

ФКН ВШЭ, 3 курс, 3 модуль

Задание 1. Основы теории случайных процессов

**Вероятностные модели и статистика случайных процессов,
весна 2017**

Время выдачи задания: 23 января (понедельник).

Срок сдачи: **5 февраля (воскресенье), 23:59.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x.

Правила сдачи

Инструкция по отправке:

1. Домашнее задание необходимо отправить до дедлайна на почту hse.cs.stochastics@gmail.com.
2. В письме укажите тему «[ФКН ССП17] Задание 1, Фамилия Имя».
3. Решения задач следует присылать единым файлом формата .pdf, набранным в L^AT_EX. Допускается отправка последней задачи в виде отдельной ipython-тетрадки.

Оценивание и штрафы:

1. **Каждая из задач имеет стоимость 2 балла**, при этом за задачу можно получить 0, 1 или 2 балла. Максимально допустимая оценка за работу – 10 баллов. Баллы, набранные сверх максимальной оценки, считаются бонусными и влияют на освобождение от задач на экзамене.

2. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.
3. Задание выполняется самостоятельно. «Похожие» решения считаются плагиатом и все задействованные студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов (подробнее о плагиате см. на странице курса). Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце Вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

Необходимые теоретические сведения

1. Ковариационной функцией $R_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ называется неслучайная функция

$$R_X(t_1, t_2) = \text{cov}(X_{t_1} - \mathbb{E} X_{t_1})(X_{t_2} - \mathbb{E} X_{t_2}).$$

Корреляционной функцией $r_X(t_1, t_2)$ случайного процесса X называется неслучайная функция

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{V X_{t_1} V X_{t_2}}},$$

где $V X_t = \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^2$ – функция дисперсии случайного процесса X . Взаимной ковариационной функцией $R_{XY}(t_1, t_2)$ пары случайных процессов $X = (X_t)_{t \geq 0}$ и $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$ называется неслучайная функция

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \text{cov}(X_{t_1} - \mathbb{E} X_{t_1})(Y_{t_2} - \mathbb{E} Y_{t_2}).$$

Взаимная корреляционная функция $r_{XY}(t_1, t_2)$ определяется аналогично равенству для $r_X(t_1, t_2)$ выше.

2. Случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых t_0, t_1, \dots, t_n , таких, что $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ случайные величины $X_1 - X_0, \dots, X_n - X_{n-1}$ независимы в совокупности.

3. Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$ имеет нормальное распределение.

4. Процесс $W = (W_t)_{t \geq 0}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется винеровским (или броуновским движением), если

- $W_0 = 0$ \mathbb{P} -п.н.,
- W_t имеет независимые приращения $\forall t$,
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall t > s \geq 0$.

Вариант 1

1. Доказать, что данная функция может или не может являться ковариационной функцией случайного процесса:

(a) $R_1(t, s) = \min\{t, s\} - ts,$

(b) $R_2(t, s) = \min\{t, s\} - t(s + 1).$

2. Заданы случайные величины v_1, v_2, u_1, u_2 такие, что $E v_i = E u_i = 0$, $E v_i^2 = 1$, $E u_i^2 = 4$, $i = 1, 2$, а нормированная корреляционная матрица системы (v_1, v_2, u_1, u_2) равна

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для случайных процессов

$$X_t = v_1 \cos \omega_1 t + v_2 \sin \omega_1 t,$$

$$Y_t = u_1 \cos \omega_2 t + u_2 \sin \omega_2 t$$

найти взаимные корреляционные функции $r_{XY}(t_1, t_2) = \text{corr}(X_{t_1}, Y_{t_2})$ и $r_{YX}(t_1, t_2) = \text{corr}(Y_{t_1}, X_{t_2})$ и вычислить их значения при $t_1 = 0, t_2 = 1$.

3. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ – случайный вектор. Докажите эквивалентность следующих утверждений (в обе стороны):

- (a) характеристическая функция вектора X допускает представление

$$\varphi_X(\mathbf{u}) = \exp \left\{ i \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^\top \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{u} \right\},$$

где $\boldsymbol{\mu}$ – неслучайный вектор из \mathbb{R}^n , а $\boldsymbol{\Sigma}$ – симметричная неотрицательно определенная неслучайная матрица размера $n \times n$,

(b) вектор X допускает представление

$$X = \mu + AZ,$$

где μ – неслучайный вектор из \mathbb{R}^n , A – неслучайная матрица размера $n \times n$, а $Z \in \mathbb{R}^n$ – вектор, все координаты которого независимы в совокупности и имеют нормальное $\mathcal{N}(0, 1)$ распределение.

4. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы также винеровские:

$$(a) \quad B_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tB_{1/t}, & t > 0. \end{cases}$$

$$(b) \quad B_t^{(2)} = \sqrt{c}B_{t/c}, \quad c = \text{const} > 0.$$

5. ξ_1, \dots, ξ_n – независимые одинаково распределенные показательные случайные величины. Подсчитать (по индукции) плотность распределения суммы $\xi_1 + \dots + \xi_n$.

6. Пусть $N = (N_t)_{t \geq 0}$ – пуассоновский случайный процесс с параметром λ . Доказать, что случайный процесс $M = (M_t)_{t \geq 0}$, задаваемый соотношением $M_t = N_{t+1} - N_t$, является стационарным второго порядка процессом, т.е. что его математическое ожидание $E M_t$ не зависит от времени, а его ковариационная функция $R_M(t_1, t_2)$ зависит от t_1 и t_2 через их разность $\tau = t_1 - t_2$.

7. Стандартное фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{0 \leq t \leq T}$ на $[0, T]$ с параметром Хёрста $H \in (0, 1)$ – это гауссовский процесс с непрерывными траекториями такой, что

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^0 [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB_s + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ – гамма-функция Эйлера. Смоделируйте реализации фрактального броуновского движения с помощью вычисления стохастического интеграла по броуновскому движению. В качестве результата приведите:

- (a) разностную схему, использовавшуюся для моделирования,
- (b) исходный код, использовавшийся для моделирования,
- (c) примеры траекторий фрактального броуновского движения для различных значений параметра Херста $H \in (0, 1)$.

Вариант 2

1. Доказать положительную определенность следующих функций:

$$(a) \quad R_1(t, s) = \begin{cases} 1 - |t - s|, & |t - s| < 1, \\ 0, & |t - s| \geq 1. \end{cases},$$

$$(b) \quad R_2(t, s) = e^{-|t-s|}.$$

2. Случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ имеет вид

$$X_t = b \sin(\gamma t + \varphi),$$

где b, γ – известные постоянные, а φ – случайная величина с плотностью $f_\varphi(x)$. Исследовать процесс X на стационарность в узком и широком смысле, а также на эргодичность по математическому ожиданию, если

$$(a) \quad f_\varphi(x) = \cos(x) \mathbb{1}_{[0, \frac{\pi}{2}]}(x),$$

$$(b) \quad f_\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(x).$$

3. Доказать эквивалентность следующих двух определений винеровского процесса (доказательство провести в обе стороны):

(a) винеровский процесс – это гауссовский процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$ с математическим ожиданием $E B_t \equiv m(t) = 0$ и ковариационной функцией $E(B_s - E B_s)(B_t - E B_t) \equiv R(s, t) = \min\{s, t\}$,

(b) винеровский процесс – это случайный процесс $B = (B_t)_{t \geq 0}$ такой, что

- $B_0 = 0$ п.н.,
- B – процесс с независимыми приращениями,
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall t > s \geq 0$.

4. Пусть $W = (W_t)_{t \geq 0}$ – винеровский процесс на $[0, t]$. Подсчитать

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}|,$$

где разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ измельчается с ростом n так, что $\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0$, а сходимость понимается в смысле среднего квадратического.

5. Пусть $N = (N_t)_{t \geq 0}$ – неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$. Доказать, что

$$(a) \text{ функция } \Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \text{ имеет обратную,}$$

$$(b) \text{ процесс } M_t = N_{\Lambda^{-1}(t)} \text{ является однородным пуассоновским процессом.}$$

6. Пользовательские запросы поступают на веб-сервис в соответствии с однородным пуассоновским потоком $N = (N_t)_{t \geq 0}$ с интенсивностью λ . Сервис оснащен балансировщиком нагрузки, разделяющим запросы на r подпотоков $\{X^i\}_{i=1}^r$ ($N_t = \sum_{i=1}^r X_t^i$) таким образом, что каждый запрос из N_t относится к подпотоку X_t^i с вероятностью $p_i, i = 1, \dots, r$ (независимо от других событий). Определить тип и параметры случайных процессов $\{X^i\}_{i=1}^r$.

7. Составной пуассоновский поток событий (или пакетный пуассоновский процесс) – это случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ со скачками в моменты скачков пуассоновского потока с заданной интенсивностью λ и являющихся случайными величинами с заданным распределением G , не зависящими от пуассоновского потока. Он может быть записан в виде:

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i,$$

где X_t – значение составного потока в момент t , N_t – значение простого потока в момент t (число появлений пакетов), и $D_i, i \geq 1$ –

последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение G . Смоделируйте реализации этого процесса, если

- $\lambda = \lambda(t) = 2 + \sin(t - 11\pi/16) + \sin(2t - 3\pi/8)$, и
- $G(x)$ – распределение Пуассона с параметром $\rho > 0$.

В качестве результата приведите:

- (a) исходный код, использовавшийся для моделирования,
- (b) примеры траекторий составного пуассоновского потока для различных значений параметра ρ .