ФКН ВШЭ, 3 курс, 3 модуль

Материалы к экзамену

Вероятностные модели и статистика случайных процессов, весна 2017

Теоретический минимум

1. Сформулируйте определение решающего правила в задаче различения двух гипотез.
2. Сформулируйте определения вероятностей ошибок первого и второго родов в задаче различения двух гипотез $\mathbb{H}_0$ и $\mathbb{H}_\infty$.
3. Сформулируйте определение решающего правила в задаче различения двух гипотез, минимизирующего сумму ошибок 1 и 2 родов.
4. Сформулируйте определение решающего правила в задаче различения двух гипотез, оптимального в условно-экстремальной постановке.
5. Сформулируйте определение рандомизированного решающего правила в задаче различения двух гипотез.
6. Сформулируйте определение рандомизированного решающего правила в задаче различения двух гипотез, оптимального в условно-экстремальной постановке.
7. Сформулируйте фундаментальную лемму Неймана-Пирсона.

Теоретический максимум

1. Перечислить классы стационарности случайных процессов, описать связь между ними. Привести примеры процессов, относящихся к каждому классу, но не относящихся к остальным.

2. Сформулировать и доказать свойства (распределение, матожидание и дисперсию) пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda > 0$ в момент t.

3. Сформулировать и доказать теорему о вероятности перехода дискретной марковской цепи из одного состояния в другое за n шагов.

4. Сформулировать и доказать условия возвратности либо невозвратности случайного блуждания.

5. Сформулировать и доказать утверждение о том, что (1) если одно из состояний цепи нулевое, то и все остальные нулевые, (2) если одно из состояний возвратное, то и все остальные возвратные, (3) если одно из состояний периодическое с периодом d, то и все остальные периодические с периодом d.

6. Описать вычислительную разностную схему, позволяющую сгенерировать реализацию гауссовского случайного процесса с помощью стохастического интегрирования по броуновскому движению (на примере процесса Орнштейна-Уленбека).

7. Описать вычислительную схему, позволяющую сгенерировать реализацию однородного пуассоновского случайного процесса.

8. Пусть $(\boldsymbol{S}_n, \boldsymbol{X}_n)$ – скрытая марковская модель с M состояниями и матрицей перехода за один шаг $P = (p_{ij}), i, j = 1, \ldots, M$, в которой условное распределение $p(X_i | S_i = s_i)$ является нормальным $\mathcal{N}(\mu_{s_i}, \sigma^2)$. Описать алгоритм сегментации временного ряда, в котором параметры $\boldsymbol{\theta} = (P, \boldsymbol{\mu}, \sigma)$ известны, и требуется по выборке $(x_1, \ldots, x_n)$ оценить значения $(s_1, \ldots, s_n)$ скрытых состояний $(S_1, \ldots, S_n)$ марковской цепи. Описать необходимые для решения заданной задачи предположения.

Задачи

1. Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\intercal}$ – гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^{\intercal}$ и ковариационной матрицей
$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^{\intercal}] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$
Подсчитать явное аналитическое выражение для условной плотности $f_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)$ распределения случайного вектора ξ_2 при условии $\xi_1 = x_1$.

2. Подсчитать корреляции процесса MA(2).

3. Подсчитать корреляции процесса MA(q).

4. Подсчитать ковариацию процесса ARMA(1,1) и ее предел при $n \to \infty$, где n – время.

5. Получить формулы для математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния динамической системы в фильтре Калмана.

6. Приведите пример некоррелированных, но зависимых случайных величин.

7. Дана матрица перехода
$$P = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$
Найти P^n.

8. Доказать, что функция $R(t,s) = \min\{t,s\} - ts$ может или не может являться ковариационной функцией случайного процесса.

9. Доказать, что функция $R(t,s) = \min\{t,s\} - t(s+1)$ может или не может являться ковариационной функцией случайного процесса.

10. Пусть $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ – пуассоновский случайный процесс с параметром λ. Доказать, что случайный процесс $M = (M_t)_{t\geqslant 0}$, задаваемый соотношением $M_t = N_{t+1} - N_t$, является стационарным второго порядка процессом, т.е. что его математическое ожидание $\mathrm{E}\,M_t$ не зависит от времени, а его ковариационная функция $R_M(t_1, t_2)$ зависит от t_1 и t_2 через их разность $\tau = t_1 - t_2$.

11. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathrm{P}(\xi_t = 1) = p, \mathrm{P}(\xi_t = -1) = 1 - p$. Является ли цепью Маркова последовательность $\eta_t = \xi_1\xi_2\ldots\xi_t$? Если да, найти ее вероятности перехода за один шаг.

12. Для модели GARCH(1, 1) временного ряда, задающейся уравнениями
$$X_n = \mu + h_n, \quad h_n = \sigma_n\varepsilon_n,$$
$$\sigma_n^2 = \alpha_0 + \alpha_1 h_{n-1}^2 + \beta_1\sigma_{n-1}^2,$$
где $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t=1,2,\ldots}$ – процесс гауссовского белого шума,
    (a) Записать формулу для подсчета σ_{n+1}^2;
    (b) Подсчитать распределение величины X_{n+1}.