

Домашнее задание I. Теория случайных процессов

Вероятностные модели и статистика случайных процессов

January 19, 2017

Дедлайн: 2 февраля, 23:59

Указания: Домашнее задание необходимо отправить до дедлайна на почту `hse.cs.stochastics@gmail.com` с темой "Домашнее задание 1. ФИО студента" в едином файле формата .pdf. Дедлайн жесткий и отправки после дедлайна оцениваться не будут.

Напомним, что вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k Y_k$ имеет нормальное распределение.

Напомним определение Винеровского процесса: процесс W_t называется Винеровским (или броуновским движением), если

- $W_0 = 0$ \mathbb{P} - п.н.
- W_t имеет независимые приращения $\forall t$.
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad \forall t > s \geq 0$.

1 Гауссовские случайные процессы

Задача 1.1. Какие из следующих ковариационных функций валидны (могут быть ковариационной функцией случайного процесса)? Ответ обосновать.

$$R_1(t, s) = \min\{t, s\} - ts \quad R_2(t, s) = \min\{t, s\} - t(s + 1) \quad (1)$$

Задача 1.2. Докажите эквивалентность следующих утверждений:

(i) Характеристическая функция вектора X выглядит таким образом

$$\varphi_X(\mathbf{u}) = \exp \left\{ i \mathbf{u}^T \cdot \mu - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right\}, \quad (2)$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$ и Σ симметричная неотрицательно определённая квадратная матрица размера $n \times n$.

(ii) Вектор X представим в виде

$$X = AX^\circ + \mu, \quad (3)$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, а $X^\circ \in \mathbb{R}^n$ — стандартный нормальный вектор, т.е. все компоненты этого вектора независимы в совокупности и распределены по закону $\mathcal{N}(0, 1)$.

Задача 1.3. Рассмотрим следующую вариацию определения Винеровского процесса.

Винеровский процесс (броуновское движение) - это гауссовский процесс W_t с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и ковариационной функцией $R(s, t) = \min\{s, t\}$.

Докажите эквивалентность этих двух определений.

Задача 1.4. Найдите

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2 \quad (4)$$

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |W_{t_i} - W_{t_{i-1}}| \quad (5)$$

для Винеровского процесса на отрезке $[0, t]$:

Задача 1.5. Пусть N_t - неоднородный процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda(t)$. Докажите, что

- функция $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds$ имеет обратную.
- процесс $M_t = N_{\Lambda^{-1}(t)}$ является однородным Пуассоновским процессом.

2 Эксперимент

Задача 1.6. Написать программу, которая генерирует реализации фрактального броуновского движения, с помощью вычисления стохастического интеграла по броуновскому движению