j} \vec{U}_{m-1;*,j}^n \quad (77)$$

$$\delta_z^2 \vec{U}_{m;*,j}^n = \vec{K}_{m;*,j} \vec{U}_{m;*,j+1}^n - (\vec{K}_{m;*,j} + \vec{K}_{m;*,j-1}) \vec{U}_{m;*,j}^n + \vec{K}_{m;*,j-1} \vec{U}_{m;*,j-1}^n \quad (78)$$

1.1.2 Für alle $l = 2, \dots, L - 1$, löse:

$$\delta_y^2 \vec{U}_{*,l;j}^n = \vec{K}_{*,l;j} \vec{U}_{*,l+1;j}^n - (\vec{K}_{*,l;j} + \vec{K}_{*,l-1;j}) \vec{U}_{*,l;j}^n + \vec{K}_{*,l-1;j} \vec{U}_{*,l-1;j}^n \quad (79)$$

Auch hier wird die Vektormultiplikation $\vec{K}\vec{U}$ nicht als Skalarprodukt, sondern elementweise Multiplikation verstanden.

2. Für alle $l = 2, \dots, L - 1, j = 2, \dots, J - 1$, löse Gleichung (63):

$$\left(\mathbb{1} - \frac{r}{2} \mathbb{K}_{l;j}^x \right) \vec{U}'_{*,l;j} = \left(\mathbb{1} + \frac{r}{2} \delta_x^2 + r \delta_y^2 + r \delta_z^2 \right) \vec{U}_{*,l;j}^n + \vec{b}'_{*,l;j} \quad (80)$$

3. Mit Hilfe der ermittelten Werte für $r \delta_y^2 U_{m;l,j}^n$, löse für alle $m = 2, \dots, M - 1, j = 2, \dots, J - 1$ Gleichung (64):

$$\left(\mathbb{1} - \frac{r}{2} \mathbb{K}_{m;j}^y \right) \vec{U}''_{m;*,j} = \vec{U}'_{m;*,j} - \frac{r}{2} \delta_y^2 \vec{U}_{m;*,j}^n + \vec{b}''_{m;*,j} \quad (81)$$

4. Mit Hilfe der ermittelten Werte für $r \delta_z^2 U_{m;l,j}^n$, löse für alle $m = 2, \dots, M - 1, l = 2, \dots, L - 1$ Gleichung (65):

$$\left(\mathbb{1} - \frac{r}{2} \mathbb{K}_{m;l}^z \right) \vec{U}_{m;l,*}^{n+1} = \vec{U}''_{m;l,*} - \frac{r}{2} \delta_z^2 \vec{U}_{m;l,*}^n + \vec{b}_{m;l,*}^{n+1} \quad (82)$$

Es bietet sich numerisch an, vor dem Durchlaufen der vier Schritte die dreidimensionalen Matrizen $\delta_x^2 \vec{U}_{m;l,j}^n$, $\delta_y^2 \vec{U}_{m;l,j}^n$ und $\delta_z^2 \vec{U}_{m;l,j}^n$ zu bilden. In diese fließen auch die Korrekturen ein, die durch die \vec{b} -Vektoren dargestellt werden (siehe Anhang).

4.2. Dreidimensionale, numerisch ermittelte Temperaturverteilung in einem einseitig longitudinal gepumpten Nd:YVO₄-Kristall

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse der im Anhang dargestellten Simulation vorgestellt. Die dafür verwendeten Materialparameter werden in Tabelle 1 aufgelistet. Für die Temperaturleitfähigkeit K gilt [31]:

$$K = \frac{\lambda}{\rho c_p}, \quad (83)$$

mit der Wärmeleitfähigkeit λ , der Dichte ρ und der spezifischen Wärmekapazität c_p . In Tabelle 2 und Abbildung 7 sind die Maximaltemperaturen für verschiedene einfallende Pumpleistungen dargestellt. Die Maximaltemperatur steigt linear um 3,5 K/W. In Abbildung 8 ist die Maximaltemperatur in Abhängigkeit vom Pumpstrahldurchmesser bei einer Pumpleistung von 40 W dargestellt. Aus der Abbildung ist ersichtlich, dass die Maximaltemperatur proportional zu w_p^2 ist.

In den Abbildungen 9 und 10 sind die Ergebnisse beispielhaft für eine Pumpleistung von $P = 40$ W dargestellt. Abbildung 9 gibt einen Überblick über die Temperaturverteilung in einem horizontalen Schnitt durch den Kristall im Gleichgewichtszustand. In jener Abbildung ist zu sehen, dass nur wenige Kubikmillimeter des Kristalls signifikant erwärmt werden. Dies ist auf den hohen Absorptionsquerschnitt von Nd:YVO₄ und damit die hohe Absorption des Kristalls zurückzuführen. Die Maximaltemperatur beträgt (641 ± 1) K, der Kristall wird also um über 300 K erhitzt. Weiterhin ist zu erkennen, dass der Kristall an seinen Rändern bereits weitestgehend Raum- bzw. Kühlwassertemperatur aufweist. Eine Messung der Temperatur am Rand des Kristalls durch Sonden oder Ähnlichem erscheint daher wenig aufschlussreich. Außerdem zeigt das steile Abfallen der Temperatur des Kristalls zu seinen Rändern hin, dass in der Simulation der Abstand des Kristalls zum Rand der Domäne erheblich verringert werden kann ohne die Simulation durch Randeffekte signifikant zu beeinflussen.

Abbildung 10 zeigt zwei Schnitte durch das in Abbildung 9 dargestellte Temperaturprofil. Das Temperaturprofil fällt ab der Grenze vom undotierten zum dotierten Bereich exponentiell ab, das Maximum liegt dabei direkt an der Grenze der beiden Regionen (Abbildung 10 unten). Der Extinktionsfaktor beträgt $\alpha = (1,712 \pm 0,003) \text{ } 1/\text{mm}$. Auch zur Vorderseite des Kristalls fällt die Temperatur exponentiell ab. Für die Wärmeverteilung spielt das Pumplicht in diesem undotierten Bereich keine direkte Rolle, die Wärmever-

Zimmertemperatur	300 K
Wassertemperatur	290 K
Kristalllänge	15 mm
Domainlänge	3 mm
Länge der undotierten Regionen	2 mm
Kristallbreite	3 mm
Kristallhöhe	3 mm
Domainbreite	6 mm
Domainhöhe	6 mm
Samples (in x -Richtung)	30
Dotierungskonzentration	0,4 %
Spezifische Wärmekapazität von YVO_4	530 J/kgK [32]
Dichte von YVO_4	4,22 g/cm ³ [33]
Wärmeleitfähigkeit von YVO_4	5,23 W/m·K [34]
Temperaturleitfähigkeit von YVO_4	$2,34 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
Atomgewicht von Yttrium	88,9059 u [35]
Atomgewicht von Vanadium	50,9415 u [35]
Atomgewicht von Sauerstoff	15,9994 u [36]
Atomgewicht von YVO_4	203,845 u
Teilchendichte von YVO_4	$1,247 \cdot 10^{28} \text{ 1/m}^3$
Temperaturleitfähigkeit von Luft	$0,216 \text{ cm}^2/\text{s}$ [37]
Temperaturleitfähigkeit von Kupfer (OFHC)	$1,15 \text{ cm}^2/\text{s}$ [38]
Pumpwellenlänge λ_P	808 nm [12]
Laserwellenlänge λ_L	1064 nm [12]
Absorptionsquerschnitt bei 808,7 nm, unpolarisiertes Pumplicht	$2,3 \cdot 10^{-23} \text{ m}^2$ [39]
Pumpstrahldurchmesser	840 μm
Zeitschritt Δt	100 μs
Raumschritt h	200 μm
Temperaturabhängige Brechungsindexänderung dn/dT	$14,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ [40]

Tabelle 1: Verwendete Materialparameter.

P_{in}	P_{abs}	T_{max}	m, l, j
10 W	10,00 W \pm 0,01 W	378 K \pm 1 K	15, 15, 48
20 W	19,99 W \pm 0,01 W	466 K \pm 1 K	15, 15, 48
30 W	29,99 W \pm 0,01 W	553 K \pm 1 K	15, 15, 48
40 W	39,99 W \pm 0,01 W	641 K \pm 1 K	15, 15, 48

Tabelle 2: Maximaltemperatur im Kristall für verschiedene Pumpleistungen. Erste Spalte: Einfallende Pumplichtleistung. Zweite Spalte: Absorbierte Pumplichtleistung. Dritte Spalte: Maximaltemperatur T_{max} . Vierte Spalte: Ort der Maximaltemperatur, ausgedrückt in Gebietsindizes m, l und j . Kühlwassertemperatur am Rand der Domäne: 290 K.

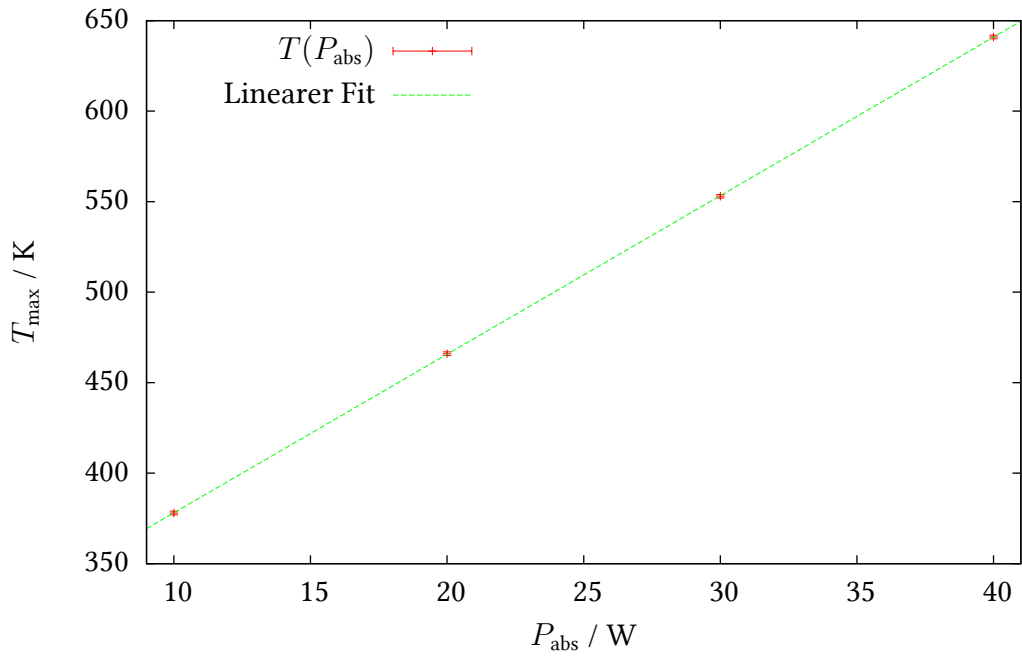


Abbildung 7: Abhängigkeit der Maximaltemperatur im Kristall von der Pumpleistung.

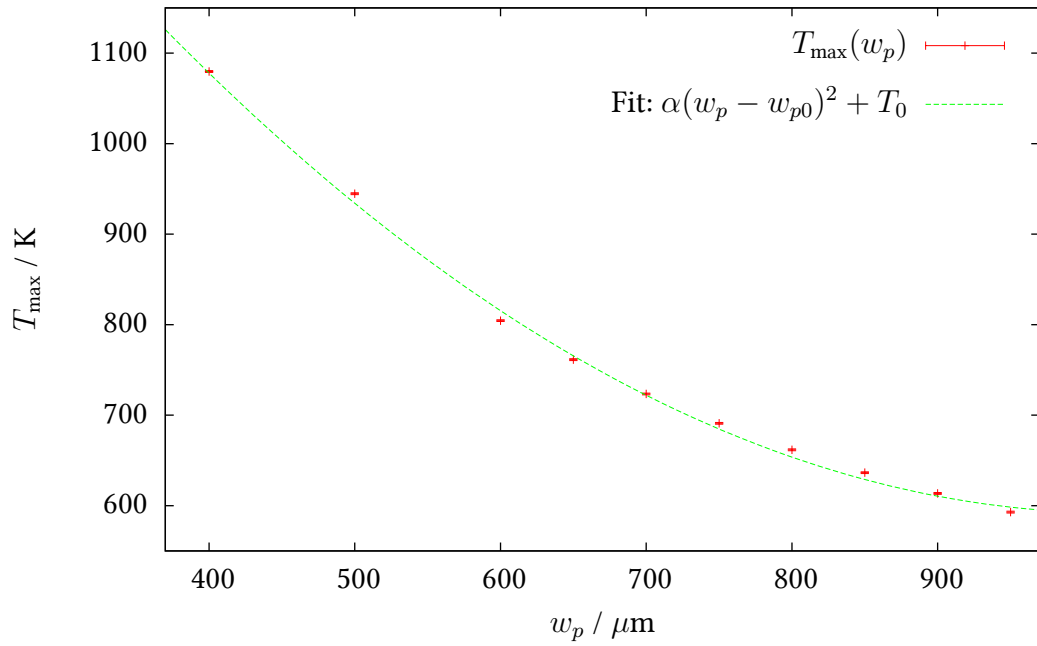


Abbildung 8: Abhängigkeit der Maximaltemperatur im Kristall vom Pumpstrahldurchmesser.

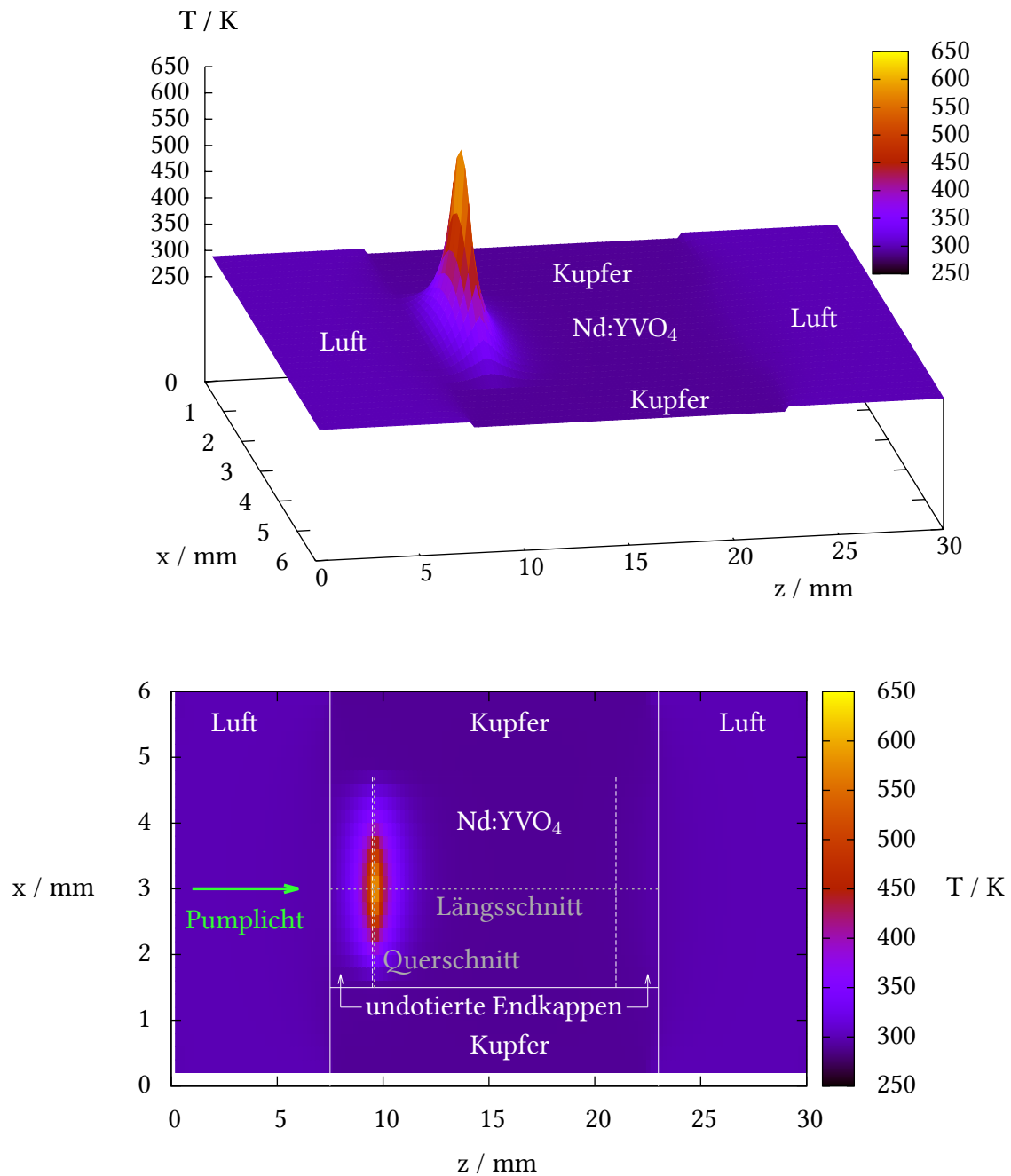


Abbildung 9: Zweidimensionaler Schnitt durch die Temperaturverteilung in einem mit 40 W Eingangsleistung gepumpten Nd:YVO₄-Kristall. Der Pumpstrahl tritt von links in den Kristall ein und verläuft in z -Richtung. Dargestellt ist die Temperaturverteilung für alle l, j und $m = M/2$. Der Kristall ist an beiden Enden bis zu einer Tiefe von jeweils 2 mm undotiert und von Kupfer bzw. Luft umgeben. Die Temperaturverteilungen entlang der Linien „Querschnitt“ und „Längsschnitt“ sind in Abbildung 10 dargestellt.

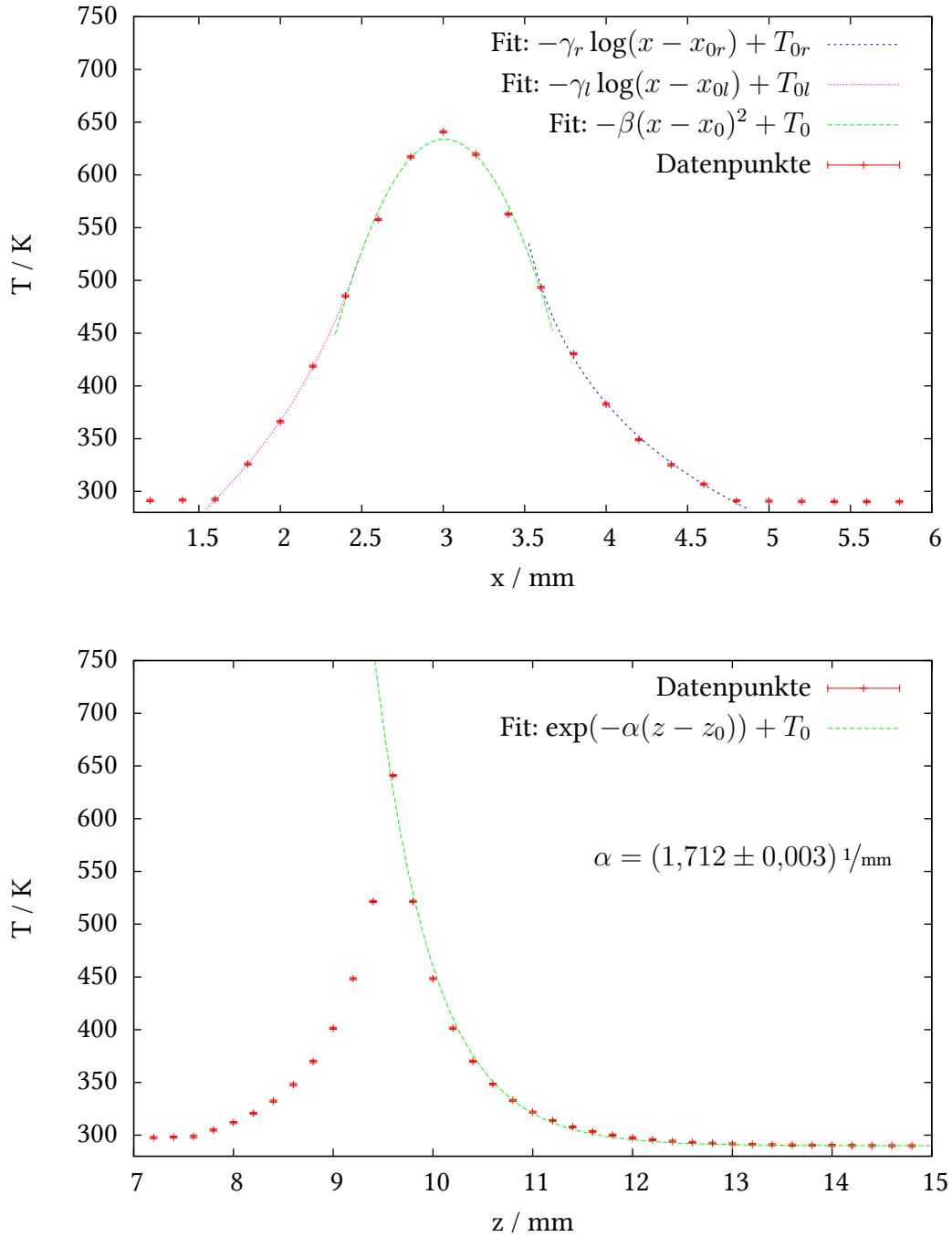


Abbildung 10: Oben: Querschnitt durch die longitudinale Temperaturverteilung. Dargestellt sind die Werte für alle m mit $j = 48$ und $l = 15$ (entspricht der Linie „Querschnitt“ in Abbildung 9).
Unten: Temperatur im Zentrum des Kristalls entlang der z -Achse ($m = 15, l = 15$, entspricht der Linie „Längsschnitt“ in Abbildung 9). Die Frontfläche des Kristalls liegt bei $z = 7,5$ mm, die dotierte Region beginnt bei $z = 9,5$ mm.

teilung wird hier allein durch den Wärmetransport aus dem dotierten Bereich bestimmt. Da die beiden Temperaturprofile im dotierten und undotierten Bereich so ähnlich sind, scheint das exponentielle Abfallen auch im dotierten Bereich weniger, wie in [12] vorgeschlagen, durch die Lambert-Beersche Absorption des Pumplichtes, sondern hauptsächlich durch den Wärmetransport aus der Übergangsregion (bezüglich der Dotierung) in die umliegenden Regionen bestimmt zu werden.

Gegen diese Theorie spricht allerdings, dass der Extinktionsfaktor des Temperaturabfalls mit ungefähr 17 1/cm dem Durchschnitt der Absorptionskoeffizienten 34 1/cm (π -Polarisation) und 10 1/cm (σ -Polarisation) von Nd:YVO_4 [12] entspricht. Dies legt nahe, dass der Temperaturabfall dem Absorptionsverlauf folgt.

In [19] wird folgende analytische Lösung für die Temperaturverteilung eines zylindrischen longitudinal gepumpten Laserstabes angegeben:

$$T(r, z) - T(0, z) = -\frac{\eta_h P_{\text{in}} \alpha_T \exp(-\alpha_T z)}{4\pi K} \frac{2r^2}{\omega_p^2}. \quad (84)$$

Dabei ist T die Temperatur, η_h ein Wärmegenerationskoeffizient, P_{in} die einfallende Pumpleistung, α_T der axiale Absorptionskoeffizient, r der Radius von der optischen Achse, K die Wärmeleitfähigkeit des Kristalls und ω_p der Pumpstrahldurchmesser. Die Proportionalität zu $-r^2$ gilt im Bereich um 1 mm um die Kristallachse, jedoch nicht an den Rändern des Kristalls. Vom Rand des gepumpten Bereichs fällt die Temperatur zum Rand des Kristalls wie in [12] beschrieben nicht parabolisch, sondern logarithmisch ab.

Das exponentielle Abfallen der Temperatur wie in Gleichung (84) in z -Richtung wird bestätigt (siehe oben und Abbildung 10 oben). Aus der Abbildung wird deutlich, dass auch für eine hohe einfallende Pumpleistung ein wenige Millimeter langer Kristall ausreicht.

In der Abbildung wird eine gewisse Asymmetrie der Simulation sichtbar: Das Temperaturmaximum liegt nicht genau in der Mitte des Kristalls, sondern um 0,2 mm nach links verschoben. Dies liegt vermutlich an der getroffenen Konvention bezüglich des Austausches von benachbarten Blöcken (Unterabschnitt 2.5, Seite 8). Wäre die Konvention so gewählt worden, dass beim Wärmeaustausch zweier Blöcke die Temperaturleitfähigkeit des Blockes mit dem höheren Index herangezogen wird, wäre das Maximum in Abbildung 10 (oben) vermutlich in die andere Richtung verschoben. Diese Asymmetrie ist auch in Abbildung 13 (Seite 33) sichtbar.

In Abbildung 11 ist die Maximaltemperatur im Kristall in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite bei einer Pumpleistung von $P = 40 \text{ W}$ dargestellt. Je kleiner die Zeitschritt-

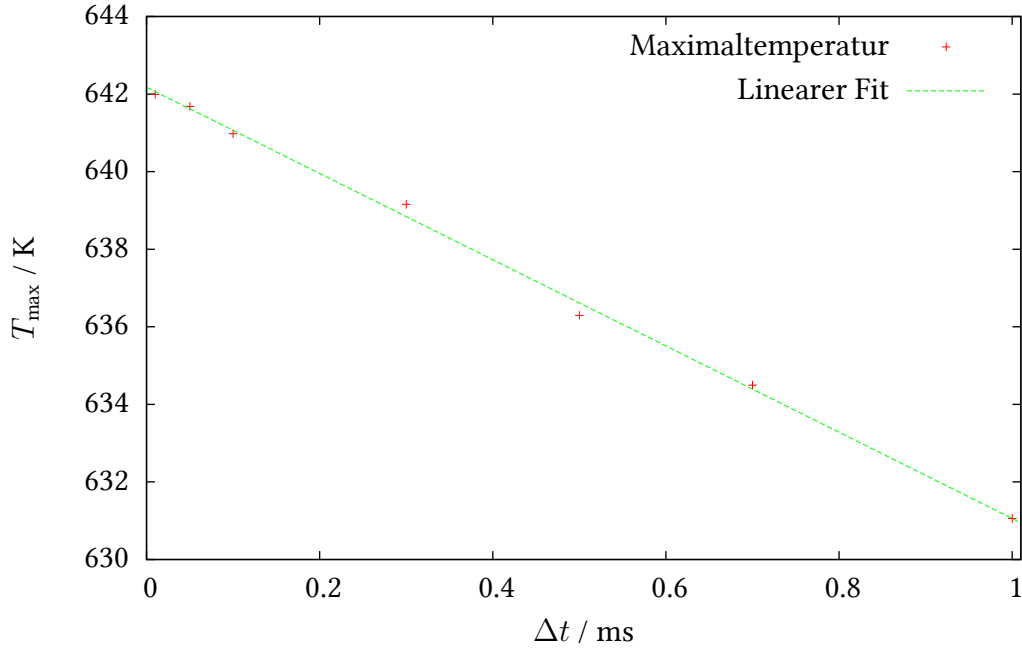


Abbildung 11: Maximaltemperatur im Kristall in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite für eine Pumpleistung von $P = 40 \text{ W}$

weite ist, desto genauer ist die Simulation; Der genaueste Wert wird theoretisch dann erreicht, wenn die Zeitschrittweite verschwindet. In Abbildung 11 ist zu sehen, dass die Maximaltemperatur linear von der Zeitschrittweite abhängt.

Der Gleichgewichtszustand gilt als dann erreicht, wenn sich die Maximaltemperatur um nicht mehr als 1 K/s ändert. In der Abbildung ist zu sehen, wie sich diese Bedingung auf das Ergebnis auswirkt. Einige Werte liegen leicht über, einige leicht unter der Ausgleichsgeraden. Dies liegt daran, dass für die verschiedenen Zeitschrittweiten von Ausgangsverteilungen ausgegangen wurde, deren Maximaltemperaturen größer beziehungsweise kleiner als die Maximaltemperatur im Gleichgewichtszustand waren. Die Simulationen wurden zwar beendet, sobald sich die Maximaltemperatur um nicht mehr als 1 K/s änderte, jedoch beträgt die Temperaturdifferenz von der gefundenen Maximaltemperatur zur Ausgleichsgeraden jeweils weniger als $0,3 \text{ K}$.

Die Simulation wurde (wo nicht anders angegeben) mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ durchgeführt. Aus der Abbildung ist zu erkennen, dass sich eine Differenz $T(0,1 \text{ ms}) - T(0) \approx 1 \text{ K}$ ergibt. Für geringere Pumpleistungen wird diese Differenz geringer ausfallen.

Als Genauigkeit der Simulation wird in dieser Arbeit basierend auf obigen Ergebnissen $\Delta T = 1 \text{ K}$ angenommen.

5. Numerische Abschätzung der Brechkraft der thermischen Linse

5.1. Ermitteln der Brennweite eines simulierten Kristalls

Der Brechungsindex von Nd:YVO₄ ist temperaturabhängig, so dass der Brechungsindex im Laserkristall durch die im vorherigen Abschnitt simulierte Temperaturverteilung ortsabhängig wird. Der Kristall wirkt dann in erster Näherung wie eine optische Linse, deren Brennweite in diesem Abschnitt ermittelt werden soll. Der Brechungsindex ändert sich unter Vernachlässigung der spannungsinduzierten Brechzahländerung und der Krümmung der Kristallendflächen folgendermaßen mit der Temperatur [12]:

$$n(T(m, l, j)) = n_o + \Delta T(m, l, j) \frac{dn_o}{dT}, \quad (85)$$

mit $n_o = 1,9984$ und $\frac{dn_o}{dT} = 14,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ [40]. Für alle Tupel (m, l) kann die relative optische Weglänge durch die Domäne folgendermaßen berechnet werden:

$$\text{OPD}(m, l) = \sum_{j=1}^J (h \cdot n(m, l, j)) - \text{OPD}_{\text{center}}, \quad (86)$$

$$\text{OPD}_{\text{center}} = \sum_{j=1}^J h \cdot n(15, 15, j). \quad (87)$$

In Abbildung 12 sind die so berechneten optischen Wegdifferenzen (OPD: „optical path difference“) für alle Paare (x, y) bzw. (m, l) dargestellt. „Quer“ beschreibt im Folgenden einen Längsschnitt parallel zu den Kristallseiten, „diagonal“ beschreibt einen Längsschnitt, der zwei diagonal gegenüberliegende längsseitige Kanten des Kristalls einschließt (siehe auch Abbildung 12).

In Abbildung 12 ist zu erkennen, dass die Brechungsindexverteilung nahe des Zentrums radialsymmetrisch ist, während näher zum Rand des Kristalls die Radialsymmetrie durch die Rechteckform des Kristalls beeinflusst wird. Dies gibt Anlass, die beiden Fälle Quer- und Diagonalschnitt vergleichend zu betrachten.

Die optische Weglängendifferenz in Abhängigkeit vom Abstand r zur optischen Achse einer idealen Linse ist [41]

$$\text{OPD}_{\text{ideal}}(r) = -\frac{r^2}{2f}, \quad (88)$$

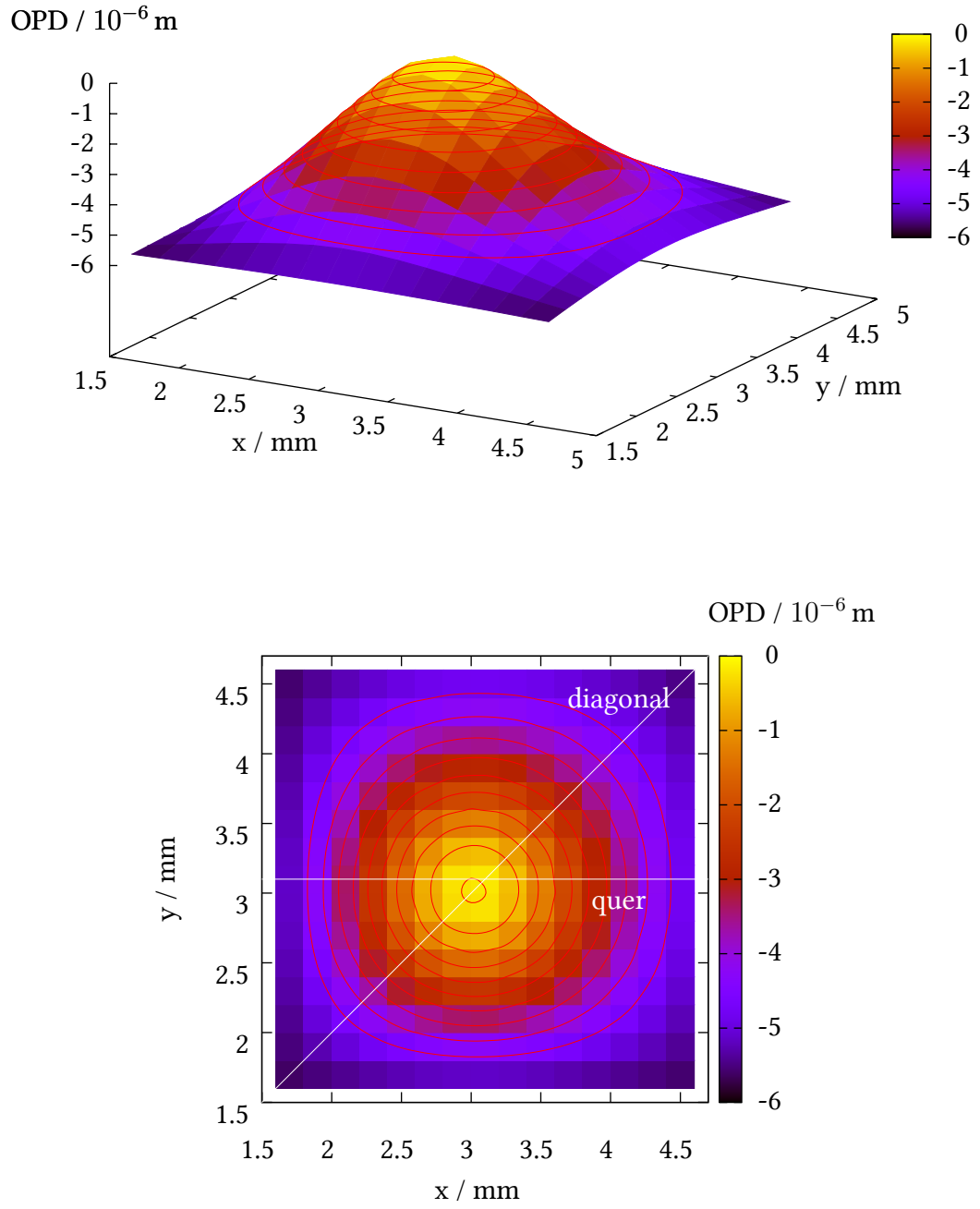


Abbildung 12: Optische Weglängendifferenzen im Kristall für $P_{\text{in}} = 40 \text{ W}$ und $w_p = 840 \mu\text{m}$. Die Gradientenlinien markieren Abstände von $0,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}$.

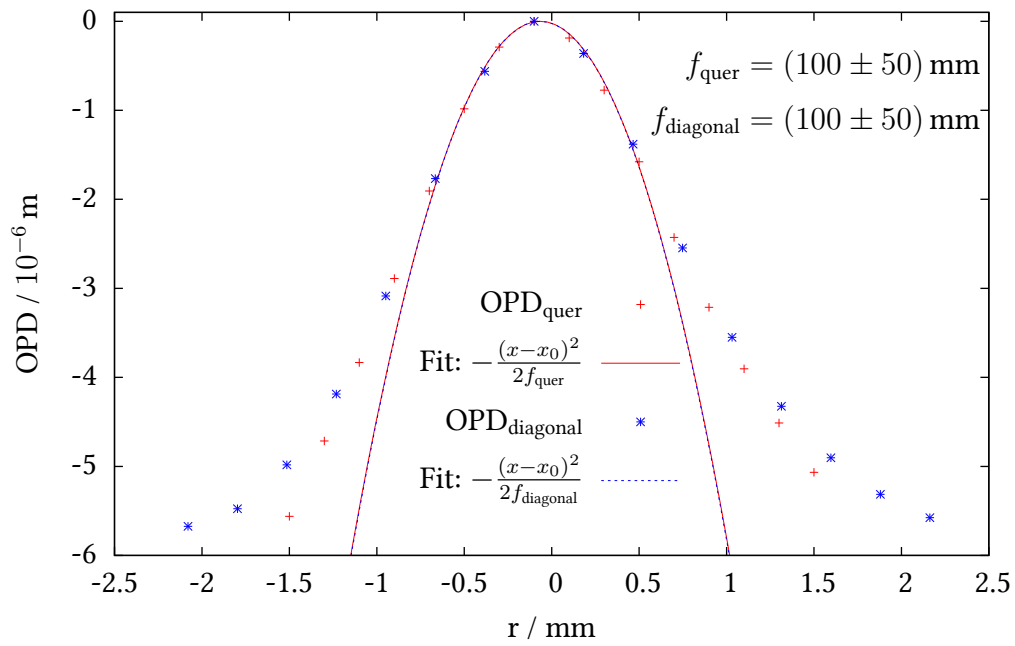


Abbildung 13: Optische Weglängendifferenzen. Quer: $l = 15$, $m = [8,23]$. Diagonal: $m = l = [8,23]$. r : Abstand zur optischen Achse.

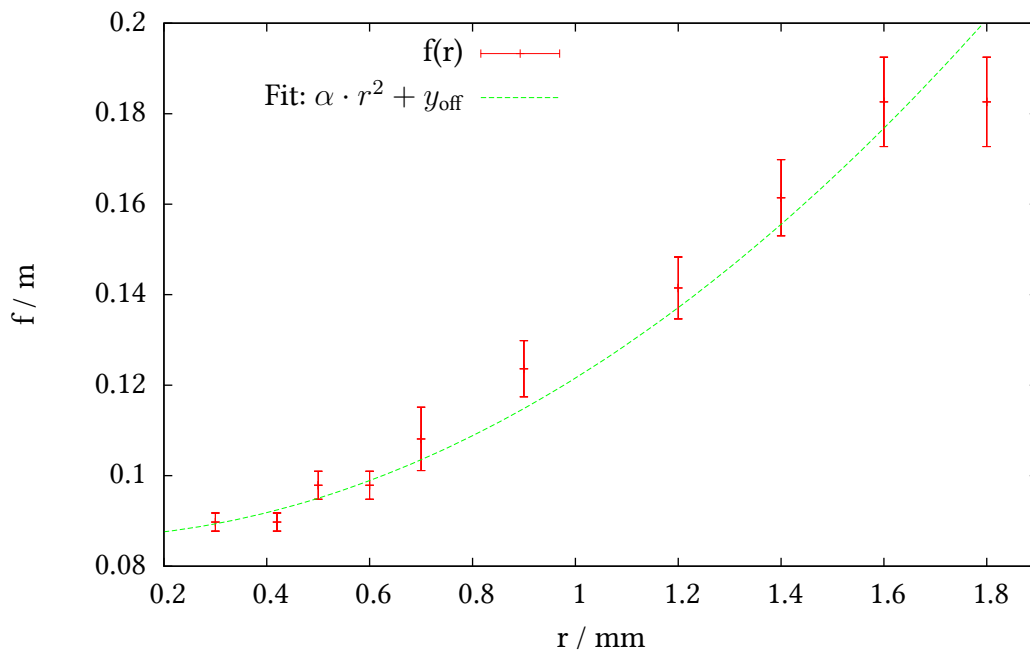


Abbildung 14: Zur Abhängigkeit der ermittelten Brennweite von dem gewählten Anpassungsbereich $[-r, r]$ am Beispiel des Querschnitts.

wobei f die Brennweite der Linse ist. In Abbildung 13 sind die optischen Wegdifferenzen für Quer- und Diagonalschnitt dargestellt. Zu erkennen ist, dass diese nahe der optischen Achse näherungsweise parabolisch sind, also durch $\text{OPD}_{\text{ideal}}(r)$ genähert werden können. Dabei gilt allerdings zu beachten, dass die durch einen Fit ermittelte Brennweite von dem gewählten Anpassungsbereich $[-r, r]$ abhängt. Dies ist für den Querschnitt in Abbildung 14 dargestellt. Beispielsweise kann eine Änderung von r um 0,1 mm im Bereich um $r = 1$ mm zu einer Änderung der ermittelten Brennweite um etwa $\Delta f = 1$ cm führen. Die Ungenauigkeit der so ermittelten Brennweite wird hier daher mit einem Fehler von $\Delta f = 5$ cm abgeschätzt. Weiterhin wird im Folgenden bei Bestimmung der Brennweite durch Anpassung an $\text{OPD}_{\text{ideal}}(r)$ ein Anpassungsbereich von $r = 0,6$ mm angenommen.

Die Anpassungen ergeben für die Brennweiten der jeweiligen Schnitte:

$$f_{\text{diagonal}} = 100 \text{ mm} \pm 50 \text{ mm}, \quad (89)$$

$$f_{\text{quer}} = 100 \text{ mm} \pm 50 \text{ mm}. \quad (90)$$

Diese beiden Werte stimmen im Rahmen der Anpassungsgenauigkeit überein, ein Astigmatismus ist daher nicht zu erwarten.

Aufgrund dieses Ergebnisses kann außerdem angenommen werden, dass bezüglich der thermischen Linse Kristalle mit kreisförmigem Querschnitt ungefähr die gleichen optischen Eigenschaften wie Kristalle mit quadratischem Querschnitt aufweisen, solange gewisse Voraussetzungen erfüllt sind. Zu diesen Voraussetzungen gehört, dass der Durchmesser beider Kristalle ungefähr gleich ist und dass der Pumpstrahldurchmesser klein gegenüber diesem Durchmesser ist.

5.2. Optische Brechkraft des simulierten Kristalls

Um die optische Brechkraft des simulierten Kristalls zu ermitteln, wurde die Simulation für verschiedene Pumpleistungen durchgeführt und für jede Pumpleistung die Brennweite des Kristalls wie oben beschrieben ermittelt. Das Ergebnis ist in Abbildung 15 zu sehen.

Aus der Abbildung lässt sich ein linearer Zusammenhang zwischen Brechkraft und Pumpleistung erkennen. Die Ausgleichsgerade ergibt, dass die optische Brechkraft $a_{\text{th}} = (260 \pm 10) \text{ mDpt/W}$ beträgt.

Wie bereits diskutiert hängt die Maximaltemperatur linear von der Pumpleistung (Abbildung 7) und quadratisch vom Pumpstrahldurchmesser ab (Abbildung 8). Weiterhin

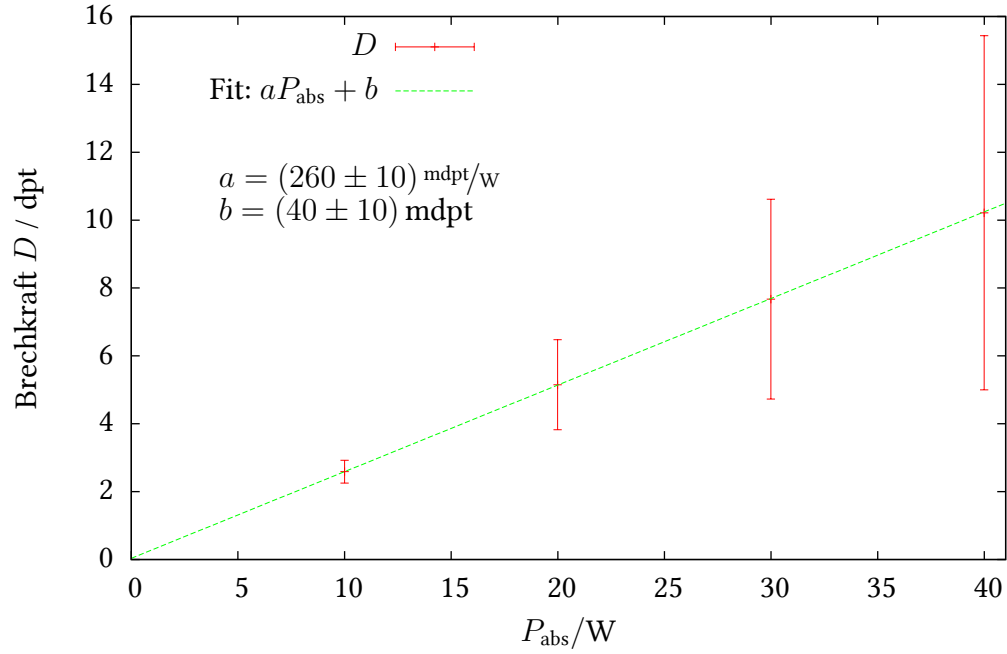


Abbildung 15: Brechkraft des simulierten Kristalls. Für verschiedene Pumpleistung wurde jeweils die Brennweite f ermittelt und die Brechkraft $1/f$ gegen die zugehörige Pumpleistung aufgetragen.

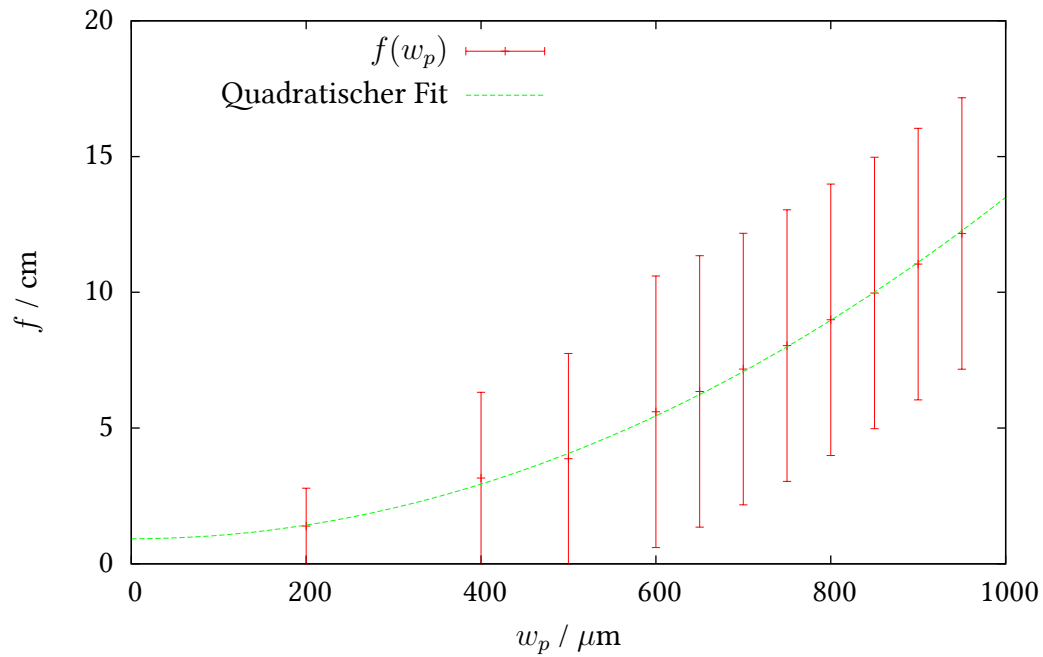


Abbildung 16: Zur Abhängigkeit der Brennweite der thermischen Linse vom Pumpstrahldurchmesser.

hängt die relative optische Weglängendifferenz linear von der Temperatur ab (Gleichung (85)). In Abbildung 16 ist zu erkennen, dass die Brennweite quadratisch vom Pumpstrahldurchmesser abhängt. Dies deckt sich mit der in [42] für die Brennweite eines zylindrischen longitudinal gepumpten Laserkristalls angegebenen Proportionalität zu w_p^2 :

$$f_t = \frac{\pi K_c w_p^2}{P_{\text{ph}} \frac{dn}{dT}} \left(\frac{1}{1 - \exp(-\alpha l)} \right). \quad (91)$$

Dabei sind K_c die Wärmeleitfähigkeit des Kristalls, P_{ph} der Anteil der einfallenden Pumpleistung, der zur Erhitzung beiträgt (in dieser Arbeit durch den Quantendefekt bestimmt), α der Absorptionskoeffizient und l die Kristalllänge. In unserem Fall kann der Faktor $1/(1 - \exp(-\alpha l))$ vernachlässigt werden, da $\exp(-\alpha l) < 10^{-11}$.

Gleichung (91) ist eine analytische Näherung für die Brennweite der thermischen Linse eines longitudinal gepumpten zylindrischen Laserstabes ohne undotierte Endkappen. Da dabei von strikt radialem Wärmefluss ausgegangen wurde, ist zu erwarten, dass dieses Modell im Vergleich zur in dieser Arbeit beschriebenen Simulation eine stärkere Erwärmung und damit stärkere Fokussierung durch die thermische Linse vorhersagt (siehe dazu auch Abbildung 9 auf Seite 27, in der die Wärmediffusion aus dem dotierten in den undotierten Bereich des Kristalls zu sehen ist).

Bezüglich der Brechungsindexänderung wurde in [42] – wie in dieser Arbeit – von einer nur temperaturabhängigen Brechungsindexänderung ausgegangen.

In [42] wurde außerdem von einem vollständigen numerischen Modell berichtet, in dem auch Wärmeaustausch an der Kristall-Luft-Grenze durch Konvektion und Strahlung berücksichtigt wurde. Diese beiden Effekte seien vernachlässigbar gewesen. Dies trifft auch auf diese Arbeit zu, denn wie auf Seite 27 in Abbildung 9 zu sehen ist, besitzt der Kristall an der Kristall-Luft-Grenze annähernd Raumtemperatur.

Im Gegensatz zu Gleichung (91) zeigt Abbildung 16, dass $f(w_p = 0) \neq 0$: Für sehr kleine Pumpstrahldurchmesser wächst die Brechkraft des Kristalls nicht ins Unendliche. Daher ist zu erwarten, dass die Simulation eine etwas größere Brennweite der thermischen Linse vorhersagt als die in [42] vorgestellte analytische Lösung.

Mit den Werten $K_c = 5,23 \text{ W/mK}$, $w_p = 840 \text{ }\mu\text{m}$, $P_{\text{ph}} = \frac{\lambda_L - \lambda_P}{\lambda_P} \cdot 40 \text{ W}$ und $\frac{dn}{dT} = 14,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$ (siehe Tabelle 1) ergibt sich aus obiger Gleichung $f_t = 6,27 \text{ cm}$. Aus Abbildung 16 kann für dieselben Parameter ein Wert von $(10 \pm 5) \text{ cm}$ abgelesen werden. Wie zu erwarten ist die von dem analytischen Modell vorhergesagte Brennweite der thermischen Linse etwas kleiner als die von der in dieser Arbeit vorgestellten Simulation vorhergesagten Brennweite, jedoch liegen beide in derselben Größenordnung.

6. Experimentelle Bestimmung der Brechkraft der thermischen Linse

Im Folgenden wird ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der optischen Brechkraft der thermischen Linse beschrieben. Die Methode beruht darauf, die Fokussierung eines Sondierstrahls bei unterschiedlichen Pumpstrahlintensitäten zu messen und daraus auf die Brechkraft des Kristalls zu schließen.

6.1. Versuchsaufbau und Versuchsdurchführung

Als Sondierstrahl wurde ein grüner TEM_{00} -Strahl mit Strahldurchmesser $d = (1,0 \pm 0,1) \text{ mm}$ und Divergenzwinkel $\alpha = (0,34 \pm 0,05) \text{ mrad}$ verwendet. Nach Durchlaufen des Kristalls wurde der Strahl mit Hilfe einer Glasscheibe auf einen CCD-Bildschirm gelenkt (Abbildung 17). Der Laserkristall wurde longitudinal einseitig von der Seite der

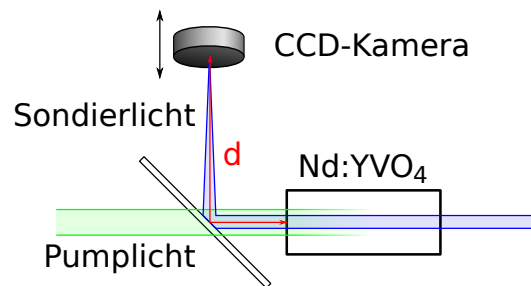


Abbildung 17: Der von auf dem Bild rechten Seite eintreffende Sondierstrahl wird durch die thermische Linse im Nd:YVO₄-Kristall im Abstand d zwischen Kristall und CCD-Kamera auf selbige fokussiert. Von der im Bild linken Seite durchdringt das Pumplicht die Glasscheibe und wird im Kristall absorbiert.

Glasscheibe her mit Licht der Wellenlänge 808 nm gepumpt.

Die absorbierte Pumpleistung wurde ermittelt, indem für jeweils einen bestimmten Strom I durch die Pumplaserdiode die emittierte Lichtleistung vor (P_{vor}) und hinter (P_{hinter}) dem Laserkristall gemessen wurde. Die absorbierte Pumplichtleistung wird angenommen als $P_{\text{abs}} = P_{\text{vor}} - P_{\text{hinter}}$. Auf diese Weise kann von dem durch die Pumplichtdiode fließende Strom I auf die absorbierte Pumplichtleistung P_{abs} geschlossen werden (Abbildung 18).

Unklar ist dabei, warum hinter dem Kristall überhaupt Pumplichtleistung gemessen werden kann. Nach der Vorhersage der Simulation müsste praktisch das gesamte Pum-

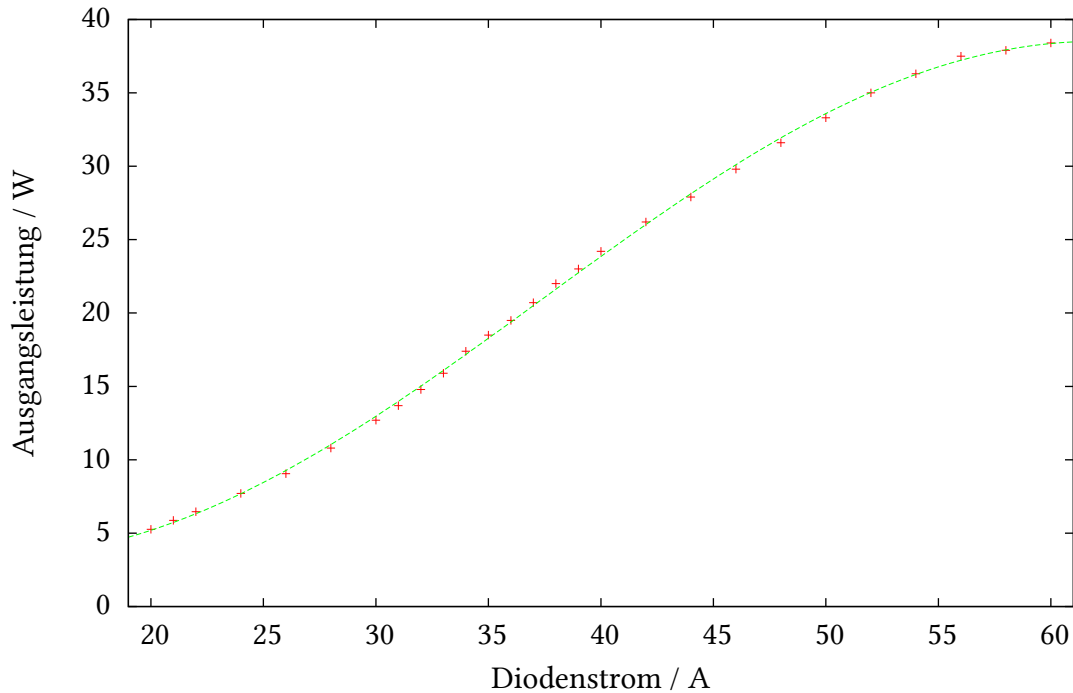


Abbildung 18: Ausgangsleistung der Pumplichtdiode aufgetragen über dem Diodenstrom.

licht im Kristall absorbiert werden.

Die Pumplichtintensität wurde so variiert, dass für einen gegebenen Abstand d zwischen CCD-Kamera und Kristall die Intensität auf dem CCD-Bildschirm maximiert wurde. Für die weitere Betrachtung wird angenommen, dass bei maximaler Intensität auf dem CCD-Bildschirm gerade die Einstellung erreicht ist, dass der Sondierstrahl auf den CCD-Bildschirm fokussiert wird.

6.2. Auswertung

Unter der Annahme dass die gemessenen Strecken d der jeweiligen Brennweite f der thermischen Linse im Kristall entsprechen, wurde in Abbildung 19 die optische Brechkraft in Abhängigkeit der absorbierten Pumpleistung aufgetragen. Die Datenpunkte wurden durch eine Gerade mit Steigung $a = (0,36 \pm 0,02) \text{ dpt/W}$ und Achsenabschnitt $b = (-0,9 \pm 0,2) \text{ dpt}$ angepasst. Auffällig ist, dass diese Gerade nicht, wie zu erwarten wäre, durch den Ursprung verläuft. Es liegt die Vermutung nahe, dass der Divergenzwinkel des Sondierstrahls einen nicht zu vernachlässigenden Einfluss hat. Dies soll im Folgenden diskutiert werden.

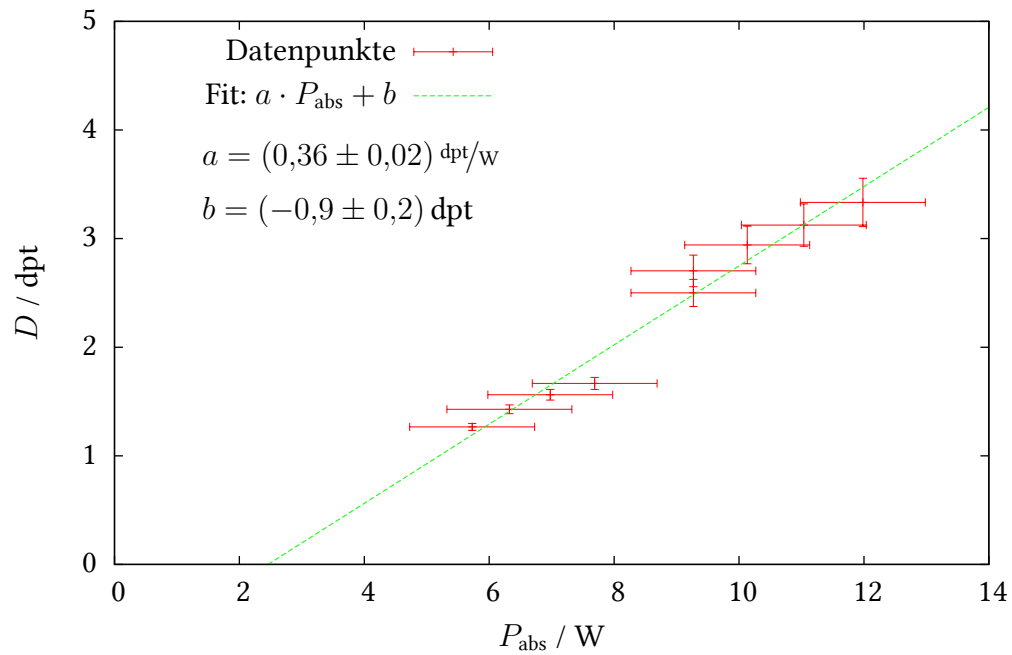


Abbildung 19: Optische Brechkraft unter der Annahme, dass $d = f$. An die Datenpunkte wurde eine lineare Funktion angepasst.

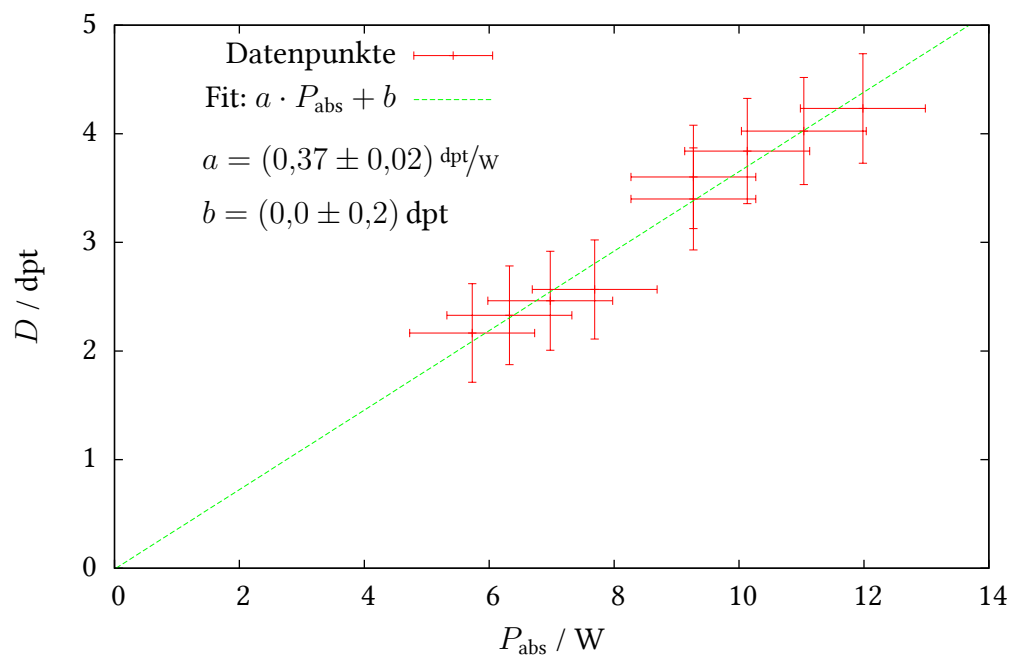


Abbildung 20: Optische Brechkraft unter Berücksichtigung, dass $d \neq f$. An die Datenpunkte wurde eine lineare Funktion angepasst.

Der Sondierstrahl $\underline{r}_{\text{in}}$ habe kurz vor der Linse den Radius r und den Divergenzwinkel α . Nach Durchlaufen der Linse \underline{L} und Translation \underline{T} um die Strecke d soll der Strahlradius (idealisiert) verschwinden und der Divergenzwinkel einen beliebigen Wert β betragen:

$$\underline{r}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix}; \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \underline{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}; \quad (92)$$

$$\underline{r}_{\text{out}} = \underline{T} \underline{L} \underline{r}_{\text{in}} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}. \quad (93)$$

Hieraus folgt für die Distanz d zwischen Linse und Fokus:

$$d = -\frac{r}{\alpha - \frac{r}{f}}. \quad (94)$$

Zum einen gilt $d = f$ nur, falls $\alpha = 0$. Zum anderen weist d eine Polstelle bei $\alpha = r/f$ auf. Dabei ist zu beachten, dass Gleichung (94) nur in der geometrischen Optik gilt; Der Verlauf weicht bei Gaußstrahlen innerhalb der Rayleigh-Länge von dem durch die Gleichung beschriebenen Verlauf ab. Die Polstelle liegt beispielsweise bei $\alpha = 0,5$ mrad, falls $r = 0,5$ mm und $f = 1$ m. Für $f \rightarrow \infty$ gilt:

$$d_{\infty} = -\frac{r}{\alpha} = b, \quad (95)$$

wobei b den Achsenabschnitt aus Abbildung 19 beschreibt. Sollte also einer der beiden Parameter r und α nicht bekannt sein, kann er mit Hilfe von b und dem jeweils anderen Parameter ermittelt werden. Aus Gleichung (94) folgt außerdem:

$$f = \frac{r}{\frac{r}{d} + \alpha} \quad (96)$$

Damit kann aus den Messwerten d die zugehörigen Brennweiten f ermittelt werden. In Abbildung 20 sind die entsprechenden Werte als Brechkraft $\frac{1}{f}$ aufgetragen. Die Steigung der Ausgleichsgeraden und damit die optische Brechkraft der thermischen Linse beträgt $a_{\text{exp}} = (370 \pm 20) \text{ mDpt/W}$.

Die experimentell bestimmte Brechkraft $a_{\text{exp}} = (370 \pm 20) \text{ mDpt/W}$ ist damit größer als die numerisch bestimmte Brechkraft $a_{\text{th}} = (260 \pm 10) \text{ mDpt/W}$. Dies könnte zum einen damit zusammenhängen, dass in der Simulation die spannungsinduzierte Brechungsindexänderung nicht berücksichtigt wurde. Weiterhin kann die optische Brechkraft in einem Nd:YVO₄-Kristall im nonlasing-Betrieb gegenüber dem lasing-Betrieb um bis zu

27 % stärker sein [43]. Schließlich wurde in der Simulation angenommen, dass alle angeregten Neodymionen über einen laserlichtemittierenden Übergang in den Grundzustand relaxieren, während in der Realität einige angeregte Neodymionen die Anregungsenergie komplett in Wärme umsetzen [12].

Um die Temperaturverteilung im Kristall zu modellieren wenden wir uns nun einem Weg zu, die Simulation mit Hilfe des durchgeführten Experimentes zu kalibrieren.

6.3. Kalibrierung der Simulation mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse

Mit Hilfe des in Abschnitt 6 durchgeführten Experimentes und des Faktors η (Gleichung (13)) lässt sich die Simulation kalibrieren. Dazu wurde die Simulation für $\eta = 1$, $\eta = 0,75$ und $\eta = 0,5$ durchgeführt und die jeweilige Brechkraft ermittelt (dargestellt in Abbildung 21). Die jeweils ermittelte Brechkraft ist in Abbildung 22 gegen η aufgetragen. Die Steigung der Ausgleichsgeraden beträgt

$$a_{\text{fit}} = (260 \pm 10) \text{ mDpt/W}. \quad (97)$$

Für das beschriebene Experiment ergibt sich so beispielsweise $\eta_{\text{exp}} = \frac{a_{\text{exp}}}{a_{\text{fit}}} = 1,42$. Die entsprechende Temperaturverteilung ist in Abbildung 23 für $P = 40 \text{ W}$ dargestellt. Im Vergleich mit Abbildung 9 auf Seite 27 wird deutlich, dass beide Temperaturverteilungen gleich erscheinen; lediglich die Temperatur skaliert linear mit der Eingangsleistung.

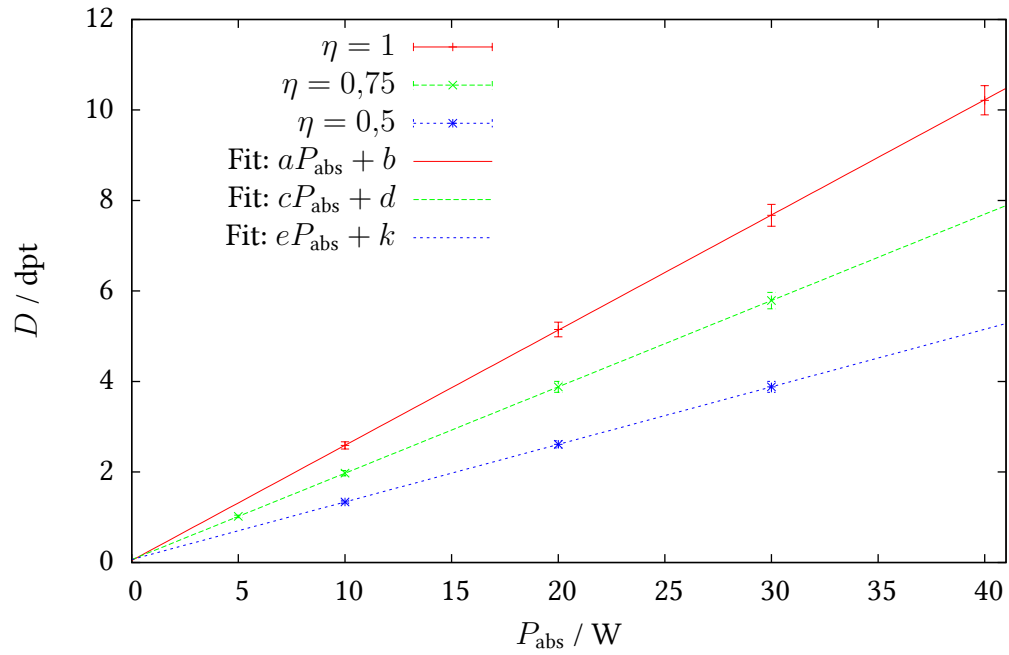


Abbildung 21: Abhängigkeit der ermittelten Brechkraft von der absorbierten Pumpleistung in Watt für $\eta = 1$, $\eta = 0,75$ und $\eta = 0,5$.

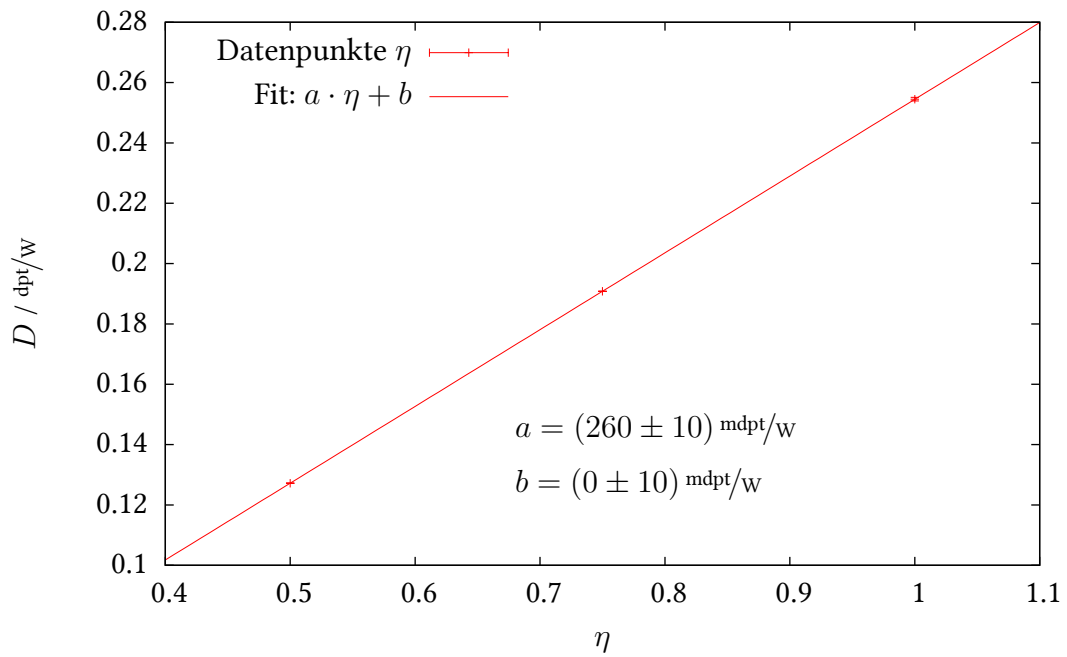


Abbildung 22: Abhängigkeit der Brechkraft von dem Kalibrierungsfaktor η . Die Datenpunkte sind die Steigungen der Geraden aus Abbildung 21 in Abhängigkeit von η .

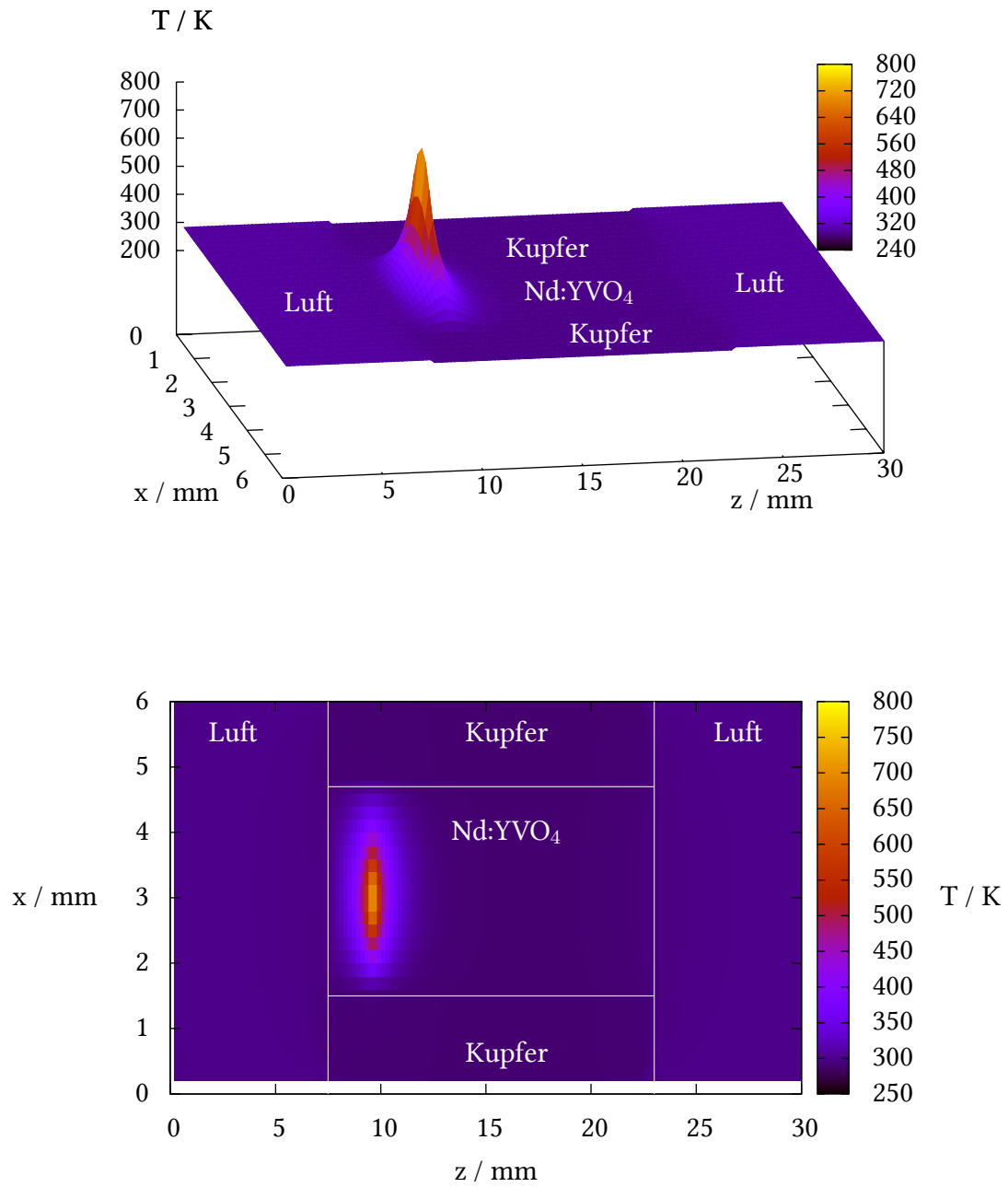


Abbildung 23: Kalibrierte Temperaturverteilung für $P = 40 \text{ W}$. Die Maximaltemperatur beträgt $(788 \pm 1) \text{ K}$. Vergleiche auch mit Abbildung 9 auf Seite 27.

7. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine zeit- und orts aufgelöste Simulation der Wärmeleitung in drei Dimensionen nach Douglas [30] vorgestellt und auf einen einseitig longitudinal gepumpten Nd:YVO₄-Kristall angewandt. Die der Simulation zu Grunde liegenden Gleichungen lauten:

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2\right) U'_{mlj} = \left(1 + \frac{r}{2}\delta_x^2 + r\delta_y^2 + r\delta_z^2\right) U_{mlj}^n, \quad (98)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2\right) U''_{mlj} = U'_{mlj} - \frac{r}{2}\delta_y^2 U_{mlj}^n, \quad (99)$$

$$\left(1 - \frac{r}{2}\delta_z^2\right) U_{mlj}^{n+1} = U''_{mlj} - \frac{r}{2}\delta_z^2 U_{mlj}^n. \quad (100)$$

Dabei ist U die Temperatur, δ_i sind differenzenbildende Operatoren und r ist ein Maß für die relative Raum-Zeit-Auflösung.

Die Wärmeverteilung wurde modelliert, indem eine einfallende Pumplichtverteilung über den Absorptionsquerschnitt der Neodym-Ionen mit der Dotierungsverteilung interagiert. Die sich einstellende Temperaturverteilung fällt in z -Richtung exponentiell, in x - und y -Richtung zunächst parabolisch und ab dem Rand des gepumpten Gebietes zum Kristallrand hin logarithmisch ab. Die Maximaltemperatur hängt dabei linear von der Pumpleistung und quadratisch von dem Pumpstrahldurchmesser ab.

Die von der Temperaturverteilung abhängige optische Dichte wurde ermittelt und daraus die optische Brechkraft berechnet. Für eine Pumpleistung von $P = 40$ W ergibt sich eine Brennweite von (10 ± 5) cm. Die optische Brechkraft beträgt (260 ± 10) mdpt/w. Die resultierende Brennweite von (10 ± 5) cm liegt in derselben Größenordnung wie ein mit Hilfe des in [42] vorgeschlagenen analytischen Modells ermittelter Vergleichswert von 6,27 cm. Trotz quadratischen Kristallquerschnittes hat dessen thermische Linse weitgehend radialsymmetrische optische Eigenschaften.

Das erarbeitete Modell wurde experimentell überprüft. Dazu wurde ein Nd:YVO₄-Kristall einseitig longitudinal gepumpt und mit Hilfe eines Probenstrahls und einer CCD-Kamera die Fokusslänge in Abhängigkeit von der Pumpleistung gemessen. Die so ermittelte Brechkraft beträgt (370 ± 20) mdpt/w. Mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse wurde die Simulation für das Experiment über einen Anpassungsfaktor kalibriert und die Temperaturverteilung im Kristall berechnet.

Die in dieser Arbeit vorgestellte zeit- und orts aufgelöste Simulation bietet bezüglich der Eigenschaften des Kristalls und der Pumpstrahlkonfiguration viele Freiheiten. So können nicht nur Zylinder und Quader, sondern beliebige Kristallgeometrien simuliert

werden. Die Dotierung wurde in dieser Arbeit als homogen angenommen, kann jedoch für jedes Element der Domäne (siehe Abbildung 3) beliebig gewählt werden. Ebenso können die Materialeigenschaften für jeden Block der Domäne separat festgelegt werden, so dass zum Beispiel auch die Simulation alternativer Kühlgeometrien möglich ist.

Weiterhin kann die Verteilung des Pumplichtes in x - und y -Richtung beliebig gewählt werden. Das vorgestellte Modell der schichtweisen Betrachtung des „Photonenreservoirs“ erlaubt jedoch keine z -Abhängigkeit der Pumplichtverteilung. Da die Wärmegeneration numerisch getrennt von der Wärmedistribution betrachtet wird, könnten diesem Mangel alternative Wärmegenerationsfunktionen Abhilfe schaffen.

Durch die gegebene Zeitauflösung können auch transiente Prozesse wie zum Beispiel gepulstes Pumpen oder die zeitliche Bildung der Temperaturverteilung betrachtet werden.

Die Brechungsindexverteilung wird nicht nur direkt durch die Temperaturverteilung, sondern auch indirekt durch die temperaturinduzierten Verspannungen im Kristall beeinflusst. Für die Ermittlung der Brechkraft des Kristalls wäre es also erstrebenswert, auch diesen Aspekt in die numerische Berechnung miteinzubeziehen.

In vielen Arbeiten wird zur numerischen Kalkulation die Finite-Elemente-Methode benutzt und dafür ein externes Framework eingesetzt, zum Beispiel in [14], [42] und [44]. Die in dieser Arbeit dargestellte Methode ist einfach zu implementieren und bietet den Vorteil, gleichzeitig sehr flexibel zu sein. Sie ist damit interessant für Wissenschaftlerinnen und Wissenschaftler, die volle Kontrolle über die numerische Simulation der Wärmeleitung benötigen, um diese zum Beispiel an besondere experimentelle Begebenheiten anzupassen.

A. Quellcode

In diesem Abschnitt wird auf den Sourcecode eingegangen, der den bezüglich der Temperaturverteilungen vorliegenden numerischen Ergebnissen zugrunde liegt.

A.1. Definition der Variablen

Zunächst werden die Materialparameter gemäß Tabelle 1 festgelegt:

```
roomtemp = 300;
watertemp = 290;
crystallength = 1.5e-2;
endcaplength = 2e-3;
crystalwidth = 3e-3;
samples = 30;
global P;
load pumppower.dat P;
P
nddoping = 0.004;
cyvo4 = 530;
rho = 4.22 * 1e-3 * 1e6;
kyvo4 = 2.34e-6;
kair = 21.6e-6;
kcopper = 115e-6;
rhoA = 1.247e28;
lambdap = 808e-9;
lambdal = 1064e-9;
clight = 3e8;
abscrosss = 2.3e-23;
planck = 6.6e-34; # in J*s
pumpbeamwidth = 840e-6
timestep = 1e-4
threshold = 1
load eta.dat eta;
eta

##### DERIVED VALUES SETUP #####
```

```

domainwidth = 2 * crystalwidth;
domainheight = domainwidth;
domainlength = 2 * crystallength;
global h = domainwidth / samples;
h
DeltaV = h^3;
capi = int32( endcaplength / h );
crystalfront = ceil( (domainlength / 2. - crystallength / 2.)/h );
crystalback = floor( (domainlength / 2. + crystallength / 2.)/h );
crystalleft = ceil( (domainwidth / 2. - crystalwidth / 2.)/h );
crystalright = ceil( (domainwidth / 2. + crystalwidth / 2.)/h );
crystaltop = crystalright;
crystalbottom = crystalleft;
tcount = 10 * timestep;
global r = timestep / h^2;
r
global M = floor(domainwidth / h);
global L = floor(domainheight / h);
global J = floor(domainlength / h);
crystalmiddle = int32(L / 2.);
Un = roomtemp * ones(M,L,J);
Unplusonealt = roomtemp;
NNd = nddoping * rhoA * DeltaV;
ndexcited = zeros(M,L,J);
ndrelaxed = zeros(M,L,J);
nup = clight / lambdap;
nul = clight / lambdal;
global K = kair * ones(M,L,J)
global Kmatrixx
global Kmatrixy
global Kmatrixz
global tridiagonalmatrixx
global tridiagonalmatrixy
global tridiagonalmatrixz

```

```
global gamma = 2 / (pi * pumpbeamwidth^2);
```

A.2. Funktionsdefinitionen

Es werden zwei Funktionen definiert. Die erste Funktion stellt den Pumpstrahl dar:

```
function f = pumplight(x, y, mux, muy, wp)
    global gamma
    global P
    f = P * gamma * exp( -2 * ( (x-mux)^2 + (y-muy)^2 ) ./ wp^2 );
endfunction
```

Die zweite Funktion definiert jeweils eine tridiagonale Matrix in den Raumrichtungen x , y und z . Die Matrixdefinition als Funktion zu realisieren hat den Vorteil, während der Laufzeit den Parameter r ändern zu können. Dies ist zum Beispiel dann hilfreich, wenn zunächst mit einem relativ großen Wert r eine grobe Annäherung an den Gleichgewichtszustand ermittelt werden soll, der dann mit kleinerem r noch einmal verfeinert wird. Da r in den Matrizen vorkommt, muss nach einer Änderung von r die Funktion `setupmatrices` erneut ausgeführt werden.

```
function setupmatrices
    global r
    global K
    global Kmatrixx
    global Kmatrixy
    global Kmatrixz
    global tridiagonalmatrixx
    global tridiagonalmatrixy
    global tridiagonalmatrixz
    global M L J

    printf("Setting up tridiagonalmatrixx... \n");
    for l = 1 : L
        for j = 1 : J
            Kmatrixx{l,j} = zeros(M-2,M-2);
            for i = 1 : M-3
                Kmatrixx{l,j}(i,i) = -(K(i+1,l,j)+K(i,l,j));
```

```

        Kmatrixx{l,j}(i+1,i) = K(i+1,l,j);
        Kmatrixx{l,j}(i,i+1) = K(i+1,l,j);
    endfor
    Kmatrixx{l,j}(M-2,M-2) = -(K(M-1,l,j)+K(M-2,l,j));
    tridiagonalmatrixx{l,j} = eye(M-2) - r/2. * Kmatrixx{l,j};
endfor
endfor

printf("Setting up tridiagonalmatrixy... \n");
for m = 1 : M
    for j = 1 : J
        Kmatrixy{m,j} = zeros(L-2,L-2);
        for i = 1 : L-3
            Kmatrixy{m,j}(i,i) = -(K(m,i+1,j)+K(m,i,j));
            Kmatrixy{m,j}(i+1,i) = K(m,i+1,j);
            Kmatrixy{m,j}(i,i+1) = K(m,i+1,j);
        endfor
        Kmatrixy{m,j}(L-2,L-2) = -(K(m,L-1,j)+K(m,L-2,j));
        tridiagonalmatrixy{m,j} = eye(L-2) - r/2. * Kmatrixy{m,j};
    endfor
endfor

printf("Setting up tridiagonalmatrixz... \n");
for m = 1 : M
    for l = 1 : L
        Kmatrixz{m,l} = zeros(J-2,J-2);
        for i = 1 : J-3
            Kmatrixz{m,l}(i,i) = -(K(m,l,i+1)+K(m,l,i));
            Kmatrixz{m,l}(i+1,i) = K(m,l,i+1);
            Kmatrixz{m,l}(i,i+1) = K(m,l,i+1);
        endfor
        Kmatrixz{m,l}(J-2,J-2) = -(K(m,l,J-1)+K(m,l,J-2));
        tridiagonalmatrixz{m,l} = eye(J-2) - r/2. * Kmatrixz{m,l};
    endfor
endfor

```

```
endfunction
```

A.3. Definition der Temperaturleitungsmatrix

```
for j = crystalfront : crystalback
    K(:, :, j) = kcopper * ones(M, L);
endfor
for j = crystalfront : crystalback
    for m = crystalleft : crystalright
        for l = crystalbottom : crystaltop
            K(m, l, j) = kyvo4;
        endfor
    endfor
endfor
```

A.4. Festlegen der Randbedingungen

```
for j = crystalfront : crystalback
    Un(1, :, j) = watertemp * ones(L, 1);
    Un(M, :, j) = watertemp * ones(L, 1);
    Un(:, 1, j) = watertemp * ones(M, 1);
    Un(:, L, j) = watertemp * ones(M, 1);
endfor
```

A.5. Laden der Ausgangs-Temperaturverteilung

```
Unplusone = Ustrichstrich = Ustrich = Un;
load (sprintf ("unplusone-3-eta=%01i-P=%02i.dat", eta, P), "Unplusone");
```

A.6. Festlegen der Anzahl der relaxierten Neodym-Atome

Zuletzt wird die Anzahl der Neodym-Atome pro Block festgelegt. In dieser Arbeit ist die Verteilung der Neodym-Atome über den Laserkristall konstant. Eine beliebige Dotierungsverteilung ist festlegbar.

```
for j = crystalfront + capi : crystalback - capi
    for m = crystalleft : crystalright
```



```

        for l = crystalbottom : crystaltop
            ndrelaxed(m,l,j) = NNd;
        endfor
    endfor
endfor

```

A.7. Starten der Iteration

Bevor die Simulation beginnt über die Zeit zu iterieren, werden die Matrizen aufgebaut:

```

setupmatrices;
timeelapsed = 0;

while (timeelapsed < 20)

    Un = Unplusone;
    Unplusonealt = ...
        Unplusone(crystalmiddle,crystalmiddle,crystalfront+capi);

```

A.8. Wärmedeposition

Zunächst wird das Photonenreservoir gefüllt:

```

pumppower = 0;
for m = crystalleft : crystalright
    for l = crystalbottom : crystaltop
        pumpphotons(m,l) = ...
            ( h^2 * timestep * ...
                pumplight(h*m, h*l, h*M/2, h*L/2, pumpbeamwidth) ) ...
            / ( planck * nup );
        pumppower += pumpphotons(m,l) * 1/timestep * planck * nup;
    endfor
endfor

```

Die Energie des Photonenreservoirs wird auf die Neodym-Atome verteilt:

```

for j = crystalfront + capi : crystalback - capi
    for m = crystalleft : crystalright

```

```

for l = crystalbottom : crystaltop
    if ( pumpphotons(m,l) > 0 )
        absphotons = h * pumpphotons(m,l) * abscrossss ...
            * (ndrelaxed(m,l,j)/NNd) * rhoA;
        if ( absphotons > pumpphotons(m,l) )
            ndexcited(m,l,j) = ndexcited(m,l,j) + pumpphotons(m,l);
            pumpphotons(m,l) = 0;
        else
            ndexcited(m,l,j) = ndexcited(m,l,j) + absphotons;
            pumpphotons(m,l) = pumpphotons(m,l) - absphotons;
        endif
    endif
endfor
endfor
endfor

```

Die Relaxation auf das Grundlevel generiert Wärme:

```

for j = crystalfront + capi : crystalback - capi
    for m = crystalleft : crystalright
        for l = crystalbottom : crystaltop
            Un(m,l,j) = Un(m,l,j) ...
                + eta * ( ndexcited(m,l,j) * planck * (nup-nul) ) ...
                / ( cyvo4 * rho * DeltaV );
            ndexcited(m,l,j) = 0;
            ndrelaxed(m,l,j) = NNd - ndexcited(m,l,j);
        endfor
    endfor
endfor

```

Zuletzt wird noch die aufgenommene Leistung berechnet:

```

leftpumppower = 0;
for m = crystalleft : crystalright
    for l = crystalbottom : crystaltop
        leftpumppower += pumpphotons(m,l) * 1/timestep * planck * nup;
    endfor
endfor

```

```
endfor
abspumppower = pumppower - leftpumppower;
```

A.9. Wärmetransfer bzw. Lösen der Douglas-Gleichungen

Zunächst müssen die Elemente der Douglas-Gleichungen gefunden werden. Dieser Teil ist der Kern der Simulation und entscheidend für die Laufzeit des Programmes.

```
dx2Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) = ...
    K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) .* Un(3:M,2:L-1,2:J-1) - ...
    ( K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + K(1:M-2,2:L-1,2:J-1) ) .* ...
    Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + ...
    K(1:M-2,2:L-1,2:J-1) .* Un(1:M-2,2:L-1,2:J-1);
dy2Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) = ...
    K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) .* Un(2:M-1,3:L,2:J-1) - ...
    ( K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + K(2:M-1,1:L-2,2:J-1) ) .* ...
    Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + K(2:M-1,1:L-2,2:J-1) .* ...
    Un(2:M-1,1:L-2,2:J-1);
dz2Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) = ...
    K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) .* Un(2:M-1,2:L-1,3:J) - ...
    ( K(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + K(2:M-1,2:L-1,1:J-2) ) .* ...
    Un(2:M-1,2:L-1,2:J-1) + K(2:M-1,2:L-1,1:J-2) .* ...
    Un(2:M-1,2:L-1,1:J-2);
```

Korrektur der Randelemente:

```
dx2Un(2, 2:L-1,2:J-1) += K(1, 2:L-1,2:J-1) .* Un(1,2:L-1,2:J-1);
dx2Un(M-1,2:L-1,2:J-1) += K(M-1,2:L-1,2:J-1) .* Un(M,2:L-1,2:J-1);
dy2Un(2:M-1,2, 2:J-1) += K(2:M-1,1, 2:J-1) .* Un(2:M-1,1,2:J-1);
dy2Un(2:M-1,L-1,2:J-1) += K(2:M-1,L-1,2:J-1) .* Un(2:M-1,L,2:J-1);
dz2Un(2:M-1,2:L-1,2 ) += K(2:M-1,2:L-1,1 ) .* Un(2:M-1,2:L-1,1);
dz2Un(2:M-1,2:L-1,J-1) += K(2:M-1,2:L-1,J-1) .* Un(2:M-1,2:L-1,J);
```

Die Douglas-Gleichungen können nun gelöst werden:

```
for j = 2 : J-1
    for l = 2 : L-1 # solve the first douglas equation
        Ustrich(2:M-1,l,j) = tridiagonalmatrixx{1,j} \ ...
```

```

        ( Un(2:M-1,l,j) + r/2. * dx2Un(2:M-1,l,j) + ...
          r * dy2Un(2:M-1,l,j) + r * dz2Un(2:M-1,l,j));
    endfor
    for m = 2 : M-1 # solve the second douglas equation
        Ustrichstrich(m,2:L-1,j) = tridiagonalmatrixy{m,j} \ ...
            transpose( Ustrich(m,2:L-1,j) - r/2. * dy2Un(m,2:L-1,j));
    endfor
endfor
for m = 2 : M-1
    for l = 2 : L-1
        Unplusone(m,l,2:J-1) = tridiagonalmatrixz{m,l} \ ...
            (squeeze(Ustrichstrich(m,l,2:J-1)) ...
             - r/2. * squeeze(dz2Un(m,l,2:J-1)));
    endfor
endfor

```

Die Wärme wurde nun verteilt, und der nächste Schritt kann begonnen werden. Vorher wird noch die Zeit erhöht und die aktuellen Daten ausgegeben.

```

tcount = tcount + timestep;
timeelapsed = timeelapsed + timestep;

```

A.10. Datenausgabe

```

printf(".");

if (tcount >= 20 * timestep)
    tcount = 0;
    DeltaTrate = (- Unplusonealt ...
                  + Unplusone(crystalmiddle, crystalmiddle,
                              crystalfront + capi)) / timestep;
    printf(" DT=%5.3f K/s ", DeltaTrate);
    save (sprintf("unplusone-3-eta=%01i-P=%02i.dat",eta,P), "Unplusone");

```

Die nächste if-Struktur legt die Konvergenzbedingung fest: Falls sich in der in x, y -Richtung gesehenen Mitte des Kristalls an der Stelle, ab der der Kristall dotiert ist sich die Temperatur um nicht mehr als einen bestimmten Wert threshold pro Sekunde ändert, wird die Simulation durch den exit-Befehl beendet. Sei der Wert für threshold

beispielsweise 1: Dann wird die Simulation dann beendet, wenn sich die Temperatur an genannter Stelle um nicht mehr als 1 K/s ändert.

```
    if ( sqrt(DeltaTtrate^2) < threshold)
        printf("\n");
        printf("Steady state reached.\n");
        printf("Absorbed pump power: %6.4f W.\n", abspumppower);
        exit
    endif
endif
endwhile
exit
```

Literatur

- [1] J. Eichler und H. J. Eichler. *Laser - Bauformen, Strahlführung, Anwendungen*. 7. Aufl. Springer, 2010.
- [2] A. Sennaroglu. *Solid-State Lasers And Applications*. Optical Science and Engineering Series. CRC PressINC, 2007. ISBN: 9780849335891.
- [3] R. Iffländer und S. Weber. *Solid-State Lasers for Materials Processing: Fundamental Relations and Technical Realizations*. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2001. ISBN: 9783540669807.
- [4] R. Poprawe und W. Schulz. „Development and application of new high-power laser beam sources“. In: (2003).
- [5] R. J. Shine und Stanford University. Dept. of Applied Physics. *A high-power, diode-laser-pumped, solid-state laser for precision interferometry*. Stanford University, 1995.
- [6] H. P. Berlien und G. J. Müller. *Applied Laser Medicine*. Springer-Verlag GmbH, 2003. ISBN: 9783540670056.
- [7] E. Beyer. *Schweissen mit laser*. Springer, 1995.
- [8] Hans-Georg Treusch. *Abtragen, Bohrend und Trennen mit Festkörperlasern*. VDI Technologiezentrum, 1996.
- [9] James T. Luxon und David E. Parker. *Industrial Lasers and Their Applications*. Prentice Hall Ptr, 1985.
- [10] C. B. Dane u. a. „Army Solid State Laser Program: Design, Operation, and Mission Analysis for a Heat-Capacity Laser“. In: *Solid State and Diode Laser Technology Review* (2001).
- [11] John Vetrovec. „Solid-state high-energy laser“. In: (2002), S. 104–114. DOI: 10 . 1117/12 . 469752.
- [12] W. Koechner. *Solid-State Laser Engineering*. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2006. ISBN: 9780387290942.
- [13] R. Weber u. a. „Cooling schemes for longitudinally diode laser-pumped Nd:YAG rods“. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 34.6 (Juni 1998), S. 1046 –1053. ISSN: 0018-9197. DOI: 10 . 1109/3 . 678602.

- [14] R. Weber, B. Neuenschwander und H. P. Weber. „Thermal effects in solid-state laser materials“. In: *Optical Materials* 11.2–3 (1999), S. 245 –254. ISSN: 0925-3467. DOI: 10.1016/S0925-3467(98)00047-0. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925346798000470>.
- [15] M. P. MacDonald u. a. „Reducing thermal lensing in diode-pumped laser rods“. In: *Optics Communications* 178.4–6 (2000), S. 383 –393. ISSN: 0030-4018. DOI: 10.1016/S0030-4018(00)00663-5. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401800006635>.
- [16] A. K. Cousins. „Temperature and thermal stress scaling in finite-length end-pumped laser rods“. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 28.4 (Apr. 1992), S. 1057 –1069. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/3.135228.
- [17] W. A. Clarkson, N. S. Felgate und D. C. Hanna. „Simple method for reducing the depolarization loss resulting from thermally induced birefringence in solid-state lasers“. In: *Opt. Lett.* 24.12 (Juni 1999), S. 820–822. DOI: 10.1364/OL.24.000820. URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-24-12-820>.
- [18] H. J. Eichler, A. Haase und R. Menzel. „100-watt average output power 1.2 diffraction limited beam from pulsed neodymium single-rod amplifier with SBS phase conjugation“. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 31.7 (Juli 1995), S. 1265 –1269. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/3.391090.
- [19] Xiaoyuan Peng, Lei Xu und Anand Asundi. „Thermal lensing effects for diode-end-pumped Nd:YVO₄ and Nd:YAG lasers“. In: *Optical Engineering* 43.10 (2004), S. 2454–2461. DOI: 10.1117/1.1787529.
- [20] H. Stöcker. *Taschenbuch der Physik: Formeln, Tabellen, Übersichten*. Harri Deutsch, 1998.
- [21] M. Kaviany. *Principles of Convective Heat Transfer*. Mechanical Engineering Series. Springer, 2001. ISBN: 9780387951621.
- [22] Taras I. Lakoba. *Math 337*. URL: <http://www.cems.uvm.edu/~lakobati/math337>.
- [23] H. S. Carslaw und J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solid*. 2. Aufl. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 1986. ISBN: 9780198533689.
- [24] J. Noye. *Computational Techniques for Differential Equations*. North-Holland Mathematics Studies Nr. 83. North-Holland, 1984. ISBN: 9780444867834.

- [25] E. Hairer, S. P. Nørsett und G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems*. Springer, 1987.
- [26] G. W. E. Hairer. *Solving Ordinary Differential Equations II*. Springer, 1991.
- [27] J. F. Epperson. *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. John Wiley & Sons, 2007. ISBN: 9780470049631.
- [28] M. S. Fer. *Numerik Im Maschinenbau*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag GmbH, 1999. ISBN: 9783540653912.
- [29] D. W. Peaceman. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Development in Petroleum Science Series. Elsevier, 1977. ISBN: 9780444415783.
- [30] J. Douglas, Jr. „On the Numerical Integration of $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ by Implicit Methods“. In: *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 3.1 (1955), S. 42–65. DOI: 10.1137/0103004. eprint: <http://epubs.siam.org/doi/pdf/10.1137/0103004>. URL: <http://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/0103004>.
- [31] C. J. Cremers und H. A. Fine. *Thermal Conductivity*. Thermal conductivity Bd. 21. Springer, 1991. ISBN: 9780306436727.
- [32] H. J. Zhang u. a. „Thermal and Laser Properties of Nd:YVO₄ Crystal“. In: *Crystal Research and Technology* 34.8 (1999), S. 1011–1016. ISSN: 1521-4079. DOI: 10.1002/(SICI)1521-4079(199909)34:8<1011::AID-CRAT1011>3.0.CO;2-M. URL: [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1521-4079\(199909\)34:8<1011::AID-CRAT1011>3.0.CO;2-M](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1521-4079(199909)34:8<1011::AID-CRAT1011>3.0.CO;2-M).
- [33] M. Wakaki, K. Kudo und T. Shibuya. *Optical Materials And Applications*. Optical Science And Engineering. CRC PressINC, 2012. ISBN: 9780824727598.
- [34] V. I. Ustyugov und Society of Photo-optical Instrumentation Engineers. *Laser Optics 2006: Solid State Lasers and Nonlinear Frequency Conversion*. Proceedings of SPIE, the International Society for Optical Engineering. SPIE, 2007.
- [35] J. Emsley. *The elements*. Clarendon Press, 1989. ISBN: 9780198552383.
- [36] E. R. Cohen und International Union of Pure and Applied Chemistry. Physical and Biophysical Chemistry Division. *Quantities, Units and Symbols in Physical Chemistry*. RSC Pub., 2007. ISBN: 9780854044337.

- [37] J. Shen, A. Mandelis und B. D. Aloysius. „Thermal-wave resonant-cavity measurements of the thermal diffusivity of air: A comparison between cavity-length and modulation-frequency scans“. In: *International Journal of Thermophysics* 17 (6 1996), S. 1241–1254. ISSN: 0195-928X. DOI: 10.1007/BF01438667. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01438667>.
- [38] W. J. Parker u. a. „Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity, and Thermal Conductivity“. In: *Journal of Applied Physics* 32.9 (1961), S. 1679–1684. DOI: 10.1063/1.1728417. URL: <http://link.aip.org/link/?JAP/32/1679/1>.
- [39] O. Guillot-Noel u. a. „Correlation between rare-earth oscillator strengths and rare-earth-valence-band interactions in neodymium-doped YMO_4 ($M = V, P, As$), $Y_3Al_5O_{12}$, and $LiYF_4$ matrices“. In: *Phys. Rev. B* 60 (3 Juli 1999), S. 1668–1677. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.1668. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.60.1668>.
- [40] H. C. Liang u. a. „Precise measurement of group refractive indices and temperature dependence of refractive index for Nd-doped yttrium orthovanadate by intracavity spontaneous mode locking“. In: *Opt. Lett.* 36.19 (Okt. 2011), S. 3741–3743. DOI: 10.1364/OL.36.003741. URL: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-36-19-3741>.
- [41] Shuzhen Fan u. a. „More precise determination of thermal lens focal length for end-pumped solid-state lasers“. In: *Optics Communications* 266.2 (2006), S. 620 – 626. ISSN: 0030-4018. DOI: 10.1016/j.optcom.2006.05.023. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401806004780>.
- [42] M. E. Innocenzi u. a. „Thermal modeling of continuous-wave end-pumped solid-state lasers“. In: *Appl. Phys. Lett.* 56 (1990), S. 1831 – 1833.
- [43] Xiaoyuan Peng u. a. „Heating measurements in diode-end-pumped Nd:YVO₄ lasers“. In: *Optical Engineering* 40.6 (2001), S. 1100–1105. DOI: 10.1117/1.1365105. URL: <http://dx.doi.org/10.1117/1.1365105>.
- [44] A. Lucianetti u. a. „Thermo-optical properties of transversely pumped composite YAG rods with a Nd-doped core“. In: *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 36.2 (Feb. 2000), S. 220 – 227. ISSN: 0018-9197. DOI: 10.1109/3.823468.