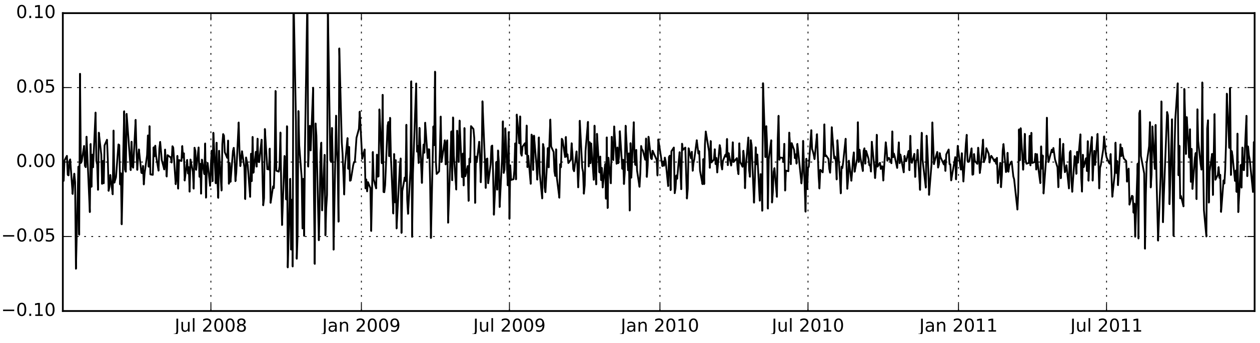
1. Опишите свойства временного ряда, изображенного на картинке, в терминах
   (a) наличия тренда,
   (b) наличия сезонности,
   (c) стационарности 2-го порядка (постоянства моментов),
   (d) гомоскедастичности.

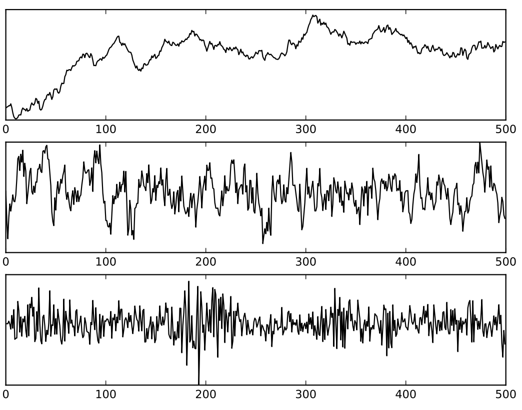


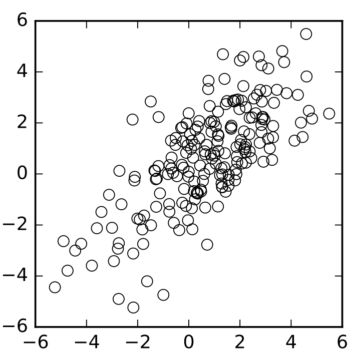
2. Следующий код на языке `python` генерирует некоторый случайный процесс:

```
import numpy as np
eps = np.random.normal(size=1000)
series = np.zeros_like(eps)
for i in xrange(len(eps) - 1):
    series[i + 1] = 0.7 * series[i] + eps[i + 1]
```

   Объясните, какой случайный процесс моделируется. Запишите описывающие его уравнения.

3. Рисунок 2 (левый) показывает смоделированные траектории трех случайных процессов.





   Какая из траекторий может относиться к стационарному процессу AR(1)? Обоснуйте ваш ответ.

4. Рисунок 3 (правый) получен по реализации смоделированного случайного процесса $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$, причем каждая точка представляет собой пару (X_{t-2}, X_t). Корреляция точек на рисунке равна 0.8. Ответить на вопросы:
   (a) Какая стохастическая модель могла использоваться для моделирования временного ряда? Обоснуйте ответ. (Подсказка: искомый процесс принадлежит к одному из типов $X_t = \varepsilon_t$; $X_t = \varepsilon_t + \beta\varepsilon_{t-1}$; $X_t = c + aX_{t-1} + \varepsilon_t$; $X_t = c + X_{t-1} + \varepsilon_t$; $X_t = c - X_{t-1} + \varepsilon_t$.)
   (b) Запишите уравнение модели, используя знание типа модели и автокорр. функции.
   (c) Как можно смоделировать такой процесс на компьютере? Напишите соответствующую программу.

5. Пусть случайный процесс $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ задан своей моделью $X_t = 3 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_t$, где $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\geqslant 0}$ – процесс белого шума, $\mathrm{E}\,\varepsilon_t = 0, \mathrm{E}\,\varepsilon_t^2 = 1$.

   (a) Запишите тип модели процесса X.

   (b) Объясните, почему модель процесса X является «условно-гауссовской», подсчитайте ее условные математическое ожидание и дисперсию. Это модель «условного математического ожидания» или «условной дисперсии»?

   (c) Предположим, что дано наблюдение $X_t = 2.5, X_{t-1} = 1.7$. Подсчитайте прогноз значения случайной величины X_{t+1}.

   (d) Предположим, что дано наблюдение $X_t = 2.5, X_{t-1} = 1.7$. Подсчитайте оценку дисперсии процесса в момент $t+1$ (оценку дисперсии случайной величины X_{t+1}).

6. Какие из указанных ниже процессов являются слабо стационарными? (Процесс $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\geqslant 0}$ – белый шум.)

   (a) $X_t = 1.6 + X_{t-1} + \varepsilon_t$;

   (b) $X_t = 0.6 + X_{t-1} + \varepsilon_t$;

   (c) $X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_t$;

   (d) $X_t = 0.8\varepsilon_t + 0.6\varepsilon_{t-1}$;

   (e) $X_t = \varepsilon_t\sqrt{2 + 2X_{t-1}^2}$.

7. Рассмотрим стохастическую модель $X_t = \varepsilon_t\sqrt{\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\geqslant 0}$ – белый шум, $\mathrm{E}\,\varepsilon_t = 0, \mathrm{E}\,\varepsilon_t^2 = 1$.

   (a) Запишите тип модели процесса X.

   (b) Возможно ли осуществить выбор постоянных α_0 и α_1 таким образом, чтобы эта модель хорошо описывала гетероскедастичный временной ряд? Обоснуйте ваш ответ.

8. Доходность акций часто оценивают в процентах согласно следующей формуле. Если S_n – цена закрытия акции в день $n, n \geqslant 1$, то ее доходность равна величине $X_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n}$ (отношение прироста цены закрытия за текущий день к цене предыдущего дня, daily returns in percent).

   GARCH-модель была подогнана к временному ряду дневной доходности акций. Вывод оценивающего алгоритма, предполагающего гауссовский белый шум, представлен ниже:

```
    Estimate  Std. Error    t value   Pr(>|t|)
a0  0.027832    0.006282       4.43   9.41e-06 ***
a1  0.009064    0.008813      16.67    < 2e-16 ***
b1  0.830477    0.008813      94.24    < 2e-16 ***
```

   Средняя доходность равна 0.0492.

   (a) Запишите уравнения модели, определяющие процесс доходности акций.

   (b) Вычислите долгосрочную дисперсию доходности указанной модели.

   (c) Предположим, сегодняшняя доходность равна +1.5%; прогноз дисперсии на сегодня равен $\widehat{\sigma}_t^2 = 1.1619$. Подсчитайте распределение завтрашней доходности.

   (d) Истинная завтрашняя доходность оказалась равной +4.6%. Что можно сказать о найденном в (c) распределении доходности?

   (Подсказки: $X_t = \sigma_t\varepsilon_t$; $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1\sigma_{t-1}^2$; $\mathrm{E}\,X_t = 0$; $\mathrm{E}[X_t \mid X_{t-1}] = 0$; $\mathrm{E}\,X_t^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1-\beta_1}$; $\mathrm{E}[X_t^2 \mid X_{t-1}^2] = \sigma_{t-1}^2$.)