# Критерий Неймана-Пирсона

Volkhonskiy Denis
dvolkhonskiy@gmail.com

Higher School of Economics

16 марта 2017 г.

## 1 Theory

### 1.1 Критерий Неймана-Пирсона

Критерий Неймана-Пирсона предписывает принимать гипотезу исходя из значения величины

$$L_n(X_1, \ldots, X_n) = \frac{p_1(X_1, \ldots, X_n)}{p_0(X_1, \ldots, X_n)},$$

называемой отношением правдоподобия. А именно, пусть $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ – рандомизированное решающее правило, значение которого равно вероятности принять гипотезу $\mathbb{H}_1$. Тогда найдутся такие константы $\lambda_a$ и $h_a$, что

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & L_n(X_1, \ldots, X_n) > h_a, \\ \lambda_a, & L_n(X_1, \ldots, X_n) = h_a, \\ 0, & L_n(X_1, \ldots, X_n) < h_a, \end{cases}$$

является наиболее мощным (т. е. с наименьшей вероятностью пропуска цели или ошибки 2 рода $\beta(\varphi)$) тестом среди тестов, вероятность ложной тревоги $\alpha(\varphi)$ (ошибки 1 рода) которых не выше $a$.

### 1.2 Последовательный анализ

Последовательный тест отношения правдоподобия (sequential probability ratio test, SPRT) заключается в вычислении логарифма отношения правдоподобия $Z_n = \log L_n$ (см. выше; в случае независимых наблюдений формулы упрощаются) и сравнении этой величины в каждый момент времени с пороговыми значениями $A < 0, B > 0$, выбранными исходя из заданных вероятностей ошибок 1 и 2 рода. Наблюдения останавливаются в первый момент времени выхода статистики $Z_n$ за «коридор» $(A, B)$:

$$\tau_{A,B} = \inf\{n \geqslant 1 : Z_n \notin (A, B)\}.$$

При этом в каждый момент времени принимается одно из трех решений:

$$\begin{cases} \text{если } Z_n \leqslant A & \Longrightarrow \text{ верна гипотеза } \mathbb{H}_0, \\ \text{если } Z_n \geqslant B & \Longrightarrow \text{ верна гипотеза } \mathbb{H}_1, \\ \text{если } Z_n \in (A, B) & \Longrightarrow \text{ продолжить наблюдения.} \end{cases}$$

Построить последовательный тест – значит указать *момент остановки измерений* $\tau$ и *решающее правило* $\varphi(\cdot)$.

## 2 Problem list

1. Доход от проданной газеты равен $A$ ( = розничная цена – оптовая), потери от непроданной равны $B$ (оптовая цена). Число покупателей, приходящих в киоск в день, моделируется сл.в. $X$ с функцией распределения $F(x)$. Для ее оценки можно использовать записи прошлых продаж. Сколько газет следует брать для продажи ?

2. Путем выборочного опроса проверяется гипотеза о том, что стиральным порошком фирмы $A$ пользуется 30% населения против гипотезы, что им пользуется только 20% населения. Оцените объем выборки, необходимый для проверки гипотезы с ошибкой первого рода не более 5% и второго рода не более 2.5%.

3. Пусть $X_1, ..., X_n$ – простая выборка из нормального распределения со средним $a$ и дисперсией 1. Для проверки основной гипотезы $a = 0$ против альтернативы $a = 1$ используется следующий критерий: основная гипотеза принимается, если $X_{(n)} = \max\limits_{i=1,\dots,n} X_i < 3$ и отвергается в противном случае. Найти вероятности ошибок первого и второго родов.

4. Пусть $X_1$ выборка объема 1. Основная гипотеза состоит в том, что элементы выборки распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$. Альтернатива – в том, что элементы выборки имеют показательное распределение с параметром 1. Построить наиболее мощный критерий с ошибкой первого рода, которая не больше заданного $\alpha$ для различения этих гипотез и вычислить его мощность.

5. Пусть $X_1, ..., X_n$ – простая выборка из нормального распределения с неизвестным средним $a$ и известной дисперсией $\sigma^2$. Построить наиболее мощный критерий с ошибкой первого рода, которая не больше заданного $\alpha$, для проверки гипотезы $H_\infty = \{a = a_\infty\}$ против альтернативы $H_0 = \{a = a_0\}$, где $a_\infty < a_0$. Будет ли этот критерий состоятельным?