Домашнее задание I. Теория случайных процессов

Вероятностные модели и статистика случайных процессов

January 19, 2017

Напомним, что вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $Y \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Y_k$ имеет нормальное распределение.

Напомним определение Винеровского процесса: процесс W_t называется Винеровским (или броуновским движением), если

- $W_0 = 0$ $\mathbb{P}$- п.н.
- W_t имеет независимые приращения $\forall t$.
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ $\forall t > s \geq 0$.

1 Гауссовские случайные процессы

Задача 1.1. Существует ли случайный процесс, у которого ковариационная функция равна

$$R_1(t,s) = \min\{t,s\} - ts \qquad R_2(t,s) = \min\{t,s\} - t(s+1) \tag{1}$$

Задача 1.2. Докажите эквивалентность следующих утверждений:
(i) Характеристическая функция вектора X выглядит таким образом

$$\varphi_X(\mathbf{u}) = \exp\left\{ i\mathbf{u}^T \cdot \mu - \frac{1}{2}\mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right\}, \tag{2}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$ и Σ симметричная неотрицательно определённая квадратная матрица размера $n \times n$.
(ii) Вектор X представим в виде

$$X = AX^\circ + \mu, \tag{3}$$

где $\mu \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, а $X^\circ \in \mathbb{R}^n$ — стандартный нормальный вектор, т.е. все компоненты этого вектора независимы в совокупности и распределены по закону $\mathcal{N}(0,1)$.

Задача 1.3. Рассмотрим следующую вариацию определения Винеровского процесса.

Винеровский процесс (броуновское движение) - это гауссовский процесс W_t с математическим ожиданием $m(t) = 0$ и кова- риационной функцией $R(s,t) = min\{s,t\}$.

Докажите эквивалентность этих двух определений.

Задача 1.4. Найдите

(a) Квадратичную вариацию Винеровского процесса на отрезке $[0,t]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right)^2 \tag{4}$$

(b) Вариацию винеровского процесса на отрезке $[0,t]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left|W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\right| \tag{5}$$

Задача 1.5. Пусть N_t - неоднородный процесс Пуассона с интенсивностью $\lambda(t)$. Докажите, что

- функция $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$ имеет обратную.
- процесс $M_t = N_{\Lambda^{-1}(t)}$ является однородным Пуассоновским процессом.

2 Эксперимент

Задача 1.5. Напишите программу, которая генерирует реализации пуассоновского потока событий с заданной пользователем функцией" интенсивности, и продемонстрируйте результаты ее работы.