



B-Tree



Nội dung

- Nhu cầu (Motivation)
- Định nghĩa (Definition)
- Các thao tác (Operations)
 - Searching
 - Insertion
 - Deletion
- Ứng dụng
- Bài tập



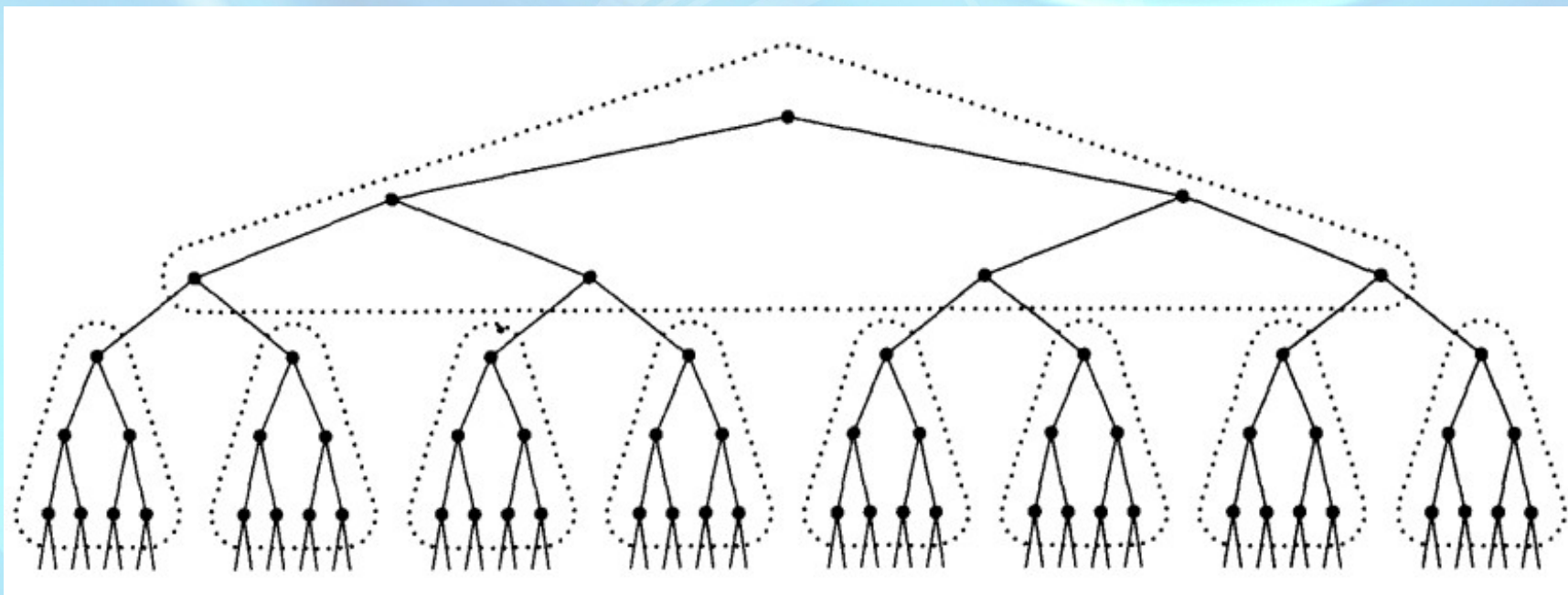
Motivation

- Độ phức tạp $< O(\log(n))$ cho 3 thao tác
 - Searching
 - Insertion
 - Deletion
- Tối ưu trên đĩa cứng 🗄 ?
- ➡ Các nhược điểm của BST?



Motivation

- Gom nhiều node thành một “super node”
- Knuth, D. E. (2007). The Art of Computer Programming: Sorting and searching. Vol. 3, p. 482





Definition

- BAYER, R., & MCCREIGHT, E. (1972). Organization and Maintenance of Large Ordered Indexes. Acta Informatica, 1, 173-189.
- Cho số tự nhiên $k > 0$, B-Trees bậc m với $m = 2 \cdot k + 1$ là một cây thỏa mãn các tính chất:
 - i. Tất cả node lá nằm trên cùng một mức
 - ii. Tất cả các node, trừ node gốc và node lá, có ***tối thiểu*** $k+1$ node con.
 - iii. Tất cả các node có ***tối đa*** m con
 - iv. Tất cả các node, trừ node gốc, có từ k cho đến $m - 1$ khóa (keys). Node gốc có từ 1 đến $m-1$ khóa.
 - v. Một node không phải lá và có n khóa thì phải có $n+1$ node con.



Definition

- **Bố trí khóa trong một node:**
 - Tất cả các khóa k_0, k_1, \dots, k_{n-1} trong node được sắp thứ tự tăng dần. Tương ứng với n khóa này là $n+1$ con trỏ p_0, p_1, \dots, p_n trỏ đến các node con.
- Gọi $K(p_i)$ là tập các khóa trong node trỏ tới bởi con trỏ p_i , B-Trees đảm bảo:

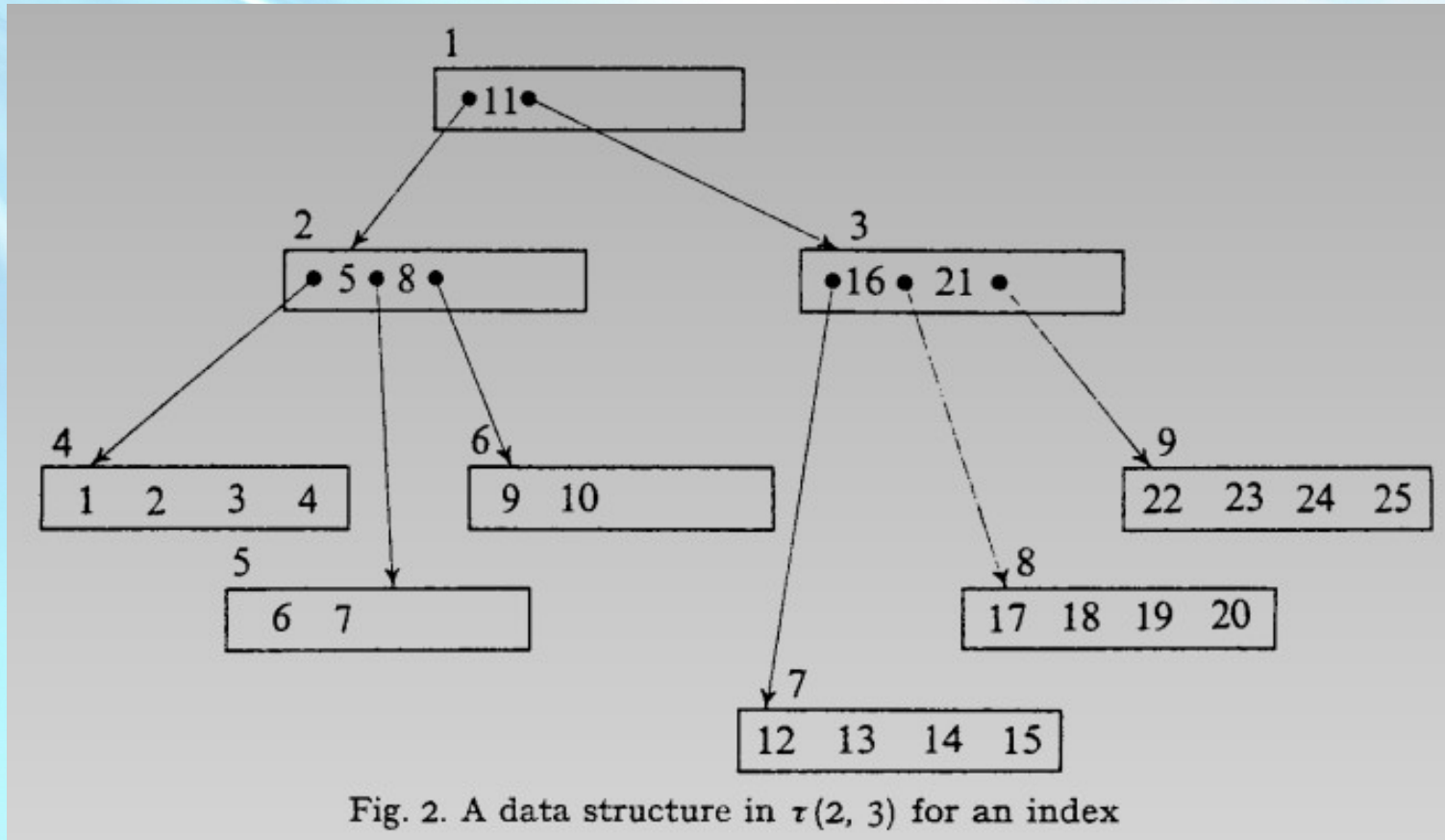
$$\forall y \in K(p_0), y < k_0$$

$$\forall y \in K(p_i), k_{i-1} < y < k_i; i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\forall y \in K(p_n), k_{n-1} < y$$



Definition



- B-Tree bậc 5, chiều cao là 3 (trong ví dụ của Bayer và McCreight)



Operations - class definition

- Cấu trúc dữ liệu cho B-Tree

```
class BTree_node{
    vector<my_data> keys;
    vector<BTree_node*> children;
    bool is_leaf(){ return children.empty(); }
    friend class BTree;
};

class BTree{
public:
    BTree(int initializing_m){
        if (initializing_m % 2 == 0)
        { initializing_m = initializing_m / 2 + 1; }
        this->_m = initializing_m;
        root = NULL;
    }
    bool empty(){
        return root == NULL;
    }
private:
    BTree_node *root;
    int _m;
};
```




Operations - searching

- INPUT
 - BTree_node *root
 - my_data x
- OUTPUT
 - true nếu tìm thấy khóa x trong B-Tree
 - false nếu không thấy
- Bước 2 cần sử dụng binary search
 - (1) Nếu root == NULL, return false
 - (2) Tìm i là số lượng khóa nhỏ hơn x
 - (3) Nếu i == keys.size() và keys[i] == x, return true;
 - (4) Nếu root là lá, return false
 - (5) Root = children[i], quay lại bước (2)



Operations - searching

- Minh họa cài đặt thao tác tìm kiếm

- Kết quả trả về của hàm?
- Hàm `std::lower_bound`

- Hàm này phức tạp hơn thuật toán mô tả!

```
pair<int, vector<BTree_node*>>
search(BTree_node*root, my_data key){
    vector<BTree_node*> path;
    auto p = root;
    while(p != NULL){
        path.push_back(p);
        auto i = lower_bound(p->keys.begin(), p->keys.end(), key);
        if (i != p->keys.end() && *i == key){
            return {i - p->keys.begin(),
                    path}; ///FOUND
        } else {
            if (p->is_leaf() == 0) break;
            p = p->children[i - p->keys.begin()];
        }
    }
    return {-1, path};
}
```



- Tìm giá trị 7

- Root = {11}, i = 0
- Root = {5,8}, i = 1
- Root = {6,7}, i = 1, khóa keys[1] có giá trị 7 == 7 ==> Tìm thấy

- Tìm giá trị 14.5

- Root = {11}, i = 1
- Root = {16,21}, i = 0
- Root = {12,13,14,15}, i = 3. Khóa keys[3] có giá trị 15 != 14.5 ==> Không tìm thấy

.....{11}.....
.....{5,8}.....{16,21}.....
{1,2,3,4} {6,7} {9,10} {12,13,14,15} {17,18,19,20} {22,25}

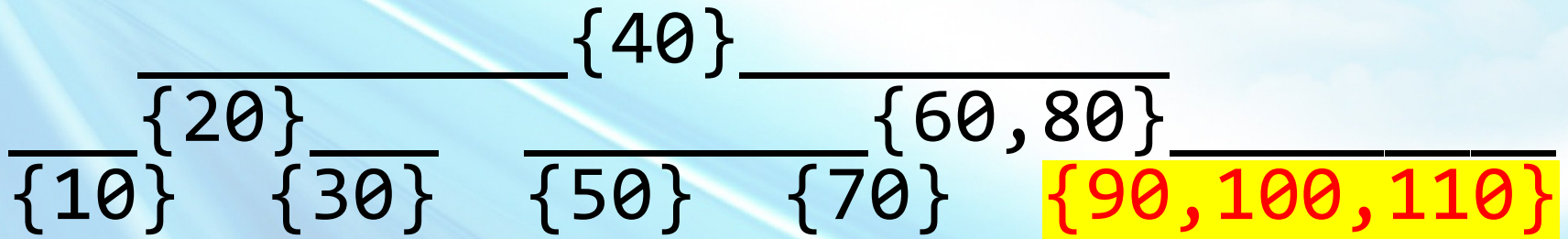


Operations - node splitting

- Cho node N có cha là P và hiện tại N có **nhiều hơn** $m-1$ khóa
 - **Di chuyển** khóa ở giữa của N lên P
 - Tạo node N' mới, **di chuyển** phân nửa số node và phân nửa số cây con còn lại sang N'
 - Thêm N' vào danh sách cây con của P
- Thao tác splitting có thể lan truyền (propagate) đến nhiều mức phía trên



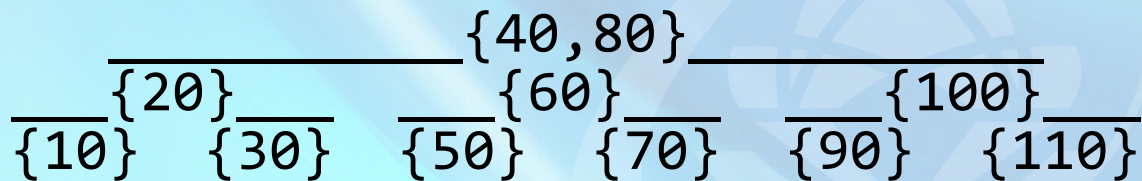
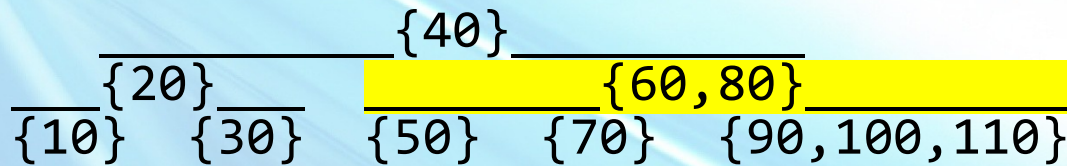
Operations - node splitting



- Cho B-Tree bậc 3, $k = 1$.
- Node in đỏ có 3 khóa



Operation – node splitting



- Sau khi split, 100 được đưa lên node cha.
- Node cha lại có quá nhiều khóa (và con)
- 80 được đưa lên node cha
- B-Tree trở về đúng định nghĩa
- Nếu ta split node gốc??



Operation - node splitting

- Hàm kiểm tra và split node i có cha là p

- Trường hợp hợp không cần split?
- Trường hợp split node gốc?

```
BTree_node* split(BTree_node *i, BTree_node*p){
    if(i->keys.size() < this->_m){//No need to split
        return NULL;
    }
    //Create new BTree_node
    auto n = new BTree_node;
    auto move_up = i->keys[i->keys.size()/2];
    move(i->keys.begin() + i->keys.size()/2 + 1, i->keys.end(),
        back_inserter(n->keys));
    if ( !i->is_leaf() ) {
        move(i->children.begin() + i->keys.size()/2+1, i->children.end(),
            back_inserter(n->children));
    }
    if (!i->is_leaf()) i->children.resize(i->keys.size()/2+1);
    i->keys.resize(i->keys.size()/2);
    if (p == NULL){// if i has no parent
        p = new BTree_node;
        p->children.emplace_back(i);
    }
    int ip = lower_bound(p->keys.begin(), p->keys.end(), move_up) - p->keys.begin();
    p->keys.insert(p->keys.begin() + ip, move_up);
    p->children.insert(p->children.begin() + ip + 1, n);
    return p;
}
```



Operation - node splitting

- INPUT:

- Đường đi từ gốc đến một node

- TASK:

- Tiến hành split node đó và lan truyền ngược nếu cần

```
BTree_node* split(vector<BTree_node*> &path){
    auto i = path.end() - 1;
    BTree_node*n;
    int move_up;
    while(i != path.begin() - 1){
        auto p = i - 1;
        if (i == path.begin()){
            auto x = split(*i, NULL);
            if (x == NULL) return path.front();
            else return x;
        } else {
            auto x = split(*i, *p);
            if (x == NULL) return path.front();
            else {
                i = p; // Move up the path
            }
        }
    }
}
```

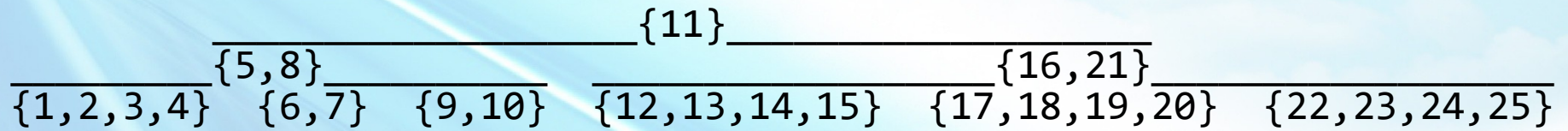


Operation - insertion

- Thao tác chèn luôn tiến hành tại lá
 - Tại sao?
 - Lá nào sẽ được chèn?
- Sau khi chèn
 - Split node lá nếu cần
 - Lan truyền lên mức trên nếu cần
- Đảm bảo 5 yêu cầu của B-Tree
- Tận dụng các hàm đã viết

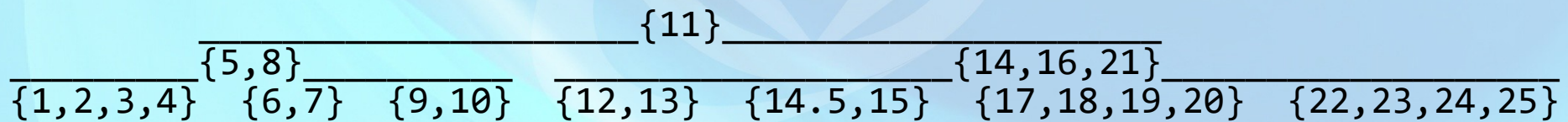


Operation - Insertion



- B-Tree bậc 5

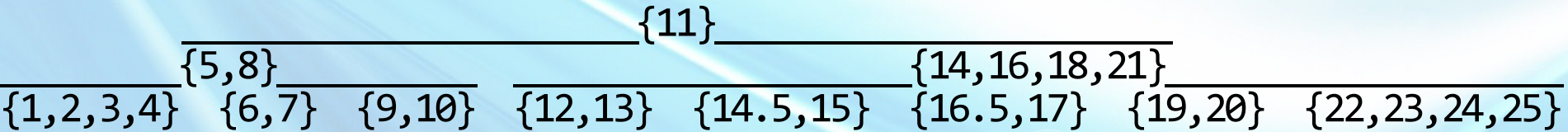
- Chèn thêm khóa 14.5



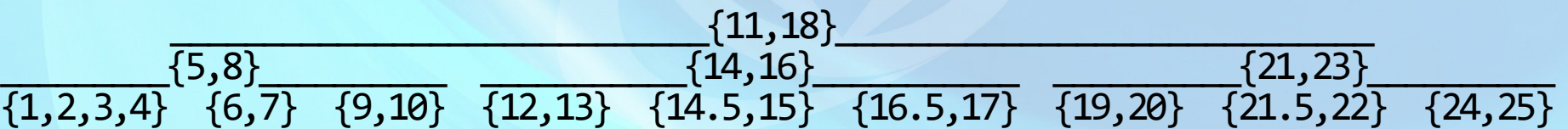


Operation - Insertion

- Chèn thêm khóa 16.5



- Chèn thêm khóa 21.5





Operations - proactive splitting

- Proactive splitting - preemptive splitting
 - Khi tìm node để thêm khóa mới, nếu gặp một node có vừa đủ $m-1$ khóa thì split luôn.
- Triệt tiêu lan truyền ngược
- Không tận dụng được hàm search
- Ưu nhược điểm khác ??



Operation - Catenation

- Node P có 02 người con N' và N''
 - lần lượt ở vị trí i và i + 1
- N' có n' khóa
- N'' có n'' khóa
- $n' + n'' < 2 * k$

P	...	k_{i-1}	k_i	k_{i+1}	...	
	...	p_{i-1}	p_i	p_{i+1}	p_{i+2}	...

N' P.p _i	k'_0	...	k'_{n-1}	
	p'_0	p'_1	...	p'_n

N'' P.p _{i+1}	k''_0	...	$k''_{n''-1}$	
	p''_0	p''_1	...	$p''_{n''}$



Operations - Catenation

- Ta có thể gộp N' và N'' thành một node
- P mất đi một khóa và một cây con
 - Nếu P là node gốc??
- Các chỉ số được đánh lại sau khi gộp

				P	...	k_{i-1}	k_{i+1}	...	
					...	p_{i-1}	p_i	p_{i+2}	...
N' (p_i)	k'_0	...	$k'_{n'}$	k_i	k''_0	...	$k''_{n''}$		
	p'_0	p'_1	...	$p'_{n'+1}$	p''_0	p''_1	...	$p''_{n''+1}$	



Operations - Catenation

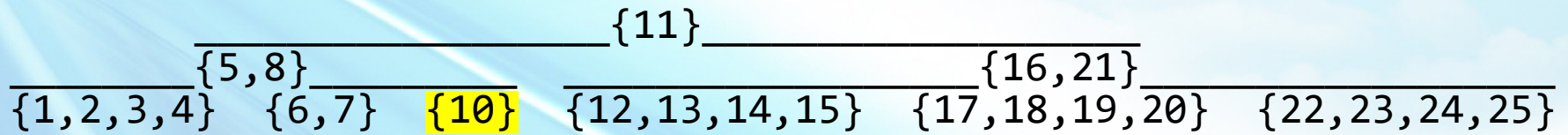
- Hàm *find_cat_partner* tìm node anh em có thể gộp
- Hàm *catenation* gộp node con ở vị trí *icat* với node con *icat+1*

```
int find_cat_partner(BTree_node* p, int ip){
    int s = p->children[ip]->keys.size();
    if (ip > 0 && p->children[ip - 1]->keys.size() + s < this->_m - 1)
        return ip - 1;
    if (ip < p->children.size()-1 && p->children[ip+1]->keys.size() + s < this->_m - 1)
        return ip;
    return -1;
}

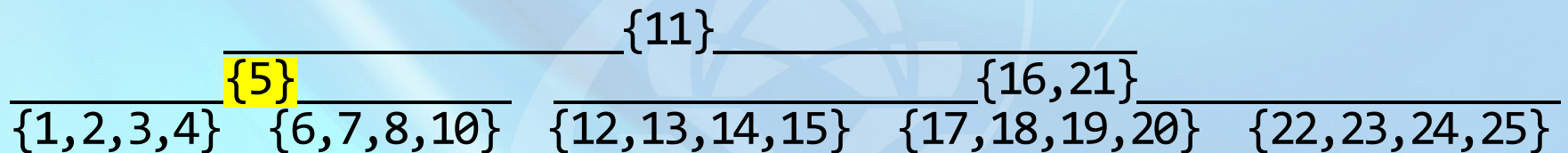
my_data catenation(BTree_node* p, int icat){
    auto moved_key = p->keys[icat];
    p->children[icat]->keys.emplace_back(p->keys[icat]);
    move(p->children[icat+1]->keys.begin(),
        p->children[icat+1]->keys.end(),
        p->children[icat]->keys);
    move(p->children[icat+1]->children.begin(),
        p->children[icat+1]->children.end(),
        p->children[icat]->children);
    delete(p->children[icat+1]);
    p->keys.erase(p->keys.begin()+icat);
    p->children.erase(p->children.begin()+icat+1);
    return moved_key;
}
```




Operations - Catenation



- B-Tree bậc 5 có node {10} quá ít khóa
- Gộp node {6,7} và {10} thì node cha bị mất khóa 8



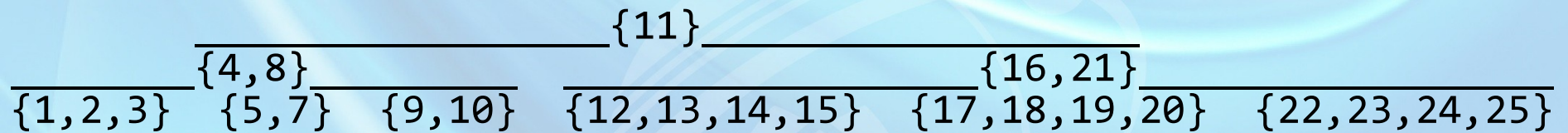
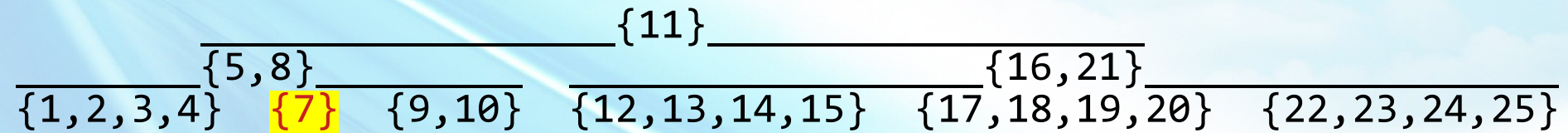


Operations - Underflow

- P có 02 người con N' và N''
 - Một trong 02 node có ít hơn k khóa
 - Tổng số khóa trong 2 node lại $> 2*k$
 - Node to sẽ nhường vài khóa và con cho node nhỏ => underflow
- 1) Catenate N' và N'' vào thành một node to
 - 2) Split node to này thành 02 node đều nhau hơn



Operations - Underflow



- Chọn
 - underflow{1,2,3,4},{7} hoặc
 - catenate{7}+{9, 10}
- Tại sao underflow thì khóa 4 lại nằm ở node trên?



Operation - deletion

- Xóa bắt đầu từ lá
- Nếu khóa không nằm ở lá:
 - kiểm một **khóa thế mạng** ở lá
 - Swap
 - Xóa khóa ở lá
- Kiểm tra nếu cần thực hiện underflow và Catenation.



Operation - deletion

- Input: Kết quả tìm kiếm node cần xóa
- Tìm phần tử thể mạng và hoán đổi.

```
my_data find_replace_and_swap(int &idx,
vector<BTree_node*>&path){
    auto x = path.back();
    auto i = path.back()→children[idx];
    while(!i→is_leaf()){
        path.push_back(i);
        i = i→children.back();
    }
    path.push_back(i);
    auto back = i→keys.back();
    swap(x→keys[idx], i→keys.back());
    idx = i→keys.size() - 1;
    return back;
}
```



Operation - deletion

- Kiểm tra và thực hiện underflow, catenation nếu cần

```
BTree_node* check_for_underflow_and_cat(my_data remove_key, vector<BTree_node*> path){
    auto i = path.end() - 1;
    auto p = i - 1;
    while(i != path.begin()){
        int ip = lower_bound((*p)→keys.begin(), (*p)→keys.end(), remove_key)
        - (*p)→keys.begin();
        int iu = underflow_check(*p, ip);
        if (iu != -1){
            //If we can underflow, we do underflow first
            underflow(*p, iu); return *(path.begin());
        }
        //we check for catenation
        int icat = find_cat_partner(*p, ip);
        if (icat != -1){
            //The catenation propagate
            auto cat = catenation(*p, icat);
            i = p; p--;
            remove_key = cat ;
        } else {
            return *(path.begin());
        }
    }
    if((*i)→keys.size() == 0){
        // The last key in root was remove
        if ((*i)→children.size() != 0){
            auto p = (*i)→children.front();
            delete *i; return p;
        }
        delete *i;
        return NULL;
    } else {
        return (*i);
    }
}
```




Ứng dụng

- B-Tree có nhiều biến thể và cải tiến
 - B⁺ -Tree
 - B^{*} -Tree
- Quản lý dữ liệu trên đĩa cứng, dữ liệu lớn



Ứng dụng

- File system - Hệ thống quản lý file trên đĩa cứng
 - Danh sách các block còn trống
 - File x đang nằm ở block số mấy?
- Windows:
 - NTFS, FAT32,...
- MacOS
 - HFS+
- Linux
 - Btrfs, Ext, xFS
- Other:
 - HFS, Reiser4, HAMMER, ...



Ứng dụng

- Database
 - Indexing - quản lý tập các khóa và dữ liệu
 - Rank, between, v.v...
- MySQL
- MariaDB
- MS-SQL
- MongoDB



Bài tập (1)

1. Theo định nghĩa thì không thể có B-Tree bậc 1 và 2. Tại sao Bayer và McCreight không định nghĩa loại B-Tree này??
2. Viết hàm thêm node trong B-Tree, không dùng chiến lược proactive splitting (tham khảo hàm search và split đã cho)
3. Viết hàm xóa node trong B-Tree (tham khảo hàm underflow, catenation đã cho)
4. (*) Tìm công thức tính chiều cao tối đa của B-Tree bậc m có N khóa
5. Tìm công thức tính chiều cao tối thiểu của B-Tree bậc m có N khóa
6. Bayer và McCreight chỉ đề xuất cây B-Tree bậc lẻ. Tuy nhiên: Hãy sửa lại các yêu cầu đối với B-Tree để định nghĩa B-Tree bậc chẵn



Bài tập (2)

1. Vẽ cây B-Tree bậc 5 khi lần lượt thêm các số từ 1-25.
 1. Không dùng proactive splitting?
 2. Dùng proactive splitting?
2. (*) Lần lượt thêm các khóa có giá trị $1, 2, \dots, n$ vào B-Tree. Tìm công thức tính số node của B-Tree trên theo n
3. Cho một danh sách các khóa. Vẽ B-Tree ít node nhất có thể chứa tất cả các khóa này
4. Cho một danh sách các khóa. Vẽ B-Tree nhiều node nhất có thể chứa tất cả các khóa này
5. Cho sẵn một B-Tree, tìm bậc và thứ tự các khóa đã được thêm vào để có B-Tree đó



Bài tập (3)

1. Viết hàm đếm số node trong B-Tree
2. Viết hàm tạo ra một B-Tree bản sao, có cấu trúc y chang một B-Tree cho trước
3. Viết hàm xuất các khóa trong B-Tree theo thứ tự giảm dần
4. Viết hàm tìm khóa có giá trị lớn nhất mà nhỏ hơn x
5. Viết hàm tìm khóa có giá trị gần với x nhất
6. (*) Viết hàm tìm số lượng khóa nhỏ hơn x (thứ hạng của x)
 1. Muốn thực hiện thao tác tìm thứ hạng với độ phức tạp $O(\log(n))$ cần thêm thông tin vào trong BTree_node