Семинар. Пуассоновский процесс

27 января 2017 г.

1 Определения

(a) **Процесс восстановления.**

Процессом восстановления называется случайный процесс S_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ задаваемый следующим образом:

$$S_0 = 0, \quad S_n = S_{n-1} + \xi_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots$ последовательность независимых, одинаково распределённых, п.н. положительных случайных величин.

(b) **Считающий процесс.**

По любому процессу восстановления можно определить считающий процесс N_t:

$$N_t \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_k \{S_k \leq t\} \tag{2}$$

или, что то же самое

$$N_t = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{S_k \leq t} = \#\{n \in \mathbb{N} : S_n \leq t\} \tag{3}$$

(c) **Процесс Пуассона.**

Целочисленный процесс N_t, $t \geq 0$ называется процессом Пуассона с интенсивностью λ, если

- $N_0 = 0$ п.н.
- N_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины $N_{t_1} - Nt_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ являются независимыми.
- N_t имеет стационарные приращения, т.е. для любых моментов времени t_1, t_2 и любого $h > 0$ выполнено

$$N_{t_2+h} - N_{t_1+h} \stackrel{d}{=} N_{t_2} - N_{t_1} \tag{4}$$

- Для любых моментов времени t, s

$$N_t - N_s \sim \text{Poiss}(\lambda(t-s)) \tag{5}$$

Замечание. Свойство про стационарность является избыточным, его можно получить используя последнее свойство.

(d) **Свойство отсутсвия памяти.**

Говорят, что положительная случайная величина X обладает свойством отсутствия памяти (memoryless property, absence of memory), если для любых положительных u, v верно

$$\mathbb{P}(X > u + v) = \mathbb{P}(X > u) \cdot \mathbb{P}(X > v). \tag{6}$$

(e) **Неоднородный процесс Пуассона.**

Неоднородный процесс Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t)$ — это целочисленный неубывающий процесс N_t, $t \geq 0$ (“неубывающий процесс” означает, что $Nt + h - Nt \geq 0$, $\forall\, t \geq 0, h > 0$), такой что

- $N_0 = 0$ п.н.
- N_t имеет независимые приращения, т.е. для любого набора моментов времени $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ случайные величины $N_{t_1} - Nt_0, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ являются независимыми.
- (вместо стационарности)

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 0)}{h} = \lambda(t). \tag{7}$$

- ("прыжки" только на 1)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t \geq 2}{\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1)} = 0, \qquad \mathbb{P}(N_t > 0) \in (0, 1), \quad \forall t > 0 \tag{8}$$

2 Задачи

Задача 1

Покажите, то из явного вида распределения считающего процесса Пуассона следует, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \mathbb{P}(N_h = 0)}{h} = \lambda \tag{9}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h = 1)}{h} = \lambda \tag{10}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}(N_h \geq 2)}{h} = 0 \tag{11}$$

Задача 2

Пусть $\{N(t), t \in [0, +\infty]\}$ однородный процесс Пуассона с $\lambda = 0.5$. Найдите

(a) вероятность того, что в промежутке $(3; 5]$ процесс не "выстрелит", т.е.

$$\mathbb{P}(N_5 - N_3 = 0).$$

(b) веротяность того, что произойдет ровно одно события в промежутках $(0, 1]$, $(1, 2]$ и $(2017, 2018]$ одновременно.

Задача 3

Докажите, что случайная величина X обладает свойством отсутсвия памяти, iff $p(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{I}_{x>0}$ для некоторого $\lambda > 0$.

Задача 4

Счётчик Гейгера помещён в поток частиц, который моделируется неоднородным процессом Пуассона с функцией интенсивности $\lambda(t) = e^{t/2}$. Каждая частица записывается счётчиком с вероятностью $p = 2/3$. Докажите, что процесс X_t, представляющий собой суммарное количество частиц, записанных счётчиком за время t, является неоднородным процессом Пуассона с функцией интенсивности $\tilde{\lambda}(t) = p\lambda(t)$.