Семинар. Марковские цепи

27 января 2017 г.

1 Определения

(a) **Марковский процесс**

Процесс называется марковским, если

$$P(X_n = z|X_{n-1} = z_{n-1}, \ldots, X_1 = z_1) = P(X_n = z|X_{n-1} = z_{n-1})$$

Показываем пример марковской цепи.

(b) **Матрица перехода**

У нас есть D состояний, матрица переходов P размера $D \times D$. Обязательно

- $0 \leq P_{i,j} \leq 1$;
- $\sum_j P_{i,j} = 1$

(c) **Стационарное (эргодическое) распределение марковской цепи**

Стационарное распределение цепи — это такое распределение, вероятности (вектор вероятностей для состояний), которое не меняется с течением времени.

(d) **Эргодическая цепь**

Эргодические марковские цепи описываются сильно связным графом. Это означает, что в такой системе возможен переход из любого состояния S_i в любое состояние $S_j, (i, j = 1, 2, ..., n)$ за конечное число шагов. При увеличении n в эргодической цепи наступает стационарное состояние.

(e) **Эргодическая теорема**

При заданной функции $f(X_n)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f(X_j) = \sum_i \pi_i f(i) \ a.s.$$

(f) **Предельное распределение**

Распределение вероятиностей $\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2 \ldots]$ называется предельным распределением марковской цепи X_n если

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} P(X_n = j|X_0 = i) \ \forall i, i \in S$$

2 Задачи

Задача 1

Рассмотрим Марковскую Цепь, изображённую на рисунке 1. На ней присутствуют 2 реккурентных класса: $R1 = 1, 2$, $R2 = 5, 6, 7$. Пусть $X0 = 3$. Найти вероятность того, что цепь будет поглощена? в R_1

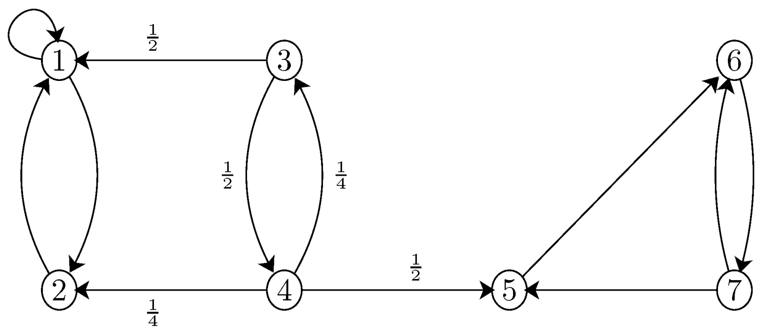

Рис. 1: Рисунок к задаче

Задача 2

Дана матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Найти P^n.

Задача 3

Игрок вступает в игру с капиталом 100\$. В каждом ходу игры игрок получает 1\$ с вероятностью p и теряет 1\$ с вероятностью $1 - p$. Игра продолжается, пока игрок не наберёт 300\$ или не проиграет все деньги. Какова вероятность, что игра когда-нибудь закончится? Какова вероятность, что игрок выйдет победителем?

Задача 4

Оперный певец должен исполнить длинную серию концертов. Имея артистичный темперамент, каждую ночь он с вероятностью 0.5 отправляется кутить. Если это случилось, то он перестаёт петь до тех пор, пока промоутер не подтвердит высокий статус певца. Для этого он шлёт каждый день цветы до тех пор, пока артист не вернётся. Цветы стоят $10000 \cdot x,\ x \in [0, 1]$. С помощью цветов он добивается примирения с вероятностью $\sqrt{x}$. Промоутер зарабатывает с каждого успешного концерта 7500\$. Сколько он жолжен потратить на цветы?

Задача 5

Рассмотрим марковскую цепь, показанную на рисунке 2. Положим $\frac{1}{2} < p < 1$. Есть ли у данной цепи предельное распределение? Найти

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = j | X_0 = i)$$

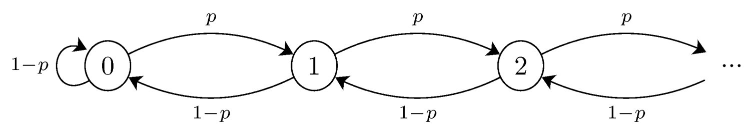

Рис. 2: Рисунок к задаче