ФКН ВШЭ, 3 курс, 3 модуль

Материалы к коллоквиуму

Вероятностные модели и статистика случайных процессов, весна 2017

Теоретический минимум

1. Сформулируйте определение случайного процесса как случайной функции.
2. Сформулируйте определение сечения случайного процесса.
3. Сформулируйте определение траектории случайного процесса.
4. Сформулируйте определение случайного процесса с непрерывным временем.
5. Сформулируйте определение случайного процесса с дискретным временем.
6. Сформулируйте определение случайного поля.
7. Сформулируйте определение векторнозначного случайного процесса.
8. Приведите пример случайного процесса с непрерывным временем.
9. Приведите пример случайного процесса с дискретным временем.
10. Приведите пример случайного поля.
11. Приведите пример векторнозначного случайного процесса.
12. Сформулируйте определение семейства конечномерных распределений случайного процесса.
13. Приведите пример функции, задающей конечномерные распределения случайного процесса.
14. Сформулируйте определение математического ожидания случайного процесса.
15. Сформулируйте определение дисперсии случайного процесса.
16. Сформулируйте определение ковариационной функции случайного процесса.
17. Сформулируйте определение непрерывного в среднем квадратичном случайного процесса.
18. Сформулируйте определение случайного процесса с непрерывными траекториями.
19. Сформулируйте определение стохастически непрерывного случайного процесса.
20. Сформулируйте определение гауссовской случайной величины.
21. Сформулируйте определение гауссовского случайного вектора.
22. Приведите пример некоррелированных, но зависимых случайных величин.

23. Запишите выражение для характеристической функции гауссовской случайной величины.
24. Сформулируйте необходимые и достаточные условия гауссовости случайного вектора.
25. Сформулируйте основное утверждение теоремы о нормальной корреляции в случае пары гауссовских случайных величин.
26. Сформулируйте основное утверждение теоремы о нормальной корреляции в случае пары гауссовских случайных векторов.
27. Сформулируйте определение винеровского процесса.
28. Сформулируйте определение гауссовского процесса.
29. Приведите пример гауссовского процесса.
30. Сформулируйте определение процесса Орнштейна-Уленбека.
31. Сформулируйте определение последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.
32. Сформулируйте определение сильно стационарного случайного процесса.
33. Сформулируйте определение ковариационно стационарного случайного процесса.
34. Приведите пример сильно стационарного случайного процесса.
35. Приведите пример ковариационно стационарного случайного процесса.
36. Сформулируйте свойства ковариационной функции слабо стационарного случайного процесса.
37. Сформулируйте определение случайного процесса, эргодичного в среднем квадратичном по математическому ожиданию.
38. Приведите пример процесса, являющегося эргодичным по математическому ожиданию в среднем квадратичном.
39. Приведите пример процесса, являющегося сильно стационарным, но не эргодичным по математическому ожиданию в среднем квадратичном.
40. Сформулируйте необходимые и достаточные условия эргодичности случайного процесса в среднем по математическому ожиданию.
41. Сформулируйте необходимые и достаточные условия эргодичности слабо стационарного случайного процесса в среднем по математическому ожиданию.
42. Сформулируйте определение процесса восстановления.
43. Сформулируйте определение пуассоновского процесса.
44. Сформулируйте определение процесса.

45. Запишите выражение для математического ожидания однородного пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda > 0$.

46. Запишите выражение для распределения сечения однородного пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda > 0$ в момент t.

47. Сформулируйте основные свойства приращений пуассоновского процесса.

48. Сформулируйте определение приращений случайного процесса.

49. Сформулируйте определение процесса с независимыми приращениями.

50. Сформулируйте определение процесса со стационарными приращениями.

51. Сформулируйте определение дискретной марковской цепи.

52. Сформулируйте определение марковского свойства.

53. Сформулируйте теорему о вероятности последовательности состояний дискретной марковской цепи.

54. Сформулируйте теорему о вероятности перехода однородной дискретной марковской цепи в заданное состояние за n шагов.

55. Дайте определения существенного и несущественного состояний марковской цепи.

56. Дайте определения возвратного и невозвратного состояний марковской цепи.

57. Дайте определение сообщающихся состояний марковской цепи.

58. Дайте определение неприводимой дискретной марковской цепи.

59. Дайте определения периодического и непериодического состояний марковской цепи.

60. Сформулируйте утверждение о разбиении множества состояний дискретной марковской цепи на классы сообщающихся состояний. Какое отношение существует между состояниями внутри каждого из таких классов?

61. Приведите пример дискретной марковской цепи.

62. Приведите пример дискретной марковской цепи с периодическими состояниями.

63. Приведите пример дискретной марковской цепи с невозвратными состояниями.

64. Сформулируйте определение дискретного случайного блуждания с дискретным временем.

65. Сформулируйте условия возвратности некоторого состояния дискретной марковской цепи, используя матрицу перехода за один шаг.

66. Сформулируйте условия возвратности некоторого состояния дискретной марковской цепи, используя вероятности вернуться в это состояние за конечное число шагов.

67. Сформулируйте условия возвратности некоторого состояния дискретной марковской цепи, используя вероятности вернуться в это состояние за конечное число шагов.

68. Сформулируйте определение эргодической марковской цепи.

69. Сформулируйте определение стационарного распределения вероятностей дискретной марковской цепи.

70. Сформулируйте первую эргодическую теорему для дискретной марковской цепи.

71. Запишите выражение для авторегрессионной модели порядка p.

72. Запишите выражение для модели скользящего среднего порядка q.

73. Запишите выражение для смешанной модели авторегрессии и скользящего среднего порядков (p, q).

74. Запишите выражение для смешанной модели интегральной авторегрессии и скользящего среднего порядков (p, d, q).

75. Запишите выражение для авторегрессионной модели условной неоднородности порядка (p).

76. Запишите выражение для обобщенной авторегрессионной модели условной неоднородности порядков (p, q).

Теоретический максимум

1. Сформулировать определение семейства конечномерных распределений случайного процесса. Сформулировать теорему А. Н. Колмогорова о существовании семействе конечномерных распределений случайного процесса. С использованием теоремы А. Н. Колмогорова продемонстрировать невозможность существования непрерывного случайного процесса с сечениями, являющимися последовательностью независимых случайных величин.

2. Сформулировать определение непрерывного в среднем квадратичном случайного процесса. Сформулировать и доказать необходимые и достаточные условия непрерывности случайного процесса в среднем квадратичном.

3. Сформулировать определение стохастически непрерывного случайного процесса. С использованием определения стохастически непрерывного процесса доказать, что свойства стохастической непрерывности и независимости сечений случайного процесса (при близких значениях времени) являются несовместными.

4. Сформулировать и доказать утверждение о необходимых и достаточных условиях гауссовости случайного вектора.

5. Сформулировать и доказать теорему о нормальной корреляции в случае пары гауссовских случайных величин.

6. Сформулировать и доказать теорему о нормальной корреляции в случае пары гауссовских случайных векторов.

7. Сформулировать определения и свойства винеровского и гауссовского процессов. Привести примеры гауссовских процессов. Описать полный набор параметров, однозначно определяющих гауссовский процесс, обосновать это описание.

8. Сформулировать определение процесса Орнштейна-Уленбека. Получить явный аналитический вид системы конечномерных распределений процесса Орнштейна-Уленбека.

9. Перечислить классы стационарности случайных процессов, описать связь между ними. Привести примеры процессов, относящихся к каждому классу.

10. Сформулировать определения процесса восстановления и пуассовноского потока событий. Сформулировать и доказать свойства (распределение, матожидание и дисперсию) пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda > 0$ в момент t.

11. Сформулировать свойства приращений пуассоновского процесса. Получить явный аналитический вид системы конечномерных распределений пуассоновского процесса.

12. Сформулировать определения марковского свойства и дискретной марковской цепи. Сформулировать и доказать теорему о вероятности последовательности состояний дискретной марковской цепи.

13. Сформулировать определения марковского свойства и дискретной марковской цепи. Сформулировать и доказать теорему о вероятности перехода за n шагов.

14. Сформулировать классификацию состояний дискретной марковской цепи.

15. Сформулировать определение дискретного случайного блуждания с дискретным временем. Описать частные типы этого процесса (симметричный, с отражением, с поглощением), описать типы его состояний. Сформулировать и доказать условия возвратности либо невозвратности случайного блуждания.

16. Сформулировать определения возвратного и невозвратного состояний дискретной марковской цепи. Сформулировать и доказать утверждение о том, что возвратность или невозвратность состояния дискретной марковской цепи следует из равенства или неравенства бесконечности величины $\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ii}^{(n)}$, соответственно.

17. Сформулировать определения возвратного и невозвратного состояний дискретной марковской цепи. Сформулировать и доказать утверждение о том, что возвратность или невозвратность состояния дискретной марковской цепи равносильна тому, что вероятность f_i события $\{\exists n \in \mathbb{N} : X_n = i\}$, где n – некоторый момент времени, i – рассматриваемое состояние, равняется либо меньше единицы, соответственно.

18. Сформулировать определения возвратного, нулевого и периодического состояний дискретной марковской цепи. Сформулировать и доказать утверждение о том, что (1) если одно из состояний цепи нулевое, то и все остальные нулевые, (2) если одно из состояний возвратное, то и все остальные возвратные, (3) если одно из состояний периодическое с периодом d, то и все остальные периодические с периодом d.

19. Вывести формулу средней длительности пребывания дискретной марковской цепи в заданном состоянии.

20. Описать вычислительную разностную схему, позволяющую сгенерировать реализацию гауссовского случайного процесса с помощью стохастического интегрирования по броуновскому движению (на примере процесса Орнштейна-Уленбека).

21. Описать вычислительную схему, позволяющую сгенерировать реализацию гауссовского случайного процесса с помощью разложения Холецкого (на примере процесса фрактального броуновского движения).

22. Описать вычислительную схему, позволяющую сгенерировать реализацию однородного пуассоновского случайного процесса.

23. Описать вычислительную схему, позволяющую сгенерировать реализацию неоднородного пуассоновского случайного процесса.

Задачи

1. Подсчитайте математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$, задаваемого соотношением
$$Y_t = a(t)X_t + b(t),$$
где $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ – случайный процесс с математическим ожиданием $m(t) = \mathrm{E}\, X_t$, дисперсией $\sigma^2(t) = \mathrm{E}[X_t - \mathrm{E}\, X_t]^2$ и ковариационной функцией $R(t_1, t_2) = \mathrm{E}[(X_{t_1} - \mathrm{E}\, X_{t_1})(X_{t_2} - \mathrm{E}\, X_{t_2})]$.

2. Доказать, что пуассоновский поток событий является стохастически непрерывным случайным процессом.

3. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\intercal$ – гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\mathrm{E}\, \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\intercal$ и ковариационной матрицей
$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^\intercal] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$
Выписать явное аналитическое выражение для двумерной плотности распределения случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$.

4. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\intercal$ – гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\mathrm{E}\, \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\intercal$ и ковариационной матрицей
$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^\intercal] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$
Подсчитать явное аналитическое выражение для условной плотности $f_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)$ распределения случайного вектора ξ_2 при условии $\xi_1 = x_1$.

5. Пусть $N^1, N^2, \ldots, N^n$ – независимые пуассоновские потоки событий с интенсивностями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, соответственно. Определить тип и параметры процесса $N_t = \sum\limits_{i=1}^{n} N_t^i$.

6. Модель системы массового обслуживания, рассмотренная на лекции.