

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ М. В.
ЛОМОНОСОВА

Решение уравнения теплопроводности
на квадратной пластинке методом
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Карпенко Виталий

424 группа

22 мая 2016 г.

1 ИСХОДНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + f & \text{на } \Omega \times (0, \inf), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{на } \Omega, \\ u(\cdot, 0) = g & \text{на } \Gamma \text{ для } \forall t > 0, \end{cases}$$

Здесь Ω - квадратная область в плоскости (x, y) с левым нижним углом в $(0, 0)$ и правым верхним в $(1, 1)$. Γ - граница пластинки. Отсчёт времени начинается в $t_0 = 0$. Необходимо найти $u(\mathbf{x}, t) = u(x, y, t)$.

2 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ

2.1 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПО ВРЕМЕНИ И ЗАДАЧА В СЛАБОЙ ФОРМЕ

Разбиение по времени может быть произвольным $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, но в данном случае удобнее пользоваться постоянным шагом (позже будет видно почему), хотя при необходимости метод легко модифицируется для вычисления временных шагов в зависимости от поведения численного решения или производительности метода в данный момент времени. Таким образом $\delta_n = t_{n+1} - t_n = \text{const}$. При этом $f_n = f(\cdot, t_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n = g(\cdot, t_n) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Для аппроксимации производной u по t используется следующая формула

$$\phi'(t_{n+1}) = \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{\delta_n}$$

, т.е. в нашем случае $\frac{u_{n+1}-u_n}{\delta_n} = \Delta u_{n+1} + f_{n+1}$. Тогда, применяя теорему Грина к u_n :

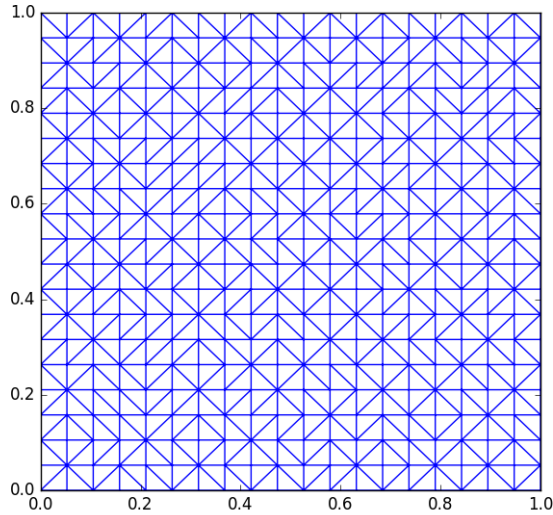
$$\int_{\Omega} (\Delta u_n) v + \int_{\Omega} \nabla u_n \nabla v = \int_{\Gamma} (\partial_n u_n) v$$

, откуда получаем формулировку задачи в слабой форме для вычисления u_{n+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{найти } u_{n+1} \in H^1(\Omega), \text{ такую, что:} \\ u_{n+1} = g_{n+1} \quad \text{на } \Gamma, \\ \delta_n \int_{\Omega} \nabla u_{n+1} \nabla v + \int_{\Omega} u_{n+1} v = \int_{\Omega} u_n v + \delta_n \int_{\Omega} f_n v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

2.2 ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ПО ПРОСТРАНСТВУ

Данная квадратная пластинка разбивается на треугольники, имеющие в пересечениях только общие вершины или общие рёбра. Используется самая простая вариация метода конечных элементов с треугольными элементами первой степени, сетка выглядит, например, так:



Мы имеем пространство функций $V_h \in H^1(\Omega)$ определяемых значениями в узлах триангуляции, узлы разбиения, узлы с граничными условиями Дирихле (все граничные в данном случае) и подпространство

$$V_h^0 = V_h \cap H_0^1(\Omega) = \{v_h \in V_h | v_h = 0 \text{ на } \Gamma.\}$$

Узлы пронумерованы и их номера содержатся в двух списках - Dir для граничных и Ind для внутренних. Теперь мы заменяем все элементы слабой формулировки на их дискретные аналоги:

$$\begin{cases} \text{найти } u_{n+1}^h \in V_h, \text{ такую, что:} \\ u_{n+1}^h(p_i) = g_{n+1}(p_i) & \text{для } \forall i \in Dir, \\ \delta_n \int_{\Omega} \nabla u_{n+1}^h \nabla v_h + \int_{\Omega} u_{n+1}^h v_h = \int_{\Omega} u_n^h v_h + \delta_n \int_{\Omega} f_n v_h & \forall v_h \in V_h^0. \end{cases}$$

Тогда, если W - матрица жёсткости, а M - матрица масс, то каждый шаг решения можно записать как:

$$\begin{cases} u_{Dir}^{n+1} = g_{n+1}, \\ (\delta_n W + M)u^{n+1} = Mu^n - f_n. \end{cases}$$

3 АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Упростим задачу, положив f и g не зависящими от времени. Тогда:

$$\begin{cases} u_t = \Delta_x u + f & \text{на } \Omega \times (0, \inf), \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{на } \Omega, \\ u(\cdot, t) = g & \text{на } \Gamma \text{ для } \forall t > 0, \end{cases}$$

Если мы игнорируем начальное состояние, мы можем рассматривать только устойчивое решение задачи:

$$\begin{cases} -\Delta u_{lim} = f & \text{на } \Omega, \\ u_{lim} = g & \text{на } \Gamma. \end{cases}$$

Предположим теперь, что нам известны все собственные значения и собственные функции оператора Лапласа на Ω :

$$\begin{cases} -\Delta \phi_k = \lambda_k \phi_k & \text{на } \Omega, \\ \phi_k = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases}$$

Решение (полученное разделением переменных)

$$u(\mathbf{x}, t) = u_{lim}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^{\inf} c_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(\mathbf{x})$$

, где $c_k = \int_{\Omega} (u_0 - u_{lim}) \phi_k$. Эта формула показывает, что решение убывает экспоненциально быстро к устойчивому решению.

Если мы рассматриваем стремящиеся к нулю граничные условия и $f = 0$, а так же фиксированный шаг по времени, то u^{n+1} получается следующим образом:

$$(\delta W + M)u^{n+1} = Mu^n$$

при начальном состоянии u^0 . Если $u^0 = \phi_k$, то собственные вектора удовлетворяют уравнению

$$(\delta W + M)\phi_k = (1 + \lambda_{h,k})M\phi_k$$

Тогда легко показать, что

$$u^n = (1 + \lambda_{h,k})^{-n}\phi_k$$

Т.к. $0 < (1 + \lambda_{h,k})^{-1} < 1$ метод устойчив.

4 АППРОКСИМАЦИЯ

В случае с равномерными граничными условиями Дирихле задача выглядит так: найти такие $u_h \in V_{0,h}^k$, что

$$\int_{\Omega} (\nabla u_h \cdot \nabla v_h)(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u_h(x) v_h(x) dx = \int_{\Omega} f(x) v_h(x) dx, \forall v_h \in V_{0,h}^k$$

Раскладывая u_h по каноническому базису $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ и выбирая тестовый функции $v_h = \phi_i$, получаем:

$$\sum_{j=1}^N u_h(a_j) \int_{\Omega} (\nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i)(x) dx + \int_{\Omega} c(x) \phi_i \phi_j dx = \int_{\Omega} f(x) \phi_i dx, \forall v_h \in V_{0,h}^k$$

Такая формулировка приводит к решению систему линейных уравнений, как показано выше. Составными частями матриц этой системы являются матрицы жёсткости и масс. Вычисление их элементов осуществляется с помощью квадратурных формул и перехода к опорному элементу. Переход от опорного элемента к элементу заданной триангуляции осуществляется аффинным преобразованием.

Рассматривая это аффинное преобразование можно показать (выкладки слишком громоздки и я их здесь опускаю), что если $v \in H^2(\Omega)$, то существуют две константы C_1 и C_2 , не зависящие от h , такие, что $\|v - \Pi_h v\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h^3 \|v''\|_{L^2(\Omega)}$ и $\|v' - (\Pi_h v)'\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 h^2 \|v''\|_{L^2(\Omega)}$. Отсюда, используя последнее утверждение проекционной теоремы, а именно

$$a(y - y^n, y - y^n) \leq a(y - v^n, y - v^n) \forall v^n \in S^n$$

получаем сходимость в энергетической норме:

$$a(y - y^n, y - y^n) \leq a(y - v^n, y - v^n) \forall v^n \in S^n \leq C h^2 \|y''\|^2$$

5 РЕШЕНИЕ

5.1 ИНСТРУМЕНТЫ

Для решения использовался язык Python и библиотеки matplotlib для построения графиков и numpy для более быстрой и удобной работы с большими объёмами численной информации.

5.2 ПРОВЕРКА КОРРЕКТНОСТИ И СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ

Для проверки корректности решения и определения скорости сходимости исследуем следующую задачу:

$$u_t(x, y, t) = u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t), t > 0, (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

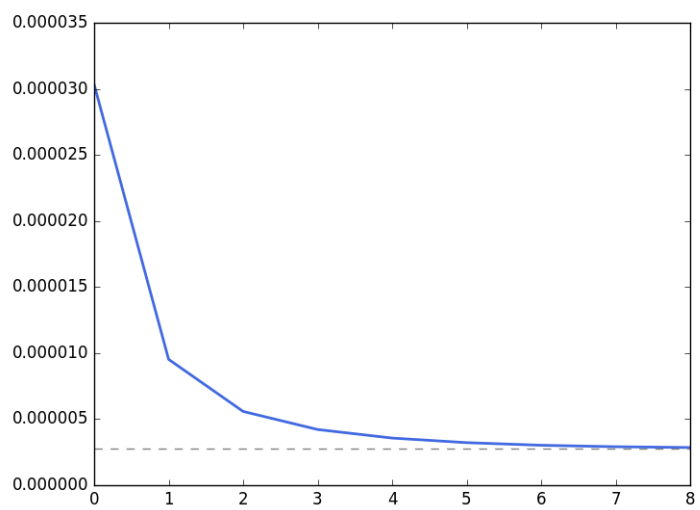
$$u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = 0, u(x, 0, t) = 0, u(x, 1, t) = 0$$

$$u(x, y, 0) = x(1 - x)y(1 - y)$$

Аналитическое решение имеет вид (выкладки с его получением достаточно объёмны и в отчёте не приводятся):

$$u(x, y, t) = \frac{16}{\pi^6} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{((-1)^n - 1)((-1)^m - 1)e^{\lambda_{n,m}t}}{n^3 m^3} \sin \pi n x \sin \pi m y$$

где $\lambda_{n,m} = -\pi^2(n^2 + m^2)$. Зафиксируем момент времени $t = 1$ и сетку. Затем будем мельчить шаг по времени и смотреть, как ведёт себя норма разности численного и аналитического решений по отношению к шагу по времени. Из графика хорошо видно, что значение отношения выходит на константу - первый порядок сходимости.



5.3 ИЛЛЮСТРАЦИЯ РЕШЕНИЯ

